

Bài giảng Giải tích 1

Vũ Hữu Nhựt

Chương 2: Phép tính vi phân của hàm một biến

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

1. Bài toán vật lý.

- ▶ Xét một chất điểm M chuyển động theo công thức:

$$S = f(t)$$

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

1. Bài toán vật lý.

- ▶ Xét một chất điểm M chuyển động theo công thức:

$$S = f(t)$$

- ▶ Vận tốc $v = f'(t)$

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong

1. Bài toán vật lý.

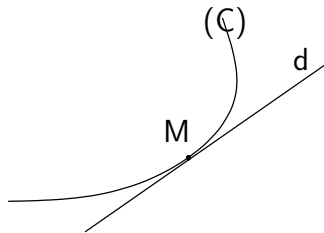
- ▶ Xét một chất điểm M chuyển động theo công thức:

$$S = f(t)$$

- ▶ Vận tốc $v = f'(t)$
- ▶ Gia tốc $a = f''(t)$

2.1. Đạo hàm

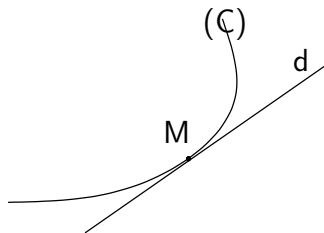
2.1.1. Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong



2. Tiếp tuyến của đường cong.

2.1. Đạo hàm

2.1.1. Bài toán vật lý và tiếp tuyến của đường cong



2. Tiếp tuyến của đường cong.

+ Tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ là:

$$d : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

2.1.2. Các khái niệm

2.1.2. Các khái niệm

(1) Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

2.1.2. Các khái niệm

(1) Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

- Nếu hàm số có đạo hàm tại $x = x_0$, ta nói hàm số *khả vi* tại $x = x_0$.

2.1.2. Các khái niệm

(2) Ý nghĩa:

2.1.2. Các khái niệm

(2) Ý nghĩa:

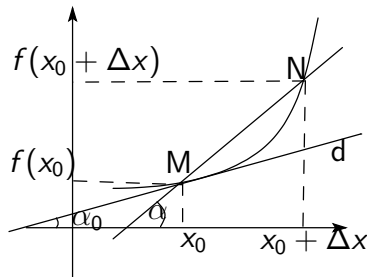
Hệ số góc của MN là:

$$\tan \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2)$$

Khi $\Delta x \rightarrow 0$ suy ra

$N \rightarrow M, \quad MN \rightarrow d, \quad \alpha \rightarrow \alpha_0$

$\implies \tan \alpha_0 = f'(x_0).$



2.1.2. Các khái niệm

2.1.2. Các khái niệm

(3) Từ định nghĩa (1) ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

2.1.2. Các khái niệm

(3) Từ định nghĩa (1) ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 , thì $f(x)$ liên tục tại x_0 . Điều ngược lại không đúng.

2.1.2. Các khái niệm

(3) Từ định nghĩa (1) ta có:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 , thì $f(x)$ liên tục tại x_0 . Điều ngược lại không đúng.

Chẳng hạn: hàm số $y = f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không khả vi tại $x = 0$.

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

+) $f(x) = c$ – hằng số

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

+) $f(x) = c$ – hằng số $\implies f'(x) = 0$.

2.1.2. Các khái niệm

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c$ – hằng số $\implies f'(x) = 0$.

+) $f(x) = x$

2.1.2. Các khái niệm

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c$ – hằng số $\implies f'(x) = 0$.

+) $f(x) = x \implies f'(x) = 1$.

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

+) $f(x) = c - \text{hằng số} \implies f'(x) = 0.$

+) $f(x) = x \implies f'(x) = 1.$

+) $f(x) = \sin x$

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

+) $f(x) = c$ – hằng số $\implies f'(x) = 0$.

+) $f(x) = x \implies f'(x) = 1$.

+) $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$.

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

+) $f(x) = c$ – hằng số $\implies f'(x) = 0$.

+) $f(x) = x \implies f'(x) = 1$.

+) $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$.

+) $f(x) = e^x$

2.1.2. Các khái niệm

- **Ví dụ:**

+) $f(x) = c - \text{hằng số} \implies f'(x) = 0.$

+) $f(x) = x \implies f'(x) = 1.$

+) $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x.$

+) $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x.$

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

+) $f(x) = c$ – hằng số $\implies f'(x) = 0$.

+) $f(x) = x \implies f'(x) = 1$.

+) $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$.

+) $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$.

