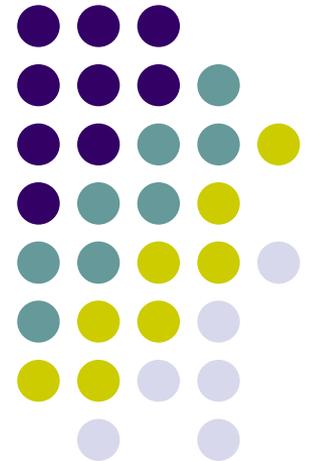
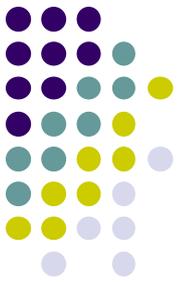


Xử lý số tín hiệu

Chương 8: Biến đổi DFT và FFT

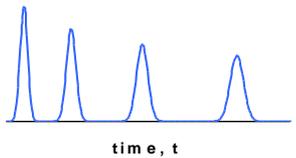
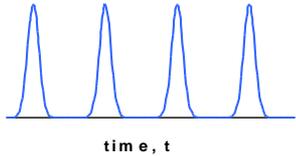


Các phép biến đổi Fourier



Miền thời gian

Miền tần số



Continuous

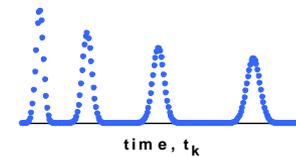
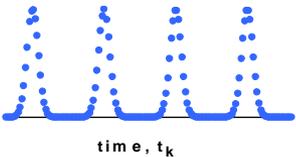
{ Periodic (period T) **FS**
 { Aperiodic **FT**

Discrete

Continuous

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$



Discrete

{ Periodic (period T) **DFS**
 { Aperiodic { **DTFT**
 DFT

Discrete

Continuous

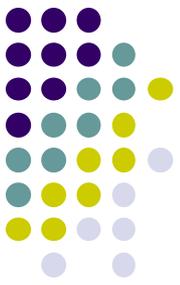
Discrete

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] \cdot e^{-j2\pi f n}$$

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

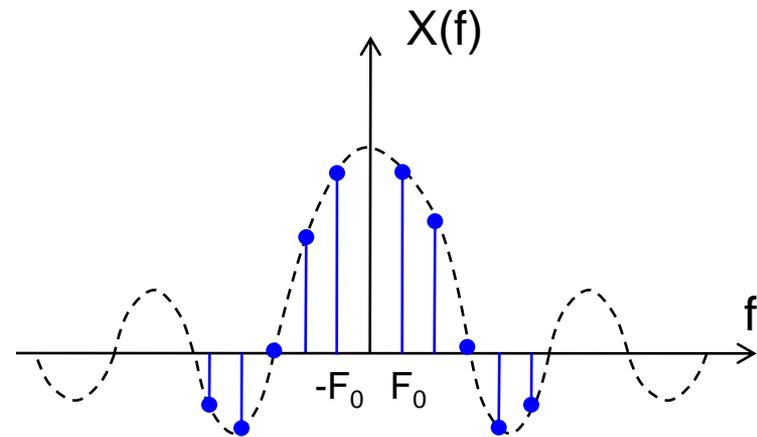
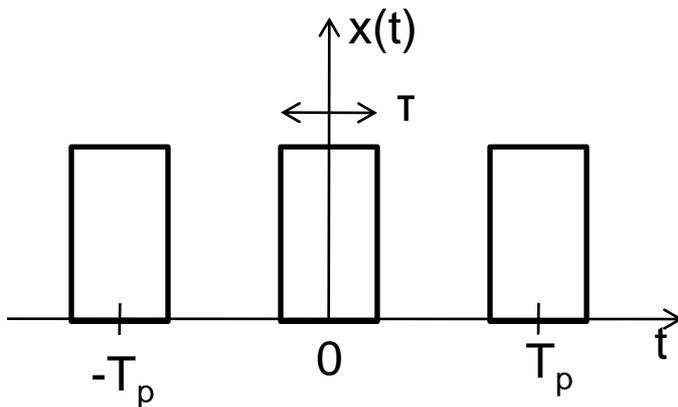
Chuỗi Fourier (Fourier series-FS)



