

ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHẦN BỘỊ BA

ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHẦN BỘI BA

$$\begin{aligned} f(x,y,z) \text{ xác định trong } \Omega, \text{ đặt} \\ (x,y,z) \in \Omega \Leftrightarrow (u,v,w) \in \Omega' \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array} \right.$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) |J| du dv dw$$

Áp dụng vào việc xét tính đối xứng của Ω

Nếu Ω gồm 2 phần Ω_1 và Ω_2 đối xứng nhau qua mp $z = 0$

1. f chẵn theo z :

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$
$$= 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz$$

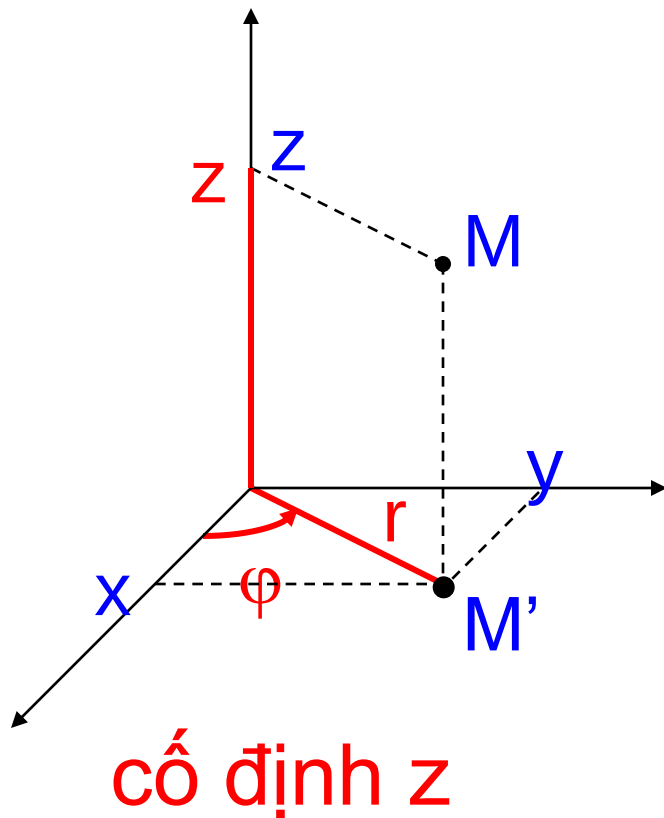
2. f lẻ theo z :

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$$

Lưu ý:

- Mp $z = 0$ là mp Oxy
- Kết quả áp dụng tương tự nếu Ω đối xứng qua mp
 - $y = 0$ (tính chẵn lẻ của f xét theo y)
 - $x = 0$ (tính chẵn lẻ của f xét theo x)

TỌA ĐỘ TRỤ



$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

đổi sang tọa độ trụ $\Leftrightarrow$ hình chiếu D đổi sang tọa độ cực.

TỌA ĐỘ TRỤ

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$$

$$J = r$$

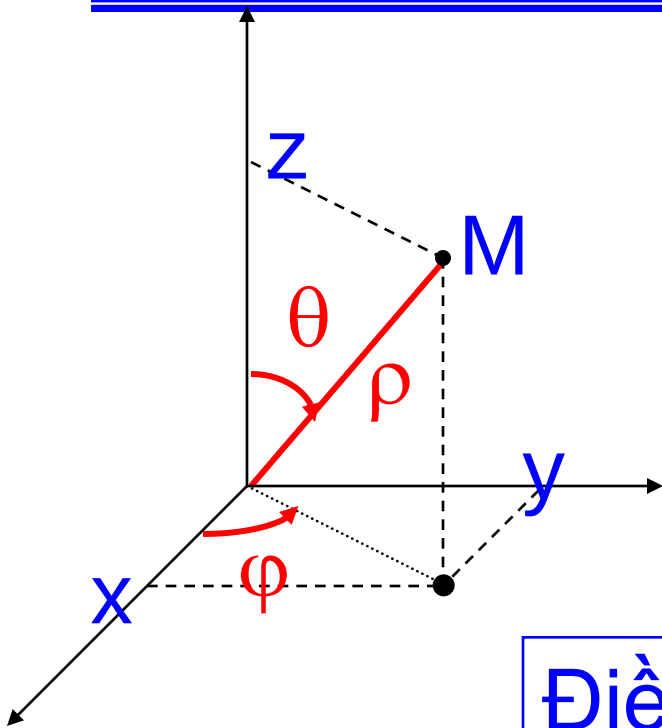
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

Điều kiện giới hạn:

1. $r \geq 0$

2. $\varphi \in [0, 2\pi]$ hay $\varphi \in [-\pi, \pi]$

TỌA ĐỘ CẦU



$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$J = \rho^2 \sin \theta$$

Điều kiện giới hạn:

$$1. \rho \geq 0$$

$$2. \varphi \in [0, 2\pi] \text{ hay } \varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$3. \theta \in [0, \pi]$$

Lưu ý:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \theta$$

Tọa độ cầu thường dùng cho miền giới hạn bởi mặt cầu hoặc mặt nón và mặt cầu.

Một số mặt cong thường gặp trong tđ cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = R$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho \leq 2R \cos \theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{z}{a} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{a}$$

Nón trên.

