

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Phần 3

KHAI TRIỂN TAYLOR

Cho $f(x, y)$ khả vi đến cấp $(n+1)$ trong lân cận (x_0, y_0) , khi đó trong lân cận này ta có:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + R_n$$

Cụ thể:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(x_0, y_0) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \quad \text{Phần dư Lagrange}$$

Có thể thay R_n bởi $o(\rho^n)$ (Peano) (là VCB bậc cao hơn ρ^n khi $\rho \rightarrow 0$),

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad o(\rho^n)$$

Khai triển trong lân cận $(0, 0)$ gọi là kt Maclaurin

1. Thông thường chỉ sử dụng pd Peano.
2. Sử dụng khai triển Maclaurin cơ bản của hàm 1 biến trong kt Taylor hàm nhiều biến.
3. Viết kt trong lân cận của (x_0, y_0) là viết kt theo lũy thừa của $\Delta x = (x - x_0)$, $\Delta y = (y - y_0)$

Ví dụ

1/ Khai triển Taylor đến cấp 2 trong lân cận $(1, 1)$,
cho $z = f(x, y) = x^y$

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x \quad \Rightarrow \quad df(1,1) = \Delta x + 0 \cdot \Delta y$$

$$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$f''_{yy} = x^y \ln^2 x$$

$$\Rightarrow d^2 f(1,1) = 0 \cdot \Delta x^2 + 2 \cdot \Delta x \Delta y + 0 \cdot \Delta y^2$$

$$df(1,1) = \Delta_x + 0.\Delta_y$$

$$d^2 f(1,1) = 0.\Delta_x^2 + 2.\Delta_x\Delta_y + 0.\Delta_y^2$$

$$z = f(x, y) = f(1,1) + \frac{df(1,1)}{1!} + \frac{d^2 f(1,1)}{2!} + o(\rho^2)$$

$$z = 1 + \frac{\Delta_x}{1!} + \frac{2\Delta_x\Delta_y}{2!} + o(\rho^2)$$

$$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2)$$

Ví dụ

2/ Viết kt Maclaurin đến cấp 2 cho

$$z = f(x, y) = \frac{1}{1 + x + y - xy}$$

Đặt $u = x + y - xy$, kt z theo u đến u^2

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 + u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ &= 1 - (x + y - xy) + (x + y - xy)^2 + o(u^2) \\ &= 1 - x - y + x^2 + 3xy + y^2 + o(\rho^2) \end{aligned}$$

Ví dụ

3/ Viết kt Taylor đến cấp 3 với $(x_0, y_0) = (0,1)$ cho

$$z = f(x, y) = e^{x^2 + xy}$$

Đặt $X = x, Y = y - 1,$

$$z = e^{X + X^2 + XY}$$

$$= 1 + X + X^2 + XY$$

$$+ \frac{(X + X^2 + XY)^2}{2} + \frac{(X + X^2 + XY)^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$z = 1 + X + X^2 + XY + \frac{(X + X^2 + XY)^2}{2} + \frac{(X + X^2 + XY)^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$= 1 + X + \frac{3}{2}X^2 + XY + \frac{7}{6}X^3 + X^2Y + o(\rho^3)$$

$$z = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x(y - 1) + \frac{7}{6}x^3 + x^2(y - 1) + o(\rho^3)$$

Ví dụ

4/ Viết kt Taylor đến cấp 3 với $(x_0, y_0) = (1, 2)$
cho $z = f(x, y) = x \sin(y - 2)$. Suy ra $f''_{xy}(1, 2)$

Đặt $X = x - 1$, $Y = y - 2$, z trở thành

$$z = (X + 1) \sin Y = (X + 1) \left(Y - \frac{Y^3}{6} + o(Y^3) \right)$$

$$= Y + XY - \frac{Y^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$= (y - 2) + (x - 1)(y - 2) - \frac{(y - 2)^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$f(x, y) = (y - 2) + (x - 1)(y - 2) - \frac{(y - 2)^3}{6} + o(\rho^3)$$

$$\frac{d^2 f(1, 2)}{2!} = (x - 1)(y - 2) = \Delta_x \Delta_y = dx dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''_{xx}(1, 2)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(1, 2)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(1, 2)\Delta y^2}{2} = \Delta_x \Delta_y$$

$$\Rightarrow f''_{xy}(1, 2) = 1$$

Đạo hàm theo hướng

Định nghĩa:

Cho hàm f xác định trong lân cận M_0 và một hướng cho bởi vector $\vec{a}$.