- Tín hiệu $x(t)$ tuần hoàn, chu kỳ T_p , tần số $F_0 = 1/T_p$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j 2 \pi k F_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j 2 \pi k F_0 t} dt$$



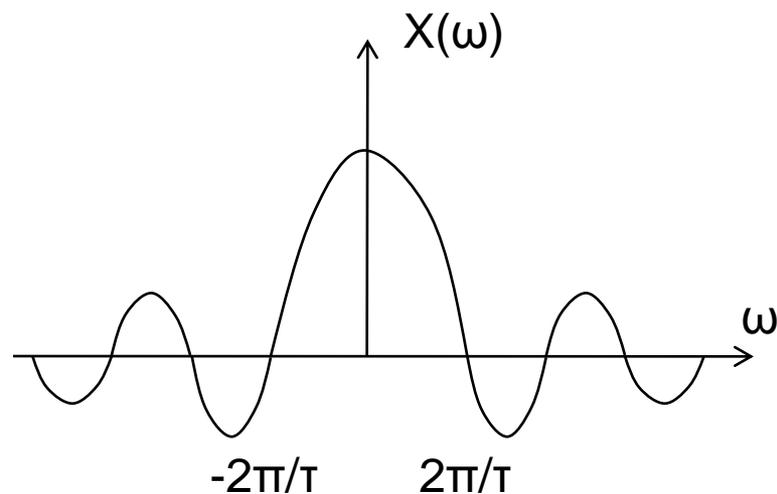
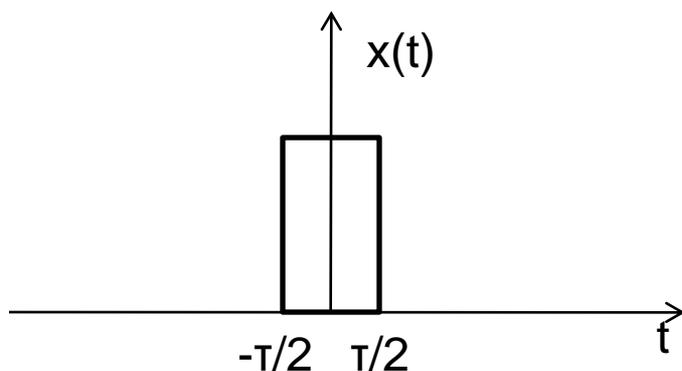
Biến đổi Fourier (Fourier transform-FT)

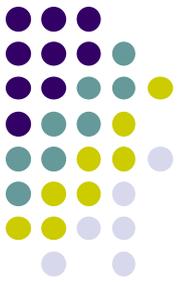


- Tín hiệu $x(t)$ không tuần hoàn

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$



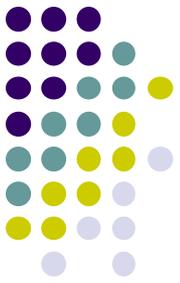


Biến đổi Fourier của một số tín hiệu cơ bản

	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_F(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$	$F_F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	
	$\text{rect} \frac{t}{T} = \begin{cases} 1 & (t < T/2) \\ 0 & (t > T/2) \end{cases}$	$T \text{sinc} \frac{\omega T}{2\pi} \equiv T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	
	$\text{sinc} \frac{t}{T} \equiv \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$	$T \text{rect} \frac{\omega T}{2\pi} = \begin{cases} 0 & (\omega < \frac{\pi}{T}) \\ T & (\omega > \frac{\pi}{T}) \end{cases}$	
	$\begin{cases} 1 - \frac{ t }{T} & (t < T) \\ 0 & (t \geq T) \end{cases}$	$T \text{sinc}^2 \frac{\omega T}{2\pi} \equiv T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2$	
	$e^{-\frac{ t }{T}}$	$\frac{2T}{(\omega T)^2 + 1}$	
	$e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^2}$	$\sqrt{2\pi} T e^{-\frac{1}{2} (\omega T)^2}$	

