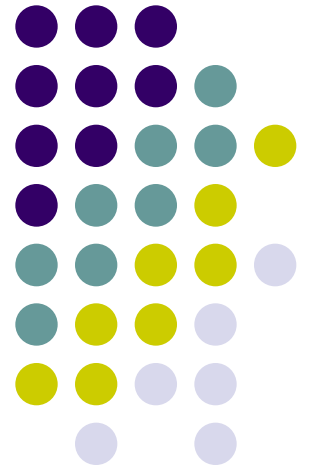
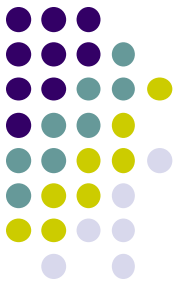


Xử lý số tín hiệu

Chương 5: Biến đổi Z





1. Định nghĩa

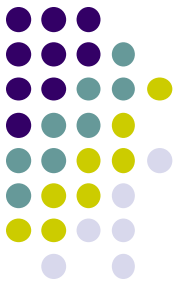
- Biến đổi Z của tín hiệu rời rạc thời gian $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= \dots + x(-2)z^2 + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

- Hàm truyền của bộ lọc có đáp ứng xung $h(n)$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$$



2. Các tính chất cơ bản

a. Tính tuyến tính

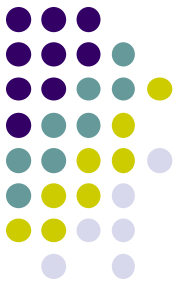
$$A_1 x_1(n) + A_2 x_2(n) \xrightarrow{z} A_1 X_1(z) + A_2 X_2(z)$$

b. Tính trễ

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z) \Rightarrow x[n-D] \xrightarrow{z} z^{-D} X(z)$$

c. Tính chập

$$y(n) = h(n) * x(n) \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$



2. Các tính chất cơ bản

Ví dụ 1 Dùng $u(n) - u(n-1) = \delta(n)$ và tính chất của biến đổi Z, xác định biến đổi Z của:

a) $x(n) = u(n)$

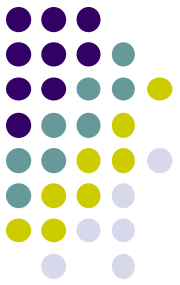
b) $x(n) = -u(-n-1)$

Ví dụ 2 Dùng biến đổi Z tính tích chập của bộ lọc và tín hiệu ngõ vào sau:

$$h = [1, 2, -1, 1]$$

$$x = [1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1]$$

3. Miền hội tụ



Miền hội tụ (Region of convergence – ROC) của $X(z)$:

$$ROC = \{z \in C \mid X(z) \neq \infty\}$$

Ví dụ 1: $x(n) = (0.5)^n u(n)$

Biến đổi Z:

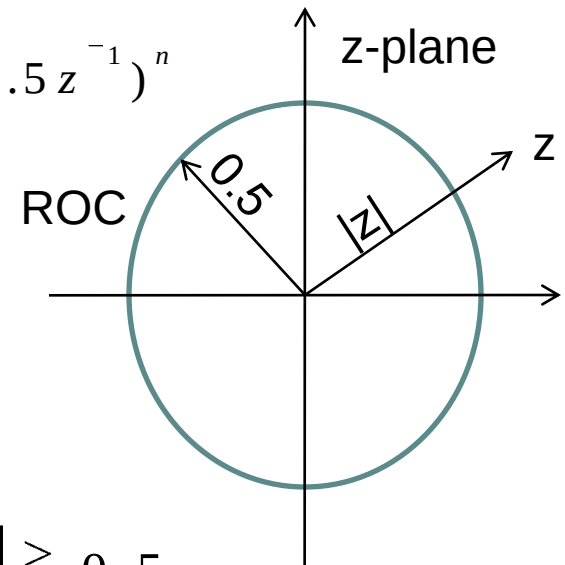
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (0.5)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (0.5 z^{-1})^n$$

Tổng hội tụ khi

$$|0.5 z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 0.5$$

$$\Rightarrow ROC = \{z \in C \mid |z| > 0.5\}$$

$$(0.5)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}}, \quad |z| > 0.5$$



