

Bài giảng Giải tích 1

Vũ Hữu Nhựt

19th September 2016

Chương 1. GIỚI HẠN VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

1.1. Tập số thực và dãy số

- 1.1.1. Các phép toán của tập hợp
- 1.1.2. Tập hợp số thực
- 1.1.3. Dãy số.

(1) Dãy số.

Definition Dãy số.

Ánh xạ $n \in \mathbb{N} \rightarrow u_n \in \mathbb{R}$ là một dãy số.

Ký hiệu: (u_n) , $\{u_n\}$ hoặc $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n \geq 0}$.

1.1. Tập số thực và dãy số

- 1.1.1. Các phép toán của tập hợp
- 1.1.2. Tập hợp số thực
- 1.1.3. Dãy số.

(1) Dãy số.

Definition Dãy số.

Ánh xạ $n \in \mathbb{N} \rightarrow u_n \in \mathbb{R}$ là một dãy số.

Ký hiệu: (u_n) , $\{u_n\}$ hoặc $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n \geq 0}$.

1.1. Tập số thực và dãy số

- 1.1.1. Các phép toán của tập hợp
- 1.1.2. Tập hợp số thực
- 1.1.3. Dãy số.

(1) Dãy số.

Definition Dãy số.

Ánh xạ $n \in \mathbb{N} \rightarrow u_n \in \mathbb{R}$ là một dãy số.

Ký hiệu: (u_n) , $\{u_n\}$ hoặc $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n \geq 0}$.

(2) Giới hạn dãy số.

Definition Giới hạn dãy số.

- Dãy (x_n) được gọi là **hội tụ** nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi số $\epsilon > 0$, tồn tại số $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- Dãy (x_n) được gọi là **phân kỳ** nếu nó không hội tụ.

Ý nghĩa: Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, thì $x_n \approx a$ khi n lớn.

Ví dụ: CMR

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

(2) Giới hạn dãy số.

Definition Giới hạn dãy số.

- Dãy (x_n) được gọi là **hội tụ** nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi số $\epsilon > 0$, tồn tại số $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- Dãy (x_n) được gọi là **phân kỳ** nếu nó không hội tụ.

Ý nghĩa: Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, thì $x_n \approx a$ khi n lớn.

Ví dụ: CMR

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

(2) Giới hạn dãy số.

Definition Giới hạn dãy số.

- Dãy (x_n) được gọi là **hội tụ** nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi số $\epsilon > 0$, tồn tại số $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- Dãy (x_n) được gọi là **phân kỳ** nếu nó không hội tụ.

Ý nghĩa: Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, thì $x_n \approx a$ khi n lớn.

Ví dụ: CMR

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

(2) Giới hạn dãy số.

Definition Giới hạn dãy số.

- Dãy (x_n) được gọi là **hội tụ** nếu tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi số $\epsilon > 0$, tồn tại số $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Ký hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

- Dãy (x_n) được gọi là **phân kỳ** nếu nó không hội tụ.

Ý nghĩa: Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, thì $x_n \approx a$ khi n lớn.

Ví dụ: CMR

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

(3) Tính chất của giới hạn.

Theorem Tính duy nhất.

Giới hạn của dãy (nếu có) là duy nhất.

Theorem .

Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Khi đó

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.*
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kx$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy$.*
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, ($y \neq 0$).*

(3) Tính chất của giới hạn.

Theorem Tính duy nhất.

Giới hạn của dãy (nếu có) là duy nhất.

Theorem .

Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Khi đó

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kx$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, ($y \neq 0$).

Theorem Tính thứ tự.

- Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x < y$, thì tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n < y$ với mọi $n \geq n_0$.
- Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > y$, thì tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n > y$ với mọi $n \geq n_0$.
- Nếu $x_n \leq y_n$ với mọi $n \geq n_0$, và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, thì $x \leq y$.

Theorem Nguyên lý kẹp.

Giả sử $x_n \leq y_n \leq z_n$ với mọi $n \geq n_0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

Ví dụ. CMR

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sin^2 n + 3 \cos(2n)}{n} = 2.$$

Theorem Nguyên lý kẹp.

Giả sử $x_n \leq y_n \leq z_n$ với mọi $n \geq n_0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Khi đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

Ví dụ. CMR

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sin^2 n + 3 \cos(2n)}{n} = 2.$$

(4) Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Definition Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là:

- (i) tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (ii) giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (iii) bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$ với mọi $n \geq 1$.
- (iv) bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m$ với mọi $n \geq 1$.
- (v) bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

(4) Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Definition Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là:

- (i) tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (ii) giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (iii) bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$ với mọi $n \geq 1$.
- (iv) bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m$ với mọi $n \geq 1$.
- (v) bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

(4) Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Definition Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là:

- (i) tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (ii) giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (iii) bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$ với mọi $n \geq 1$.
- (iv) bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m$ với mọi $n \geq 1$.
- (v) bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

(4) Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Definition Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là:

- (i) tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (ii) giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (iii) bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$ với mọi $n \geq 1$.
- (iv) bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m$ với mọi $n \geq 1$.
- (v) bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

(4) Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Definition Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là:

- (i) tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (ii) giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (iii) bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$ với mọi $n \geq 1$.
- (iv) bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m$ với mọi $n \geq 1$.
- (v) bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

(4) Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Definition Dãy đơn điệu và dãy bị chặn.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là:

- (i) tăng nếu $x_n \leq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (ii) giảm nếu $x_n \geq x_{n+1}$ với mọi $n \geq 1$.
- (iii) bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $x_n \leq M$ với mọi $n \geq 1$.
- (iv) bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $x_n \geq m$ với mọi $n \geq 1$.
- (v) bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới.

