

1: Tích phân kép – ƯD hình học

2 Ứng dụng hình học của tích phân kép

1. Diện tích hình phẳng: Diện tích miền D trong mặt phẳng Oxy được tính bởi

$$S(D) = \iint_D dx dy$$

2. Thể tích vật thể Ω giới hạn trên bởi mặt $S_1 : z = f_1(x, y)$

giới hạn dưới bởi mặt $S_2 : z = f_2(x, y)$

và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ song song với trục Oz có đường chuẩn là biên miền D được tính bởi:

$$V(\Omega) = \iint_D (f_1(x, y) - f_2(x, y)) dx dy \quad (f_2(x, y) \leq f_1(x, y), \forall (x, y) \in D)$$

1: Tích phân kép – ƯD hình học

C. Diện tích mặt cong : Diện tích phần mặt cong S có phương trình $z = f(x,y)$ và có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền D được tính bởi

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy$$

Như vậy, để tính thể tích vật thể hoặc tính diện tích 1 phần mặt cong thì trước tiên ta phải xác định được *hình chiếu D của vật thể hoặc phần mặt cong cần tính xuống 1 trong 3 mặt tọa độ Oxy, Oyz, Ozx*

Với vật thể cần tính thể tích, sau đó ta phải xác định trong vật thể đó thì *mặt nào giới hạn trên, mặt nào giới hạn dưới vật thể.*

1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 1: Tính diện tích miền phẳng D giới hạn bởi $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$, $3x - 3y - 7 = 0$

Ta tìm giao điểm 2 đường cong bằng cách khử x từ 2 pt

$$\begin{cases} 3x = y^2 + 2y + 1 \\ 3x = 3y + 7 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 3y + 7 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3, y = -2$$

Tức là chiếu miền D xuống trục Oy được đoạn $[-2, 3]$

Khi $-2 \leq y \leq 3$, suy ngược lại phương trình (1)

ta sẽ được $y^2 + 2y + 1 \leq 3y + 7$

Vậy :

$$S(D) = \int_{-2}^3 dy \int_{\frac{1}{3}(y^2 + 2y + 1)}^{\frac{1}{3}(3y + 7)} dx$$

1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 2: Tính diện tích phần mặt phẳng nằm ngoài đường tròn $r = 1$ và trong đường tròn $r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$

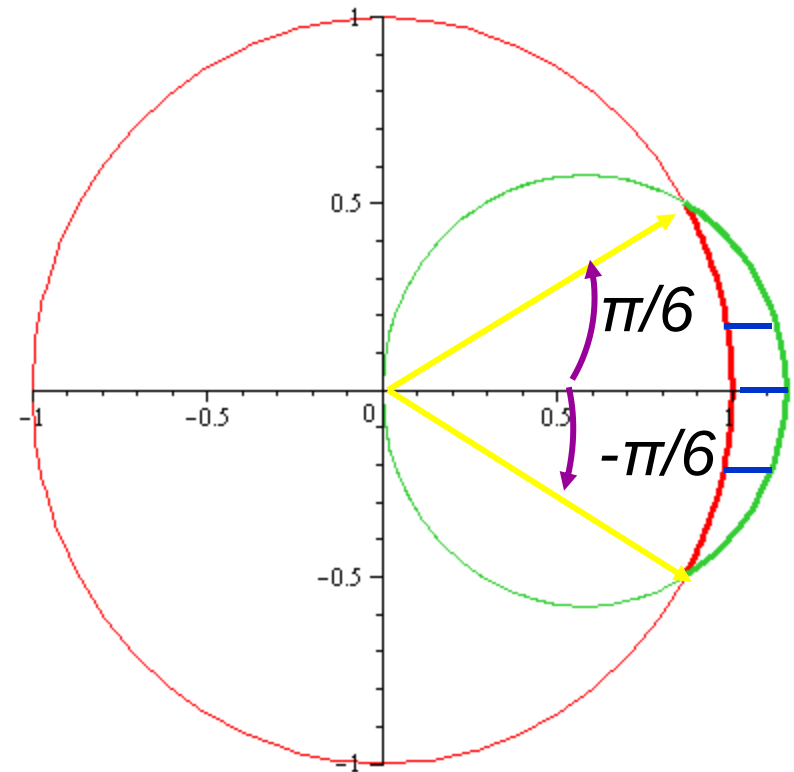
Trước tiên, ta tìm giao điểm

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \leftrightarrow \varphi = \pi/6, \varphi = -\pi/6$$

Vậy :

$$S(D) = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi} r dr d\varphi$$

$$S(D) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{18}$$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 3: Tính thể tích vật thể Ω giới hạn bởi

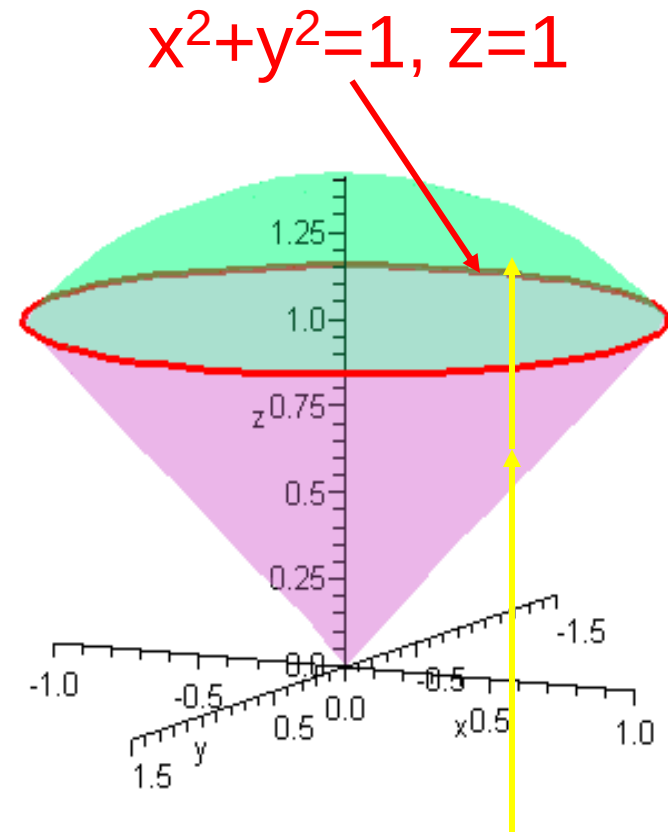
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

Khi vật thể giới hạn chỉ bởi 2 mặt thì ta tìm hình chiếu D của nó xuống mặt phẳng $z=0$ bằng cách khử z từ 2 phương trình 2 mặt

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Hình chiếu của giao tuyến là đường tròn thì hình chiếu của vật thể là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Với bất đẳng thức hình tròn, ta thay ngược lên phương trình (1) để được $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

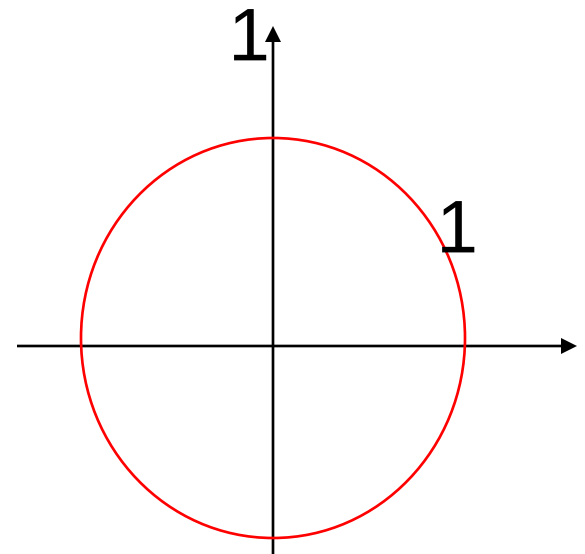
Tức là mặt nón là mặt giới hạn dưới, mặt cầu là mặt giới hạn trên của vật thể. Vậy :

$$V(\Omega) = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r (\sqrt{2 - r^2} - r) dr$$

$$V(\Omega) = -2\pi \left(\frac{r^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2 - r^2)^{3/2} \right)_0^1$$

$$V(\Omega) = \frac{2\pi}{3} (\sqrt[3]{4} - 1)$$

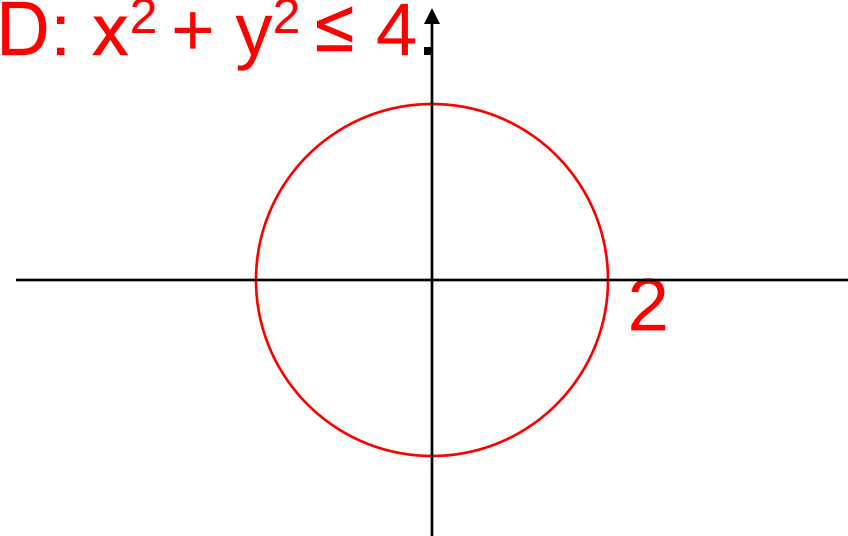


1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 4: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 = 2z$, $z=0$

Trong 3 mặt tạo nên vật thể, có **1 hình trụ kín** (đường chuẩn là đường cong kín) $x^2 + y^2 = 4$ **song song với trục Oz nên hình chiếu của nó xuống mặt $z = 0$** là hình tròn, tức là ta có **miền lấy tích phân $D: x^2 + y^2 \leq 4$** .