3. Miền hội tụ



Ví dụ 2: $x(n) = -(0.5)^n u(-n - 1)$

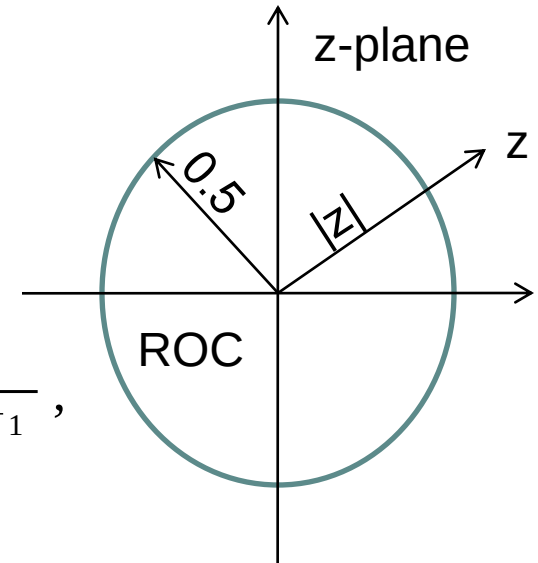
Biến đổi Z:

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (0.5)^n z^{-n} = - \sum_{m=1}^{+\infty} [(0.5)^{-1} z]^m$$

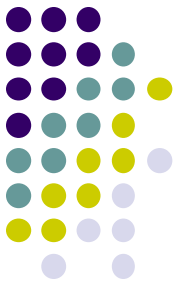
$$ROC = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 0.5\}$$

- Kết quả:

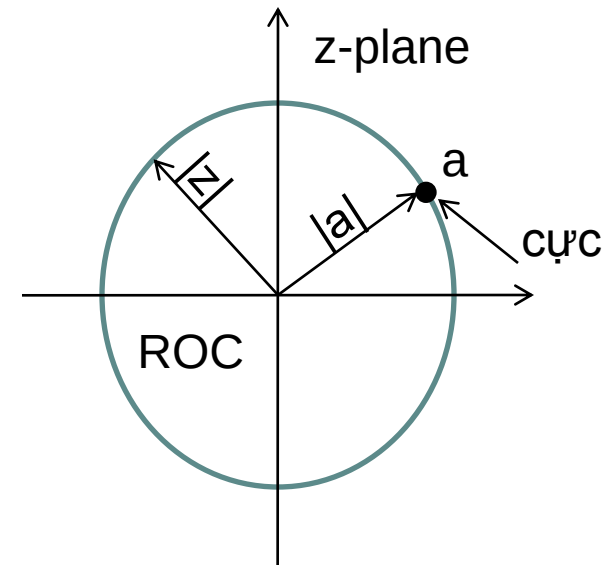
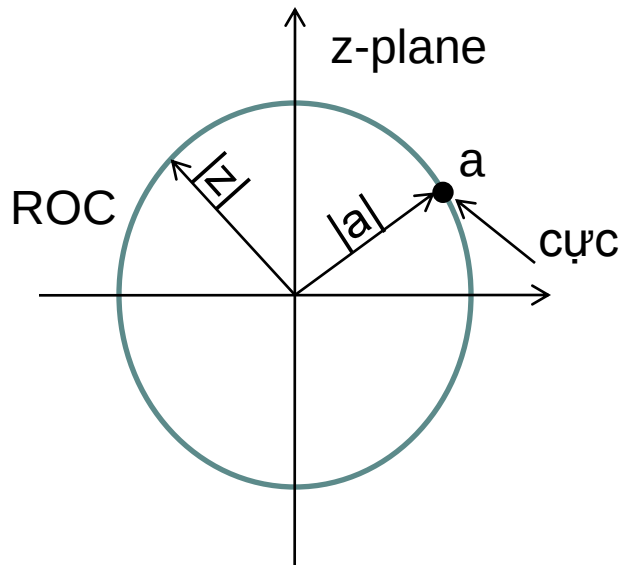
$$-(0.5)^n u(-n - 1) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - 0.5 z^{-1}},$$