Biến đổi Fourier thời gian rời rạc

Discrete – Time Fourier Transform (DTFT)



- Tín hiệu $x(n)$ rời rạc, không tuần hoàn

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(\omega) \stackrel{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Chuỗi Fourier rời rạc

Discrete Fourier Sequence (DFS)



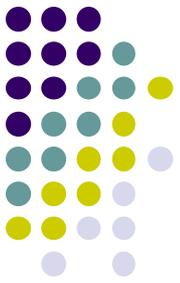
- Tín hiệu $x(n)$ rời rạc, tuần hoàn với chu kỳ N

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j 2 \pi kn / N}$$

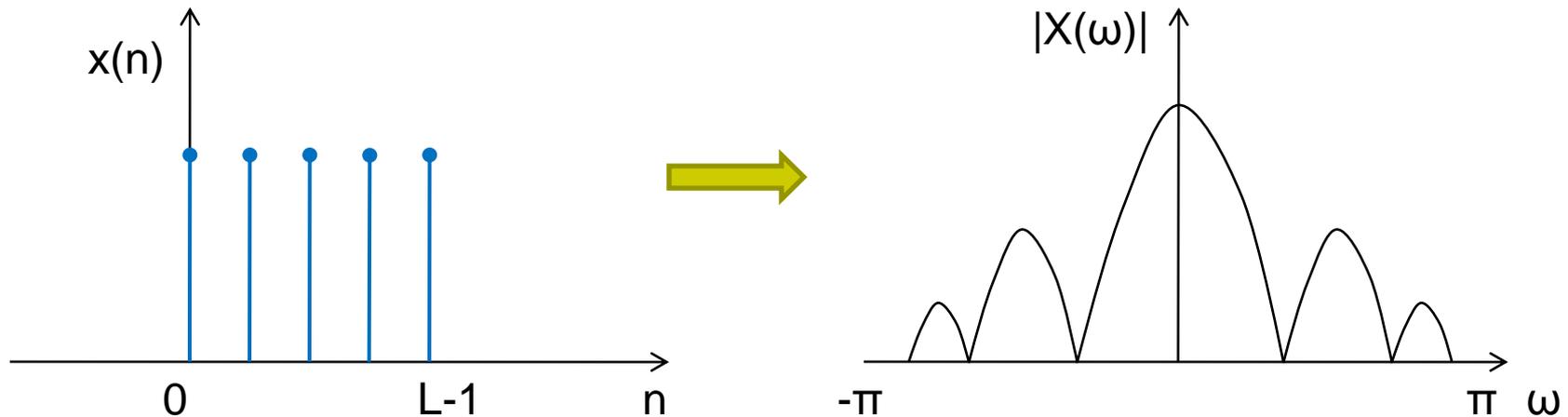
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j 2 \pi kn / N}$$

Biến đổi Fourier rời rạc

Discrete Fourier Transform (DFT)



- Tín hiệu $x(n)$ rời rạc, không tuần hoàn, chiều dài L hữu hạn \rightarrow Biến đổi DTFT cho phổ liên tục $X(\omega)$