+) $f(x) = \ln x$

2.1.2. Các khái niệm

- Ví dụ:

+) $f(x) = c - \text{hằng số} \implies f'(x) = 0.$

+) $f(x) = x \implies f'(x) = 1.$

+) $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x.$

+) $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x.$

+) $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x}.$

2.1.2. Các khái niệm

(4) Đạo hàm một phía

2.1.2. Các khái niệm

(4) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

2.1.2. Các khái niệm

(4) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

2.1.2. Các khái niệm

(4) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- Đạo hàm *bên trái* của hàm số tại $x = x_0$:

2.1.2. Các khái niệm

(4) Đạo hàm một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Đạo hàm *bên phải* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- Đạo hàm *bên trái* của hàm số tại $x = x_0$:

$$f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Định lí (Điều kiện tồn tại đạo hàm)

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ khi và chỉ khi

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = a.$$

Khi đó $f'(x_0) = a$.

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

(4) Đạo hàm một phía

• **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$+) f'_-(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 1** Tính đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại $x = 0$ của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm số trên có khả vi tại $x = 0$ không?

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

+)

$$f'_-(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Vậy hàm số $y = |x|$ không khả vi tại $x = 0$.

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$$

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$$

$$+) f'_-(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x}$$

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$$

$$\begin{aligned} +) f'_-(0) &:= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left[a + \frac{b}{\Delta x} \right] = \begin{cases} a & \text{nếu } b = 0 \\ \infty & \text{nếu } b \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$$

$$\begin{aligned} +) f'_-(0) &:= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left[a + \frac{b}{\Delta x} \right] = \begin{cases} a & \text{nếu } b = 0 \\ \infty & \text{nếu } b \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy: Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi $a = b = 0$.

(4) Đạo hàm một phía

- **Ví dụ 2** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ ax + b & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $f'(0) = ?$

Ta có:

$$+) f'_+(0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0.$$

$$\begin{aligned} +) f'_-(0) &:= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{a\Delta x + b}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left[a + \frac{b}{\Delta x} \right] = \begin{cases} a & \text{nếu } b = 0 \\ \infty & \text{nếu } b \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy: Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi $a = b = 0$. Khi đó:
 $f'(0) = 0$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(1) Định lí 1. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Khi đó: $f(x) + g(x)$ và $f(x)g(x)$ khả vi tại x . Hơn nữa:

$$(i) [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$$

$$(ii) [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(1) Định lí 1. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Khi đó: $f(x) + g(x)$ và $f(x)g(x)$ khả vi tại x . Hơn nữa:

(i) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$

(ii) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$

(iii) Nếu $g(x) \neq 0$, thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng khả vi tại x và

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- Hàm số hợp.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \rightarrow (c; d)$ và $f : (c; d) \rightarrow (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \rightarrow (m; n)$ cho bởi:

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \rightarrow (c; d)$ và $f : (c; d) \rightarrow (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \rightarrow (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

• **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \rightarrow (c; d)$ và $f : (c; d) \rightarrow (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \rightarrow (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$.

Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \rightarrow (c; d)$ và $f : (c; d) \rightarrow (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \rightarrow (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$.

Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.

- **Ví dụ.** Cho $u(x) = x^2 + x - 2$ và $f(u) = \sin 3u$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số hợp.** Cho hàm số $u : (a; b) \rightarrow (c; d)$ và $f : (c; d) \rightarrow (m; n)$. Khi đó ta có hàm số: $h : (a; b) \rightarrow (m; n)$ cho bởi:

$$h(x) = f(u(x)).$$

Hàm số $h(x)$ được gọi là hàm số hợp của hai hàm số $u(x)$ và $f(u)$.

Kí hiệu: $h(x) = f(u(x))$ hoặc $h = f \circ u$.

- **Ví dụ.** Cho $u(x) = x^2 + x - 2$ và $f(u) = \sin 3u$. Khi đó:

$$h(x) = f(u(x)) = \sin 3(x^2 + x - 2).$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(2) Định lí 2. (Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0 , hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(2) Định lí 2. (Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0 , hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(2) Định lí 2. (Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0 , hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

- **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(2) Định lí 2. (Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0 , hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

- **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.
Đặt $u = \sin x \implies y = e^u$. Ta có:

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(2) Định lí 2. (Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0 , hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.

Đặt $u = \sin x \implies y = e^u$. Ta có:

$$u'_x = \cos x, \quad y'_u = e^u$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(2) Định lí 2. (Đạo hàm hàm số hợp) Giả sử hàm số $u = u(x)$ khả vi tại x_0 , hàm số $f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$. Khi đó hàm số hợp $y = h(x) = f(u(x))$ khả vi tại x_0 và

$$h'(x_0) = f'_u(u_0)u'_x(x_0).$$

Hay ta hay dùng công thức sau:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm của hàm số: $y = e^{\sin x}$.

Đặt $u = \sin x \implies y = e^u$. Ta có:

$$u'_x = \cos x, \quad y'_u = e^u$$

$$\implies y' = y'_x = y'_u u'_x = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược.** Cho song ánh

$$f : [a; b] \rightarrow [c; d]$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược.** Cho song ánh

$$\begin{aligned}f &: [a; b] \rightarrow [c; d] \\ x &\mapsto y = f(x)\end{aligned}$$

Hàm số ngược (ánh xạ ngược) xác định bởi

$$\begin{aligned}f^{-1} &: [c; d] \rightarrow [a; b] \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y)\end{aligned}$$

sao cho $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$ với mọi $x \in [a; b], y \in [c; d]$.