Ta còn lại 2 mặt và phải xác định mặt nào nằm trên, mặt nào nằm dưới để có hàm dưới dấu tích phân



Dễ dàng thấy bất đẳng thức kép $0 \leq z \leq y^2/2$, tức là mặt $z = 0$ ở phía dưới và $2z = y^2$ ở phía trên

1: Tích phân kép – ƯD hình học

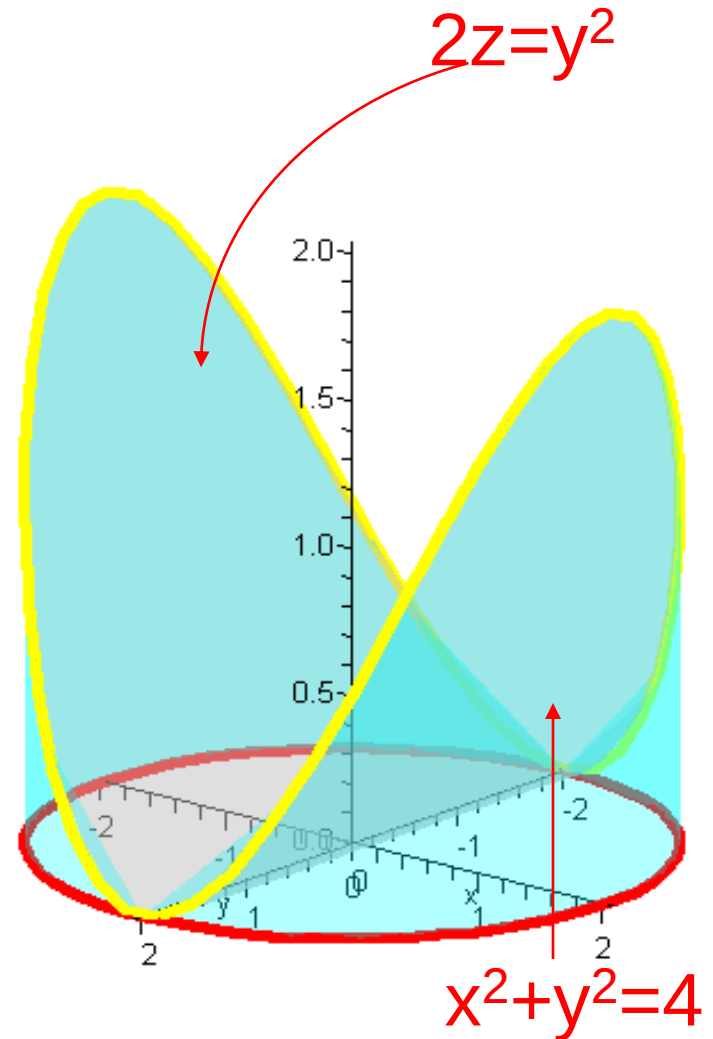
Suy ra hàm dưới dấu tích phân là :

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2} - 0 = \frac{y^2}{2}$$

Vậy thể tích cần tính là :

$$V = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \frac{y^2}{2} dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr$$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

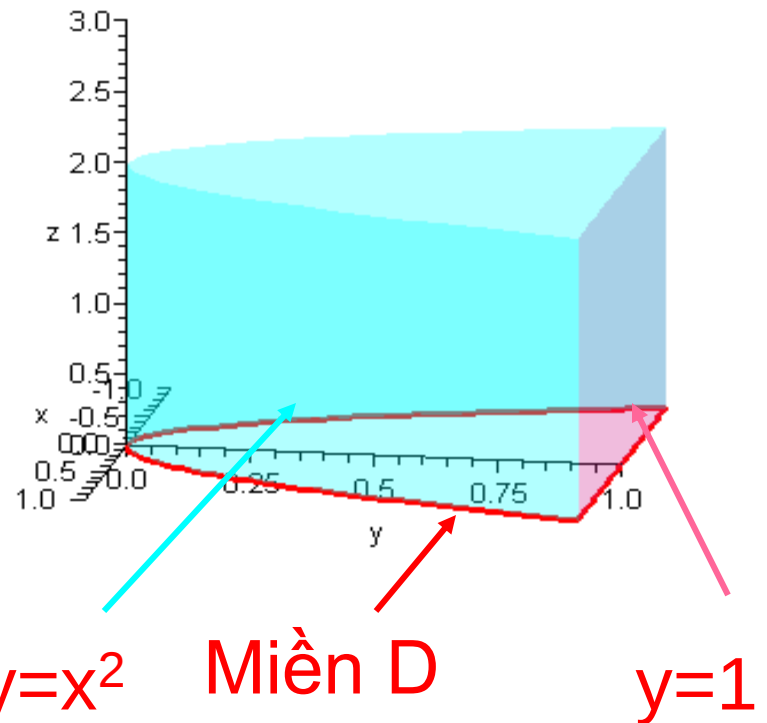
Ví dụ 5: Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi

$$z = x^2 + y^2; y = x^2; y = 1; z = 0$$

Ta sẽ tìm hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy dựa trên các hình trụ có đường sinh song song với trục Oz có trong phương trình V

Trong 4 mặt đã cho có 2 mặt trụ (phương trình không chứa z) cùng song song với Oz là $y=1$, $y=x^2$

Hai mặt trụ đó có 2 đường chuẩn tạo thành miền D đóng trong mặt Oxy

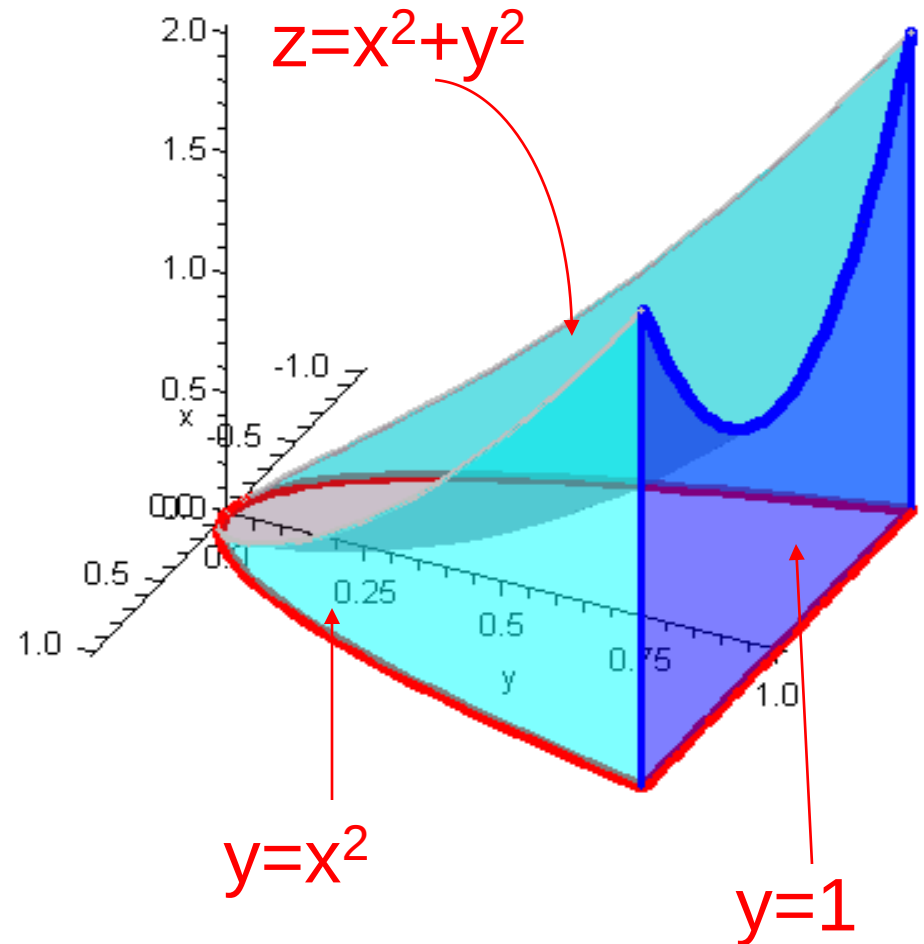
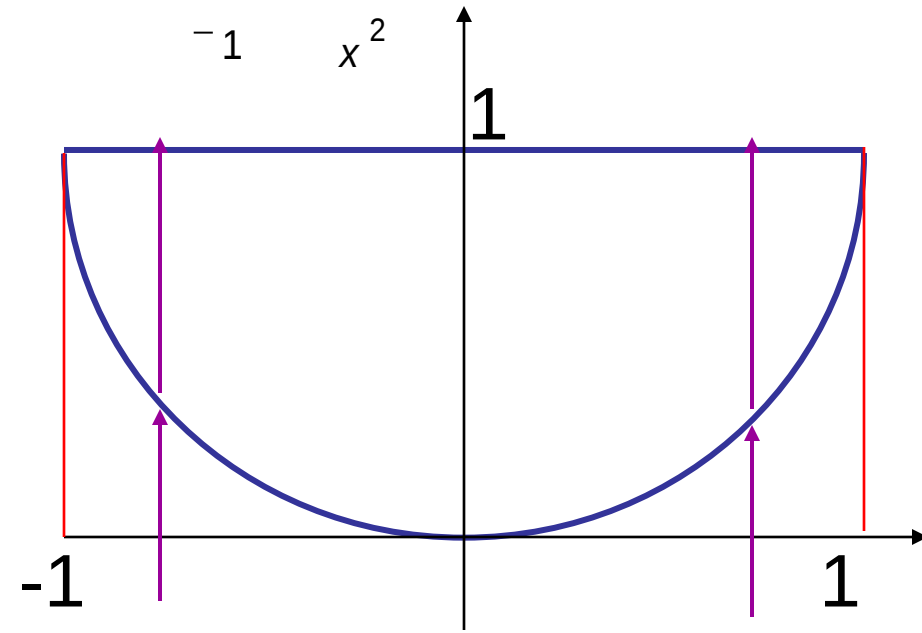


