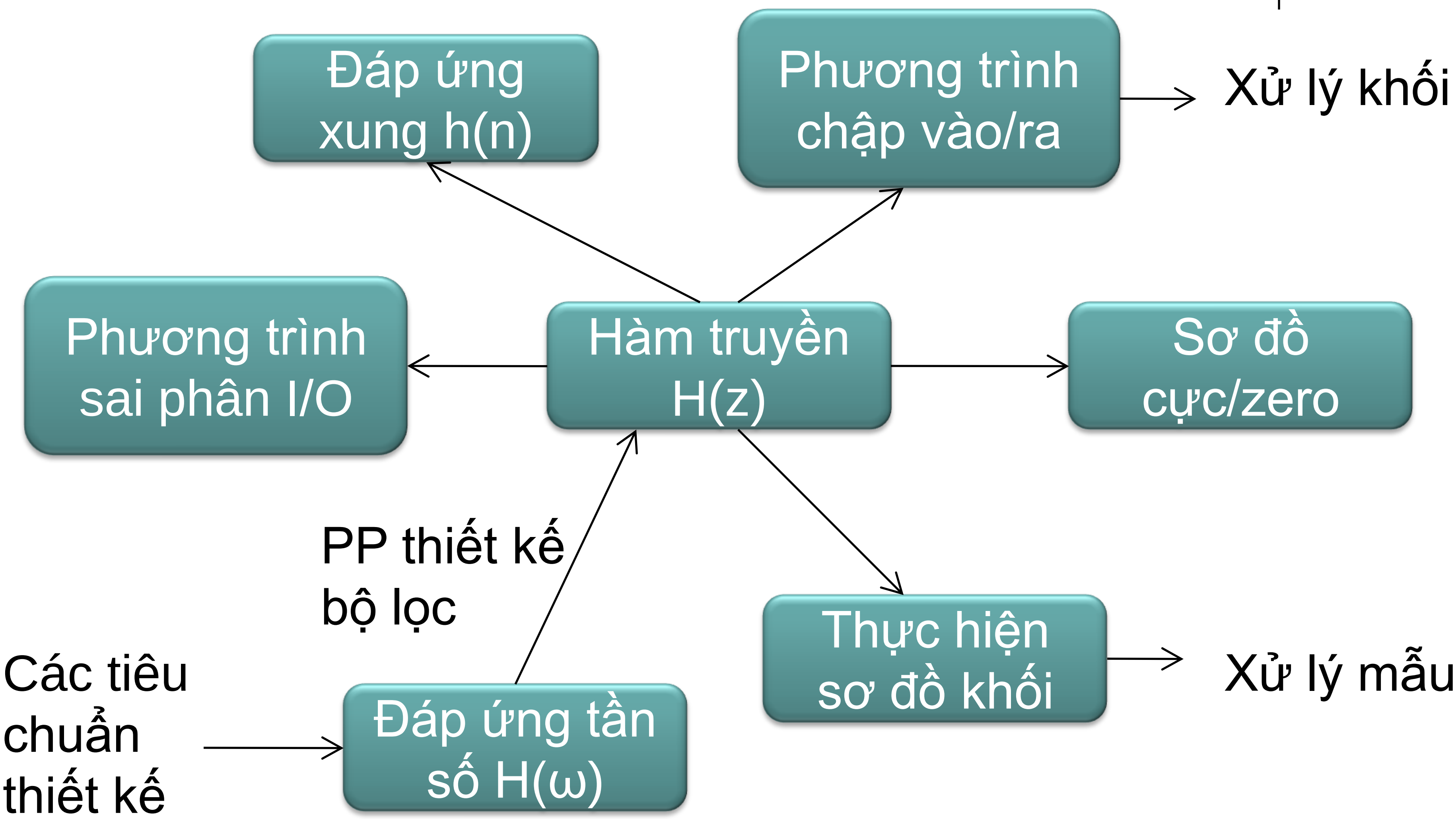
Xử lý số tín hiệu

Chương 6: Các hàm truyền

1. Các dạng mô tả tương đương của bộ lọc số



2. Các hàm truyền

Ví dụ: xét hàm truyền sau:

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

- Từ H(z) suy ra được:
  1. Đáp ứng xung h(n)
  2. Phương trình sai phân I/O thỏa bởi h(n)
  3. Phương trình chập I/O
  4. Thực hiện sơ đồ khối
  5. Sơ đồ cực/ zero
  6. Đáp ứng tần số H(ω)

2. Các hàm truyền

- Các dạng tương đương toán học của hàm truyền có thể dẫn đến các phương trình sai phân I/O khác nhau và các sơ đồ khối khác nhau cùng thuật toán xử lý mẫu tương ứng