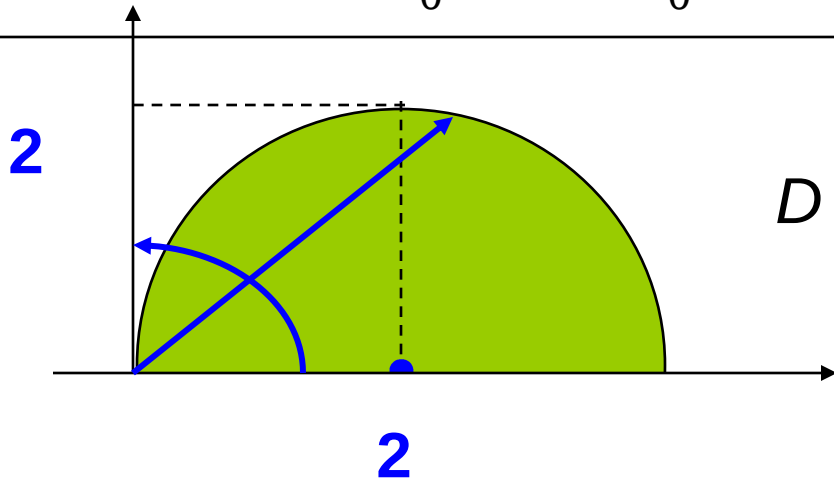
$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{R}{\sin \theta}$$

Trụ tròn.

VÍ DỤ

1/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ trụ

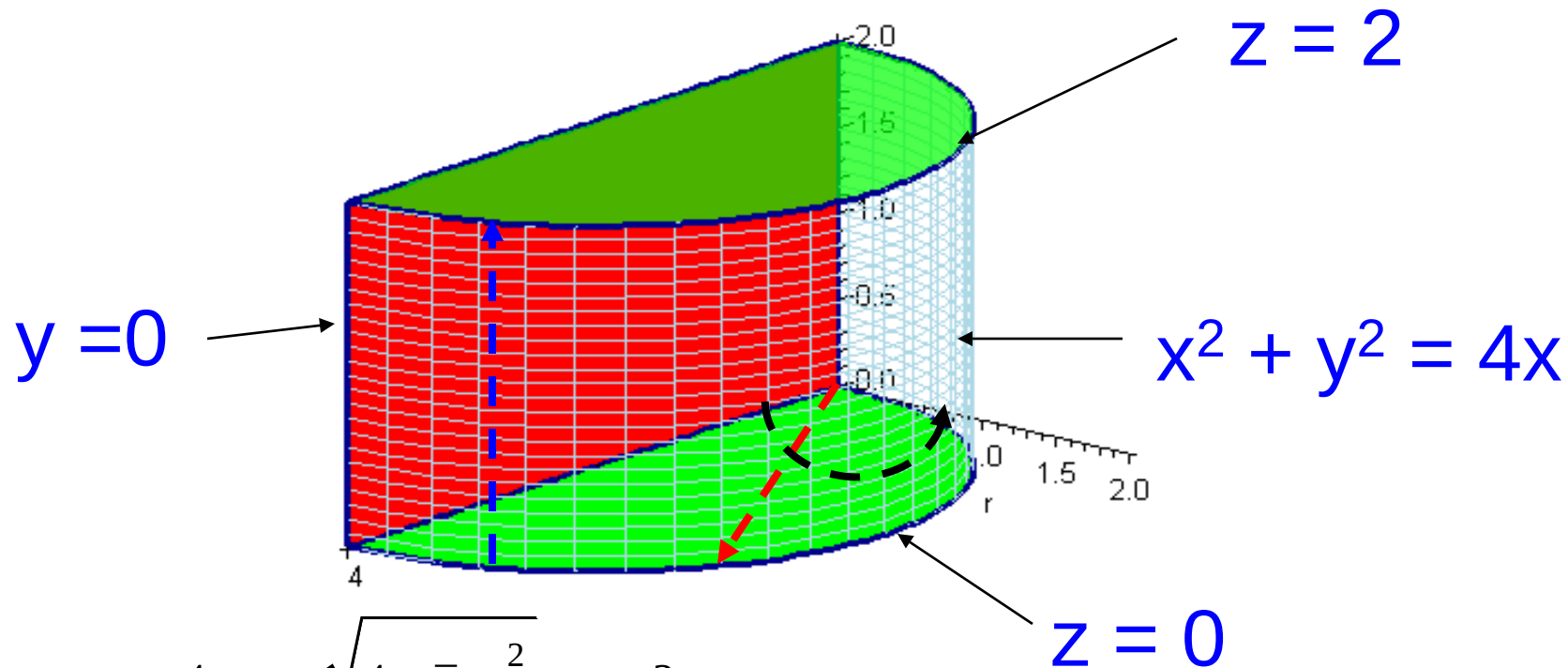
$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 xz dz$$



$$D = {}^{hc}_{Oxy} \Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4x-x^2} \end{cases}$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$$

$$\Omega: 0 \leq r \leq 4 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 2$$