Kí hiệu: $y = f^{-1}(x)$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Ví dụ 1.** Cho song ánh

$$f : R \rightarrow R$$

$$x \mapsto y = f(x) = 3x - 1$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Ví dụ 1.** Cho song ánh

$$f : R \rightarrow R$$

$$x \mapsto y = f(x) = 3x - 1$$

Suy ra

$$f^{-1} : R \rightarrow R$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}.$$

Vậy hàm số ngược là $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- Hàm số ngược của hàm số lượng giác.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

cho bởi $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin y$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

cho bởi $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

cho bởi $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

cho bởi $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ song ánh

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

cho bởi $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

cho bởi $y = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \tan y$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

cho bởi $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

cho bởi $y = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \tan y$.

+) Hàm số $\cot : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ song ánh

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

- **Hàm số ngược của hàm số lượng giác.**

+) Hàm số $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

cho bởi $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \sin y$.

+) Hàm số $\cos : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arccos : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$

cho bởi $y = \arccos x \in [0; \pi] \Leftrightarrow x = \cos y$.

+) Hàm số $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

cho bởi $y = \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \tan y$.

+) Hàm số $\cot : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ song ánh

$\implies$ hàm số ngược $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi)$

cho bởi $y = \operatorname{arccot} x \in (0; \pi) \Leftrightarrow x = \cot y$.

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

(3) Định lí 3 (*Đạo hàm hàm số ngược*) Giả sử song ánh liên tục $f : [a; b] \rightarrow [c; d]$ có hàm số ngược $g = f^{-1} : [c; d] \rightarrow [a; b]$. Nếu $f(x)$ khả vi tại $x_0 \in (a; b)$, thì hàm số ngược $g(y)$ cũng khả vi tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với } -1 < x < 1,$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với } -1 < x < 1,$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với } -1 < x < 1,$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

Từ Định lí 3, ta suy ra các công thức sau:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với } -1 < x < 1,$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{với } -1 < x < 1,$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{với } x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad \text{với } x \in \mathbb{R}.$$

$$(shx)' = chx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(chx)' = shx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(cothx)' = \frac{-1}{sh^2 x}, \quad \forall x \neq 0.$$

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3. Các quy tắc tính đạo hàm

Bảng đạo hàm của các hàm sơ cấp:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (\alpha \neq -1);$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u', (\alpha \neq -1);$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = u' e^u, \quad (a^u)' = u' a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

và đạo hàm của hàm lượng giác ngược, hàm lượng giác hyperbolic.

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1.

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1.

(1) Định nghĩa. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 . Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1.

(1) Định nghĩa. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 . Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1.

(1) Định nghĩa. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 . Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

Trong trường hợp tổng quát, kí hiệu:

$$df = f'(x)\Delta x$$

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1.

(1) Định nghĩa. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 . Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

Trong trường hợp tổng quát, kí hiệu:

$$df = f'(x)\Delta x$$

- Xét $f(x) = x \implies dx = \Delta x$.

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa vi phân. Tính bất biến của vi phân cấp 1.

(1) Định nghĩa. Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 . Khi đó:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Ta gọi $df(x_0) := f'(x_0)\Delta x$ là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$.

Trong trường hợp tổng quát, kí hiệu:

$$df = f'(x)\Delta x$$

- Xét $f(x) = x \implies dx = \Delta x$.
- Vì vậy ta luôn có:

$$\boxed{df = f'(x)dx} \quad \text{hay} \quad \boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}.$$

- **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = \arctan 3x$.

- **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = \arctan 3x$.
Ta có.

$$dy = y' dx = \frac{3}{1 + 9x^2} dx.$$

(2) Quy tắc tính vi phân.

(2) Quy tắc tính vi phân.

$$d(u + v) = du + dv$$

(2) Quy tắc tính vi phân.

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(uv) = vdu + udv, \quad d(cu) = cdu \quad \text{với } c \text{ là hằng số}$$

(2) Quy tắc tính vi phân.

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(uv) = vdu + u dv, \quad d(cu) = cdu \quad \text{với } c \text{ là hằng số}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

- **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = f(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$. Tính $dy(\pi) = ?$.

- **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = f(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$. Tính $dy(\pi) = ?$.
Ta có.