Ví dụ: Với hàm truyền $H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$

Có thể viết dưới dạng:

a. Dạng 1

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = -2.5 + \frac{7.5}{1 - 0.8z^{-1}}$$

b. Dạng 2

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = (5 + 2z^{-1})W(z)$$

3. Đáp ứng hình sine

A. Đáp ứng trạng thái ổn định

- Tín hiệu vào: sine phức, tần số ω_0, dài vô hạn

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}$$

- Ngõ ra có thể xác định bằng 2 cách:

(1) Chập trong miền thời gian

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$$

(2) Phương pháp miền tần số

Phổ tín hiệu vào:

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + (\text{các phiên bản})$$

3. Đáp ứng hình sine

Phổ tín hiệu ra: (phiên bản thứ nhất)

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = 2\pi H(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$$

DTFT ngược:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega)e^{j\omega n}d\omega = H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$$

Tổng quát: $H(\omega)$ là số phức

$$H(\omega_0) = |H(\omega_0)|e^{j\arg H(\omega_0)}$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{H} |H(\omega_0)|e^{j\omega_0 n + j\arg H(\omega_0)}}$$

3. Đáp ứng hình sine

- Tín hiệu vào gồm 2 tín hiệu sine tần số ω_1 và ω_2 kết hợp tuyến tính & bộ lọc tuyến tính:

$$A_1 e^{j\omega_1 n} + A_2 e^{j\omega_2 n} \xrightarrow{H} A_1 \left|H(\omega_1)\right| e^{j(\omega_1 n + \arg H(\omega_1))}$$
$$+ A_2 \left|H(\omega_2)\right| e^{j(\omega_2 n + \arg H(\omega_2))}$$

- Tín hiệu vào tổng quát: phân tích Fourier thành các thành phần sine rồi tính ngõ ra.

3. Đáp ứng hình sine

- Độ trễ pha (Phase Delay):

$$d(\omega) = -\frac{\arg H(\omega)}{\omega} \Rightarrow \arg H(\omega) = -\omega . d(\omega)$$

- Độ trễ nhóm (Group Delay):

$$d_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H(\omega)$$

$$\Rightarrow e^{j\omega n} \xrightarrow{H} |H(\omega)| e^{j\omega(n - d(\omega))}$$

3. Đáp ứng hình sine

- Bộ lọc có pha tuyến tính: d(ω)=D (constant)
  - ➔ pha $\arg H(\omega) = -\omega D$ tuyến tính theo ω
  - ➔ Các thành phần tần số đều có độ trễ D như nhau:

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{H} |H(\omega)| e^{j\omega(n-D)}$$

3. Đáp ứng hình sine

B. **Đáp ứng quá độ**

- Tín hiệu vào: sine, bắt đầu tại t=0

$$x(n) = e^{j\omega_0 n}u(n) \xrightarrow{\;Z\;} X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}}$$

với ROC: $|z| > \left|e^{j\omega_0}\right| = 1$

- Giả sử bộ lọc có hàm truyền H(z):

$$H(z) = \frac{N(z)}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})\ldots(1 - p_M z^{-1})}$$

3. Đáp ứng hình sine

- Ngõ ra: Y(z) = H(z).X(z)

$$Y(z) = \frac{N(z)}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})\dots(1 - p_M z^{-1})}$$

- Giả sử bậc của N(z) nhỏ hơn M+1, khai triển phân số từng phần:

$$Y(z) = \frac{H(\omega_0)}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{B_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \dots + \frac{B_M}{1 - p_M z^{-1}}$$

với ROC: |z|>1

3. Đáp ứng hình sine

- Biến đổi ngược:

$$y(n) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + B_1 p_1^n + \cdots B_M p_M^n \quad , \; n \geq 0$$

- Giả sử bộ lọc ổn định: $|p_i| < 1, i = \overline{1, M}$

➔ $p_i^n \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad , i = \overline{1, M}$

$$y(n) \xrightarrow{n \to \infty} H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$$

3. Đáp ứng hình sine

- Bộ lọc ổn định nghiêm ngặt, các hệ số $p_i^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$
- Cực có biên độ lớn nhất p_I thì hệ số tương ứng sẽ tiến về 0 chậm nhất.
- Ký hiệu: $\rho = \max_i |p_i|$.
- Hằng số thời gian hiệu quả n_{eff} là thời gian tại đó

$$\rho^{n_{eff}} = \varepsilon$$

với ε là mức độ nhỏ mong muốn, ví dụ 1%

$$n_{eff} = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho} = \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)}$$

3. Đáp ứng hình sine

- Đáp ứng unit step: tín hiệu vào x(n) = u(n).
  Trường hợp đặc biệt của $e^{j\omega_0 n}u(n)$ với $\omega_0 = 0$ (z = 1)

$$y(n) = H(0) + B_1 p_1^n + B_2 p_2^n + \ldots + B_M p_M^n, \quad n \geq 0$$

$$y(n) \xrightarrow{n \to \infty} H(0)$$

H(0) coi như đáp ứng DC của bộ lọc.