Example .

Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy sau:

- ① $x_n = \frac{1}{n}$.
- ② $x_n = (-1)^n$.
- ③ $x_n = 2n - 1$.

Theorem .

- 1 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.
- 2 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

Example .

Cho dãy $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n \geq 1$, $x_1 = 1$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính giới hạn đó.

Theorem .

- 1 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.
- 2 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

Example .

Cho dãy $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n \geq 1$, $x_1 = 1$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính giới hạn đó.

Theorem .

- 1 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.
- 2 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

Example .

Cho dãy $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n \geq 1$, $x_1 = 1$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính giới hạn đó.

Theorem .

- 1 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.
- 2 Nếu dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

Example .

Cho dãy $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n \geq 1$, $x_1 = 1$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tính giới hạn đó.

(5) Hai dãy kề nhau

Definition Hai dãy kề nhau.

Dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ gọi là kề nhau nếu $\{x_n\}$ tăng và $\{y_n\}$ giảm và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Theorem .

Nếu $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ kề nhau, thì tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

(5) Hai dãy kề nhau

Definition Hai dãy kề nhau.

Dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ gọi là kề nhau nếu $\{x_n\}$ tăng và $\{y_n\}$ giảm và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Theorem .

Nếu $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ kề nhau, thì tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

(5) Hai dãy kề nhau

Definition Hai dãy kề nhau.

Dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ gọi là kề nhau nếu $\{x_n\}$ tăng và $\{y_n\}$ giảm và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Theorem .

Nếu $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ kề nhau, thì tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

Corollary Định lý Cantor.

Cho hai dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}$ sao cho

$$\begin{cases} x_n \leq y_n, [x_n, y_n] \subset [x_{n-1}, y_{n-1}] & \forall n \geq 1. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó tồn tại duy nhất số thực $c \in [x_n, y_n]$ với mọi $n \geq 1$.

Definition .

Dãy các đoạn $[x_n, y_n]$ thỏa mãn điều kiện (1) được gọi là *dãy các đoạn lồng nhau* .

Corollary Định lý Cantor.

Cho hai dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}$ sao cho

$$\begin{cases} x_n \leq y_n, [x_n, y_n] \subset [x_{n-1}, y_{n-1}] & \forall n \geq 1. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Khi đó tồn tại duy nhất số thực $c \in [x_n, y_n]$ với mọi $n \geq 1$.

Definition .

Dãy các đoạn $[x_n, y_n]$ thỏa mãn điều kiện (1) được gọi là *dãy các đoạn lồng nhau* .

Example .

Chứng minh rằng hai dãy sau là kề nhau

$$x_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{1+k^2}, \quad y_n = x_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \quad n \geq 3$$

(6) Dãy con.

Definition Dãy con.

Cho dãy số $\{x_n\}$. Dãy số con $\{x_{n_k}\}$ trích ra từ dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots,$$

với $n_1 < n_2 < \dots$.

Example .

Dãy $x_{2n} = 1$ và $x_{2n+1} = -1$ là hai con của dãy $x_n = (-1)^n$.

(6) Dãy con.

Definition Dãy con.

Cho dãy số $\{x_n\}$. Dãy số con $\{x_{n_k}\}$ trích ra từ dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots,$$

với $n_1 < n_2 < \dots$.

Example .

Dãy $x_{2n} = 1$ và $x_{2n+1} = -1$ là hai con của dãy $x_n = (-1)^n$.

Theorem .

- 1 Nếu dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là a khi $n \rightarrow \infty$, thì mọi dãy con của nó cũng có giới hạn là a .
- 2 Dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là a khi $n \rightarrow \infty$ nếu và chỉ nếu hai dãy con (x_{2n}) và (x_{2n+1}) cùng hội tụ tới a .

Nhận xét. Nếu tồn tại hai dãy con $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{n_p}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \neq \lim_{p \rightarrow \infty} x_{n_p}$$

thì dãy $\{x_n\}$ phân kỳ.

Theorem .

- 1 Nếu dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là a khi $n \rightarrow \infty$, thì mọi dãy con của nó cũng có giới hạn là a .
- 2 Dãy $\{x_n\}$ có giới hạn là a khi $n \rightarrow \infty$ nếu và chỉ nếu hai dãy con (x_{2n}) và (x_{2n+1}) cùng hội tụ tới a .

Nhận xét. Nếu tồn tại hai dãy con $\{x_{n_k}\}$ và $\{x_{n_p}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \neq \lim_{p \rightarrow \infty} x_{n_p}$$

thì dãy $\{x_n\}$ phân kỳ.

Example .

Chứng minh rằng dãy sau phân kỳ

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$$

Theorem Bolzano-Weierstrass.

. Một dãy bị chặn đều trích ra một dãy con hội tụ.

Example .

Chứng minh rằng dãy sau phân kỳ

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$$

Theorem Bolzano-Weierstrass.

. Một dãy bị chặn đều trích ra một dãy con hội tụ.

Example .