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\frac{e^{\sin x}}{x}\right) = \frac{xd(e^{\sin x}) - e^{\sin x}dx}{x^2} \\ &= \frac{xe^{\sin x} \cos x dx - e^{\sin x} dx}{x^2} = \frac{(x \cos x - 1)e^{\sin x}}{x^2} dx. \end{aligned}$$

- **Ví dụ.** Tính vi phân của hàm số sau $y = f(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$. Tính $dy(\pi) = ?$.
Ta có.

$$\begin{aligned} dy &= d\left(\frac{e^{\sin x}}{x}\right) = \frac{xd(e^{\sin x}) - e^{\sin x}dx}{x^2} \\ &= \frac{xe^{\sin x} \cos x dx - e^{\sin x} dx}{x^2} = \frac{(x \cos x - 1)e^{\sin x}}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Suy ra

$$dy(\pi) = \frac{-\pi - 1}{\pi^2} dx.$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$df = f'_u du = f'_x dx.$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$df = f'_u du = f'_x dx.$$

Chứng minh. Ta có

$$df = f'_u du \quad \text{và} \quad du = u'_x dx$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$df = f'_u du = f'_x dx.$$

Chứng minh. Ta có

$$df = f'_u du \quad \text{và} \quad du = u'_x dx \quad \implies \quad df = f'_u u'_x dx.$$

(3) Tính bất biến của vi phân cấp 1.

Cho 2 hàm số khả vi $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Khi đó ta có hàm số hợp $y = f(u(x))$ và công thức vi phân

$$df = f'_u du = f'_x dx.$$

Chứng minh. Ta có

$$df = f'_u du \quad \text{và} \quad du = u'_x dx \quad \implies \quad df = f'_u u'_x dx.$$

Theo công thức đạo hàm hàm hợp, ta suy ra

$$df = f'_x dx.$$

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \quad (*)$$

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \quad (*)$$

Ta có: $x = 0 \implies y(0) = 0$.

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \quad (*)$$

Ta có: $x = 0 \implies y(0) = 0$.

Vì phân 2 vế đẳng thức (*) ta được:

$$3y^2 dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos x dx$$

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \quad (*)$$

Ta có: $x = 0 \implies y(0) = 0$.

Vì phân 2 vế đẳng thức (*) ta được:

$$3y^2 dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos x dx \Leftrightarrow$$

$$(3y^2 + x + 1)dy = (2x - \cos x - y)dx$$

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \quad (*)$$

Ta có: $x = 0 \implies y(0) = 0$.

Vì phân 2 vế đẳng thức (*) ta được:

$$3y^2 dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos x dx \Leftrightarrow$$

$$(3y^2 + x + 1)dy = (2x - \cos x - y)dx \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x - \cos x - y}{3y^2 + x + 1}$$

- **Ví dụ:** Tính đạo hàm $y'_x(0)$ với $y = y(x)$ thỏa mãn

$$y^3 + yx + y = x^2 - \sin x. \quad (*)$$

Ta có: $x = 0 \implies y(0) = 0$.

Vì phân 2 vế đẳng thức (*) ta được:

$$3y^2 dy + ydx + xdy + dy = 2xdx - \cos x dx \Leftrightarrow$$

$$(3y^2 + x + 1)dy = (2x - \cos x - y)dx \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x - \cos x - y}{3y^2 + x + 1}$$

$$\text{Thay } x = 0, y = y(0) = 0 \implies y'(0) = -1.$$

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

Cho hàm số $y = y(t)$ và $x = x(t)$ khả vi theo t .

$$\implies y'_x = ? \quad \text{và} \quad x'_y = ?.$$

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

Cho hàm số $y = y(t)$ và $x = x(t)$ khả vi theo t .

$$\implies y'_x = ? \quad \text{và} \quad x'_y = ?.$$

Ta có.

$$dy = y'_t dt$$

$$dx = x'_t dt$$

(4) Tính đạo hàm của hàm theo tham số.

Cho hàm số $y = y(t)$ và $x = x(t)$ khả vi theo t .

$$\implies y'_x = ? \quad \text{và} \quad x'_y = ?.$$

Ta có.

$$dy = y'_t dt$$

$$dx = x'_t dt$$

Suy ra

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{và} \quad x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{x'_t}{y'_t}.$$

• **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2 + 3t + 1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm $y'_x|_{t=0}=?$ và $x'_y|_{t=0}=?$

• **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2 + 3t + 1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm

$y'_x|_{t=0}=?$ và $x'_y|_{t=0}=?$

Ta có.

$$y'(t) = \frac{2t + 3}{(t^2 + 3t + 1)} \quad \text{và} \quad x'(t) = e^t$$

• **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2 + 3t + 1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm

$y'_x|_{t=0}=?$ và $x'_y|_{t=0}=?$

Ta có.

$$y'(t) = \frac{2t + 3}{(t^2 + 3t + 1)} \quad \text{và} \quad x'(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } y'_x &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t + 3}{e^t(t^2 + 3t + 1)} \\ &\implies y'_x|_{t=0} = 3. \end{aligned}$$

• **Ví dụ.** Cho $\begin{cases} y = \ln(t^2 + 3t + 1) \\ x = e^t \end{cases}$. Tính đạo hàm

$y'_x|_{t=0}=?$ và $x'_y|_{t=0}=?$

Ta có.

$$y'(t) = \frac{2t + 3}{(t^2 + 3t + 1)} \quad \text{và} \quad x'(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } y'_x &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t + 3}{e^t(t^2 + 3t + 1)} \\ \implies y'_x|_{t=0} &= 3. \end{aligned}$$

Tương tự,

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{e^t(t^2 + 3t + 1)}{2t + 3} \\ \implies x'_y|_{t=0} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2.2.2. Các định lí giá trị trung bình.