Độ lợi DC: $\boxed{H(0) = H(z)\big|_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)}$

3. Đáp ứng hình sine

- Đáp ứng unit step thay đổi: tín hiệu vào $x(n) = (-1)^n u(n)$.

  Trường hợp đặc biệt của $e^{j\omega_0 n}u(n)$ với $\omega_0 = \pi$ ($z = -1$)

$$y(n) = H(\pi)e^{j\pi n} + B_1 p_1^n + B_2 p_2^n + \ldots + B_M p_M^n, \quad n \geq 0$$

$$y(n) \xrightarrow{n \to \infty} H(\pi)(-1)^n$$

Độ lợi AC:

$$\boxed{H(\pi) = H(z)\Big|_{z=-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h(n)}$$

3. Đáp ứng hình sine

Ví dụ

1. Xác định đáp ứng quá độ đầy đủ của bộ lọc nhân quả với tín hiệu vào dạng sine phức, tần số $\omega 0$, cho

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

2. Xác định đáp ứng DC và AC của bộ lọc trên. Tính hằng số thời gian hiệu quả n_{eff} để đạt đến $\varepsilon = 1\%$

3. Đáp ứng hình sine

- Bộ lọc ổn định dự trữ (marginally stable): có cực nằm trên vòng tròn đơn vị.

- Xét bộ lọc H(z) có cực trên vòng tròn đơn vị $p_1 = e^{j\theta_1}$.

  Bộ lọc sẽ có cực liên hợp: $p_1^* = e^{-j\theta_1}$

- Giả sử các cực khác nằm trong vòng tròn đơn vị

- Đáp ứng quá độ

$$y(n) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} + B_1 e^{j\theta_1 n} + B_1^* e^{-j\theta_1 n} + B_2 p_2^n + \dots$$

$$y(n) \xrightarrow{n \to \infty} H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} + B_1 e^{j\theta_1 n} + B_1^* e^{-j\theta_1 n}$$

3. Đáp ứng hình sine

- Nếu $\omega_0 = \pm\theta_1$ thì tạo ra cộng hưởng và ngõ ra không ổn định. Ví dụ: $\omega_0 = \theta_1 \Rightarrow e^{j\theta_1} = e^{j\omega_0} = p_1$

$$Y(z) = \frac{N(z)}{(1 - p_1 z^{-1})^2 (1 - p_2 z^{-1})\ldots(1 - p_M z^{-1})}$$

$$= \frac{B_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{B_1^{'}}{(1 - p_1 z^{-1})^2} + \frac{B_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \ldots$$

- Biết: $\frac{1}{(1 - az^{-1})^2} \xrightarrow{z^{-1}} (n+1)a^n u(n)$

$$\Rightarrow y(n) = B_1 e^{j\theta_1 n} + B_1^{'}(n+1)e^{j\theta_1 n} + B_2 p_2^n + \ldots$$