1: Tích phân kép – ƯD hình học

Với 2 mặt còn lại hiển
nhiên ta có $0 \leq x^2 + y^2$
tức là $f(x,y) = x^2 + y^2$

Vậy :

$$\begin{aligned} V &= \iint_D ((x^2 + y^2) - 0) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \end{aligned}$$



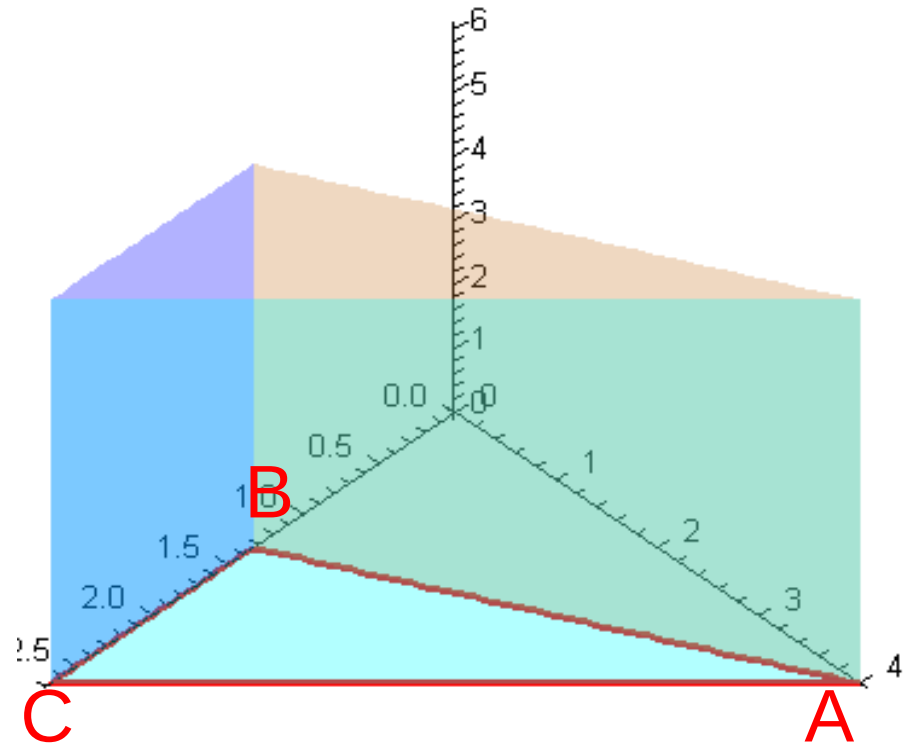
1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 6: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}, z = 0, y = 0, 3x + y = 4, \frac{3}{2}x + y = 4$$

Các mặt cùng song song với Oz (phương trình không chứa z) là $y = 0$, $3x + y = 4$, $\frac{3}{2}x + y = 4$.

Đây là 3 mặt phẳng tựa lên 3 đường thẳng trong mặt phẳng Oxy và ghép lại thành hình trụ kín có hình chiếu xuống mặt Oxy là $\triangle ABC$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Do đó, hình chiếu **D** của vật thể xuống mặt phẳng Oxy là **tam giác ABC**.

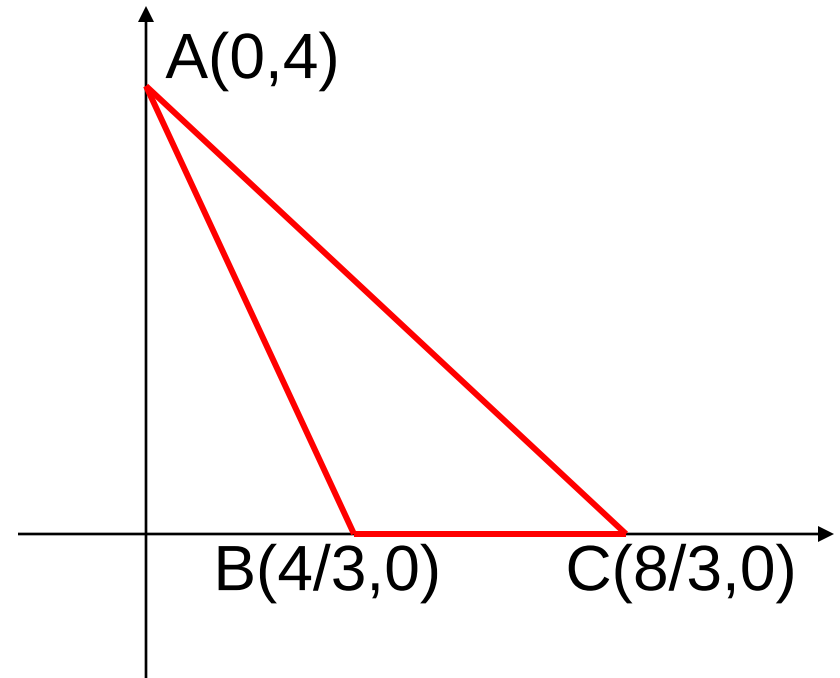
Còn 2 mặt mà phương trình chứa z thì hiển nhiên

ta có
$$0 \leq z \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$$

Tức là hàm dưới dấu tích phân là

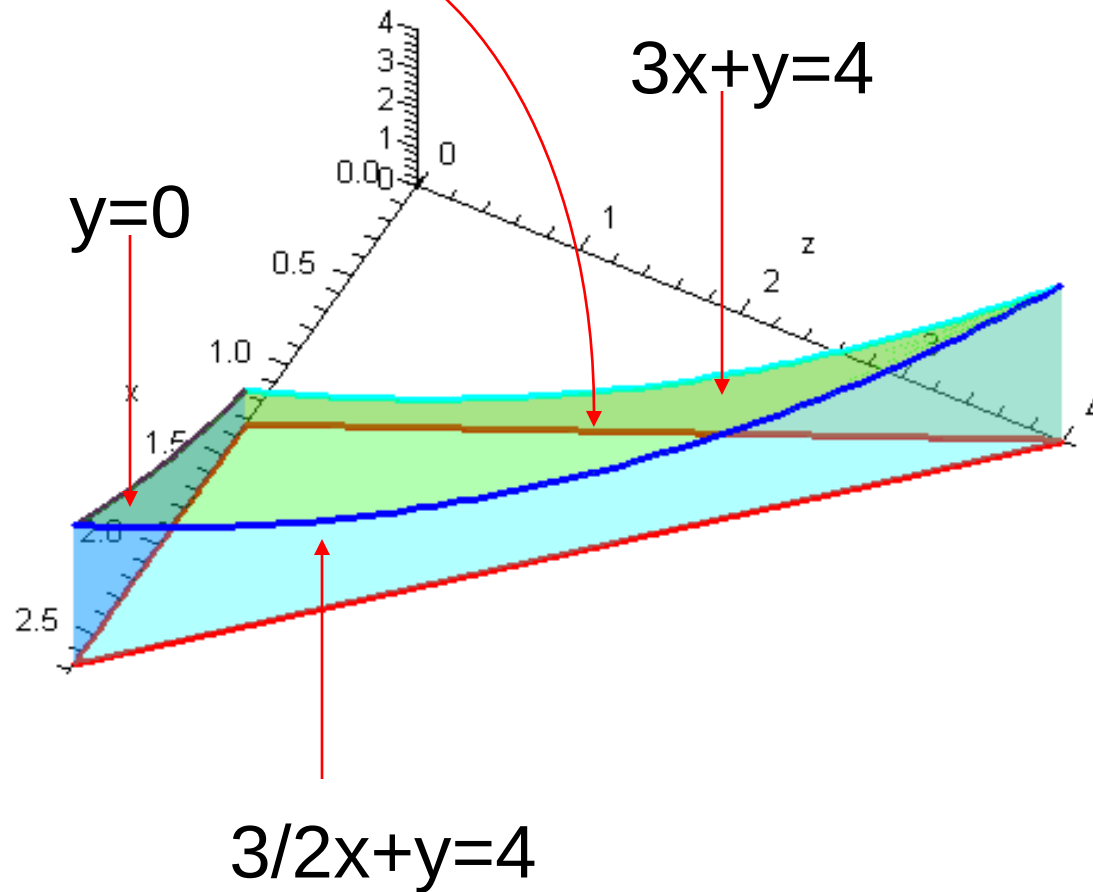
$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$$

