

Bài giảng Giải tích 1

Vũ Hữu Nhựt

8th December 2015

Chương 3: Phép tính tích phân của hàm một biến

3.1. Tích phân không xác định

3.1. Tích phân không xác định

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.

3.1. Tích phân không xác định

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.

(1) **Định nghĩa 1.** $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b).$$

3.1. Tích phân không xác định

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.

(1) Định nghĩa 1. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b).$$

Ví dụ. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

3.1. Tích phân không xác định

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.

(1) Định nghĩa 1. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b).$$

Ví dụ. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

Hơn nữa: $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$.

3.1. Tích phân không xác định

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân không xác định.

(1) Định nghĩa 1. $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ nếu

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b).$$

Ví dụ. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

Hơn nữa: $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ là 1 nguyên hàm của $f(x) = x$ vì $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$.

(2) Chú ý. Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ thì $F(x) + C$ ($C = \text{const}$) cũng là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$.

(3) Định nghĩa 2.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$. Họ các nguyên hàm $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a; b)$. Kí hiệu

$$\int f(x)dx := F(x) + C.$$

(3) Định nghĩa 2.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$. Họ các nguyên hàm $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a; b)$. Kí hiệu

$$\int f(x)dx := F(x) + C.$$

Ví dụ. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$

(3) Định nghĩa 2.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$. Họ các nguyên hàm $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a; b)$. Kí hiệu

$$\int f(x)dx := F(x) + C.$$

Ví dụ. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$

(4) Tính chất.

$$\begin{aligned}\int [f(x) + g(x)]dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ \int kf(x)dx &= k \int f(x)dx, (k \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

(5) Bảng tích phân cơ bản

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a} \cot(ax+b) + C$$

(5) Bảng tích phân cơ bản

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C (\alpha > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\beta}} = \ln(x + \sqrt{x^2+\beta}) + C$$

(5) Bảng tích phân cơ bản

$$\int shx dx = chx + C$$

$$\int chx dx = shx + C$$

$$\int \frac{1}{ch^2 x} dx = thx + C$$

$$\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cothx + C$$

Ví dụ.

Tính

$$A = \int (2 - 3x^2)^2 \sqrt{x} dx, \quad B = \int \frac{1 + 2x^2}{4 + x^2} dx$$

$$C = \int \frac{3x + 2}{4x^2 - 3x - 1} dx, \quad D = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$$

3.2. Các phương pháp tính.

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t)$, $g(x)$, $g'(x)$ là các hàm số liên tục.

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t)$, $g(x)$, $g'(x)$ là các hàm số liên tục.

Đặt $t = g(x)$,

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t)$, $g(x)$, $g'(x)$ là các hàm số liên tục.

Đặt $t = g(x)$, $\rightarrow dt = g'(x)dx$ và

$$I = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

3.2. Các phương pháp tính.

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $x = \varphi(t)$

3.2. Các phương pháp tính.

(1) Phép đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $\boxed{x = \varphi(t)}$ $\longrightarrow dx = \varphi'(t)dt$ và

$$I = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Ví dụ.

Tích các tích phân sau

$$A = \int \frac{x^3}{(1+3x^2)^2} dx \quad B = \int \sqrt{4-x^2} dx$$

$$C = \int \frac{\ln^3 x}{x(3+\ln^4 x)} dx \quad D = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$$

$$E = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} \quad F = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

Công thức

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

Công thức

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du} \quad \boxed{\int uv' dx = uv - \int u' v dx}$$

Một số dạng tích phân sử dụng công thức tích phân từng phần:

$$\int P_n(x) e^{ax} dx, \int P_n(x) \sin(ax) dx, \int P_n(x) \cos(ax) dx, \\ \int P_n(x) \ln^k(x) dx, \int e^{ax} \sin(bx) dx, \int e^{ax} \cos(bx) dx, \dots$$

với $P_n(x)$ là đa thức bậc n .

Ví dụ.

Tính các tích phân sau:

$$A = \int (3x^2 + x)e^{2x} dx$$

$$B = \int x^3 \ln x dx$$

$$C = \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

$$D = \int \sin \sqrt{x} dx$$

Tích phân hàm hữu tỷ.

Tích phân hàm hữu tỷ.

Xét tích phân

$$I = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx, \quad (1)$$

với $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n và m .

Tích phân hàm hữu tỷ.

Xét tích phân

$$I = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx, \quad (1)$$

với $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n và m .

- Bước 1: Chia đa thức.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

Tích phân hàm hữu tỷ.