2.2.2. Các định lí giá trị trung bình.

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:

2.2.2. Các định lý giá trị trung bình.

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:

- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

2.2.2. Các định lí giá trị trung bình.

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:

- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực tiểu* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

2.2.2. Các định lý giá trị trung bình.

Cực trị. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Điểm $x_0 \in (a; b)$ được gọi là:

- *cực đại* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

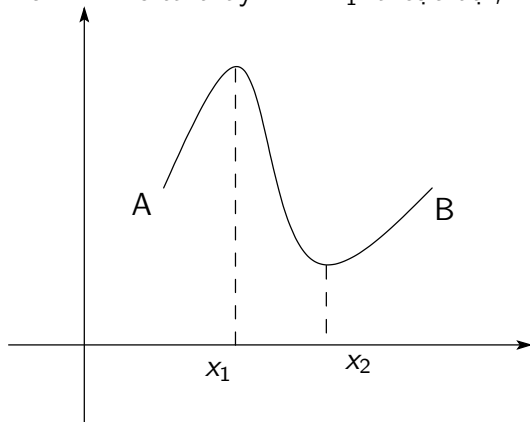
$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực tiểu* nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0) \quad \text{với mọi} \quad |\Delta x| < \delta.$$

- *cực trị* nếu x_0 hoặc là cực đại, hoặc là cực tiểu.

Từ hình vẽ ta thấy: $x = x_1$ là cực đại, $x = x_2$ là cực tiểu.



(1) Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \quad (1)$$

(1) Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \quad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu.

(1) Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \quad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu. Khi đó, ta có:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\text{và } f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

(1) Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \quad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu. Khi đó, ta có:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\text{và } f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Vì hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = x_0$, nên ta có
 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0.$

(1) Định lí 1. (Định lí Fermat)

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi trên $(a; b)$. Nếu $x = x_0 \in (a; b)$ là cực trị của $f(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0. \quad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $x = x_0$ là cực tiểu. Khi đó, ta có:

$$f'_+(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$\text{và } f'_-(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

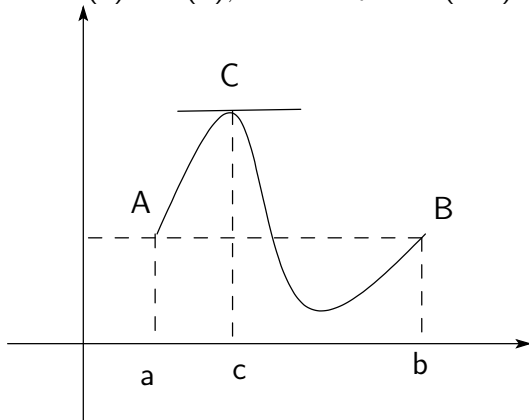
Vì hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = x_0$, nên ta có
 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. Trường hợp $x = x_0$ là cực đại chứng minh tương tự.

(2) Hệ quả. (Định lí Rolle).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$.
Nếu $f(a) = f(b)$, thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

(2) Hệ quả. (Định lí Rolle).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$.
Nếu $f(a) = f(b)$, thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.



• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x - 2)(x + 3)^2(e^{2x} + 3) + 5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x - 2)(x + 3)^2(e^{2x} + 3) + 5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x - 2)(x + 3)^2(e^{2x} + 3) + 5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$f(2) = f(-3) = 5.$$

• Ví dụ.

Cho $f(x) = (x - 2)(x + 3)^2(e^{2x} + 3) + 5$. CMR phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

LG. Ta có, $f(x)$ liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$f(2) = f(-3) = 5.$$

Theo định lí Rolle, phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-3; 2)$.

Example

Thử lại Định lý Rolle đối với hàm số sau trên đoạn $[1, 3]$

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Tìm số **trung gian** c ?

(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$.
Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$.
Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$.
Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x).$$

(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$.
Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x).$$

Hơn nữa $h(a) = h(b) = 0$, nên theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $h'(c) = 0$.

(3) Định lí 2. (Định lí Lagrange).