Vậy:
$$V = \iint_{\Delta ABC} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) dx dy = \int_0^4 dy \int_{\frac{4-y}{3}}^{\frac{4-y}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \right) dx$$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$$

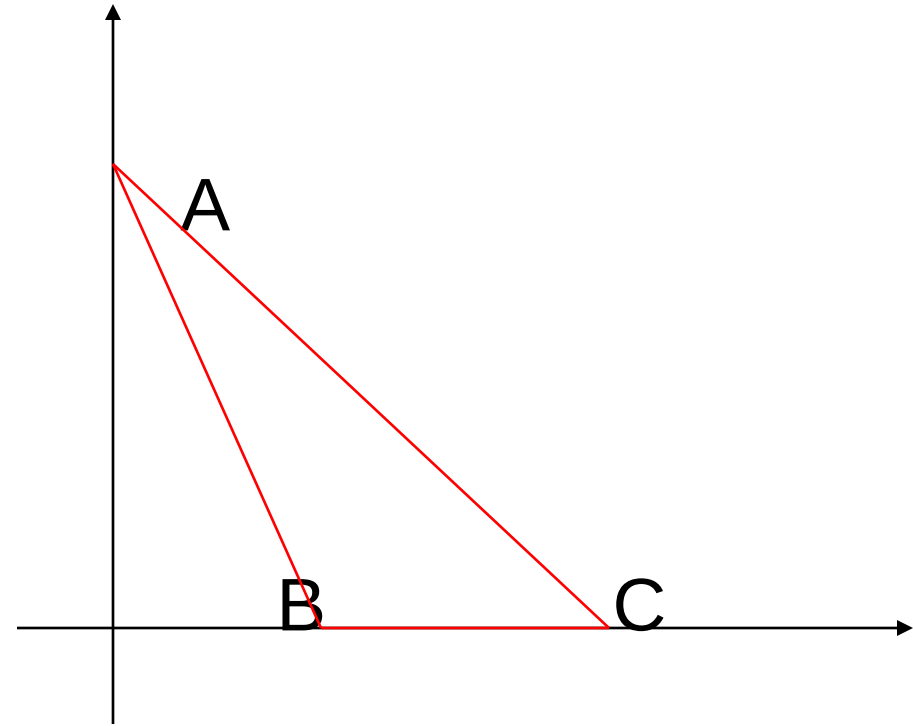


1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 7 : Tính thể tích vật thể giới hạn bởi : $y = 0$, $z = 0$,
 $z = a - x - y$, $3x + y = a$, $3/2x + y = a$

Trong 5 mặt tạo nên vật thể có 3 mặt phẳng song song với trục Oz và tựa lên 3 đường thẳng $3x + y = a$, $3/2x + y = a$, $y = 0$

Chúng tạo trong không gian hình trụ kín có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là $\triangle ABC = \text{Miền D}$

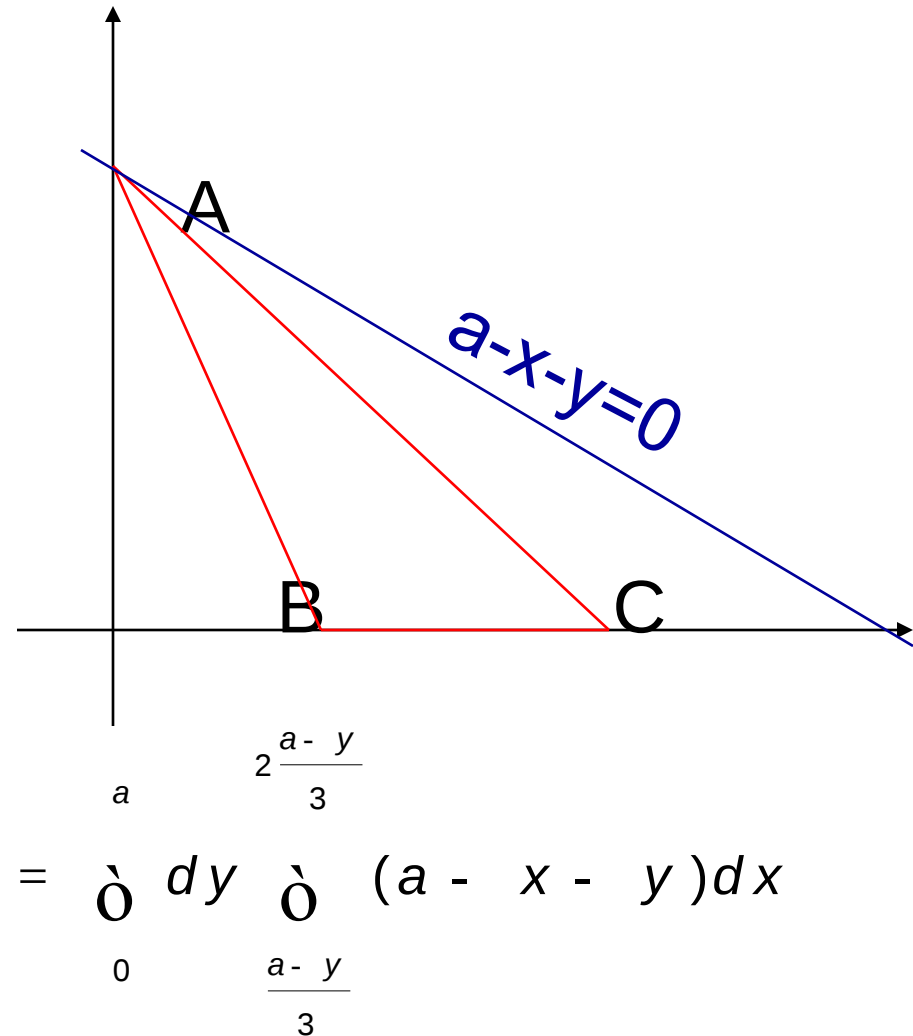


Còn lại 2 mặt, ta sẽ tìm cách xác định mặt nằm trên, nằm dưới để có hàm dưới dấu tích phân

1: Tích phân kép – ƯD hình học

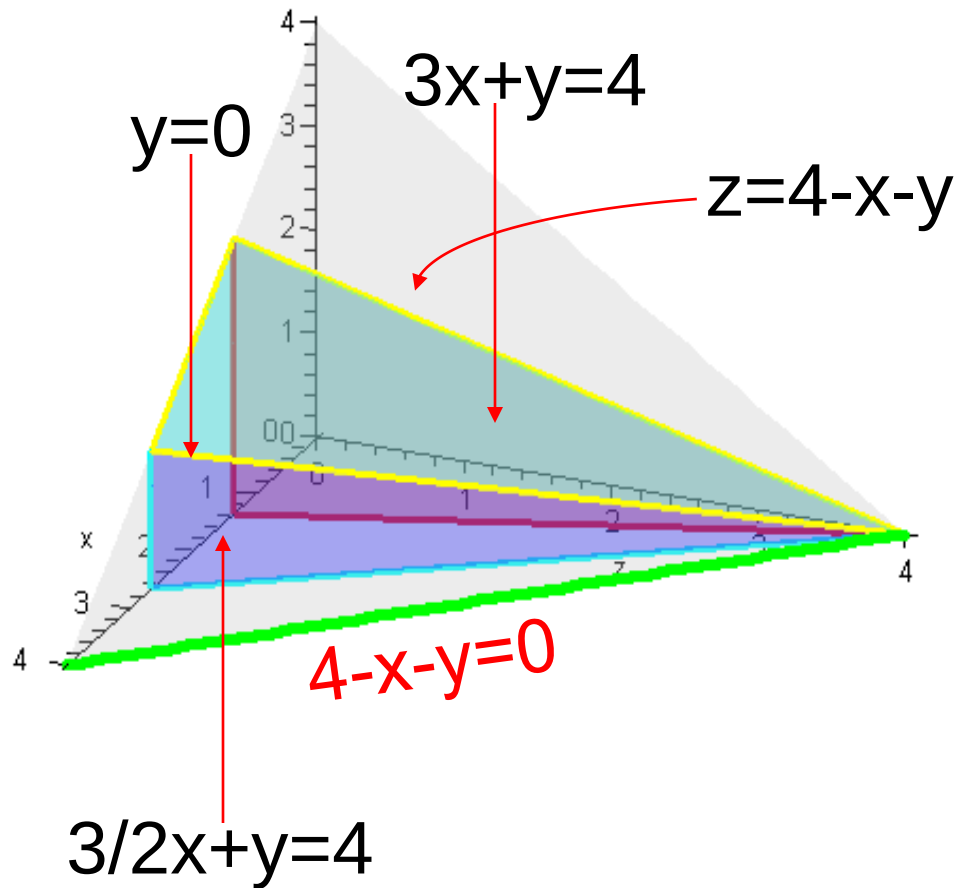
Ta đi so sánh $z = a - x - y$ với $z = 0$ bằng cách vẽ thêm đường $a - x - y = 0$ trong mặt phẳng $z = 0$ đang xét