Chứng minh dãy sau là hội tụ

$$x_n = \frac{3}{x_{n-1}} + 2, \quad n \geq 1, x_0 = 1.$$

(7) Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Definition Dãy Cauchy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy (dãy cơ bản) nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số $n_0 > 0$ sao cho

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, p \geq 1.$$

Theorem Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu nó là dãy Cauchy.

(7) Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Definition Dãy Cauchy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy (dãy cơ bản) nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số $n_0 > 0$ sao cho

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, p \geq 1.$$

Theorem Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu nó là dãy Cauchy.

(7) Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Definition Dãy Cauchy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy (dãy cơ bản) nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số $n_0 > 0$ sao cho

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, p \geq 1.$$

Theorem Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu nó là dãy Cauchy.

(7) Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Definition Dãy Cauchy.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy (dãy cơ bản) nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số $n_0 > 0$ sao cho

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0, p \geq 1.$$

Theorem Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy.

Dãy $\{x_n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu nó là dãy Cauchy.

Example .

Dùng tiêu chuẩn hội tụ Cauchy để xét sự hội tụ của các dãy sau:

- 1. $x_n = \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$.
- 2. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.
- 3. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1.2. Khái niệm hàm một biến số. Hàm hợp, hàm ngược. Các hàm sơ cấp cơ bản. Các hàm sơ cấp

1.2.1. Hàm số một biến số

Definition .

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f , được kí hiệu là D_f hoặc D .

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đôi số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f .

1.2. Khái niệm hàm một biến số. Hàm hợp, hàm ngược. Các hàm sơ cấp cơ bản. Các hàm sơ cấp

1.2.1. Hàm số một biến số

Definition .

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số. Ký hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f , được ký hiệu là D_f hoặc D .

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đôi số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f .

1.2. Khái niệm hàm một biến số. Hàm hợp, hàm ngược. Các hàm sơ cấp cơ bản. Các hàm sơ cấp

1.2.1. Hàm số một biến số

Definition .

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số. Ký hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f , được ký hiệu là D_f hoặc D .

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đôi số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f .

1.2. Khái niệm hàm một biến số. Hàm hợp, hàm ngược. Các hàm sơ cấp cơ bản. Các hàm sơ cấp

1.2.1. Hàm số một biến số

Definition .

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f , được kí hiệu là D_f hoặc D .

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đôi số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f .

1.2. Khái niệm hàm một biến số. Hàm hợp, hàm ngược. Các hàm sơ cấp cơ bản. Các hàm sơ cấp

1.2.1. Hàm số một biến số

Definition .

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số. Ký hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f , được ký hiệu là D_f hoặc D .

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đối số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f .

1.2. Khái niệm hàm một biến số. Hàm hợp, hàm ngược. Các hàm sơ cấp cơ bản. Các hàm sơ cấp

1.2.1. Hàm số một biến số

Definition .

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f , được kí hiệu là D_f hoặc D .

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đổi số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f .

1.2. Khái niệm hàm một biến số. Hàm hợp, hàm ngược. Các hàm sơ cấp cơ bản. Các hàm sơ cấp

1.2.1. Hàm số một biến số

Definition .

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$. Một ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một hàm số. Kí hiệu $y = f(x)$.

+ X gọi là miền xác định của f , được kí hiệu là D_f hoặc D .

+ $x \in D_f$ được gọi là biến (đổi số).

+ $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của f tại $x = x_0$.

+ Tập $G := \{(x, y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm số f .

Example .

Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $x \mapsto y = x^2$. Khi đó

+ Tập xác định $D = [0, 1]$.

+ Đồ thị là tập

$$G = \{(x, x^2) \mid x \in [0, 1]\}.$$

Điểm $M(1/2, 1/4) \in G$ và $N(0, 1) \notin G$.

Example .

Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $x \mapsto y = x^2$. Khi đó

+ Tập xác định $D = [0, 1]$.

+ Đồ thị là tập

$$G = \{(x, x^2) \mid x \in [0, 1]\}.$$

Điểm $M(1/2, 1/4) \in G$ và $N(0, 1) \notin G$.

Example .

Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $x \mapsto y = x^2$. Khi đó

+ Tập xác định $D = [0, 1]$.

+ Đồ thị là tập

$$G = \{(x, x^2) \mid x \in [0, 1]\}.$$

Điểm $M(1/2, 1/4) \in G$ và $N(0, 1) \notin G$.

1.2.2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và hàm số đơn điệu

Definition .

Hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là

(i) hàm số chẵn, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

(ii) hàm số lẻ, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

1.2.2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và hàm số đơn điệu

Definition .

Hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là

(i) hàm số chẵn, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

(ii) hàm số lẻ, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

1.2.2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và hàm số đơn điệu

Definition .

Hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là

(i) hàm số chẵn, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

(ii) hàm số lẻ, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

1.2.2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn và hàm số đơn điệu

Definition .

Hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là

(i) hàm số chẵn, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

(ii) hàm số lẻ, nếu:

$$\begin{cases} -x \in D \quad \forall x \in D, \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D. \end{cases}$$

Definition .

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x + k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition .

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

(ii) Hàm số f được gọi là đơn điệu giảm (giảm ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Definition .

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x + k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition .

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

(ii) Hàm số f được gọi là đơn điệu giảm (giảm ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Definition .

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x + k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition .

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

(ii) Hàm số f được gọi là đơn điệu giảm (giảm ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Definition .