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$.
Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2)$$

Chứng minh. Đặt

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x).$$

Khi đó, $h(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$ và

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x).$$

Hơn nữa $h(a) = h(b) = 0$, nên theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $h'(c) = 0$. Hay $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0;1). \quad (3).$$

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0; 1). \quad (3).$$

Thật vậy. Thay $a = x$, $b = x + h$ và $c = x + \theta h$ vào (2) ta có:

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \in (0; 1),$$

$$f(x+h) - f(x) = f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = f'(x+\theta h)h.$$

- **Chú ý.** Từ định lí 2 suy ra

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h, \quad \theta \in (0; 1). \quad (3).$$

Thật vậy. Thay $a = x$, $b = x + h$ và $c = x + \theta h$ vào (2) ta có:

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \in (0; 1),$$

$$f(x+h) - f(x) = f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = f'(x+\theta h)h.$$

Nhận xét. Công thức (3) cho ta tính giá trị của f tại điểm gần x khi biết giá trị $f(x)$ và giá trị của đạo hàm f' tại những điểm gần x .

• Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

• Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.

• Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.

$f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f(0) = 0$, $f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

• Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.

$f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f(0) = 0$, $f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

• Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.

$f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f(0) = 0$, $f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

$$c = \frac{-4 - \sqrt{31}}{3} \quad (\text{loại}) \quad \text{hoặc} \quad c = \frac{-4 + \sqrt{31}}{3}.$$

• Ví dụ 1.

Tìm số **trung gian** c trong định lí Lagrange biết

$$f(x) = x^3 + 4x^2, a = 0, b = 1.$$

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và khả vi trong $(0; 1)$.

$f'(x) = 3x^2 + 8x$, $f(0) = 0$, $f(1) = 5$. Từ công thức Lagrange, tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow 3c^2 + 8c = 5$$

$$c = \frac{-4 - \sqrt{31}}{3} \quad (\text{loại}) \quad \text{hoặc} \quad c = \frac{-4 + \sqrt{31}}{3}.$$

$$\text{Vậy } c = \frac{-4 + \sqrt{31}}{3}.$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

$$2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

$$2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

$$1) \text{ Đặt } f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x.$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

$$2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại c nằm giữa a và b sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a) \cos c$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

$$2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại c nằm giữa a và b sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a) \cos c$$

$$\implies |\sin b - \sin a| = |\cos c| |b - a| \leq |b - a|.$$

• Ví dụ 2.

Chứng minh rằng:

$$1) |\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

$$2) |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

1) Đặt $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$. Theo công thức Lagrange, tồn tại c nằm giữa a và b sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a) \cos c$$

$$\implies |\sin b - \sin a| = |\cos c| |b - a| \leq |b - a|.$$

2) Tương tự $f(x) = \arctan x$.

(4) Định lí 3. (Định lí Cauchy).

Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Giả sử $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(4) Định lí 3. (Định lí Cauchy).

Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$. Giả sử $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Chú ý. Khi $g(x) = x$ thì Định lí Cauchy trở thành Định lí Lagrange.

2.2.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

2.2.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- DH cấp 1: $f'(x)$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$

2.2.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- DH cấp 1: $f'(x)$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$

2.2.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- DH cấp 1: $f'(x)$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$

- DH cấp 2: $f''(x) = (f'(x))'$

- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$

- DH cấp n: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

- VP cấp n: $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$

2.2.3. Đạo hàm và vi phân cấp cao. Quy tắc tính đạo hàm cấp cao. Khai triển Taylor.

(1) Đạo hàm và vi phân cấp cao. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$.

- DH cấp 1: $f'(x)$

- VP cấp 1: $df = f'(x)dx$

- DH cấp 2: $f''(x) = (f'(x))'$

- VP cấp 2: $d^2f = f''(x)dx^2$

- DH cấp n: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

- VP cấp n: $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$

Chú ý. Từ định nghĩa ta có công thức

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

- **Ví dụ 1.** Bằng qui nạp ta chứng minh được một số công thức sau:

• **Ví dụ 1.** Bằng qui nạp ta chứng minh được một số công thức sau:

$$1) \quad (x^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} & \text{nếu } n \leq k \\ 0 & \text{nếu } n > k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$2) \quad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, \quad n \geq 1$$

$$3) \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \geq 1$$

$$4) \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \geq 1$$

- **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x - 1}{3x + 2}.$$

- **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x - 1}{3x + 2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x + 2)^{-1},$

• **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x - 1}{3x + 2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x + 2)^{-1},$

$$\Rightarrow y' = -5(-1) \cdot 3 \cdot (3x + 2)^{-2} = -5(-1) \frac{3}{(3x+2)^2},$$

• **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x - 1}{3x + 2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x + 2)^{-1},$

$$\Rightarrow y' = -5(-1) \cdot 3 \cdot (3x + 2)^{-2} = -5(-1) \frac{3}{(3x+2)^2},$$

$$y'' = -5 \cdot (-1)(-2) \cdot 3^2 (3x + 2)^{-3} = -5(-1)(-2) \frac{3^2}{(3x+2)^3};$$