Đạo hàm của f theo hướng $\vec{a}$ tại M_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + t \cdot \vec{a}) - f(M_0)}{t}$$

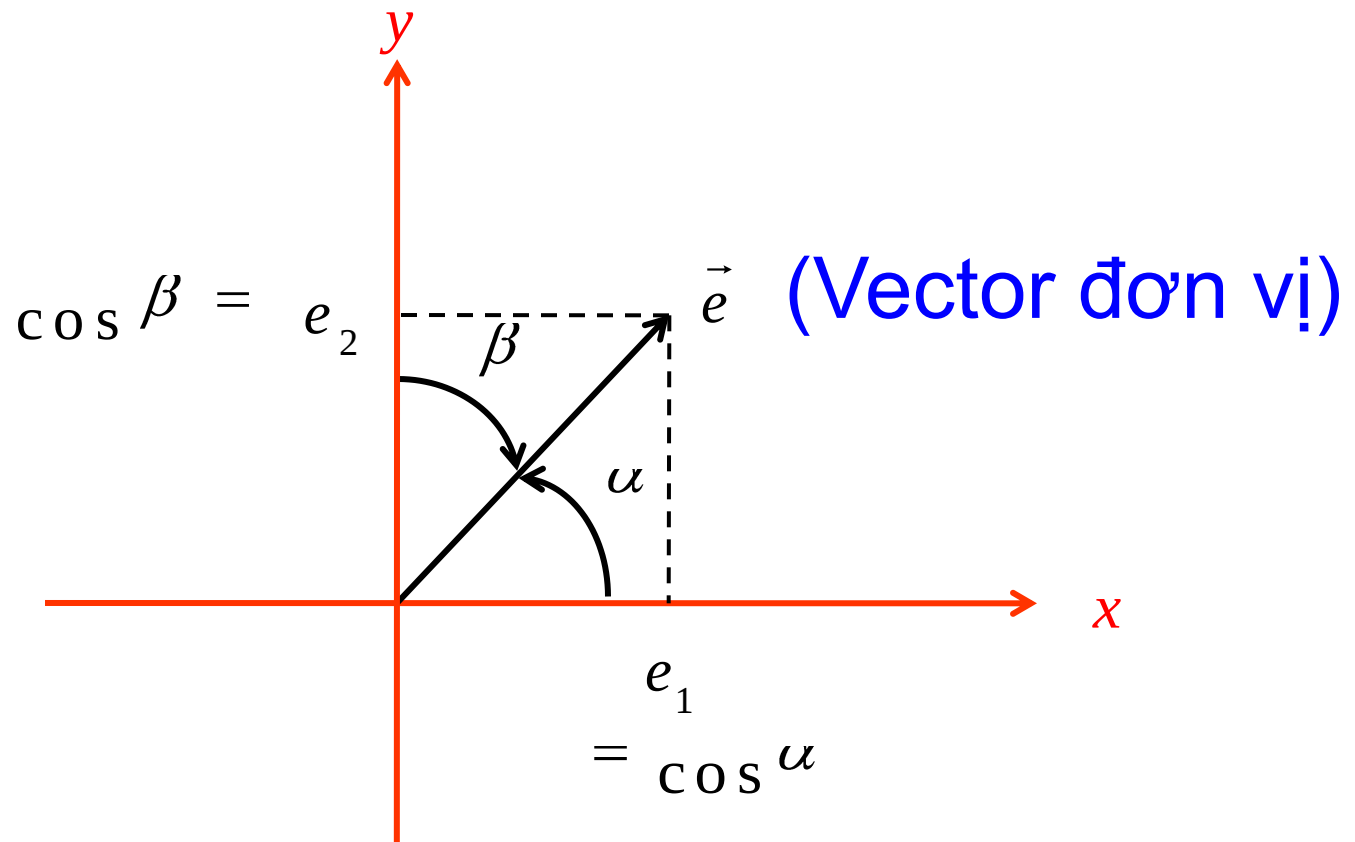
$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(M_0)$ chỉ tốc độ thay đổi của f theo hướng $\vec{a}$

Định lý (cách tính đạo hàm theo hướng)

Nếu hàm f khả vi tại M_0 , $\vec{e} = e_1, e_2$ là vector đơn vị, đạo hàm theo hướng $\vec{e}$ tại M_0 tồn tại, khi đó:

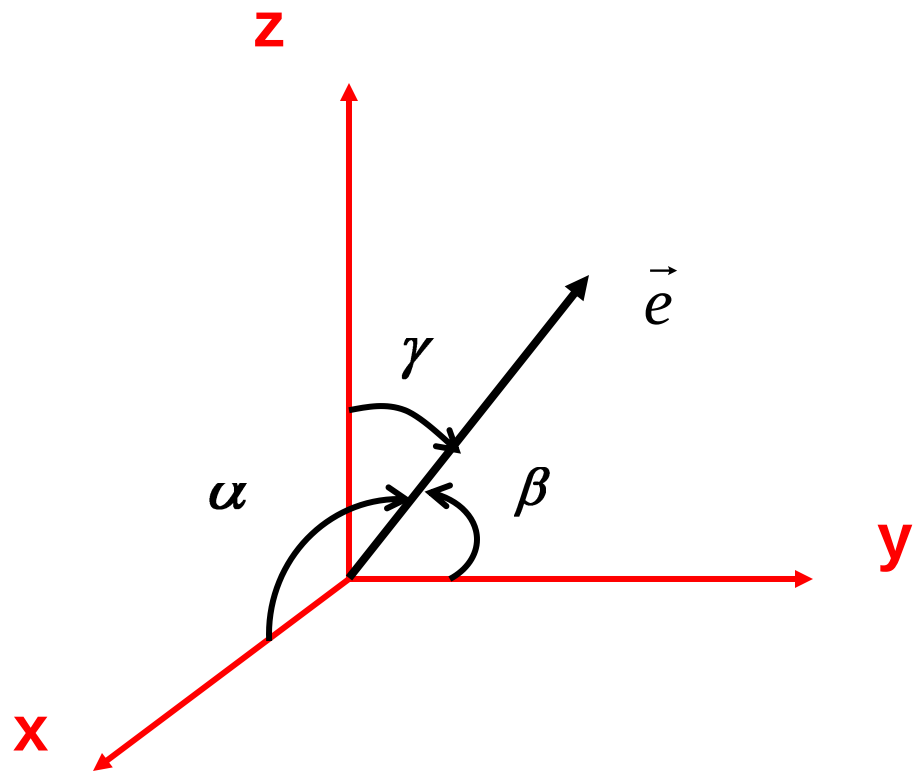
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) e_2$$

Hàm 3 biến cũng được tính tương tự.



$$\vec{e} = \cos \alpha, \cos \beta$$

Các cosin chỉ phương của $\vec{e}$



$$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Công thức tổng quát

$\vec{a}$ là vector tùy ý:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} M_0 = \frac{\partial f}{\partial x} M_0 \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f}{\partial y} M_0 \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

(hàm 2 biến)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} M_0 = \frac{\partial f}{\partial x} M_0 \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f}{\partial y} M_0 \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} + \frac{\partial f}{\partial z} M_0 \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

(hàm 3 biến)

Ví dụ

1. Tìm đạo hàm theo hướng dương của trục Ox tại điểm $(-2, 1)$ của hàm số

$$f(x, y) = xy^2 - 2x^2y$$

Vector đơn vị theo hướng dương của Ox là:

$$\vec{e} = 1, 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(-2, 1) &= f'_x(-2, 1) \cdot 1 + f'_y(-2, 1) \cdot 0 \\ &= 9 \cdot 1 - 12 \cdot 0 = 9 \end{aligned}$$

2. Tìm đạo hàm theo hướng $\vec{a} = 1, 1, -1$ tại

$$M = 2, 1, 2 \text{ của } f(x, y, z) = x^2 + 2xz - 3y^2z^3$$

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} 1, 1, -1 = e_1, e_2, e_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(M) = f'_x(M) \cdot e_1 + f'_y(M) \cdot e_2 + f'_z(M) \cdot e_3$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (-9) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

Vector Gradient

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị trên các trục tọa độ, f có các đạo hàm riêng tại

$M_0(x_0, y_0)$. Gradient của f tại M_0 là:

$$\begin{aligned}\nabla f|_{M_0} &= \text{grad } M_0 = f'_x|_{M_0} \vec{i} + f'_y|_{M_0} \vec{j} \\ &= f'_x|_{M_0} \cdot \vec{i} + f'_y|_{M_0} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