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x + k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition .

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

(ii) Hàm số f được gọi là đơn điệu giảm (giảm ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Definition .

Hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số dương k sao cho

$$f(x + k) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Definition .

Cho $(a, b) \subset D$ và hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Hàm số f được gọi là đơn điệu tăng (tăng ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

(ii) Hàm số f được gọi là đơn điệu giảm (giảm ngặt) trên (a, b) nếu

$$x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Định nghĩa .

Cho hàm số $f : X \rightarrow Y$, f gọi là:

- **đơn ánh** nếu

$$x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- **toàn ánh** nếu $\forall y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$
- **song ánh** nếu nó vừa đơn ánh, vừa toàn ánh.

Xét phương trình

$$f(x) = y \quad (2)$$

- ❶ f là đơn ánh $\Leftrightarrow$ với mọi $y \in Y$, phương trình (2) có **không quá 1 nghiệm** $x \in X$.
- ❷ f là toàn ánh $\Leftrightarrow$ với mọi $y \in Y$, phương trình (2) có **ít nhất 1 nghiệm** $x \in X$.
- ❸ f là song ánh $\Leftrightarrow$ với mọi $y \in Y$, phương trình (2) có **duy 1 nghiệm** $x \in X$.

Nhận xét .

Các hàm đơn điệu chặt:

- *Tăng chặt* $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- *Giảm chặt* $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó

Xét phương trình

$$f(x) = y \quad (2)$$

- ❶ f là đơn ánh $\Leftrightarrow$ với mọi $y \in Y$, phương trình (2) có **không quá 1 nghiệm** $x \in X$.
- ❷ f là toàn ánh $\Leftrightarrow$ với mọi $y \in Y$, phương trình (2) có **ít nhất 1 nghiệm** $x \in X$.
- ❸ f là song ánh $\Leftrightarrow$ với mọi $y \in Y$, phương trình (2) có **duy 1 nghiệm** $x \in X$.

Nhận xét .

Các hàm đơn điệu chặt:

- *Tăng chặt* $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- *Giảm chặt* $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó

1.2.3. Hàm số hợp và hàm số ngược

Definition Hàm số hợp.

Cho hàm số $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ và $g : (c, d) \rightarrow (m, n)$. Hàm số $h : (a, b) \rightarrow (m, n)$ được xác định bởi

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

được gọi là hàm số hợp của f và g . Kí hiệu $h := g \circ f$.

Example .

Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x - 1$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^2$. Khi đó

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x)^2 = (2x - 1)^2,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2g(x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

1.2.3. Hàm số hợp và hàm số ngược

Definition Hàm số hợp.

Cho hàm số $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ và $g : (c, d) \rightarrow (m, n)$. Hàm số $h : (a, b) \rightarrow (m, n)$ được xác định bởi

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

được gọi là hàm số hợp của f và g . Kí hiệu $h := g \circ f$.

Example .

Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x - 1$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^2$.
Khi đó

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x)^2 = (2x - 1)^2,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2g(x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

1.2.3. Hàm số hợp và hàm số ngược

Definition Hàm số hợp.

Cho hàm số $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ và $g : (c, d) \rightarrow (m, n)$. Hàm số $h : (a, b) \rightarrow (m, n)$ được xác định bởi

$$h(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in (a, b)$$

được gọi là hàm số hợp của f và g . Kí hiệu $h := g \circ f$.

Example .

Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2x - 1$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = x^2$. Khi đó

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x)^2 = (2x - 1)^2,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2g(x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Definition hàm số ngược.

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$ và $f : X \rightarrow Y$ là song ánh. Hàm số $g : Y \rightarrow X$ xác định như sau: với mỗi $y \in Y$, $g(y) = x$ sao cho $f(x) = y$ được gọi là hàm số ngược của hàm số f . Kí hiệu: $g := f^{-1}$.

Remark. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Example .

Hàm số nào là song ánh? Tìm hàm số ngược nếu có?

(i) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (5x - 1) \in \mathbb{R}$.

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(iii) $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), x \mapsto f(x) = x^2$.

Definition hàm số ngược.

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$ và $f : X \rightarrow Y$ là song ánh. Hàm số $g : Y \rightarrow X$ xác định như sau: với mỗi $y \in Y$, $g(y) = x$ sao cho $f(x) = y$ được gọi là hàm số ngược của hàm số f . Kí hiệu: $g := f^{-1}$.

Remark. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Example .

Hàm số nào là song ánh? Tìm hàm số ngược nếu có?

(i) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (5x - 1) \in \mathbb{R}$.

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(iii) $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), x \mapsto f(x) = x^2$.

Definition hàm số ngược.

Cho $X, Y \subset \mathbb{R}$ và $f : X \rightarrow Y$ là song ánh. Hàm số $g : Y \rightarrow X$ xác định như sau: với mỗi $y \in Y, g(y) = x$ sao cho $f(x) = y$ được gọi là hàm số ngược của hàm số f . Kí hiệu: $g := f^{-1}$.

Remark. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Example .

Hàm số nào là song ánh? Tìm hàm số ngược nếu có?

(i) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (5x - 1) \in \mathbb{R}$.

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(iii) $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), x \mapsto f(x) = x^2$.

1.2.3. Hàm số sơ cấp

(1) Hàm số sơ cấp cơ bản.