Rõ ràng, trên hình vẽ ta có $\triangle ABC$ nằm phía dưới đường thẳng $a - x - y = 0$ tức là trong miền D ta có bất đẳng thức $0 \leq a - x - y$. Suy ra hàm dưới dấu tích phân là $f(x, y) = a - x - y$



$$\text{Vậy } V = \iint_{\Delta ABC} (a - x - y) dx dy = \int_0^a dy \int_0^{\frac{a-y}{3}} (a - x - y) dx$$

1: Tích phân kép – ƯD hình học



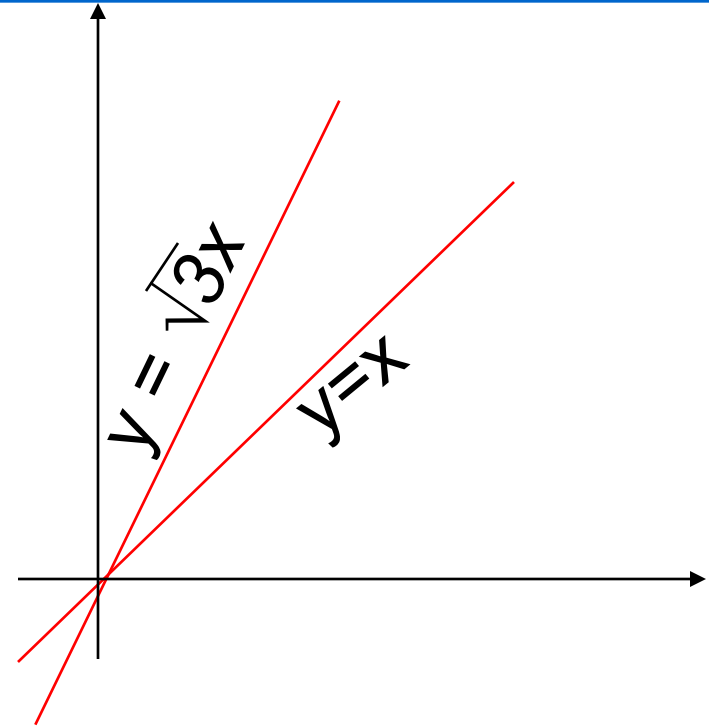
Ta xoay trục Oy thẳng đứng, ta sẽ thấy vật thể chính là hình chóp tứ giác, thể tích bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao nhân diện tích đáy

1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 8: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt cong $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$ với $x, y, z \geq 0$

Ta cũng bắt đầu tìm hình chiếu của vật thể xuống mặt $z = 0$ bằng cách chỉ ra các mặt trụ với pt không chứa z

Với ví dụ này, ta chỉ có 2 mặt là $y=x$ và $y = \sqrt{3}x$ với 2 đường chuẩn là 2 đường thẳng **không đủ cho ta miền đóng D**. Vì vậy, ta sẽ tìm thêm **giao tuyến của các mặt còn lại với mặt $z=0$**

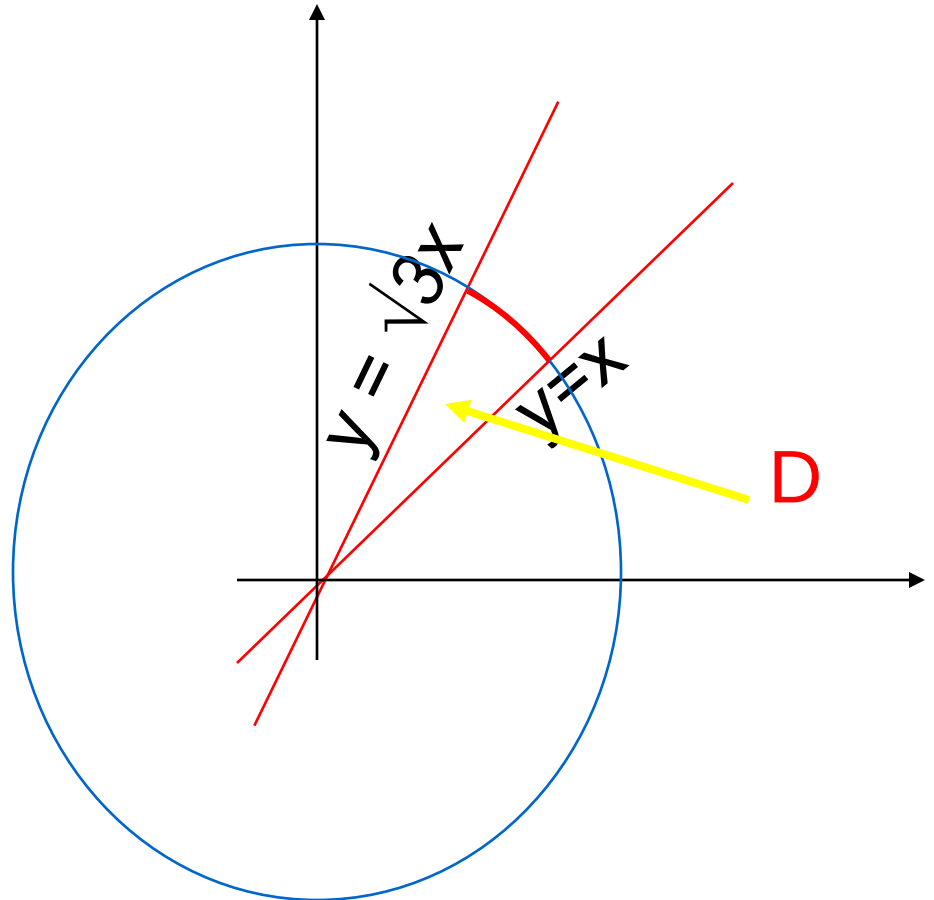


1: Tích phân kép – ƯD hình học

Cho $z = 0$ và thay vào phương trình Paraboloid ta được $x^2 + y^2 = 1$, tức là giao tuyến của mặt Paraboloid với mặt tọa độ $z = 0$ là đường tròn. 1 phần đường tròn đó sẽ “ĐẬY KÍN” phần còn mở giữa 2 đường thẳng trên.

Từ đó suy ra, D là 1 phần hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$ nằm giữa 2 đường thẳng, vậy trong D ta có

$0 \leq 1 - x^2 - y^2$ tức là mặt phẳng $z = 0$ nằm dưới và paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trên



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Vậy:

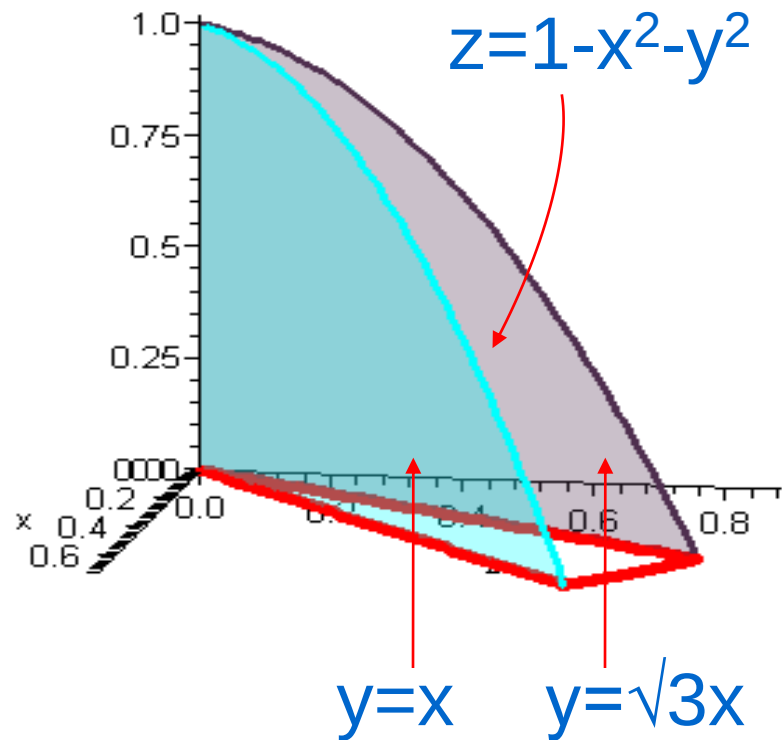
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy$$