Liên hệ

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \vec{e}_2 = \nabla f(M_0) \cdot \vec{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0) = \|\nabla f(M_0)\| \cdot \|\vec{e}\| \cos \varphi = \|\nabla f(M_0)\| \cos \varphi$$

φ là góc giữa $\text{grad} f(M_0)$ & $\vec{e}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(M_0)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi:

$$\cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

Tổng quát

Hướng của vector gradient là hướng mà hàm f tăng nhanh nhất.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} \Big|_{M_0} = \left(\nabla f \Big|_{M_0}, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \right)$$

Ví dụ

1/ Tìm $\text{grad } f(2, -3, 0), \frac{\partial f(2, -3, 0)}{\partial \vec{a}}$

Với: $f(x, y, z) = x \cdot e^{yz}, \vec{a} = (2, -3, 0)$

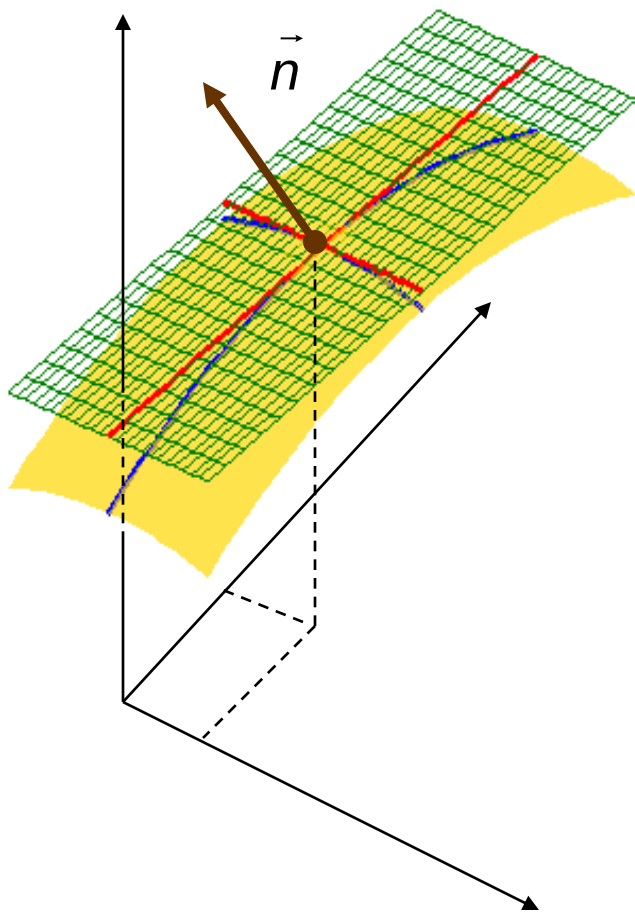
$$\nabla f(x, y, z) = (f'_x, f'_y, f'_z) = (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz})$$

$$\nabla f(2, -3, 0) = (1, 0, -6)$$

$$\frac{\partial f(2, -3, 0)}{\partial \vec{a}} = \nabla f(2, -3, 0) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (1, 0, -6) \cdot \frac{(2, -3, 0)}{\sqrt{13}}$$

PHÁP TUYẾN – TIẾP DIỆN CỦA MẶT CONG.

Cho mặt cong $S: F(x, y, z) = 0$, $M(x_0, y_0, z_0) \in S$



- L là đường cong trong S đi qua M . Tiếp tuyến của L tại M gọi là tiếp tuyến của S tại M .
- Các tiếp tuyến này cùng thuộc 1 mặt phẳng gọi là tiếp diện của S tại M .

PHÁP TUYẾN – TIẾP DIỆN CỦA MẶT CONG

Giả sử $L \subset S$ có pt: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

$$M = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$$

Vector chỉ phương của tiếp tuyến tại M là :

$$\vec{u} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

$M \in S: F(x,y,z) = 0$, ta có:

$$F'_x(M) x'(t_0) + F'_y(M) y'(t_0) + F'_z(M) z'(t_0) = 0$$

$$F'_x(M) x'(t_0) + F'_y(M) y'(t_0) + F'_z(M) z'(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0) \perp F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)$$

$$\Rightarrow \vec{u} \perp \text{grad} F|_M \quad (\text{với mọi đường cong trong } S \text{ và qua } M)$$

$\text{grad} F(M)$ là pháp vector của tiếp diện của S tại M .