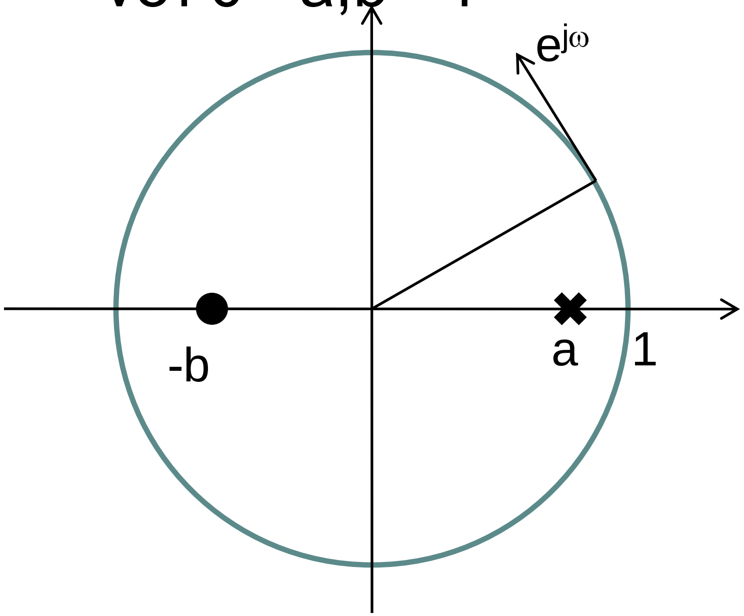
4. Thiết kế cực – zero

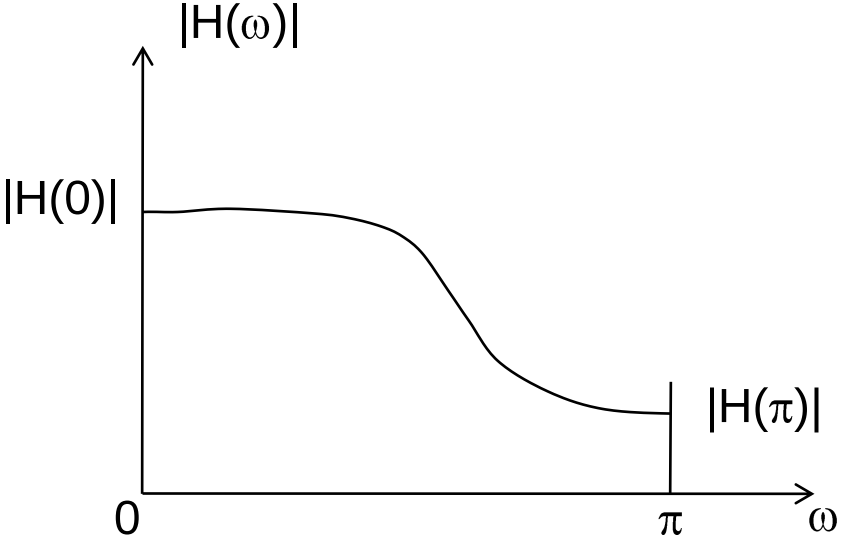
1. **Các bộ lọc bậc nhất**

Ví dụ: Thiết kế bộ lọc bậc 1 có hàm truyền dạng

$$H(z) = \frac{G(1 + bz^{-1})}{1 - az^{-1}}$$

với 0< a,b <1





4. Thiết kế cực – zero

$$H(\omega)\big|_{\omega=0} = H(z)\big|_{z=1} = \frac{G(1+b)}{1-a}$$

$$H(\omega)\big|_{\omega=\pi} = H(z)\big|_{z=-1} = \frac{G(1-b)}{1+a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{H(\pi)}{H(0)} = \frac{(1-b)(1-a)}{(1+a)(1+b)}}$$

Cần 2 phương trình thiết kế để xác định a và b.

4. Thiết kế cực – zero

Ví dụ : thiết kế bộ lọc có H(π)/H(0) = 1/21 và n_{eff} = 20 mẫu để đạt ε = 1%

$$a = \varepsilon^{1/n_{eff}} = (0.01)^{1/20} = 0.8$$

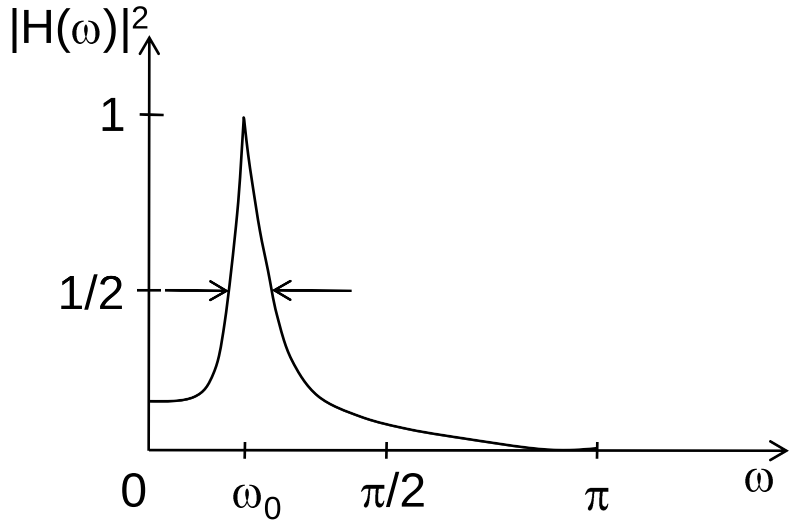
$$\frac{(1-b)(1-0.8)}{(1+b)(1+0.8)} = \frac{1}{21} \Rightarrow b = 0.4$$