Vì miền lấy tích phân là hình tròn nên ta sẽ đổi sang tọa độ cực bằng cách đặt

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

Khi đó, ta được

$$V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^1 r (1 - r^2) dr d\varphi$$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 9: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi $x = 1$, $x = 2$

$$y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 4$$

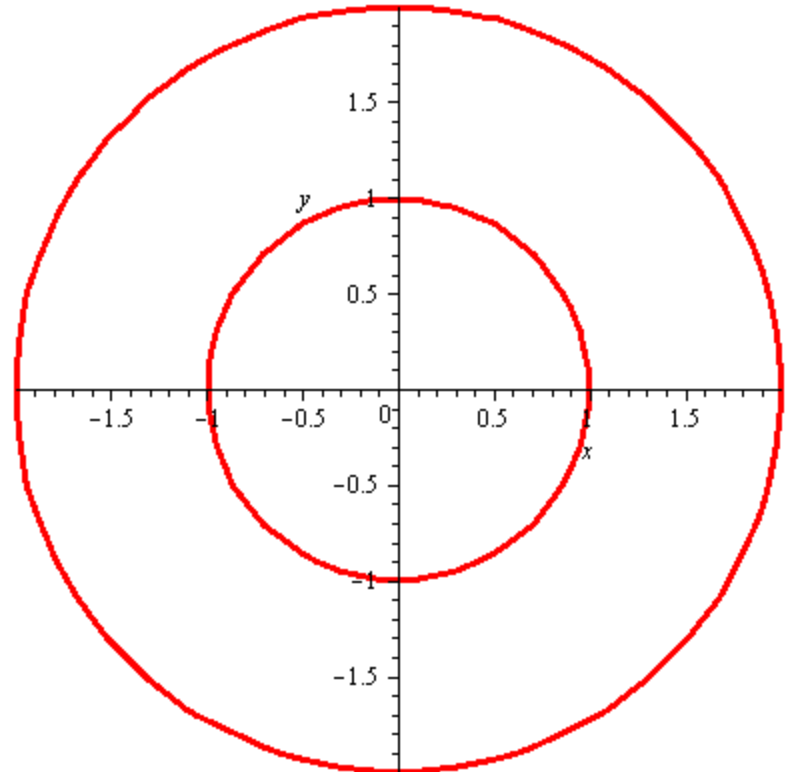
Hai mặt trụ cùng song song với trục Ox là

$$y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 4$$

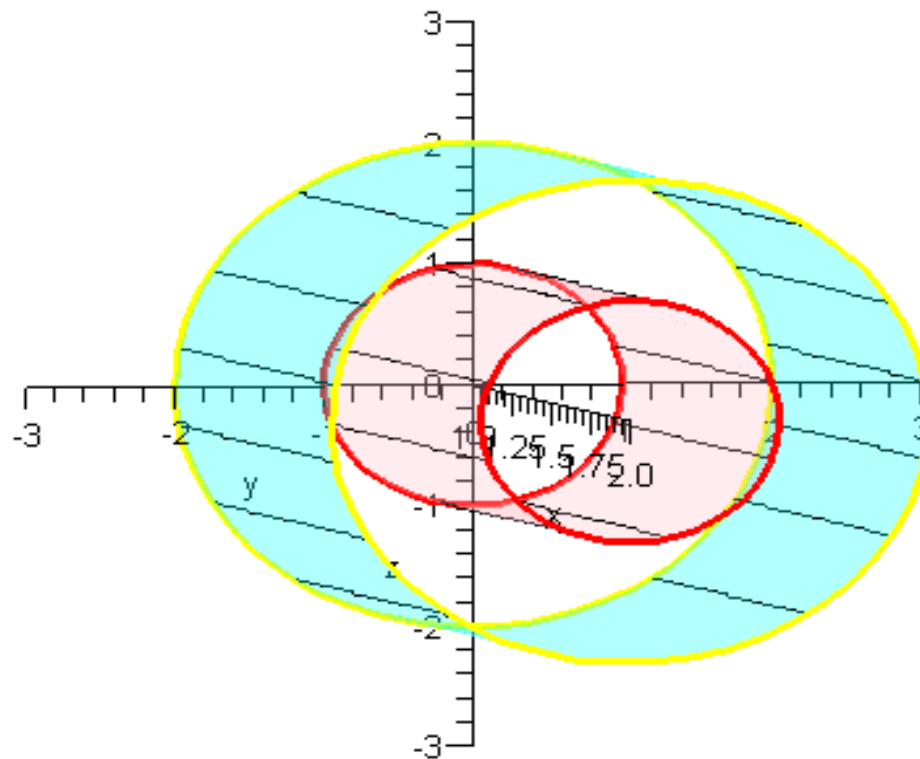
Vì vậy, hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng Oyz là miền D : $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$

$$V = \iint_{1 \leq y^2 + z^2 \leq 4} (2 - 1) dy dz$$

V bằng diện tích hình tròn lớn trừ diện tích hình tròn nhỏ



1: Tích phân kép – ƯD hình học



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 10 : Tính diện tích phần mặt $S : x^2+y^2+z^2 = 4$ nằm phía trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Để tính diện tích mặt cong S nhờ tích phân kép, ta phải xác định được hình chiếu D của mặt cong xuống 1 trong 3 mặt tọa độ.

Với ví dụ này, ta sẽ tìm hình chiếu của S xuống mặt $z=0$ bằng cách khử z từ 2 phương trình đã cho

$$z^2 = 4 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 = 2$$

Từ phương trình trên, ta được hình chiếu của S xuống mặt $z = 0$ là hình tròn $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 2$

Sau đó, vì tìm hình chiếu xuống mặt $z = 0$ nên ta sẽ tính $z=f(x,y)$ từ phương trình mặt S

1: Tích phân kép – ƯD hình học

Vì mặt S nằm phía trên mặt nón tức là $z \geq 0$ nên ta lấy

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ z'_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{cases}$$

Suy ra : $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ Vậy:

$$S = \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}} dr$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-d(4 - r^2)}{\sqrt{4 - r^2}} = 2\pi \left(-2\sqrt{4 - r^2} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi(2 - \sqrt{2})$$

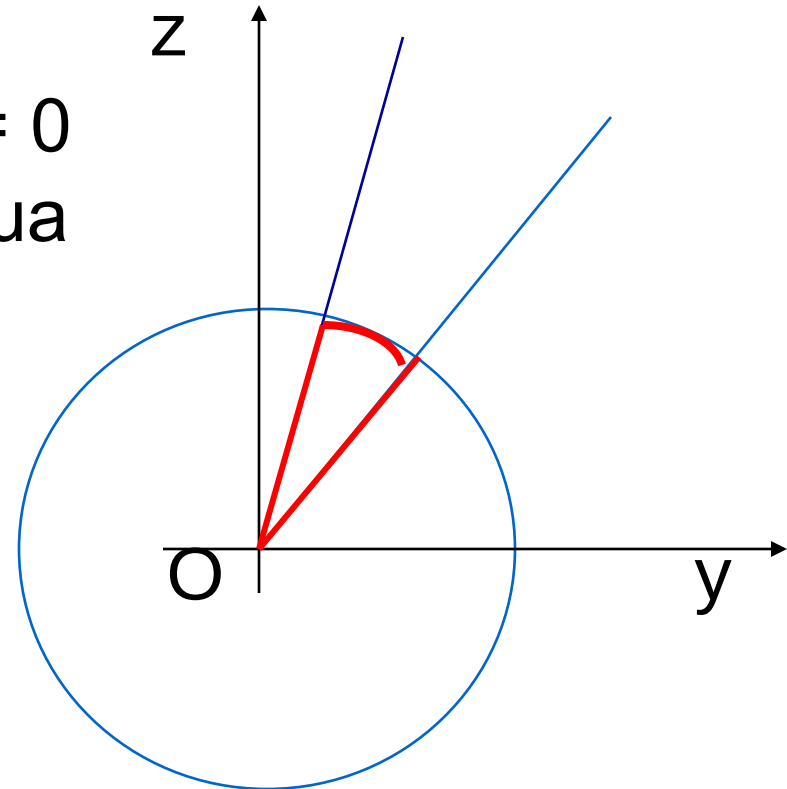
1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 11: Tính diện tích phần mặt cầu $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$
Nằm giữa 2 mặt phẳng $z = y, z = \frac{3}{\sqrt{3}}y, (z \geq 0, y \geq 0)$

2 mặt phẳng đã cho đều song song với trục Ox (Pt không chứa x) nên ta sẽ tìm hình chiếu của S xuống mặt phẳng $x = 0$

Chiếu 2 mặt phẳng xuống mặt $x = 0$ ta được 2 đường thẳng cùng đi qua gốc tọa độ tức là chưa có miền đóng D.