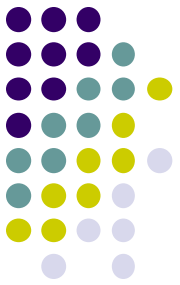


3. Miền hội tụ



- Tổng quát: $a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$
 $-a^n u(-n-1) \xrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < |a|$





4. Tính nhân quả và ổn định

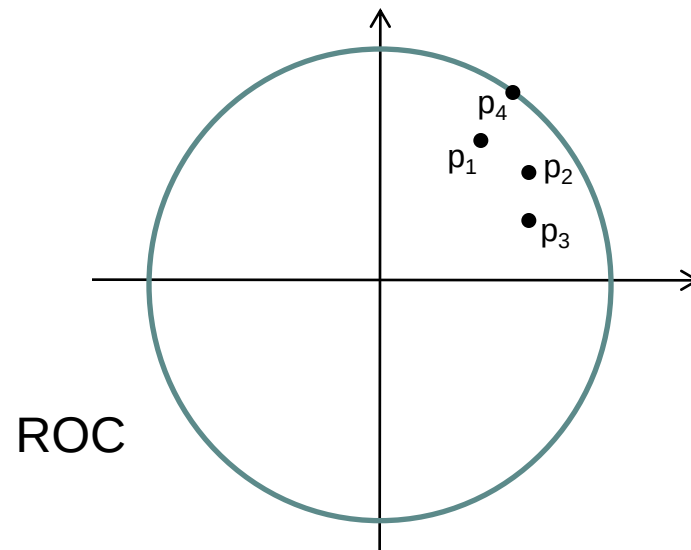
- Tín hiệu nhân quả dạng:

$$x(n) = A_1 p_1^n u(n) + A_2 p_2^n u(n) + \dots$$

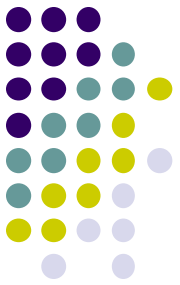
có biến đổi Z là:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$

Với ROC: $|z| > \max_i |p_i|$



4. Tính nhân quả và ổn định



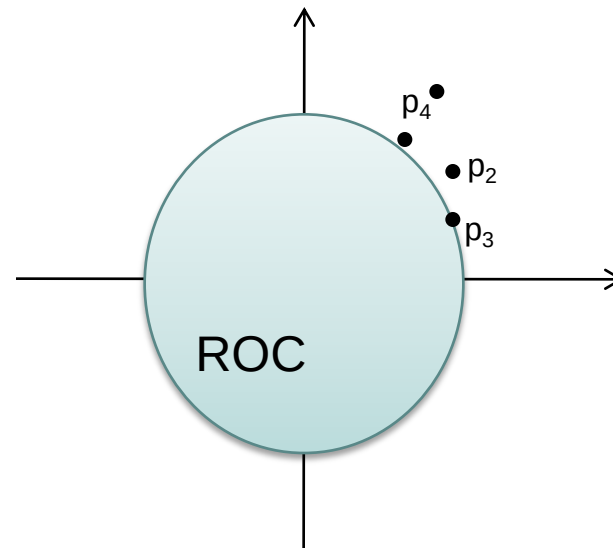
- Tín hiệu phản nhân quả dạng:

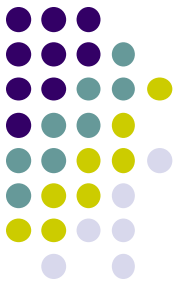
$$x(n) = -A_1 p_1^n u(-n-1) - A_2 p_2^n u(-n-1) - \dots$$