Xét tích phân

$$I = \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx, \quad (1)$$

với $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n và m .

- Bước 1: Chia đa thức.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

- Bước 2: Phân tích mẫu số

$$Q_m(x) = a(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{m_1} \dots (a_sx^2 + b_sx + c_s)^{m_s} \\ \times (d_1x + e_1)^{n_1} \dots (d_tx + e_t)^{n_t}$$

- Bước 3: Đồng nhất thức

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_0x + A'_0}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}} + \frac{A_1x + A'_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{m_1-1}} + \\ &\dots + \frac{A_{m_1-1}x + A'_{m_1-1}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} + \dots + \\ &+ \frac{B_0}{(d_tx + e_t)^{n_t}} + \frac{B_1}{(d_tx + e_t)^{n_t-1}} \\ &+ \dots + \frac{B_{n_t-1}}{(d_tx + e_t)}\end{aligned}$$

- Bước 3: Đồng nhất thức

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_0x + A'_0}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{m_1}} + \frac{A_1x + A'_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{m_1-1}} + \\ & \dots + \frac{A_{m_1-1}x + A'_{m_1-1}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} + \dots + \\ & + \frac{B_0}{(d_tx + e_t)^{n_t}} + \frac{B_1}{(d_tx + e_t)^{n_t-1}} \\ & + \dots + \frac{B_{n_t-1}}{(d_tx + e_t)} \end{aligned}$$

- Bước 4. Thay vào các công thức tích phân cần tính.

Example

Tính

$$I = \int \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 17}{x^4 - x^2 - 2x + 2} dx$$

Example

Tính

$$I = \int \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 17}{x^4 - x^2 - 2x + 2} dx$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 17}{x^4 - x^2 - 2x + 2} &= \left(1 + \frac{-4x^3 + 4x + 15}{(x^2 + 2x + 2)(x - 1)^2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{3}{(x - 1)^2} - \frac{4}{x - 1} \end{aligned}$$

3.2. Tích phân xác định

3.2. Tích phân xác định

3.2.1. Định nghĩa.

3.2. Tích phân xác định

3.2.1. Định nghĩa.

(1) Bài toán diện tích.

3.2. Tích phân xác định

3.2.1. Định nghĩa.

(1) Bài toán diện tích. Giả sử $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$. Xét hình thang cong D cho bởi

$$D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

3.2. Tích phân xác định

3.2.1. Định nghĩa.

(1) Bài toán diện tích. Giả sử $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$. Xét hình thang cong D cho bởi

$$D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Ta định nghĩa:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \text{diện tích hình thang cong } D. \quad (1)$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng

$$\sigma := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{với } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng

$$\sigma := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{với } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

+) Khi đó tính giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma = S \quad (2) \quad \text{với } \Delta := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}.$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng

$$\sigma := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{với } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

+) Khi đó tính giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma = S \quad (2) \quad \text{với } \Delta := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}.$$

+) Theo định nghĩa ta có:

$$I = \int_a^b f(x) dx := S. \quad (3)$$

(2) Cách tính tích phân xác định bằng định nghĩa.

+) Chia đoạn $[a; b]$ bởi các phân hoạch:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

+) Lấy điểm $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ bất kì. Lập tổng

$$\sigma := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \text{với } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

+) Khi đó tính giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma = S \quad (2) \quad \text{với } \Delta := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}.$$

+) Theo định nghĩa ta có:

$$I = \int_a^b f(x) dx := S. \quad (3)$$

Chú ý. Nếu giới hạn (2) tồn tại hữu hạn (tức là, tích phân (3) tồn tại), thì hàm số $f(x)$ được gọi là khả tích trên $[a; b]$.

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})) = \int_a^b f(x) dx,$$

với $\xi_i \in [a + ih, a + (i+1)h]$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})) = \int_a^b f(x) dx,$$

với $\xi_i \in [a + ih, a + (i+1)h]$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Đặt biệt. Khi $a = 0$, $b = 1$, ta có

Chú ý: Dùng tích phân để tính giới hạn.

Cho $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (f(\xi_0) + f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_{n-1})) = \int_a^b f(x) dx,$$

với $\xi_i \in [a + ih, a + (i+1)h]$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Đặt biệt. Khi $a = 0$, $b = 1$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx,$$

Example

Tính giới hạn sau:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1^2}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + \cdots + \frac{n^2}{n+n} \right).$$

Example

Tính giới hạn sau:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1^2}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + \cdots + \frac{n^2}{n+n} \right).$$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(1/n)^2}{1 + (1/n)} + \frac{(2/n)^2}{1 + (2/n)} + \cdots + \frac{(n/n)^2}{1 + (n/n)} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.2.2. Các lớp hàm khả tích và tính chất.