- Hàm số lũy thừa $x \mapsto x^a$.
- Hàm số mũ $x \mapsto a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$).
- Hàm số logarit $x \mapsto \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$).
- Hàm số lượng giác $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto \cot x$.
- Hàm lượng giác ngược:
 - Hàm $x \mapsto \arcsin x$.
 - Hàm $x \mapsto \arccos x$.
 - Hàm $x \mapsto \arctan x$.
 - Hàm $x \mapsto \operatorname{arccot} x$.

- Hàm Hyperbolic:

+) Hàm sinhyperbolic:

$$sh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

+) Hàm cosinhyperbolic

$$ch(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

+) Hàm tanhyperbolic và contanghyperbolic

$$th(x) := \frac{sh(x)}{ch(x)}, \quad coth(x) := \frac{ch(x)}{sh(x)}$$

- Hàm Hyperbolic:

+) Hàm sinhyperbolic:

$$sh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

+) Hàm cosinhyperbolic

$$ch(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

+) Hàm tanhyperbolic và contanghyperbolic

$$th(x) := \frac{sh(x)}{ch(x)}, \quad coth(x) := \frac{ch(x)}{sh(x)}$$

Example .

Chứng minh các công thức sau:

$$① \quad sh(x + y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$$

$$② \quad sh(x - y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$$

$$③ \quad ch(x + y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$$

$$④ \quad ch(x - y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$$

$$⑤ \quad th(x + y) = \frac{th(x) + th(y)}{1 - th(x)th(y)}.$$

(2) Hàm số sơ cấp.

Cho hai hàm số f và g . Ta xác định các phép toán

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$
- $(fg)(x) = f(x)g(x).$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$

Miền xác định

- $D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g.$
- $D_{f/g} = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}.$

Hàm sơ cấp là những hàm được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp của các hàm sơ cấp cơ bản và các hằng số.

(2) Hàm số sơ cấp.

Cho hai hàm số f và g . Ta xác định các phép toán

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$
- $(fg)(x) = f(x)g(x).$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$

Miền xác định

- $D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g.$
- $D_{f/g} = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}.$

Hàm sơ cấp là những hàm được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp của các hàm sơ cấp cơ bản và các hằng số.

(2) Hàm số sơ cấp.

Cho hai hàm số f và g . Ta xác định các phép toán

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$
- $(fg)(x) = f(x)g(x).$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$

Miền xác định

- $D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g.$
- $D_{f/g} = D_f \cap \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}.$

Hàm sơ cấp là những hàm được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp của các hàm sơ cấp cơ bản và các hằng số.

1.3. Giới hạn của hàm số

1.3.1. Khái niệm và tính chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Giới hạn $x \rightarrow x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0).$
- Giới hạn bên trái $x \rightarrow x_0^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : -\delta < x - x_0 < 0).$
- Giới hạn bên phải $x \rightarrow x_0^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta).$

1.3. Giới hạn của hàm số

1.3.1. Khái niệm và tính chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Giới hạn $x \rightarrow x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0).$
- Giới hạn bên trái $x \rightarrow x_0^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : -\delta < x - x_0 < 0).$
- Giới hạn bên phải $x \rightarrow x_0^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta).$

1.3. Giới hạn của hàm số

1.3.1. Khái niệm và tính chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Giới hạn $x \rightarrow x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0).$
- Giới hạn bên trái $x \rightarrow x_0^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : -\delta < x - x_0 < 0).$
- Giới hạn bên phải $x \rightarrow x_0^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta).$

1.3. Giới hạn của hàm số

1.3.1. Khái niệm và tính chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Giới hạn $x \rightarrow x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0).$$

- Giới hạn bên trái $x \rightarrow x_0^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x : -\delta < x - x_0 < 0).$$

- Giới hạn bên phải $x \rightarrow x_0^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x : 0 < x - x_0 < \delta).$$

1.3. Giới hạn của hàm số

1.3.1. Khái niệm và tính chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Giới hạn $x \rightarrow x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0).$$

- Giới hạn bên trái $x \rightarrow x_0^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x : -\delta < x - x_0 < 0).$$

- Giới hạn bên phải $x \rightarrow x_0^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \quad \forall x : 0 < x - x_0 < \delta).$$

1.3. Giới hạn của hàm số

1.3.1. Khái niệm và tính chất Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Giới hạn $x \rightarrow x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0).$
- Giới hạn bên trái $x \rightarrow x_0^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : -\delta < x - x_0 < 0).$
- Giới hạn bên phải $x \rightarrow x_0^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - a| < \epsilon \ \forall x : 0 < x - x_0 < \delta).$

Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}.$$

Tính chất.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \end{cases}$$

Tính chất.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \end{cases}$$

Example .

Tìm m, n để hàm số sau có giới hạn khi $x \rightarrow -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+m}{x+1}, & x < -1 \\ nx + 2, & x \geq -1. \end{cases}$$

Một số định nghĩa về giới hạn tại vô cực và giới hạn vô hạn (xem giáo trình)



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = A.$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm x_0} f(x) = \pm\infty.$$

1.2.2 Tính chất.

(1) **Tính chất 1.** Nếu $f(x)$ tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow x_0$, thì giới hạn đó là duy nhất.

(2) **Tính chất 2.** Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó

- $$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

1.2.2 Tính chất.

(1) Tính chất 1. Nếu $f(x)$ tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow x_0$, thì giới hạn đó là duy nhất.