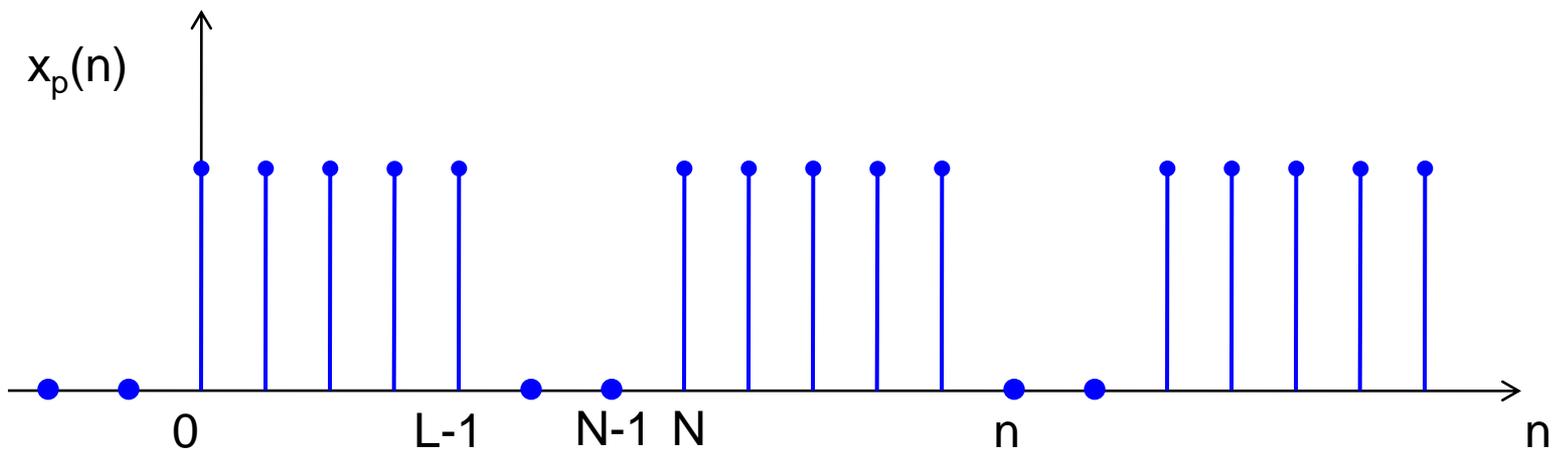


Biến đổi Fourier rời rạc

Discrete Fourier Transform (DFT)



- Lặp lại tín hiệu $x(n)$ với chu kỳ $N \geq L \rightarrow$ Tín hiệu $x_p(n)$ tuần hoàn chu kỳ N