Do đó, ta sẽ phải lấy thêm hình chiếu của mặt cầu xuống mặt phẳng $x = 0$ là hình tròn

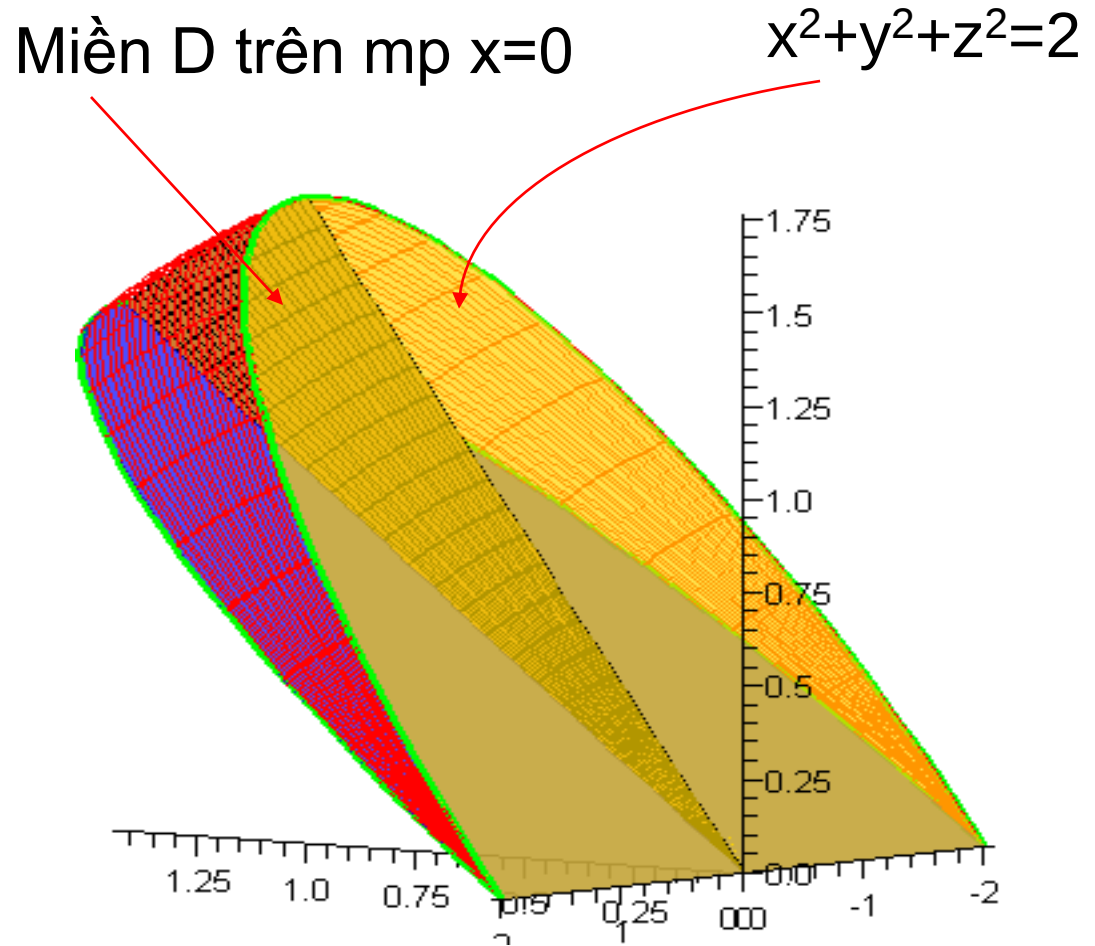


1: Tích phân kép – ƯD hình học

Mặt cầu và cả 2 mặt phẳng cắt nó đều nhận mặt $x = 0$ là mặt đối xứng nên phần mặt S cũng nhận $x = 0$ là mặt đối xứng

Do đó, ta sẽ tính diện tích phần phía trên mặt $x = 0$ rồi nhân đôi

Ta viết lại phương trình mặt S theo y, z : $x=f(y,z)$ và $x \geq 0$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \Rightarrow \begin{cases} x'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}} \\ x'_z = \frac{-z}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}}$$

Vậy

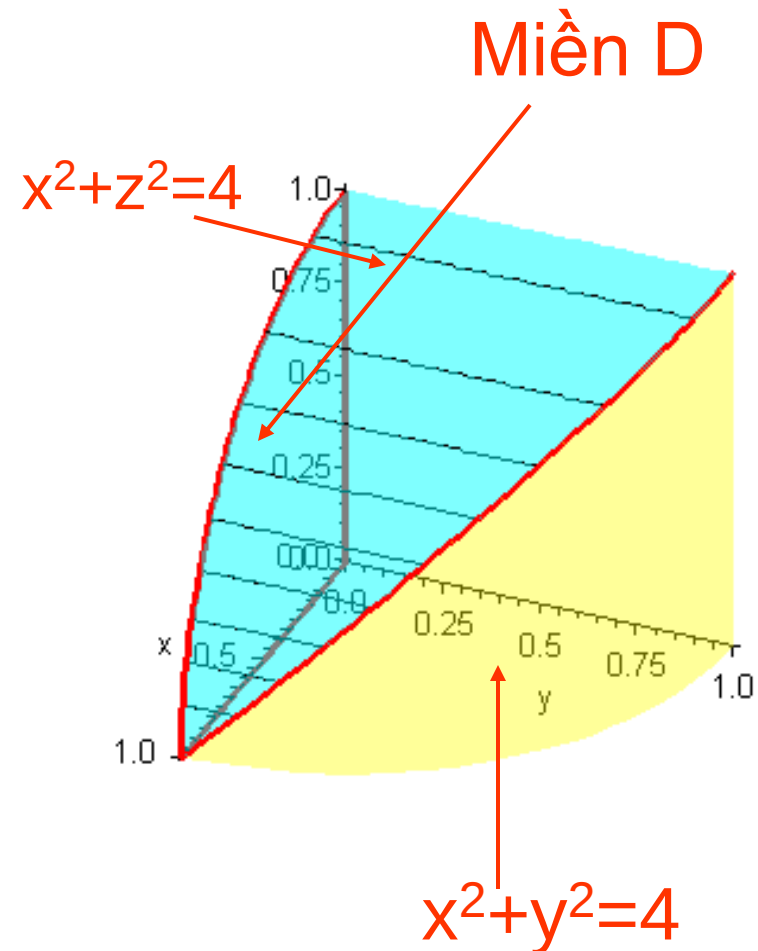
$$S = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - y^2 - z^2}} dy dz = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^1 r \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} dr$$

1: Tích phân kép – Ư'D hình học

Ví dụ 11: Tính diện tích phần mặt trụ S:
 $x^2+y^2=4$ nằm phía trong mặt trụ R: $x^2+z^2=4$

Ta sẽ chiếu phần mặt S
xuống mặt phẳng $y=0$ vì
hình trụ R **song song với**
trục Oy, và được hình tròn
 $x^2 + z^2 \leq 4$

Do tính đối xứng qua các
mặt tọa độ của cả 2 mặt trụ
nên ta chỉ tính diện tích một
phần tám mặt S, nằm trong
góc $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Khi đó, ta đi tính $y = f(x,z)$ từ phương trình mặt S.

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} \\ y'_z = 0 \end{cases}$$

Vậy, diện tích cần tính là

$$V = 8 \iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx dz = 8 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dz$$

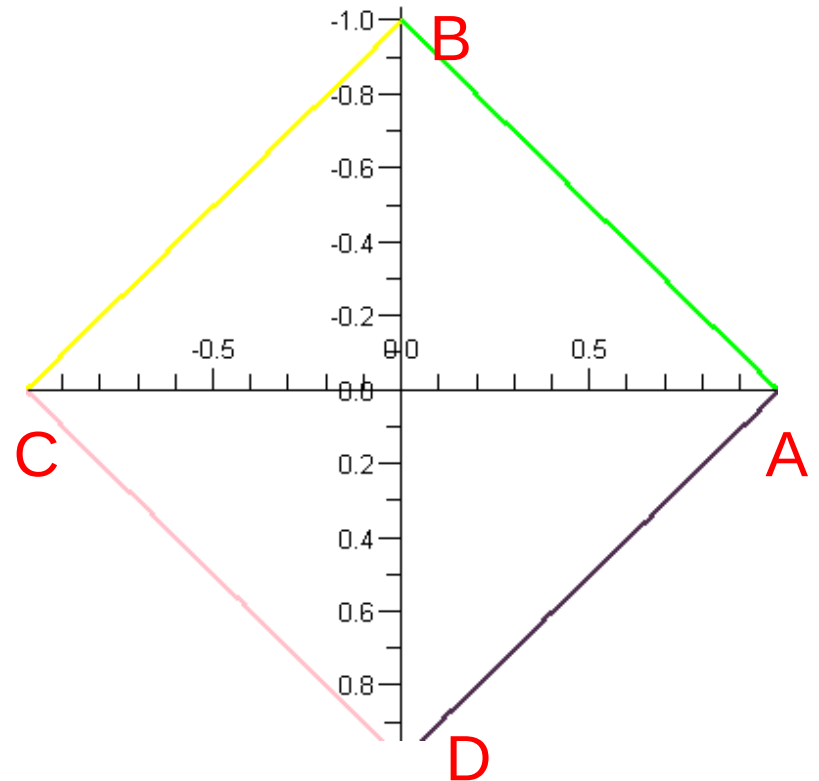
$$= 16 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} (z) \Big|_0^{\sqrt{4 - x^2}} dx = 16 \int_0^2 dx = 32$$

1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 12: Tính diện tích phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ bị cắt bởi 4 mặt $x - y = 1$, $x + y = 1$, $x - y = -1$, $x + y = -1$

4 mặt phẳng $x - y = 1$, $x + y = 1$, $x - y = -1$, $x + y = -1$ cùng song song với trục Oz , tạo trong không gian 1 hình trụ kín có hình chiếu xuống mặt Oxy là hình vuông $ABCD$

Mặt nón nhận mặt phẳng Oxy là mặt đối xứng nên phần nón nằm trong trụ kín trên cũng nhận Oxy là mặt đối xứng, ta tính diện tích phía trên mp Oxy rồi nhân đôi