- Pháp vector của tiếp diện còn gọi là pháp vector của mặt cong S .

Phương trình pháp tuyến

$$S : F \quad x, y, z = 0, \quad M = x_M, y_M, z_M \in S$$

$$\frac{x - x_M}{F'_x M} = \frac{y - y_M}{F'_y M} = \frac{z - z_M}{F'_z M}$$

$$S : z = f \quad x, y, \quad M = x_M, y_M, z_M \in S$$

$$\frac{x - x_M}{f'_x M} = \frac{y - y_M}{f'_y M} = \frac{z - z_M}{-1}$$

Phương trình tiếp diện

$$S : F(x, y, z) = 0, M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$F'_x(M)(x - x_M) + F'_y(M)(y - y_M) + F'_z(M)(z - z_M) = 0$$

$$S : z = f(x, y), M = (x_M, y_M, z_M) \in S$$

$$z - z_M = f'_x(M)(x - x_M) + f'_y(M)(y - y_M)$$

Ví dụ

1/ Tìm phương trình tiếp diện của mặt cầu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$a. M = 0, 0, 2$$

$$b. M = 1, \sqrt{3}, 0$$

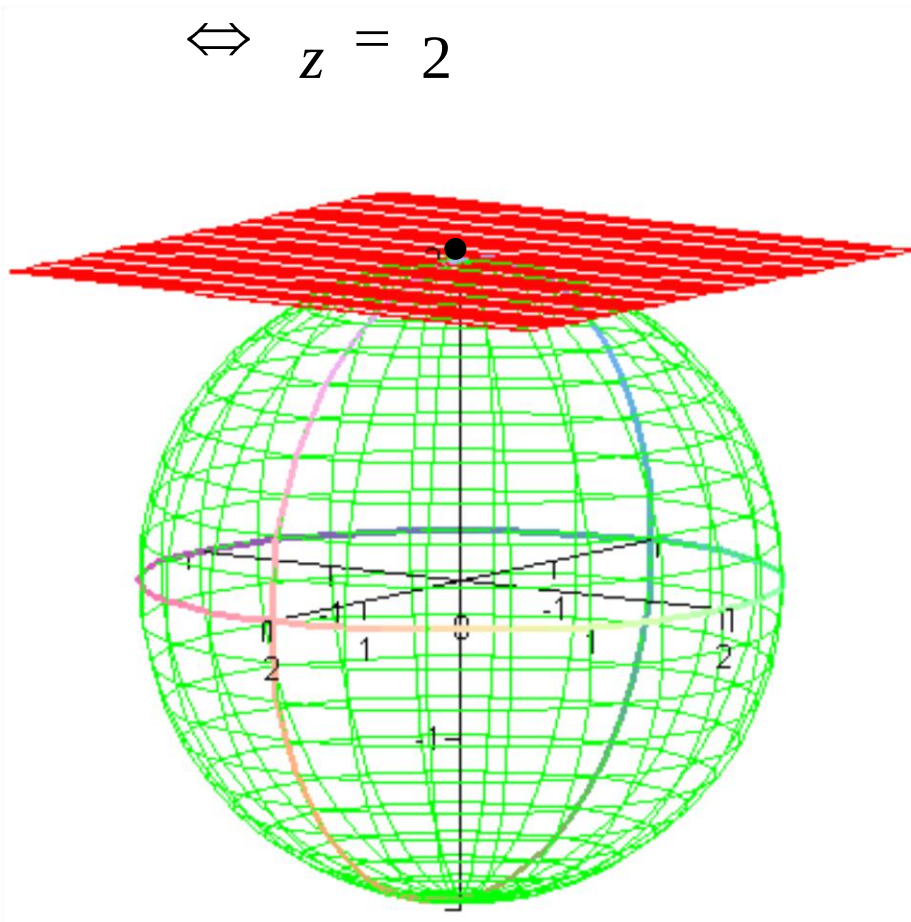
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$\text{grad} F(x, y, z) = 2x, 2y, 2z$$

$$a. \operatorname{grad} F(0,0,2) = (0,0,4)$$

$$T : x - 0.0 + y - 0.0 + z - 2.4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2$$



$$a. \operatorname{grad} F(1, \sqrt{3}, 0) = (2, 2\sqrt{3}, 0)$$

$$T : x - 1 + y - \sqrt{3} + z - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y\sqrt{3} - 4 = 0$$