3.2.2. Các lớp hàm khả tích và tính chất.

(1) Các lớp hàm khả tích.

3.2.2. Các lớp hàm khả tích và tính chất.

(1) Các lớp hàm khả tích.

Định lý 1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, thì $f(x)$ khả tích trên đoạn đó.

3.2.2. Các lớp hàm khả tích và tính chất.

(1) Các lớp hàm khả tích.

Định lí 1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, thì $f(x)$ khả tích trên đoạn đó.

Định lí 2. Nếu hàm số $f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$ và có một số hữu hạn các điểm gián đoạn trong $[a; b]$ thì hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a; b]$.

(2) Tính chất.

(2) Tính chất.

$$(i) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$(ii) \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$(iii) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a \leq c \leq b.$$

$$(iv) \text{Nếu } f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b .$$

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Ví dụ.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Ví dụ.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

(vi) Đạo hàm của tích phân theo cận trên.

(v) (Công thức Newton-Leibnitz) Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Ví dụ.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

(vi) Đạo hàm của tích phân theo cận trên. Giả sử $f(t)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó tích phân

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

có đạo hàm theo x và:

$$I'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

Tổng quát.

Cho

$$I(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt.$$

Khi đó ta có:

$$I'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Tổng quát.

Cho

$$I(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt.$$

Khi đó ta có:

$$I'(x) = f(u(x))u'(x).$$

Ví dụ. Tính giới hạn:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{\sin 3t} dt}{\int_0^{2x} (e^{\sqrt{t}} - 1) dt}.$$

3.2.3. Các phương pháp tính tích phân.

3.2.3. Các phương pháp tính tích phân.

(1) Phương pháp đổi biến số.

3.2.3. Các phương pháp tính tích phân.

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t)$, $g(x)$, $g'(x)$ là các hàm số liên tục.

3.2.3. Các phương pháp tính tích phân.

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t), g(x), g'(x)$ là các hàm số liên tục.

Đặt $t = g(x)$,

3.2.3. Các phương pháp tính tích phân.

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 1.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx,$$

với $f(t)$, $g(x)$, $g'(x)$ là các hàm số liên tục.

Đặt $t = g(x)$, $\longrightarrow dt = g'(x)dx$ và

$$I = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $x = \varphi(t)$

(1) Phương pháp đổi biến số.

- **Phép biến đổi thứ 2.** Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad f \text{ liên tục.}$$

Đặt $\boxed{x = \varphi(t)}$ $\longrightarrow dx = \varphi'(t)dt$ và giả sử khi x chạy từ $a \rightarrow b$ thì t chạy từ $t_0 \rightarrow t_1$. Khi đó

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ví dụ.

Tính các tích phân sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}$$

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$I_3 = \int_0^{3/2} \sqrt{9-4x^2} dx$$

$$I_4 = \int_0^2 \frac{x dx}{1+x^4}$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du .}$$

(2) Phương pháp tích phân từng phần.

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du}.$$

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

$$I_1 = \int_0^1 \arctan x dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx.$$

3.2.4. Ứng dụng.

3.2.4. Ứng dụng.

(1) **Tính diện tích.** Cho miền D giới hạn bởi

$$D : \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases} .$$

Khi đó diện tích miền D cho bởi công thức:

$$S_D = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

3.2.4. Ứng dụng.

(1) **Tính diện tích.** Cho miền D giới hạn bởi

$$D : \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}.$$

Khi đó diện tích miền D cho bởi công thức:

$$S_D = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$$

Chú ý. Khi các đường cong cho bởi tham số

$$D : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \\ t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad \text{thì } S_D = \int_{t_0}^{t_1} |\phi(t)\varphi'(t)| dt.$$

Trường hợp biên của hình phẳng cho bởi tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ thì

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Trường hợp biên của hình phẳng cho bởi tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ thì

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Ví dụ. Tính diện tích giới hạn bởi:

(a) Parabol $x = y^2$ và đường thẳng $y = x - 2$.

(b) Elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(c) Tính giới hạn của diện tích hình tim giới hạn bởi $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$ với $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

(2) Tính độ dài đường cong.