• **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x - 1}{3x + 2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x + 2)^{-1},$

$$\Rightarrow y' = -5(-1) \cdot 3 \cdot (3x + 2)^{-2} = -5(-1) \frac{3}{(3x+2)^2},$$

$$y'' = -5 \cdot (-1)(-2) \cdot 3^2 (3x + 2)^{-3} = -5(-1)(-2) \frac{3^2}{(3x+2)^3};$$

$$y''' = -5 \cdot (-1)(-2)(-3) \cdot 3^3 (3x + 2)^{-4} = \\ -5(-1)(-2)(-3) \frac{3^3}{(3x+2)^4}$$

• **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \frac{6x - 1}{3x + 2}.$$

Ta có: $y = 2 - \frac{5}{(3x+2)} = 2 - 5(3x + 2)^{-1},$

$$\Rightarrow y' = -5(-1).3.(3x + 2)^{-2} = -5(-1)\frac{3}{(3x+2)^2},$$

$$y'' = -5.(-1)(-2).3^2(3x + 2)^{-3} = -5(-1)(-2)\frac{3^2}{(3x+2)^3};$$

$$y''' = -5.(-1)(-2)(-3).3^3(3x + 2)^{-4} = \\ -5(-1)(-2)(-3)\frac{3^3}{(3x+2)^4}$$

Tổng quát (chứng minh bằng qui nạp) ta có:

$$y^{(n)} = -5(-1)(-2) \cdots (-n) \frac{3^n}{(3x + 2)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}.5.3^n.n!}{(3x + 2)^{n+1}}$$

(2) Quy tắc tính đạo hàm cấp cao.

(2) Quy tắc tính đạo hàm cấp cao.

a) $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \quad (\lambda u)^{(n)} = \lambda u^{(n)}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) Công thức Leibnitz.

(2) Quy tắc tính đạo hàm cấp cao.

a) $\boxed{(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}}, \quad \boxed{(\lambda u)^{(n)} = \lambda u^{(n)}, \lambda \in \mathbb{R}}$

b) Công thức Leibnitz.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

với $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad u^{(0)} = u, v^{(0)} = v.$

- **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp $n (n \geq 3)$ của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp $n (n \geq 3)$ của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.

Đặt: $u = x^2 + x + 1, \quad v = e^{3x}$.

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp $n (n \geq 3)$ của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.

Đặt: $u = x^2 + x + 1$, $v = e^{3x}$. Ta có,

$$u' = 2x + 1, u'' = 2, u^{(k)} = 0 \text{ với mọi } k \geq 3, \text{ và } v^{(k)} = 3^k e^{3x}.$$

• **Ví dụ.** Tính đạo hàm cấp $n (n \geq 3)$ của hàm số $y = (x^2 + x + 1)e^{3x}$.

Đặt: $u = x^2 + x + 1$, $v = e^{3x}$. Ta có,

$$u' = 2x + 1, u'' = 2, u^{(k)} = 0 \text{ với mọi } k \geq 3, \text{ và } v^{(k)} = 3^k e^{3x}.$$

Theo công thức Leibnitz, suy ra

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \\ &= C_n^0 u^{(0)} v^{(n)} + C_n^1 u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^2 u^{(2)} v^{(n-2)} + 0 \end{aligned}$$

Hay

$$y^{(n)} = [(x^2 + x + 1)3^n + n(2x + 1)3^{n-1} + n(n-1)3^{n-2}]e^{3x}$$

(3) Công thức khai triển Taylor.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

(3) Công thức khai triển Taylor.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

- Áp dụng định lí Lagrange với $a = x_0, b = x_0 + h$, tồn tại $\theta \in (0; 1)$ sao cho

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h \\&= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0).\end{aligned}$$

(3) Công thức khai triển Taylor.

Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Xét $x_0, x = x_0 + h \in (a; b)$.

- Áp dụng định lí Lagrange với $a = x_0, b = x_0 + h$, tồn tại $\theta \in (0; 1)$ sao cho

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h \\&= f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0).\end{aligned}$$

- Tổng quát ta có định lí sau:

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1). (1)$$

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1). (1)$$

- Phần đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(1) Định lí (Công thức khai triển Taylor)

Giả sử $f(x)$ khả vi liên tục cấp n trên $[a; b]$ và khả vi cấp $(n+1)$ trên $(a; b)$. Xét $x, x_0 \in (a; b)$. Ta có công thức khai triển sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \theta \in (0; 1). (1)$$

- Phần đa thức

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

- Phần dư:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= o((x - x_0)^n). \end{aligned}$$

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1') \end{aligned}$$

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

Chú ý 2. Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc n , ta có khai triển sau:

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

Chú ý 2. Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc n , ta có khai triển sau:

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Chú ý 1. Công thức khai triển Taylor (1) có dạng khác:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (1')$$

Chú ý 2. Khi hàm số $f(x)$ là đa thức bậc n , ta có khai triển sau:

$$f(x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(2) Công thức khai triển Maclaurin. Khi $x_0 = 0$, ta có công thức khai triển Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (2)$$

Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ta có. $P'(x) = 5x^4 - 6x$, $P''(x) = 20x^3 - 6$, $P'''(x) = 60x^2$, $P^{(4)}(x) = 120x$, $P^{(5)}(x) = 120$.