$$I = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 xz dz$$

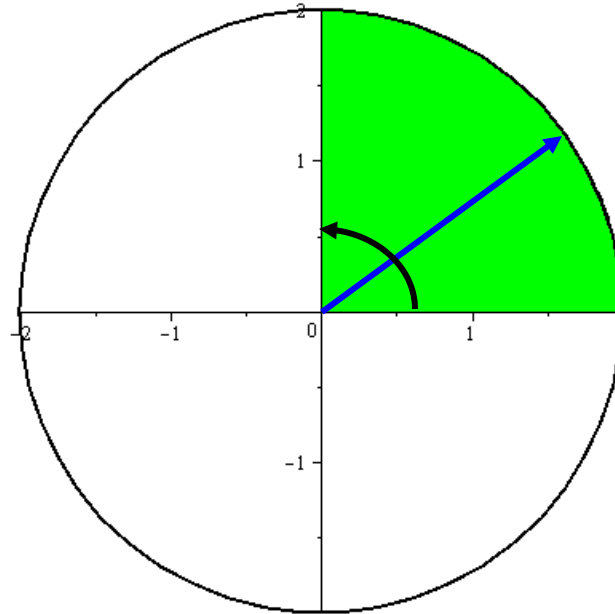
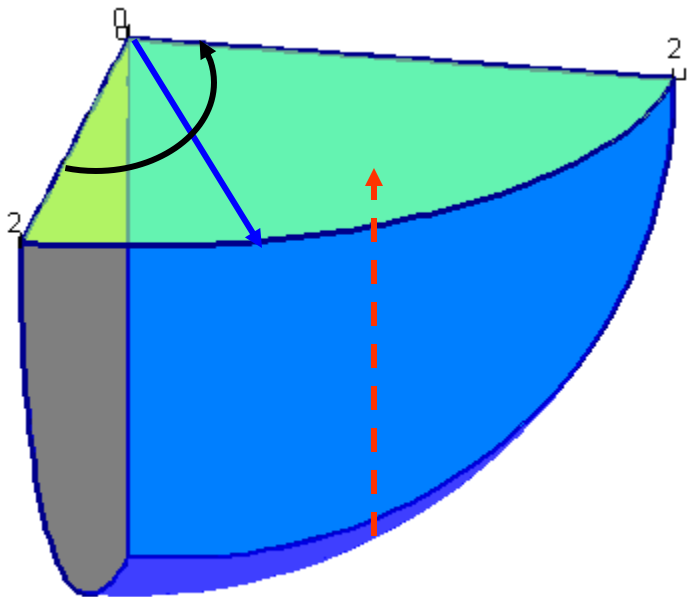
$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} dr \int_0^2 r \cos\varphi \cdot z \cdot r dz$$

2/ Vẽ miền lấy tp và đổi tp sau sang tọa độ trụ, cầu:

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^0 xz dz$$

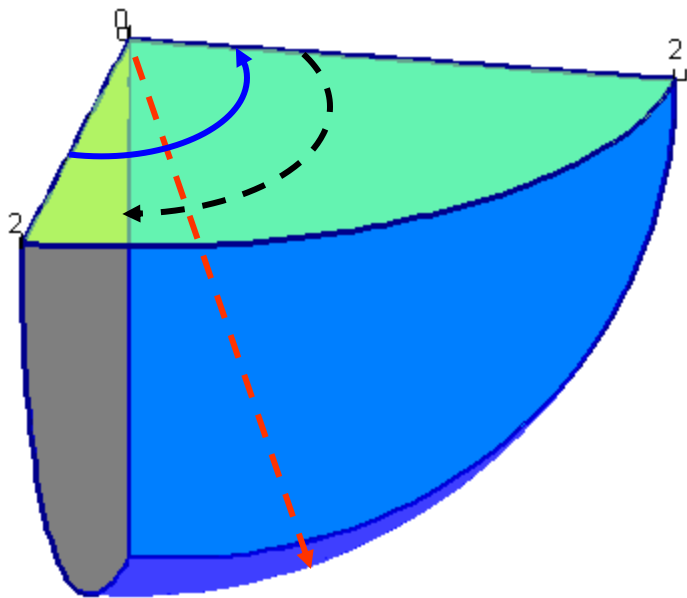
$$I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^0 xz dz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \end{array} \right.$$



$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^0 r \cos \varphi \cdot z \cdot r dz$$

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^0 xz dz$$



$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 \rho \sin \theta \cos \varphi \cdot \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho$$

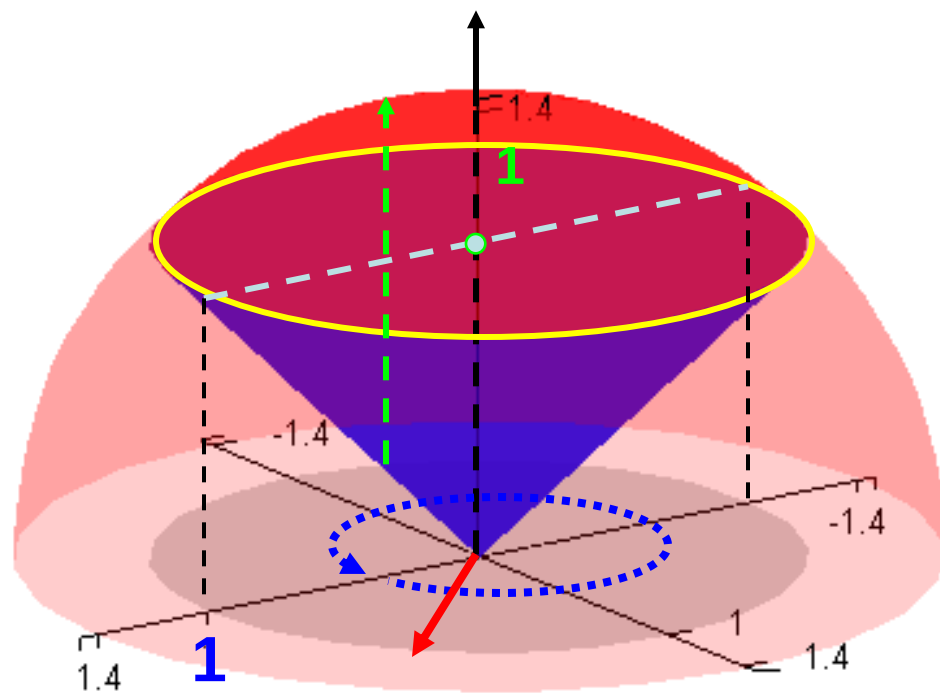
3/ Tính tp sau sử dụng tọa độ trụ và tọa độ cầu:

$$I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$$

Ω Là miền bên trong nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

và bị chặn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

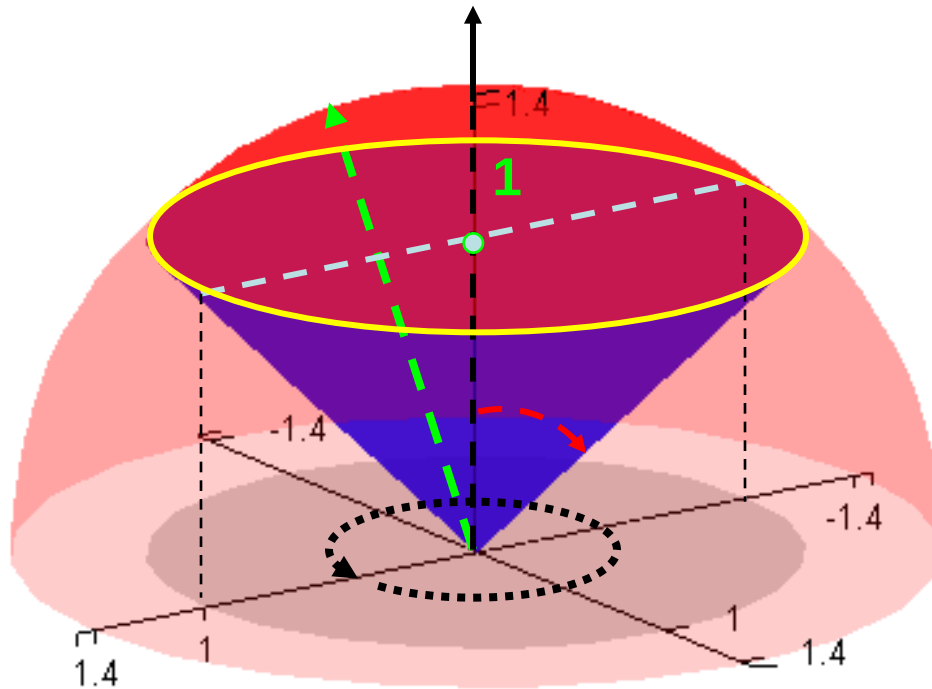
$$z = z$$

$$J = r$$

Giao tuyến:
$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z \cdot r dz = \frac{\pi}{2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$$



$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

$$J = \rho^2 \sin \theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho \cos \theta \rho^2 \sin \theta d\rho$$

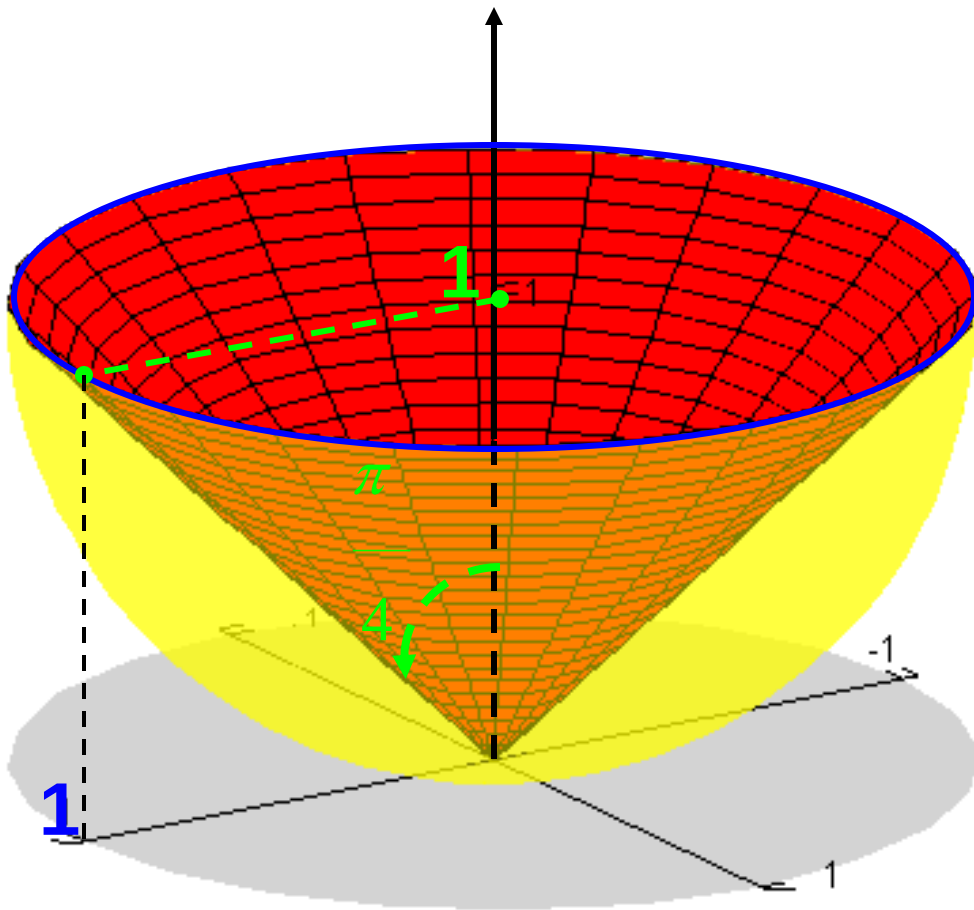
4/ Tính tp sau sử dụng tọa độ cầu:

$$I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$$

$$\Omega: z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$$

$$z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$$

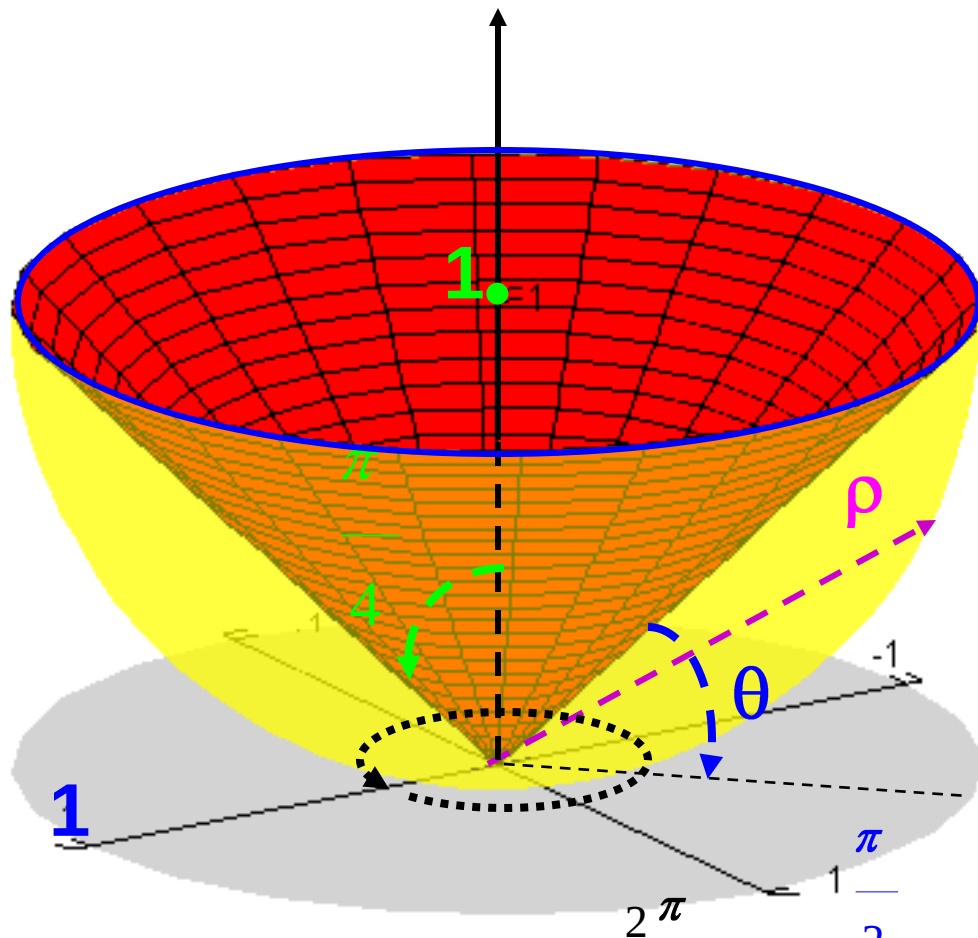
Giao tuyến của mặt cầu và trụ



$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2z^2 = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$$



$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

$$J = \rho^2 \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$\Leftrightarrow \rho = 2 \cos \theta$$

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho \cos\theta \rho^2 \sin\theta d\rho$$

$$I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho \cos\theta \rho^2 \sin\theta d\rho$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Cách 2: $\Omega: z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$

Biểu diễn lại Ω :
$$\begin{cases} \rho \cos \theta \leq \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \sin \theta \\ \rho \leq 2 \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \cos \theta \leq \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \sin \theta \\ \rho \leq 2 \cos \theta \quad (\Rightarrow \cos \theta \geq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta \\ (0 \leq \theta \leq \pi / 2) \\ \tan \theta \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta \\ \pi / 4 \leq \theta \leq \pi / 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

5/ Tính tp sau sử dụng tọa độ cầu:

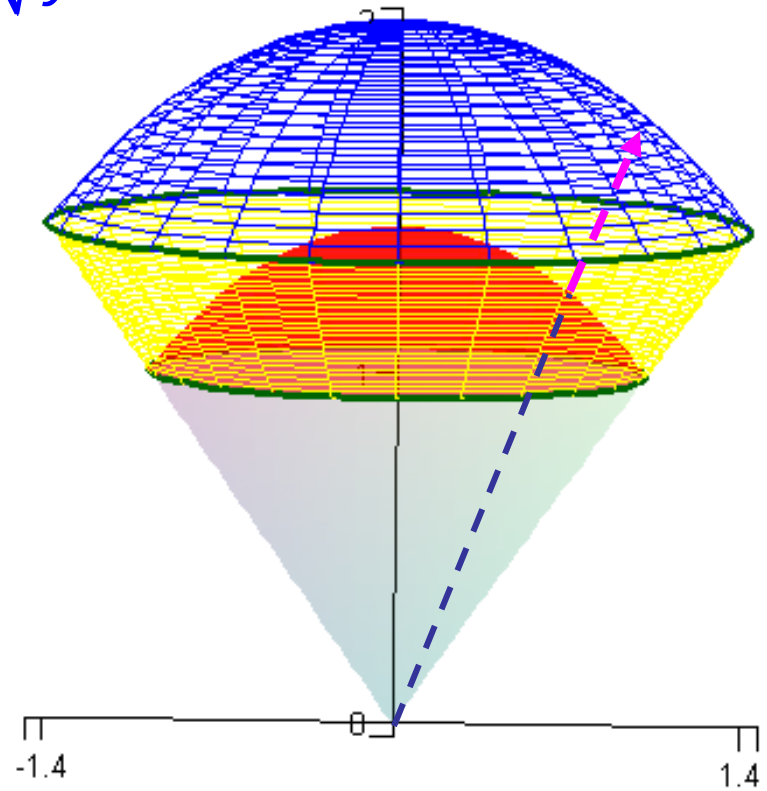
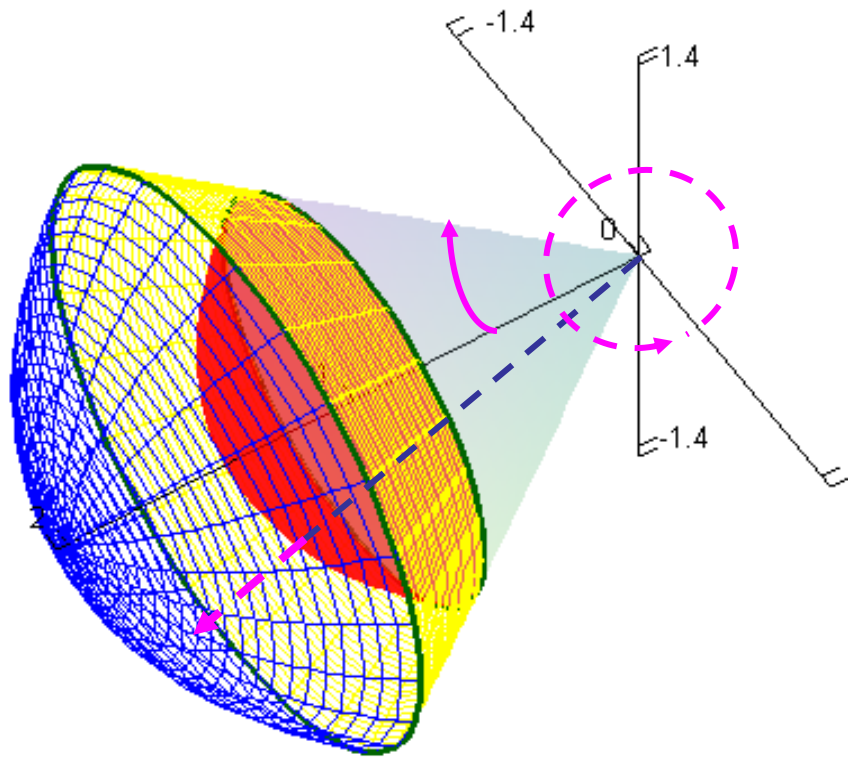
$$I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz$$

$$\Omega: 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \cos \varphi, z = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$J = \rho^2 \sin \theta$$

$$2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq \sqrt{y^2 + z^2}$$



$$I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\sqrt{2}}^2 \rho \cos \theta \rho^2 \sin \theta d\rho$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \pi$$

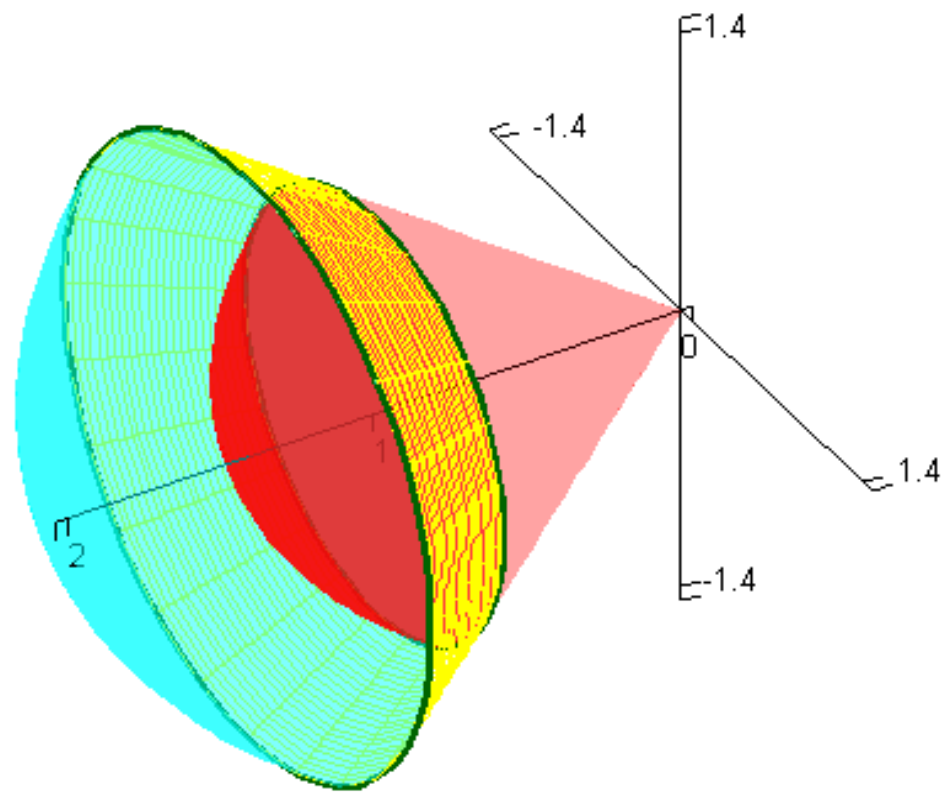
Cách 2: $2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq \sqrt{y^2 + z^2}$

$$\Omega: \begin{cases} \rho \cos \theta \geq \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \\ 2 \leq \rho^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \theta \leq 1 \\ \sqrt{2} \leq \rho \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ \sqrt{2} \leq \rho \leq 2 \end{cases}$$