(2) Tính chất 2. Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó

- $$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

1.2.2 Tính chất.

(1) Tính chất 1. Nếu $f(x)$ tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow x_0$, thì giới hạn đó là duy nhất.

(2) Tính chất 2. Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó

- $$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab.$$

- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

(3) Tính chất 3. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Khi đó $f(x)$ bị chặn trong lân cận của x_0 , có nghĩa, tồn tại số $M, \delta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

(3) Tính chất 3. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Khi đó $f(x)$ bị chặn trong lân cận của x_0 , có nghĩa, tồn tại số $M, \delta > 0$ sao cho

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

(4) Tính chất 4.

① Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, thì
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

② Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > m$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) > m \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

③ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < M$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) < M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

(4) Tính chất 4.

❶ Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, thì
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

❷ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > m$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) > m \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

❸ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < M$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) < M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

(4) Tính chất 4.

① Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, thì
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

② Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > m$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) > m \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

③ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < M$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) < M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

(4) Tính chất 4.

① Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, thì
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

② Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > m$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) > m \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

③ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < M$ thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho

$$f(x) < M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

(4) Tính chất 5: Nguyên lý kẹp.

Theorem .

$$\text{Nếu } \begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \end{cases}, \text{ thì}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$$

Ví dụ .

Tính

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)}{x} \sin \frac{1}{x}$$

(4) Tính chất 5: Nguyên lý kẹp.

Theorem .

Nếu $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \end{cases}$, thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$$

Ví dụ .

Tính

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Một số công thức liên quan tới số e .

$$① \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

1.2.3. Giới hạn của hàm đơn điệu.

Theorem .

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.2.3. Giới hạn của hàm đơn điệu.

Theorem .

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.2.3. Giới hạn của hàm đơn điệu.

Theorem .

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.2.3. Giới hạn của hàm đơn điệu.

Theorem .

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.2.3. Giới hạn của hàm đơn điệu.

Theorem .

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.2.3. Giới hạn của hàm đơn điệu.

Theorem .

(i) Giả sử $f(x)$ là hàm tăng trên (a, x_0) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn trên, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn trên, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

(ii) Giả sử $f(x)$ là hàm giảm trên (x_0, b) .

- Nếu $f(x)$ bị chặn dưới, thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới, thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

+) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.

+) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

+) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.

+) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

+) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.

+) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

- +) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.
- +) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

- +) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.
- +) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

- +) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.
- +) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

- +) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.
- +) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

- +) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.
- +) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

- +) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.
- +) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

1.4.1. Định nghĩa. (VCL, VCB)

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ thì $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ thì $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ.

- +) $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$ và $\frac{1}{\sin x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$.
- +) x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ và $\frac{1}{x^3}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$.

• Chú ý.

1. $f(x)$ là VCL khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.
2. $f(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

Do đó từ nay ta chỉ nghiên cứu tính VCB.

3. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ thì $(f(x) - a)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

1.4.1. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi

$x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

*) Đặc biệt nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB tương đương

khi $x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$.

1.4.1. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi

$x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

*) Đặc biệt nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB tương đương

khi $x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$.

1.4.1. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi

$x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

*) Đặc biệt nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB tương đương khi $x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$.

1.4.1. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi

$x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

*) Đặc biệt nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB tương đương

khi $x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$.

1.4.1. Các đại lượng vô cùng lớn (VCL), vô cùng bé (VCB).

(2) So sánh các VCB. Cho $f(x), g(x)$ là 2 VCB khi $x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \rightarrow x_0$.

Kí hiệu: $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$.

-) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi

$x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

*) Đặc biệt nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì $f(x), g(x)$ là 2 VCB tương đương

khi $x \rightarrow x_0$. Kí hiệu: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$.

• Ví dụ 1.

+) $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

+) $(x^2 - 1) = O(x - 1), x \rightarrow 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

• **Ví dụ 1.**

+) $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$.

+) $(x^2 - 1) = O(x - 1), x \rightarrow 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

• Ví dụ 2.

+) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

+) $\tan x \sim x, x \rightarrow 0$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

+) Tương tự ta có:

$$(e^x - 1) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\ln(x + 1) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2, x \rightarrow 0$$

• Ví dụ 2.

+) $\boxed{\sin x \sim x, x \rightarrow 0}$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

+) $\boxed{\tan x \sim x, x \rightarrow 0}$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

+) Tương tự ta có:

$$\boxed{(e^x - 1) \sim x, x \rightarrow 0}$$

$$\boxed{\ln(x + 1) \sim x, x \rightarrow 0}$$

$$\boxed{(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2, x \rightarrow 0}$$

• Ví dụ 2.