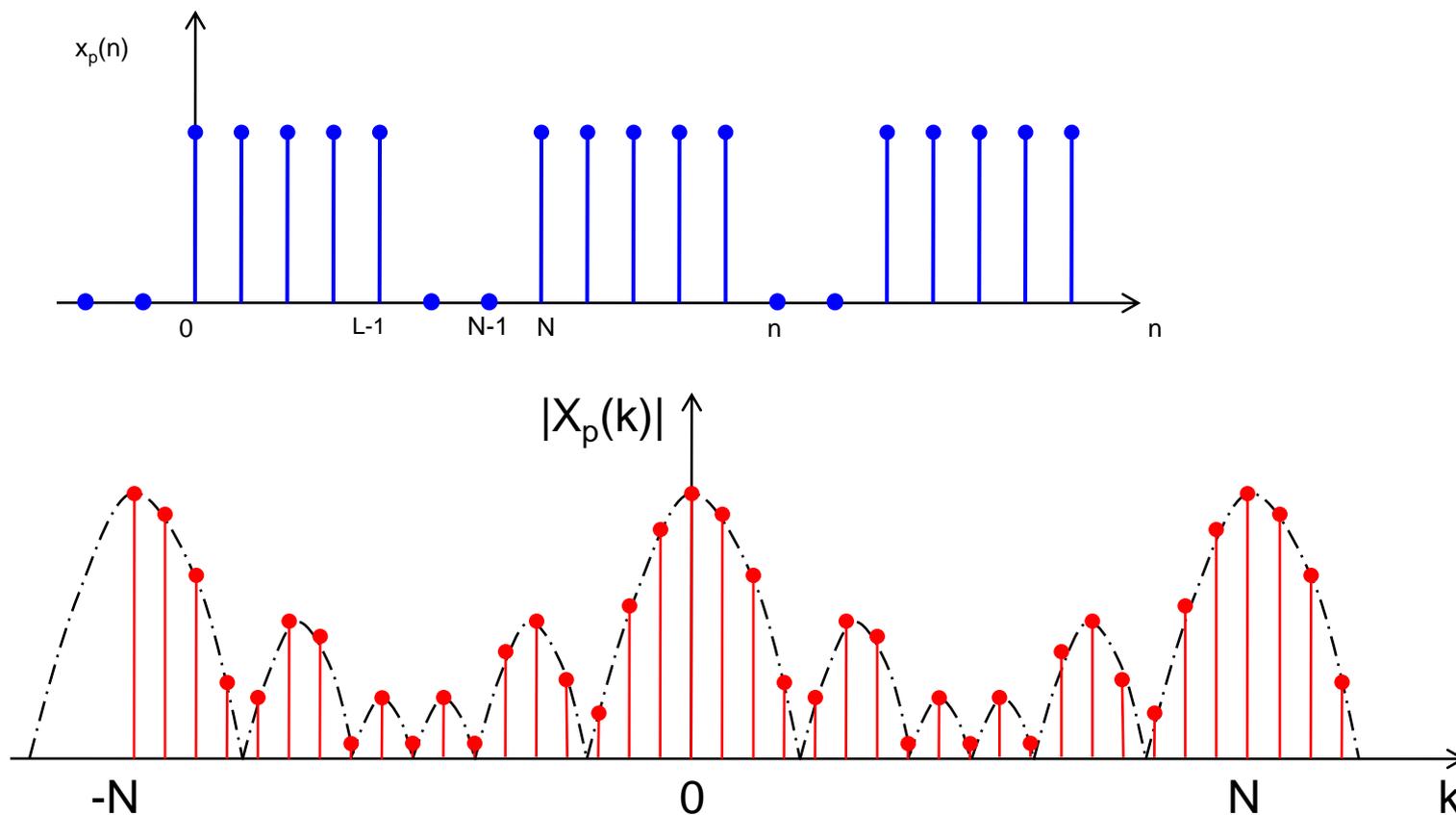


Biến đổi Fourier rời rạc

Discrete Fourier Transform (DFT)

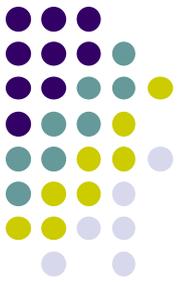


- $x_p(n)$ tuần hoàn chu kỳ $N \rightarrow$ Tính DFS của $x_p(n) \rightarrow X_p(k)$

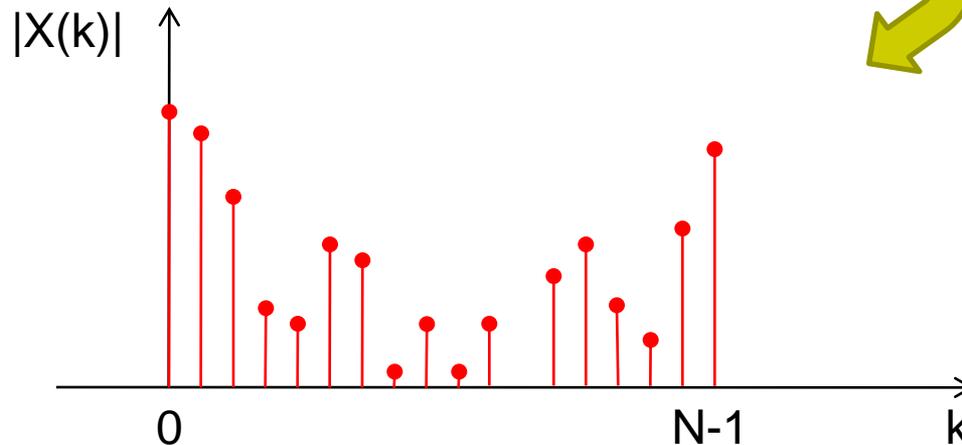
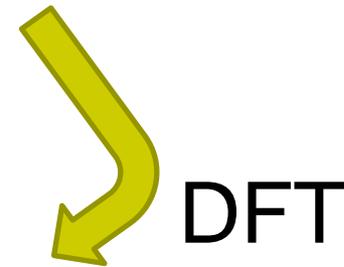
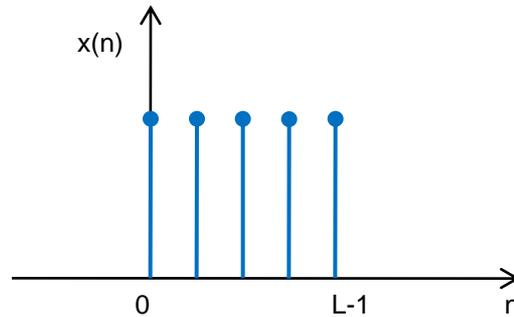