1: Tích phân kép – ƯD hình học

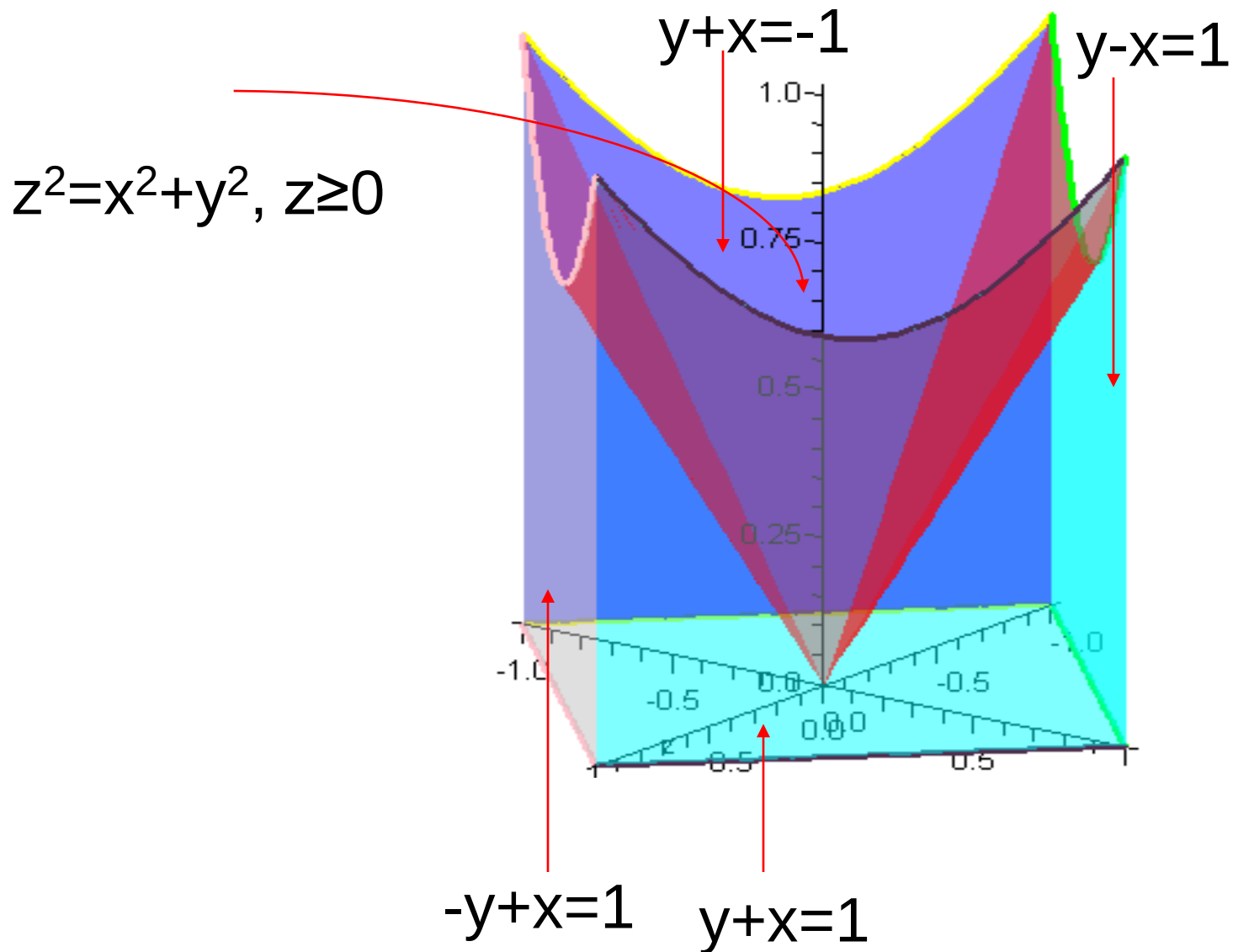
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{2}$$

Khi đó, hàm dưới dấu tích phân bằng $\sqrt{2}$ nên tích phân cần tính là diện tích miền lấy tích phân nhân với $\sqrt{2}$

$$\text{Vậy } S = 2.2.\sqrt{2}$$

1: Tích phân kép – ƯD hình học



1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 13: Tính diện tích phần mặt phẳng $S : x+y+z=2$ bị cắt bởi 2 mặt $y^2=2x$ và mặt $x=2$

2 mặt cắt S tạo trong không gian hình trụ kín có hình chiếu xuống mặt $z=0$ là **miền D** giới hạn bởi 2 đường **$y^2=2x$** và **$x=2$**

Ta chiếu xuống mặt $z=0$ nên viết phương trình mặt S lại **$z=2-x-y$**

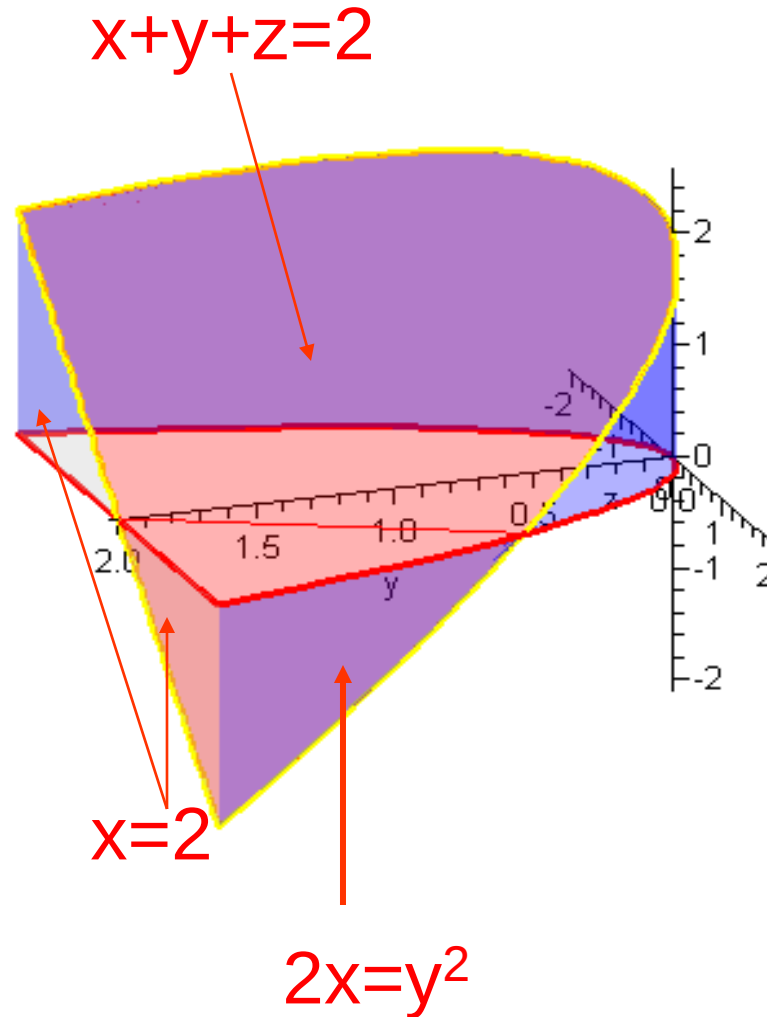
$$z'_x = z'_y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{3}$$

Vậy:

$$S = \iint_D \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 dx$$

1: Tích phân kép – ƯD hình học

Phần mặt
 $x+y+z=2$
đang cần
có 2 phần
phần
nằm trên
và phần
nằm dưới
mặt
phẳng
 $z=0$



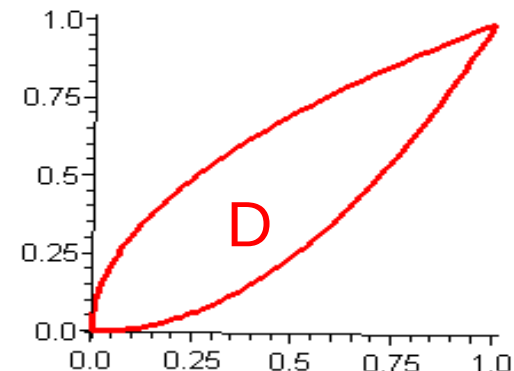
1: Tích phân kép – ƯD hình học

Ví dụ 14 : Cho vật thể Ω giới hạn bởi $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=y^2$. Tính

1. Diện tích phần mặt phẳng $z=0$ nằm trong Ω
2. Thể tích Ω
3. Diện tích phần mặt trụ $z = y^2$ nằm trong Ω

Trong 4 mặt tạo thành Ω ,
có 2 mặt cùng song song
với trục Oz là $y=x^2$ và $x=y^2$

Từ đó ta được hình chiếu
của Ω xuống mặt $z = 0$ là
miền D



1: Tích phân kép – ƯD hình học

1. Diện tích miền D

$$S(D) = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy$$

2. Thể tích Ω : Hiển nhiên $y^2 \geq 0$ nên $f(x,y)=y^2$

$$V(W) = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy$$

3. Diện tích mặt cong có phương trình $z=y^2$

$$\begin{aligned} z_x &= 0 \\ z_y &= 2y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4y^2}$$

1: Tích phân kép – ƯD hình học

Vậy diện tích mặt cong cần tính là

$$S = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