+) $\boxed{\sin x \sim x, x \rightarrow 0}$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

+) $\boxed{\tan x \sim x, x \rightarrow 0}$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

+) Tương tự ta có:

$$\boxed{(e^x - 1) \sim x, x \rightarrow 0}$$

$$\boxed{\ln(x + 1) \sim x, x \rightarrow 0}$$

$$\boxed{(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2, x \rightarrow 0}$$

Chú ý:



$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x), x \rightarrow x_0 \\ g(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0 \end{cases} \Rightarrow f(x)g(x) \sim f_1(x)g_1(x), x \rightarrow x_0.$$



$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x), x \rightarrow x_0 \\ g(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0 \end{cases} \nRightarrow f(x) \pm g(x) \sim f_1(x) \pm g_1(x).$$

• **Định lí.** Giả sử $f(x) \sim f_1(x), x \rightarrow x_0$ và $g(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a, \text{ thì}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x^2 + 3x}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos 3x}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x^2)}{e^{3x^2} - e^{x^2}}.$$

- **Định lí.** Giả sử $f(x) \sim f_1(x)$, $x \rightarrow x_0$ và $g(x) \sim g_1(x)$, $x \rightarrow x_0$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a, \text{ thì}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x^2 + 3x}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos 3x}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x^2)}{e^{3x^2} - e^{x^2}}.$$

• **Định lí.** Giả sử $f(x) \sim f_1(x), x \rightarrow x_0$ và $g(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a, \text{ thì}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x^2 + 3x}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos 3x}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x^2)}{e^{3x^2} - e^{x^2}}.$$

• **Định lí.** Giả sử $f(x) \sim f_1(x), x \rightarrow x_0$ và $g(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0$. Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = a, \text{ thì}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x^2 + 3x}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos 3x}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x^2)}{e^{3x^2} - e^{x^2}}.$$

1.5. Dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty$.

1.5.1. Dạng $\frac{0}{0}$. Dùng VCB tương đương hoặc sử dụng biến đổi thành nhân tử chung.

Example .

Tính

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + x \sin 3x)}{2^{x^2} - 1}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1 + x^2)}.$$

1.5. Dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty$.

1.5.1. Dạng $\frac{0}{0}$. Dùng VCB tương đương hoặc sử dụng biến đổi thành nhân tử chung.

Example .

Tính

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + x \sin 3x)}{2^{x^2} - 1}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln(1 + x^2)}.$$

1.5.2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Chú ý:

$$\frac{\sqrt{A}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x > 0 \\ -\sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

1.5.2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Chú ý:

$$\frac{\sqrt{A}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x > 0 \\ -\sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

1.5.2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Chú ý:

$$\frac{\sqrt{A}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x > 0 \\ -\sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

1.5.2. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Chú ý:

$$\frac{\sqrt{A}}{x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x > 0 \\ -\sqrt{\frac{A}{x^2}} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + 3x}{3x - 2}.$$

1.5.3. Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x).$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x).$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x) = +\infty$$

1.5.3. Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x).$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x).$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x) = +\infty$$

1.5.3. Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x).$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x).$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x) = +\infty$$

1.5.3. Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x).$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x).$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x) = +\infty$$

1.5.3. Dạng $\infty - \infty$.

- Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x).$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} + 2x).$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + x - 1} - 2x) = +\infty$$

1.5.4. Dạng 1^∞ . Chú ý

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow x_0$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-2}}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan 5x}}.$$

1.5.4. Dạng 1^∞ . Chú ý

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow x_0$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-2}}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan 5x}}.$$

1.5.4. Dạng 1^∞ . Chú ý

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow x_0$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-2}}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan 5x}}.$$

1.5.4. Dạng 1^∞ . Chú ý

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + a(x)\right)^{\frac{1}{a(x)}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow x_0$

nếu $a(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow x_0$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-2}}, \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan 5x}}.$$

1.5.4. Dạng 1^∞ . Chú ý

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + a(x)\right)^{\frac{1}{a(x)}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow x_0$

nếu $a(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow x_0$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-2}}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan 5x}}.$$

1.5.4. Dạng 1^∞ . Chú ý

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}} = e$$

nếu $a(x) \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow x_0$

• **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-2}}. \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \tan 5x}}.$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(4x+5)/4} \right)^{\frac{-(4x+5)}{4} \cdot \frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(4x+5)/4} \right)^{\frac{-(4x+5)}{4} \cdot \frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(4x+5)/4} \right)^{\frac{-(4x+5)}{4} \cdot \frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(4x+5)/4} \right)^{\frac{-(4x+5)}{4} \cdot \frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

- **Ví dụ.** Tính các giới hạn sau:

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{4x+5} \right)^{\frac{x^2-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(4x+5)/4} \right)^{\frac{-(4x+5)}{4} \cdot \frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4(x^2-1)}{x(4x+5)}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- **Gián đoạn** tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

1.6. Hàm số liên tục

1.6.1. Các khái niệm và tính chất cơ bản.

(1) Hàm số liên tục, liên tục trái và liên tục phải.

• **Định nghĩa.** Hàm số $f(x)$ được gọi là:

- liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- liên tục trái tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục phải tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

- liên tục trên $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x \in (a; b)$.

- liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và liên tục phải tại $x = a$, liên tục trái tại $x = b$.

- Gián đoạn tại $x = x_0$ nếu nó không liên tục tại x_0 .

- **Chú ý.**

- Hàm số liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu nó liên tục trái và liên tục phải tại x_0 .
- Đồ thị của hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ là đường liền trên đoạn đó.

$$y=f(x)$$

a

b

- **Chú ý.**

- Hàm số liên tục tại x_0 nếu và chỉ nếu nó liên tục trái và liên tục phải tại x_0 .
- Đồ thị của hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ là đường liền trên đoạn đó.

$$y=f(x)$$

a

b

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

• **Ví dụ.** Xét tính liên tục trái, liên tục phải và liên tục của hàm số sau tại $x = -1$ và $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{nếu } x \in (-\infty; -1] \cup (2; \infty) \\ 8 - 4x & \text{nếu } x \in (-1; 2] \end{cases}$$

+) Tại $x = -1$. $f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (|x| - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (8 - 4x) = 12$$

Vậy hàm số liên tục trái nhưng không liên tục tại $x = -1$.