Biến đổi Fourier rời rạc

Discrete Fourier Transform (DFT)

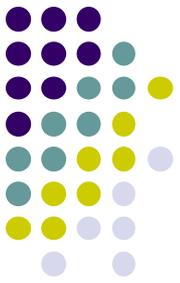


$X_p(k)$ tuần hoàn chu kỳ $N \rightarrow$ Đặt $X(k) = X_p(k), k = 0, \dots, N-1$



Biến đổi Fourier rời rạc

Discrete Fourier Transform (DFT)



Công thức biến đổi DFT N-điểm cho chuỗi chiều dài L:

DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Giải thuật biến đổi Fourier nhanh Fast Fourier Transform (FFT)



- Tính trực tiếp DFT N – điểm của x(n):

Tổng quát: X(k) và x(n) là số phức:

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

$$X_I(k) = - \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right]$$

Tính trực tiếp cần:

- $2N^2$ phép tính hàm lượng giác
- $4N^2$ phép nhân thực
- $4N(N-1)$ phép cộng thực



**Chi phí tính
toán lớn**

Giải thuật biến đổi Fourier nhanh

Fast Fourier Transform (FFT)



- Đặt $W_N = e^{-j2\pi / N}$

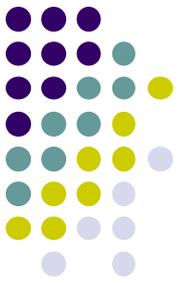
→ $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$

- Tính đối xứng: $W_M^{k+N/2} = -W_N^k$

- Tính tuần hoàn: $W_M^{k+N} = W_N^k$

Giải thuật biến đổi Fourier nhanh

Fast Fourier Transform (FFT)



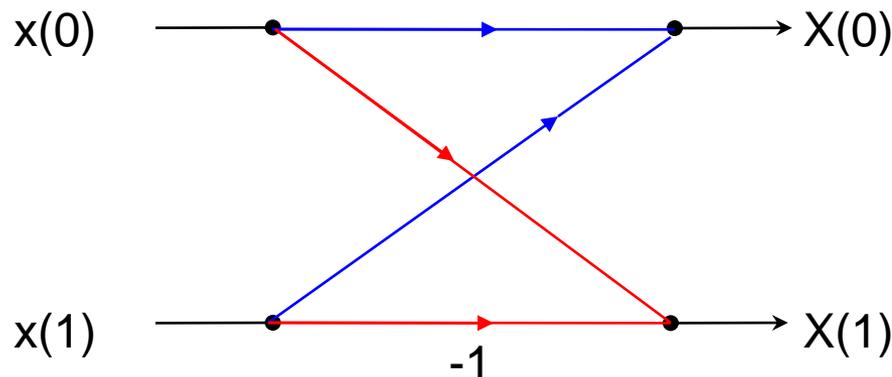
- Xét chuỗi $x(n) = \{x(0), x(1)\}$

→ FFT 2 điểm của $x(n)$:

$$X(0) = x(0)W_2^0 + x(1)W_2^0 = x(0) + x(1)$$

$$X(1) = x(0)W_2^0 + x(1)W_2^1 = x(0) - x(1)$$

(Lưu ý: $W_2 = 1$)