cũng có biến đổi Z là:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$

Với ROC: $|z| < \min_i |p_i|$



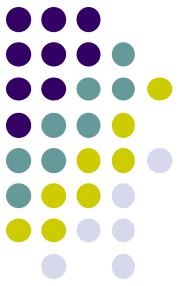


4. Tính nhân quả và ổn định

Ví dụ Xác định biến đổi z và miền hội tụ của

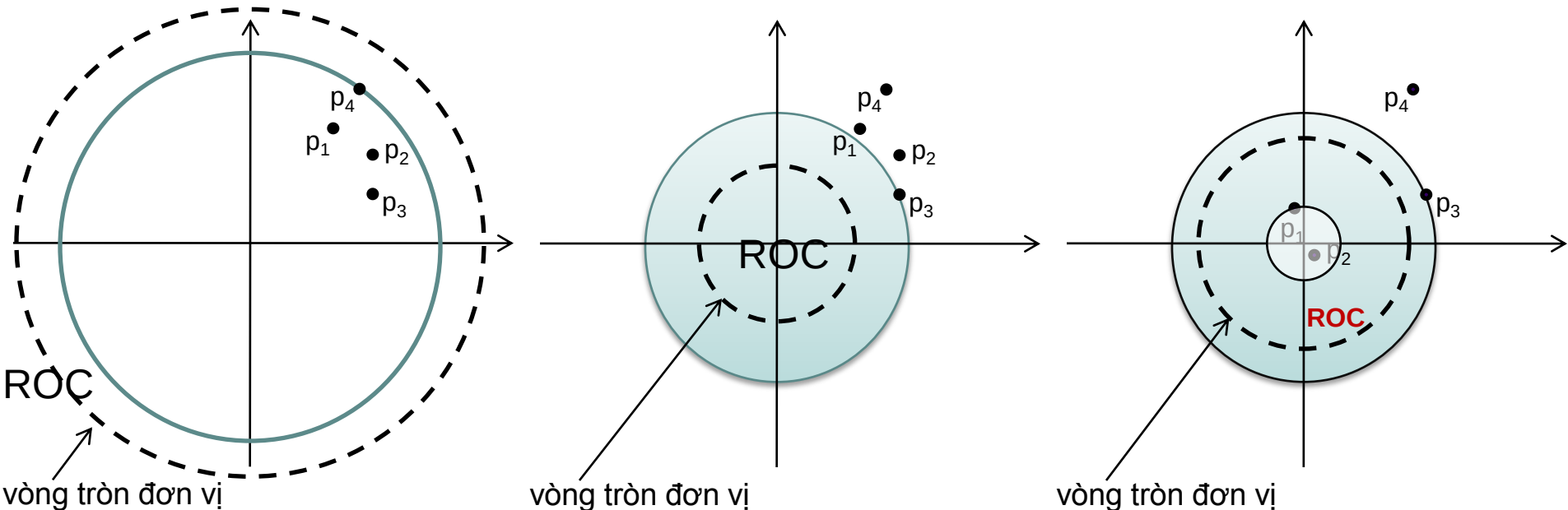
- a. $x(n) = (0.8)^n u(n) + (1.25)^n u(n)$
- b. $x(n) = (0.8)^n u(n) - (1.25)^n u(-n-1)$
- c. $x(n) = -(0.8)^n u(-n-1) - (1.25)^n u(-n-1)$
- d. $x(n) = -(0.8)^n u(-n-1) + (1.25)^n u(n)$

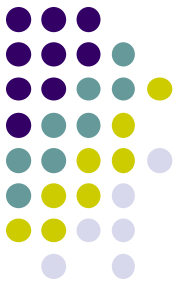
4. Tính nhân quả và ổn định



$x(n)$ ổn định $\Leftrightarrow$ ROC có chứa vòng tròn đơn vị

Các trường hợp:



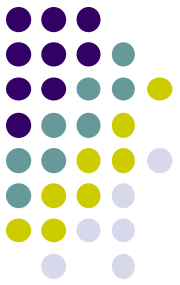


5. Phổ tần số

- Biến đổi Z của $x(n)$: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^n$
- Biến đổi DTFT của $x(n)$: $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j 2 \pi f n T}$
- Đặt $\omega = 2 \pi f T = \frac{2 \pi f}{f_s}$ (Tần số số)
 $\rightarrow X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j \omega n} = X(z) \Big|_{z=e^{j \omega}}$

Đây chính là biến đổi Z trên vòng tròn đơn vị.