Ví dụ 1.

Viết thành đa thức của ẩn $X = x - 1$ của đa thức

$$P(x) = x^5 - 3x^2 - 1.$$

Ta có. $P'(x) = 5x^4 - 6x$, $P''(x) = 20x^3 - 6$, $P'''(x) = 60x^2$, $P^{(4)}(x) = 120x$, $P^{(5)}(x) = 120$.

Theo công thức khai triển Taylor ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &+ \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{P^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 \\ &= -3 + \frac{-1}{1!}(x-1) + \frac{14}{2!}(x-1)^2 + \frac{60}{3!}(x-1)^3 \\ &+ \frac{120}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.

Công thức khai triển Maclaurin:

$$\begin{aligned}e^x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\&= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

Ví dụ 2.

Viết khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

Ta có. $f^{(n)}(x) = e^x$.

Công thức khai triển Maclaurin:

$$\begin{aligned}e^x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\&= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

• **Đặt biệt ta có khai triển sau:**

$$e^x = 1 + x + o(x).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \neq 0$, 2. $f(x) = \sin x$, 3. $f(x) = \cos x$

Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \neq 0$, 2. $f(x) = \sin x$, 3. $f(x) = \cos x$

Ta có.

Ví dụ 3.

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \neq 0$, 2. $f(x) = \sin x$, 3. $f(x) = \cos x$

Ta có.

$$1. (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

$$2. \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

(4) Ứng dụng.

(4) Ứng dụng.

- Tính giới hạn. **Chú ý**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0, \quad o(\lambda f(x)) = \lambda o(f(x)), \lambda \in \mathbb{R}$$

(4) Ứng dụng.

- Tính giới hạn. **Chú ý**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0, \quad o(\lambda f(x)) = \lambda o(f(x)), \lambda \in \mathbb{R}$$

- Tính gần đúng.

(4) Ứng dụng.

- Tính giới hạn. **Chú ý**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0, \quad o(\lambda f(x)) = \lambda o(f(x)), \lambda \in \mathbb{R}$$

- Tính gần đúng.
- Tìm cực trị,....

Ví dụ.

Dùng khai triển Taylor để tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x + x^3}{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \sqrt{1 + 2x} + x}$$

Tính gần đúng.

Tính gần đúng.

Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = x_0$. Khi $\Delta x \approx 0$, ta có công thức

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Tính gần đúng.

Cho hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = x_0$. Khi $\Delta x \approx 0$, ta có công thức

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Example

Tính gần đúng:

$$A = \sqrt[3]{\frac{3 - 0,01}{3 + 0,01}}, \quad B = \sqrt[3]{\frac{e^{0,01}}{0,99}}, \quad C = \cos(0,01).$$

2.2.4. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

2.2.4. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

2.2.4. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

Định lí 1. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

2.2.4. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

Định lí 1. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

2.2.4. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

Định lí 1. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

2.2.4. Ứng dụng của phép tính vi phân: Quy tắc L'Hospital.

(1) Khử dạng $\frac{0}{0}$.

Định lí 1. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Chú ý: Định lý 1 vẫn đúng khi xét

$$x \rightarrow x_0^+, \quad x \rightarrow x_0^-, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Ví dụ.

Dùng quy tắc L'Hospital tính các giới hạn sau

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x + x^3}{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \sqrt{1 + 2x} + x}$$

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 2. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 2. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 2. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(2) Khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lí 2. Giả sử

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ gần } x_0.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Chú ý: Định lý 2 vẫn đúng khi xét

$$x \rightarrow x_0^+, \quad x \rightarrow x_0^-, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Ví dụ.

Dùng quy tắc L'Hospital tính các giới hạn sau

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x+1}}$$

Ví dụ.

Dùng quy tắc L'Hospital tính các giới hạn sau

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x+1}}$$

Chú ý. Quy tắc L'Hospital có thể áp dụng nhiều lần liên tiếp.

(3) Khử dạng $0.\infty; \infty - \infty; 1^\infty$.

(3) Khử dạng $0.\infty; \infty - \infty; 1^\infty$.

$\Rightarrow$ Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital.

(3) Khử dạng $0.\infty; \infty - \infty; 1^\infty$.

$\Rightarrow$ Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital.

Chú ý.

$$u^v = e^{v \ln u}$$

(3) Khử dạng $0.\infty$; $\infty - \infty$; 1^∞ .

$\implies$ Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital.

Chú ý.

$$u^v = e^{v \ln u}$$

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x^2 \right)^{\frac{1}{x \sin x}}$$