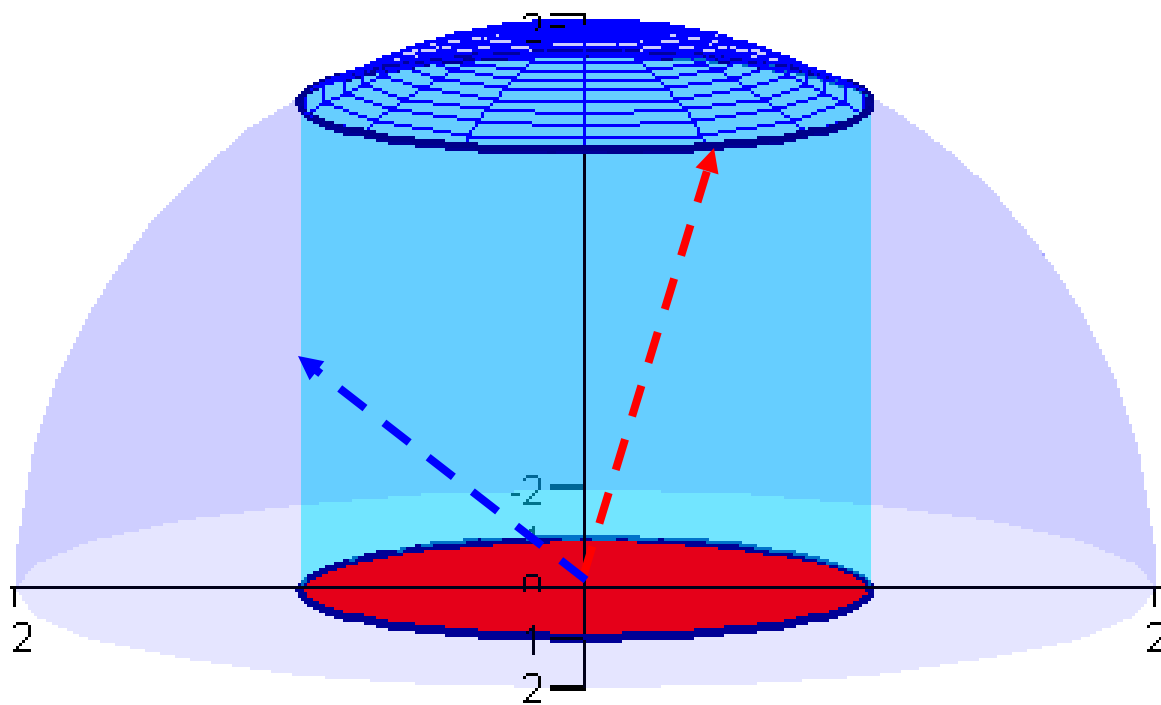
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

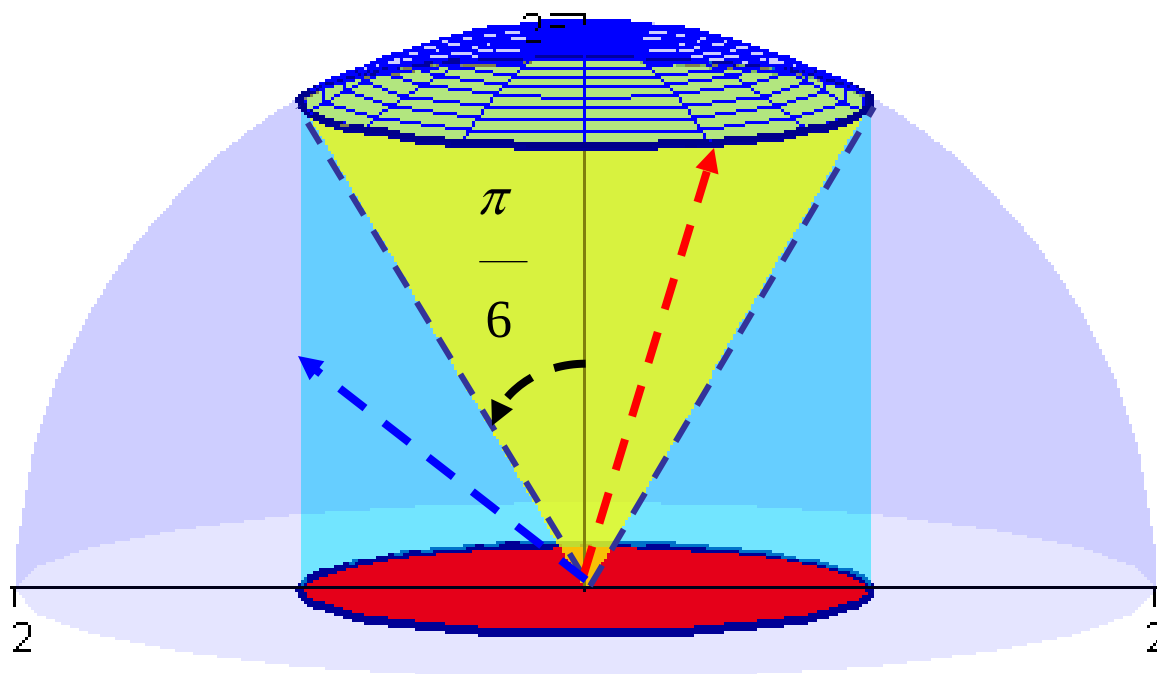


6/ Đổi tp sau sang tọa độ cầu:

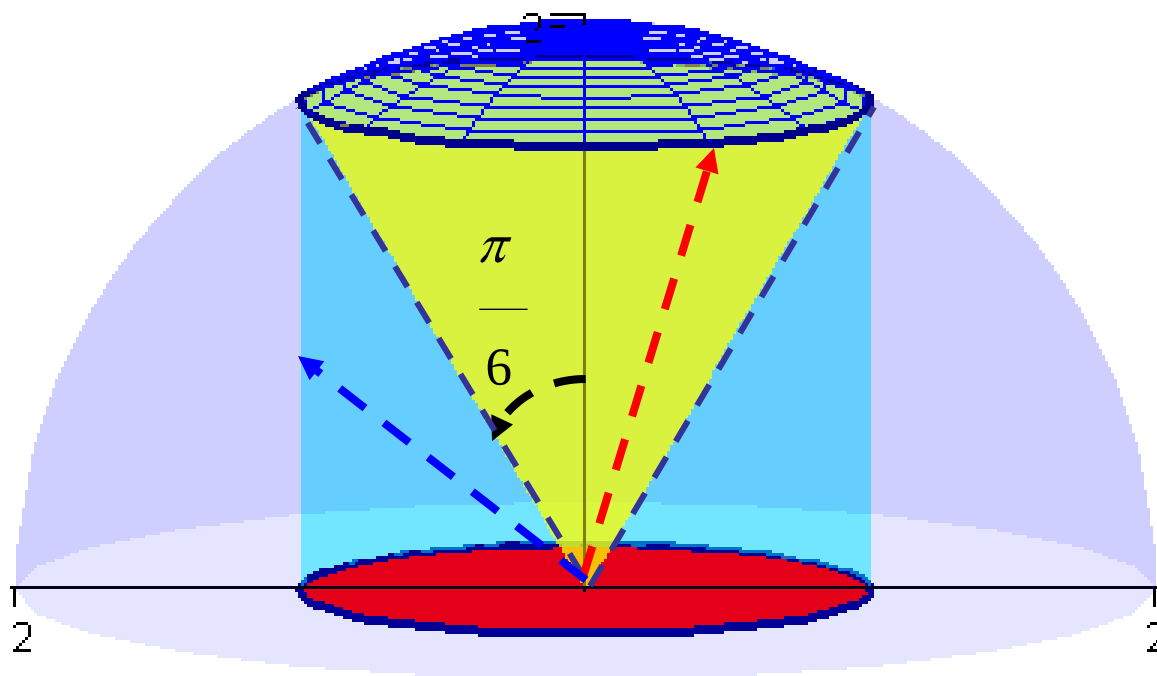
$$I = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$





Giao tuyến:
$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$



$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/6 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta} \\ \pi/6 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \cos \theta \leq \sqrt{4 - \rho^2 \sin^2 \theta} \\ \rho^2 \sin^2 \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2, \\ \cos \theta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi / 2 \\ 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta} \end{cases}$$

$$\text{vì } \frac{1}{\sin \theta} \geq 2 \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

nên Ω được chia làm 2 miền:

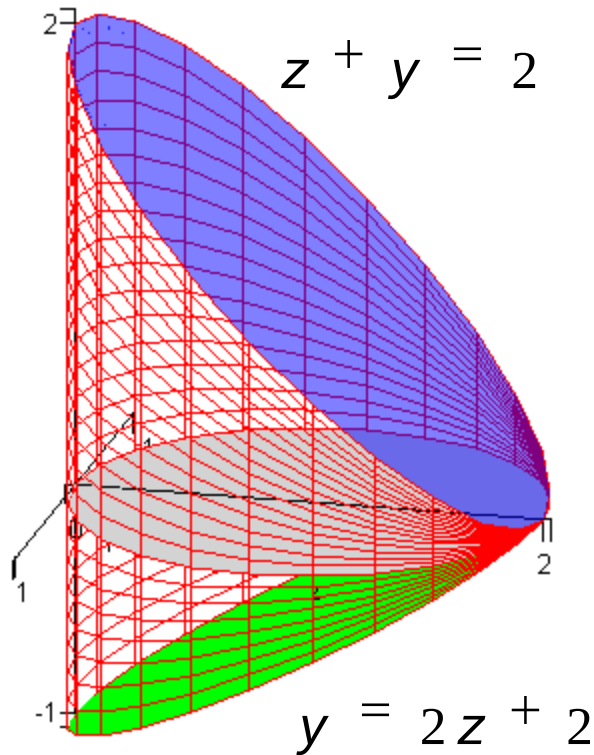
$$\Omega_1 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/6 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \Omega_2 : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta} \\ \pi/6 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$I = \iiint_{\Omega_1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} d\theta \int_0^2 \rho^3 \sin \theta d\rho + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/\sin \theta} \rho^3 \sin \theta d\rho$$

Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt sau:

$$x^2 + y^2 = 2y, z + y = 2, y = 2z + 2$$



Dùng tọa độ trụ

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz \\
 &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 2y} \left(\int_{\frac{y-1}{2}}^{2-y} dz \right) dx dy \\
 &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} dr \int_{r\sin^2\varphi-1}^{2-2\sin^2\varphi} r dz
 \end{aligned}$$

Đổi biến cho hình cầu tổng quát, ellipsoid

$$\Omega : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$$

Đổi biến:

$$x = a + \rho \sin \theta \cos \varphi ,$$

$$y = b + \rho \sin \theta \sin \varphi ,$$

$$z = c + \rho \cos \theta$$

$$J = \rho^2 \sin \theta$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Ω là ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

Đổi biến:

$$x = a \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = b \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = c \rho \cos \theta$$

$$J = abc \rho^2 \sin \theta$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

VÍ DỤ

Tính thể tích vật thể giới hạn bên trong mặt nón và mặt ellipsoid:

$$z \geq \sqrt{\frac{x^2}{3} + y^2}, \frac{x^2}{3} + y^2 + z^2 \leq 1$$