5. Phổ tần số



- Đáp ứng tần số của hệ thống $h(n)$ với hàm truyền $H(z)$:

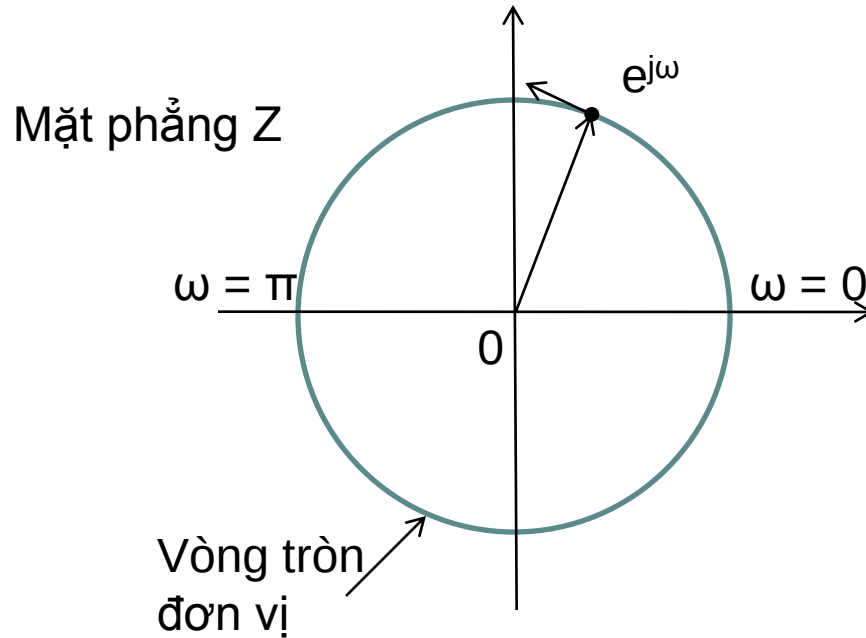
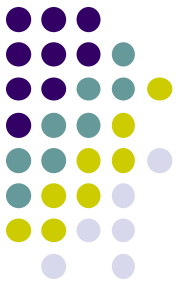
$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n} = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

- $X(f)$, $H(f)$ tuần hoàn với chu kỳ $f_s \rightarrow X(\omega)$, $H(\omega)$ tuần hoàn chu kỳ 2π ($-\pi \leq \omega \leq \pi$)

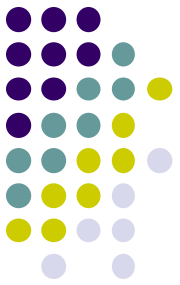
- DTFT ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} X(f) e^{j2\pi f n / f_s} df$$

6. Phổ tần số



Điều kiện tồn tại $X(\omega)$: ROC của $X(z)$ chứa vòng tròn đơn vị $\leftrightarrow x(n)$ ổn định