Giả sử cung $\widehat{AB}$ được cho bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ khi đó độ dài

cung $\widehat{AB}$ được cho bởi công thức

$$l_{\widehat{AB}} = \rho = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(2) Tính độ dài đường cong.

Giả sử cung $\widehat{AB}$ được cho bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ khi đó độ dài

cung $\widehat{AB}$ được cho bởi công thức

$$l_{\widehat{AB}} = \rho = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Chú ý. Khi $\widehat{AB}$ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$

thì

$$l_{\widehat{AB}} = \rho = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Khi đường cong cho bởi tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ thì

$$l_{\widehat{AB}} = \rho = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$

Khi đường cong cho bởi tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ thì

$$l_{\widehat{AB}} = \rho = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$

Ví dụ. Tính độ dài cung:

(a) $y = \ln(x)$ với $1 \leq x \leq e$.

(b) cycloide

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

(3) Tính thể tích vật thể.

(3) Tính thể tích vật thể.

Xét vật thể V được giới hạn bởi các mặt cong và hai mặt phẳng $x = a$; $x = b$.

(3) Tính thể tích vật thể.

Xét vật thể V được giới hạn bởi các mặt cong và hai mặt phẳng $x = a$; $x = b$.

- Xét mặt phẳng (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ $x \in [a; b]$.

Giả sử (P) cắt vật thể V theo thiết diện có diện tích $S(x)$.

(3) Tính thể tích vật thể.

Xét vật thể V được giới hạn bởi các mặt cong và hai mặt phẳng $x = a$; $x = b$.

- Xét mặt phẳng (P) cắt Ox tại điểm có hoành độ $x \in [a; b]$.

Giả sử (P) cắt vật thể V theo thiết diện có diện tích $S(x)$.

- Khi đó, thể tích V được tính theo công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Example

Tính thể tích của hình giới hạn bởi ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Chú ý. +) Khi quay miền $D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ quanh trục Ox ,
thì vật thể tạo thành có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Chú ý. +) Khi quay miền $D : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ quanh trục Ox ,
thì vật thể tạo thành có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

+) Khi quay miền $D : \begin{cases} x = f(y) \\ x = 0 \\ a \leq y \leq b \end{cases}$ quanh trục Oy , thì vật
thể tạo thành có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(y) dy.$$

Ví dụ.

Tính thể tích vật thể tạo thành khi quay miền
 $D := \{y = x^2 - 2x; y = 0\}$ quanh trục Ox .

(4) Tính diện tích mặt tròn xoay.

(4) Tính diện tích mặt tròn xoay.

Xét miền (H) được tạo thành khi cung $\widehat{AB}$ quay xung quanh trục Ox .

(4) Tính diện tích mặt tròn xoay.

Xét miền (H) được tạo thành khi cung $\widehat{AB}$ quay xung quanh trục Ox .

+ Nếu cung $\widehat{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, thì **diện tích bề mặt** của (H) là

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

(4) Tính diện tích mặt tròn xoay.

Xét miền (H) được tạo thành khi cung $\widehat{AB}$ quay xung quanh trục Ox .

+ Nếu cung $\widehat{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, thì **diện tích bề mặt** của (H) là

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

(4) Tính diện tích mặt tròn xoay.

Xét miền (H) được tạo thành khi cung $\widehat{AB}$ quay xung quanh trục Ox .

+ Nếu cung $\widehat{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, thì **diện tích bề mặt** của (H) là

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Example

Tính diện tích của vòng xoắn khi quay đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 1$ quanh trục Ox .

+ Nếu cung $\widehat{AB}$ có phương trình tham số
 $x = x(t), y = y(t), t_0 \leq t \leq t_1$, thì **diện tích bề mặt** của
(H) là

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |y(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

+ Nếu cung $\widehat{AB}$ có phương trình tham số
 $x = x(t), y = y(t), t_0 \leq t \leq t_1$, thì **diện tích bề mặt** của
(H) là

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |y(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

+ Nếu cung $\widehat{AB}$ có phương trình trong hệ tọa độ cực
 $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$ thì **diện tích bề mặt** của (H) là

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r(\varphi) \sin \varphi| \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$

3.3. Tích phân suy rộng.

3.3. Tích phân suy rộng.

3.3.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn.

3.3. Tích phân suy rộng.

3.3.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

3.3. Tích phân suy rộng.

3.3.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

+) Nếu giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **hội tụ**.

3.3. Tích phân suy rộng.

3.3.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

+) Nếu giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **hội tụ**.

+) Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc $= \infty$, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **phân kì**.

3.3. Tích phân suy rộng.

3.3.1. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; A]$ với mọi $A > a$. Khi đó, ta định nghĩa:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx \quad (1).$$

+) Nếu giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **hội tụ**.

+) Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc $= \infty$, ta nói hàm số tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **phân kì**.

Chú ý

Tương tự ta có các định nghĩa sau:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow -\infty, A \rightarrow +\infty} \int_B^A f(x)dx$$

Ví dụ.

Tính các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^0 xe^x dx$$

Chú ý

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{phân kỳ} & \text{nếu } \alpha \leq 1 \\ \text{hội tụ} & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases} \quad a > 0.$$

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Định lý 1.(Tiêu chuẩn so sánh) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, A], \forall A > a$ và

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a.$$

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Định lý 1. (Tiêu chuẩn so sánh) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, A], \forall A > a$ và

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a.$$

Khi đó

(1) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

(2) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Theorem

(Tiêu chuẩn giới hạn) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, A], \forall A > a, f(x), g(x) \geq 0 \forall x \geq a$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Theorem

(Tiêu chuẩn giới hạn) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, A], \forall A > a, f(x), g(x) \geq 0 \forall x \geq a$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Khi đó

- (1) Nếu $k \in (0, +\infty)$, thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
- (2) Nếu $k = 0$ và nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
- (3) Nếu $k = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + x + 1}}$$
$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(2x + 1)}{x^2 + 3} dx$$
$$I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x^2} dx$$

Chú ý.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^k x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Definition

(i) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

Definition

- (i) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.
- (ii) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **bán hội tụ** nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Definition

- (i) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.
- (ii) Tích phân $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **bán hội tụ** nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Theorem

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Example

Xét sự hội tụ của các tích phân:

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1} dx$$
$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3 + x + 1}} dx$$

3.3.2. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

3.3.2. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

Giả sử $f(x)$ là hàm không bị chặn trên $[a; b]$ với điểm bất thường $c \in [a; b]$, tức là $f(c) = \infty$. Khi đó ta có định nghĩa:

(1) nếu $c = a$:
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

(2) nếu $c = b$:
$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

(3) nếu $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx.$$

3.3.2. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

Giả sử $f(x)$ là hàm không bị chặn trên $[a; b]$ với điểm bất thường $c \in [a; b]$, tức là $f(c) = \infty$. Khi đó ta có định nghĩa:

$$(1) \text{ nếu } c = a : \int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

$$(2) \text{ nếu } c = b : \int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

$$(3) \text{ nếu } c \in (a, b) :$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx.$$

Ta gọi tích phân $\int_a^b f(x) dx$ **hội tụ** nếu một trong các tích phân (1) – (3) tồn tại hữu hạn. Trường hợp ngược lại, ta gọi tích phân $\int_a^b f(x) dx$ **phân kì**.

Ví dụ.

Tính các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{dx}{(2-x)^\alpha}$$

Chú ý.

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s}$$

hoặc $I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^s} \quad (s \in \mathbb{R}).$

- + Nếu $s < 1$ thì I_1, I_2 **hội tụ**.
- + Nếu $s \geq 1$ thì I_1, I_2 **phân kỳ**.

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Trong phần này chúng ta chỉ xét trường hợp điểm bất thường tại $x = a$. **Trường hợp điểm bất thường tại các điểm khác cũng được xét tương tự.**

Định lý 1.(Tiêu chuẩn so sánh) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $(a, b]$ với $x = a$ là điểm bất thường và

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b].$$

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Trong phần này chúng ta chỉ xét trường hợp điểm bất thường tại $x = a$. **Trường hợp điểm bất thường tại các điểm khác cũng được xét tương tự.**

Định lý 1. (Tiêu chuẩn so sánh) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $(a, b]$ với $x = a$ là điểm bất thường và

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b].$$

Khi đó

(1) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

(2) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Theorem

(Tiêu chuẩn giới hạn) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $(a, b]$ với $x = a$ là điểm bất thường và

$$f(x), g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b], \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ

Theorem

(Tiêu chuẩn giới hạn) Cho $f(x), g(x)$ khả tích trên $(a, b]$ với $x = a$ là điểm bất thường và

$$f(x), g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b], \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Khi đó

(1) Nếu $k \in (0, +\infty)$, thì $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

(2) Nếu $k = 0$ và nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

(3) Nếu $k = +\infty$ và $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^2 dx$$

Example

Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1}$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x)^3} dx$$