$$H(z) = G\frac{1+0.4z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$$

4. Thiết kế cực – zero

2. Các bộ cộng hưởng

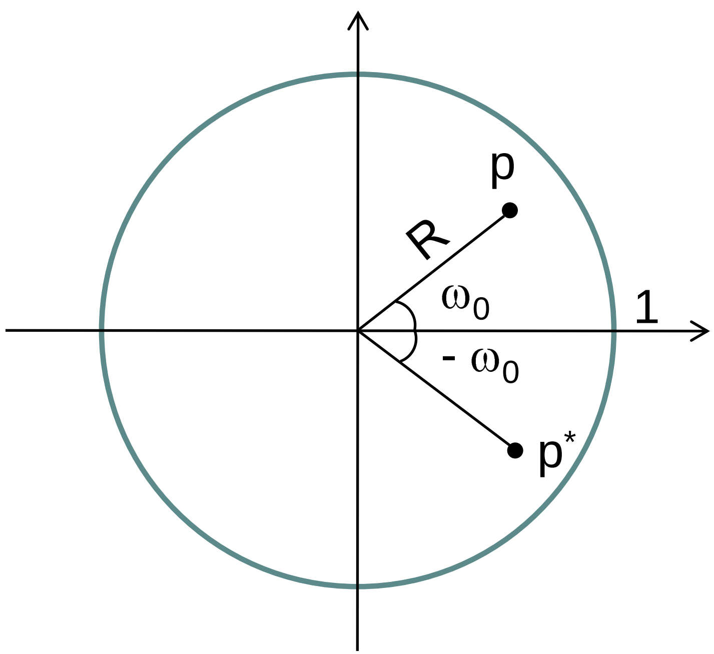
Thiết kế một bộ lọc cộng hưởng bậc hai đơn giản, đáp ứng có một đỉnh đơn hẹp tại tần số $\omega 0$



4. Thiết kế cực – zero

- Để tạo 1 đỉnh tại $\omega = \omega_0$, đặt 1 cực $p = R.e^{j\omega_0}$, $0 < R < 1$

  và cực liên hợp $p^* = R.e^{-j\omega_0}$



$$H(z) = \frac{G}{\left(1 - R.e^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1 - R.e^{-j\omega_0}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{G}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$a_1 = -2R\cos\omega_0, \qquad a_2 = R^2$$

4. Thiết kế cực – zero

- Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{G}{\left(1 - R.e^{j\omega_0}e^{-j\omega}\right)\left(1 - R.e^{-j\omega_0}e^{-j\omega}\right)}$$

- Chuẩn hóa bộ lọc: $\left|H(e^{j\omega_0})\right| = 1$

$$\left|H(e^{j\omega_0})\right| = \frac{G}{\left|\left(1 - R.e^{j\omega_0}e^{-j\omega_0}\right)\left(1 - R.e^{j\omega_0}e^{j\omega_0}\right)\right|} = 1$$

$$\Rightarrow G = (1 - R)\sqrt{1 - 2R\cos(2\omega_0) + R^2}$$

4. Thiết kế cực – zero

- Độ rộng 3-dB fullwidth: độ rộng tại ½ cực đại của đáp ứng biên độ bình phương

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|H(\omega_0)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

- Tính theo dB: $20\log_{10}\left|\frac{H(\omega)}{H(\omega_0)}\right| = 10\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = -3\,dB$

- Giải ra 2 nghiệm ω_1 và ω_2 => $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

4. Thiết kế cực – zero

- Chứng minh được: $\Delta \omega \approx 2(1 - R)$ khi p nằm gần đường tròn (xem sách)

→ dùng xác định giá trị R dựa trên băng thông $\Delta\omega$ cho trước.

Ví dụ: thiết kế bộ lọc cộng hưởng 2 cực, đỉnh f0 = 500Hz và độ rộng $\Delta\omega$ = 32kHz, tốc độ lấy mẫu fs = 10kHz

4. Thiết kế cực – zero

- Phương pháp chung: đặt 1 cặp zero gần các cực theo cùng hướng các cực, tại $a_1 = r.e^{j\omega_0}$ và $a_1^* = r.e^{-j\omega_0}$ với $0 \le r \le 1$
- Hàm truyền:

$$H(z) = \frac{\left(1 - r.e^{j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - r.e^{-j\omega_0} z^{-1}\right)}{\left(1 - R.e^{j\omega_0} z^{-1}\right)\left(1 - R.e^{-j\omega_0} z^{-1}\right)} = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

với $a_1 = -2R\cos\omega_0, \quad a_2 = R^2$

$b_1 = -2r\cos\omega_0, \quad b_2 = r^2$

4. Thiết kế cực – zero