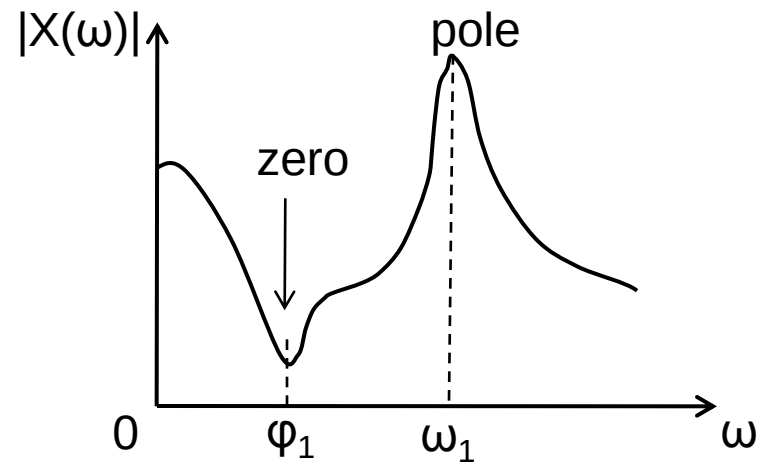
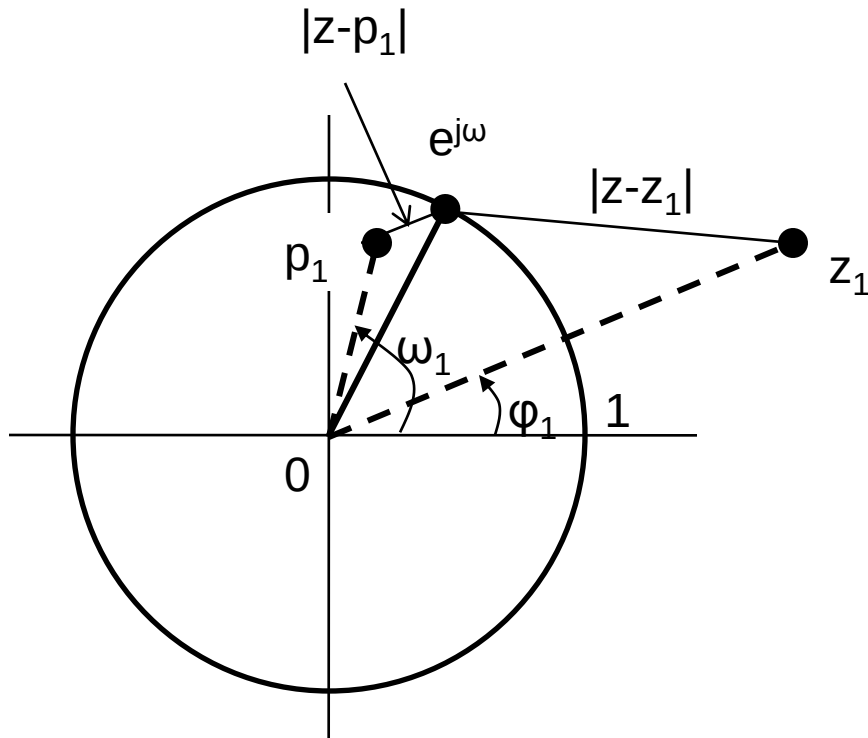
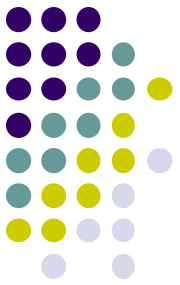


6. Phổ tần số

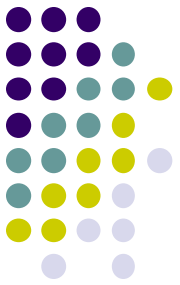
- Xét $X(z)$:
$$X(z) = \frac{1 - z_1 z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}} = \frac{z - z_1}{z - p_1}$$
- $X(z)$ có 1 cực $z = p_1$ và 1 zero $z = z_1$
- Thay $z = e^{j\omega}$,

$$X(\omega) = \frac{e^{j\omega} - z_1}{e^{j\omega} - p_1} \Rightarrow |X(\omega)| = \frac{|e^{j\omega} - z_1|}{|e^{j\omega} - p_1|}$$

6. Phổ tần số



7. Biến đổi Z ngược



- Đưa $X(z)$ về dạng

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$

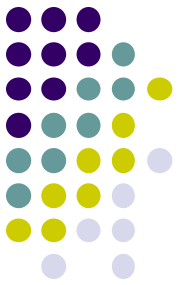
Tùy theo ROC, suy ra $x(n)$

Ví dụ:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.8 z^{-1}} + \frac{1}{1 - 1.25 z^{-1}}$$

- $\text{ROC} = \{z, |z| < 0.8\} \rightarrow x(n) = -0.8^n u(-n-1) - 1.25^n u(-n-1)$
- $\text{ROC} = \{z, 0.8 < |z| < 1.25\} \rightarrow x(n) = 0.8^n u(n) - 1.25^n u(-n-1)$
- $\text{ROC} = \{z, 1.25 < |z|\} \rightarrow x(n) = 0.8^n u(n) + 1.25^n u(n)$

7. Biến đổi Z ngược



- Pp khai triển phân số từng phần:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_M z^{-1})}$$

- Khi bậc của N(z) nhỏ hơn M:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_M}{1 - p_M z^{-1}}$$

- Với

$$A_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) X(z) = \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{N(z)}{(z - p_i) D(z)}$$