+) Tại $x = 2$. $f(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (8 - 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x| - 2) = 0$$

(2) Tính chất.

- **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:
 $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 .
- **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.
- **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.
- **Ví dụ 1.**
 - Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R .
 - Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x+x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
 - Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .

Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 .

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**

- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R .

- Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x+x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

- Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .

Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 .

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**

- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R .

- Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x+x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

- Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Tính chất.

- **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:
 $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .
Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 .
- **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.
- **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.
- **Ví dụ 1.**
 - Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R .
 - Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x+x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
 - Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .

Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 .

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**

- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R .

- Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x+x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

- Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .

Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 .

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**

- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R .

- Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x+x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

- Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Tính chất.

• **Định lí 1.** Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 .

Nếu $g(x_0) \neq 0$ thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 .

• **Định lí 2.** Các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lượng giác, mũ, logarit, lũy thừa) liên tục trên tập xác định của chúng.

• **Chú ý.** Từ Định lí 1 và Định lí 2 suy ra tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp, hàm ngược của các hàm sơ cấp là liên tục trên TXĐ.

• **Ví dụ 1.**

- Hàm số $f(x) = x^4 - 3x + 5$ liên tục trên R .

- Hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{4e^x+x}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

- Hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục trên $R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$1. y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0$, $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên R .

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$1. y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0$, $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên R .

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$1. y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0$, $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên R .

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$1. y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0$, $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên R .

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$1. y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0$, $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên R .

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$1. y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. +) Tại $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

+) Tại $x = 0$, $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên R .

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$2. y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1)$. $f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.

+) Với $x \in (1; 2]$. $f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.

+) Tại $x = 1$. $f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0; 2] \setminus \{1\}$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$2. y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1)$, $f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.

+) Với $x \in (1; 2]$, $f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.

+) Tại $x = 1$, $f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0; 2] \setminus \{1\}$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$2. y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1)$, $f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.

+) Với $x \in (1; 2]$, $f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.

+) Tại $x = 1$, $f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0; 2] \setminus \{1\}$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$2. y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1)$, $f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.

+) Với $x \in (1; 2]$, $f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.

+) Tại $x = 1$, $f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0; 2] \setminus \{1\}$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$2. y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1)$, $f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.

+) Với $x \in (1; 2]$, $f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.

+) Tại $x = 1$, $f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0; 2] \setminus \{1\}$.

• **Ví dụ 2.** Xét tính liên tục của các hàm số:

$$2. y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Lời giải. +) Với $x \in [0; 1)$, $f(x) = 2x$ liên tục trên $[0; 1)$.

+) Với $x \in (1; 2]$, $f(x) = 2 - x$ liên tục trên $(1; 2]$.

+) Tại $x = 1$, $f(1) = 2$ và

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1.$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0; 2] \setminus \{1\}$.

1.6.2. Tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn.

(1) **Định lí.** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó $f(x)$ đạt max và min trên đoạn đó. Tức là: tồn tại $x_1, x_2 \in [a; b]$ sao cho

$$f(x_1) = \max_{[a; b]} f(x) := M; \quad f(x_2) = \min_{[a; b]} f(x) := m.$$

Hơn nữa, với mọi giá trị $d \in [m; M]$ luôn tồn tại $x_0 \in [a; b]$ sao cho $f(x_0) = d$.

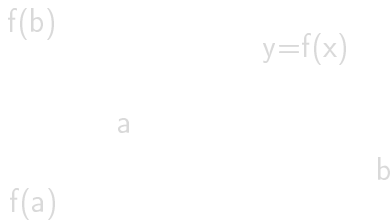
1.6.2. Tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn.

(1) Định lí. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó $f(x)$ đạt max và min trên đoạn đó. Tức là: tồn tại $x_1, x_2 \in [a; b]$ sao cho

$$f(x_1) = \max_{[a;b]} f(x) := M; \quad f(x_2) = \min_{[a;b]} f(x) := m.$$

Hơn nữa, với mọi giá trị $d \in [m; M]$ luôn tồn tại $x_0 \in [a; b]$ sao cho $f(x_0) = d$.

(2) Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$.



(2) Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$.

$f(b)$

$y=f(x)$

a

b

$f(a)$

Example .

Chứng minh rằng các phương trình sau có ít nhất một nghiệm thực

- (a) $x^5 + 4x^4 - x^3 + 7x + \sqrt{2} = 0$
- (b) $3x + \sin(\pi x) + 4 = 0.$

Example .

Cho hàm số liên tục $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$f(x_0) = x_0.$$

Bài tập.

1. Tìm m để hàm số sau liên tục tại $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{e^x - e^{-x}}, & 0 < |x| < 1, \\ m, & x = 0. \end{cases}$$

2. Cho $ab \neq 0$. Xét tính liên tục tại $x = 0$ của

$$f(x) = \begin{cases} (\cos ax)^{1/(x \sin bx)}, & x \neq 0, \\ -\frac{a^2}{2b}, & x = 0. \end{cases}$$