1 Bước
(Butterfly)

Giải thuật FFT phân chia theo thời gian (Decimation in time – DIT)



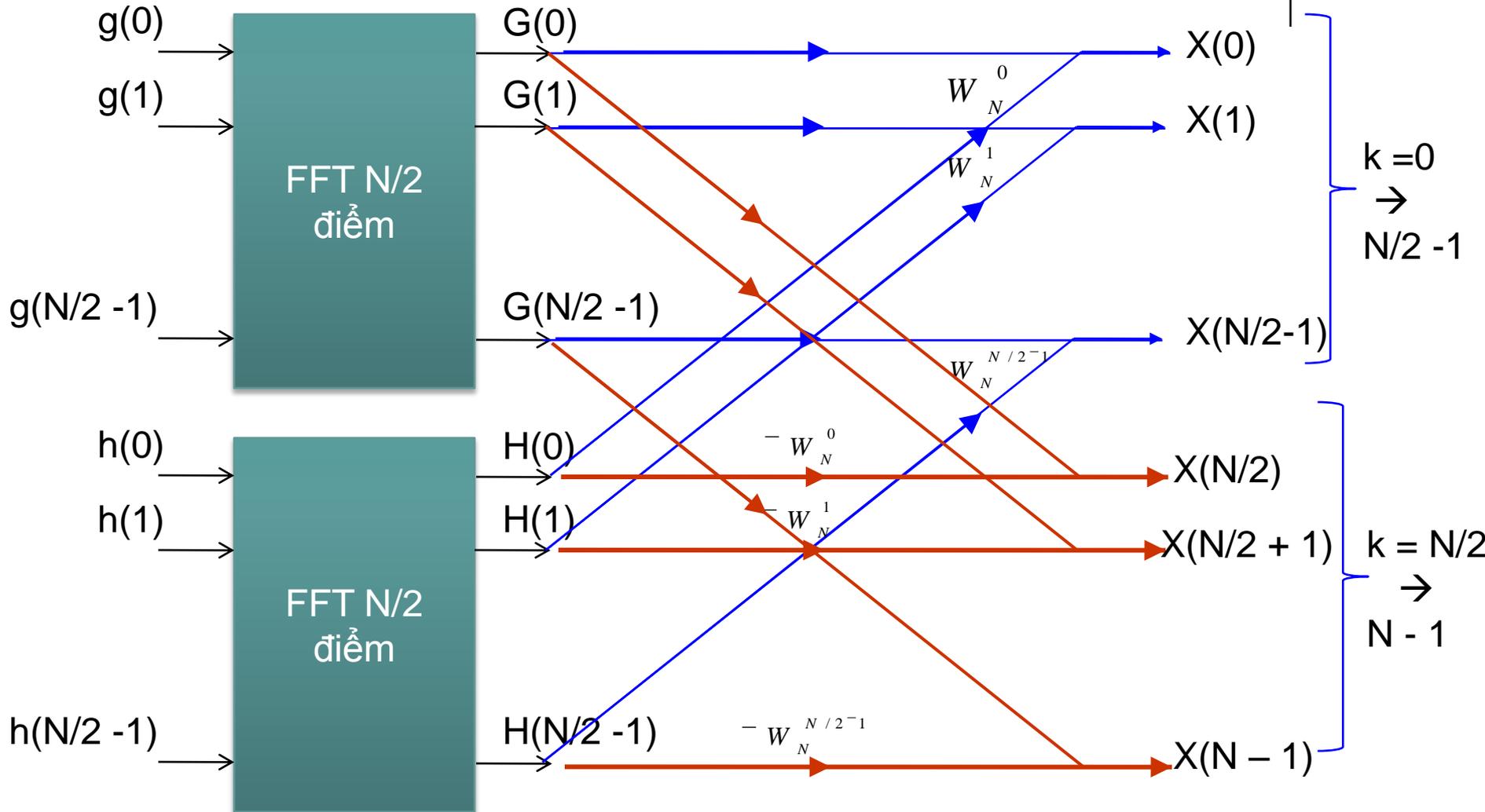
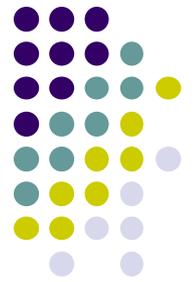
- Xét chuỗi $x(n)$ có chiều dài $N = 2^k$
 - Đặt $g(n) = x(2n) \rightarrow g(n) = \{x(0), x(2), \dots\}$
 - Đặt $h(n) = x(2n + 1) \rightarrow h(n) = \{x(1), x(3), \dots\}$
- DFT N điểm của $x(n)$:

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(k) = G\left(k - \frac{N}{2}\right) - W_N^{k - \frac{N}{2}} H\left(k - \frac{N}{2}\right) \quad , \quad k = \frac{N}{2}, \dots, N - 1$$

- $G(k), H(k)$: DFT $N/2$ điểm của $g(n), h(n)$

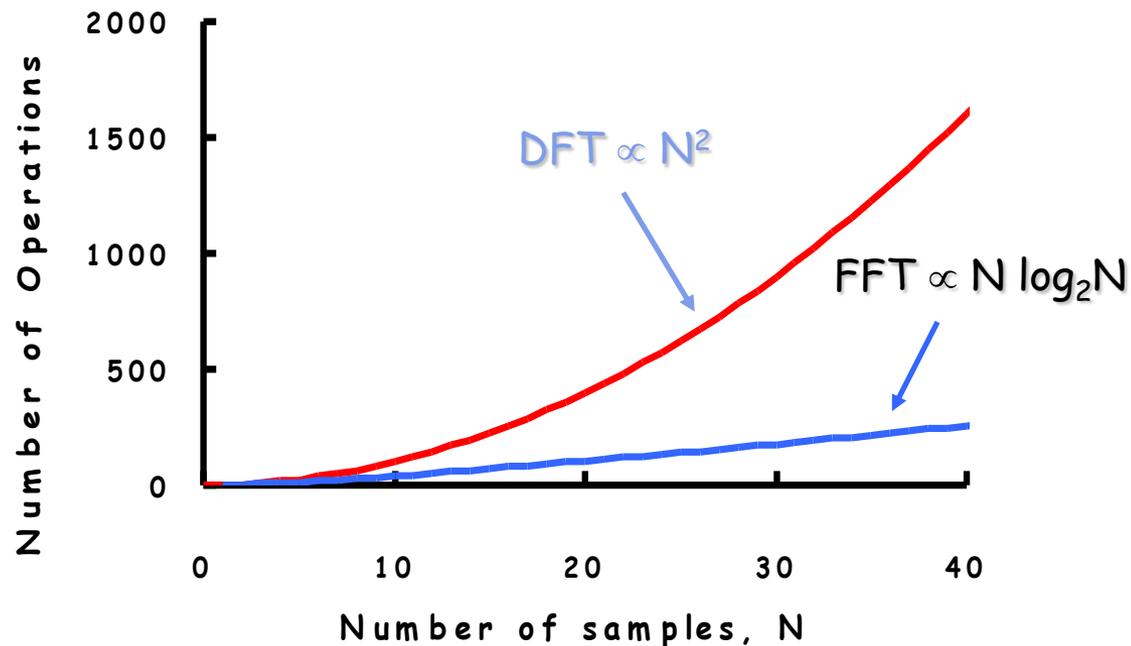
Giải thuật FFT phân chia theo thời gian



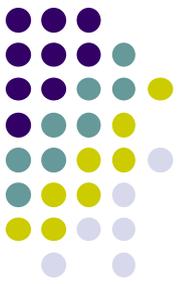
Chi phí tính toán



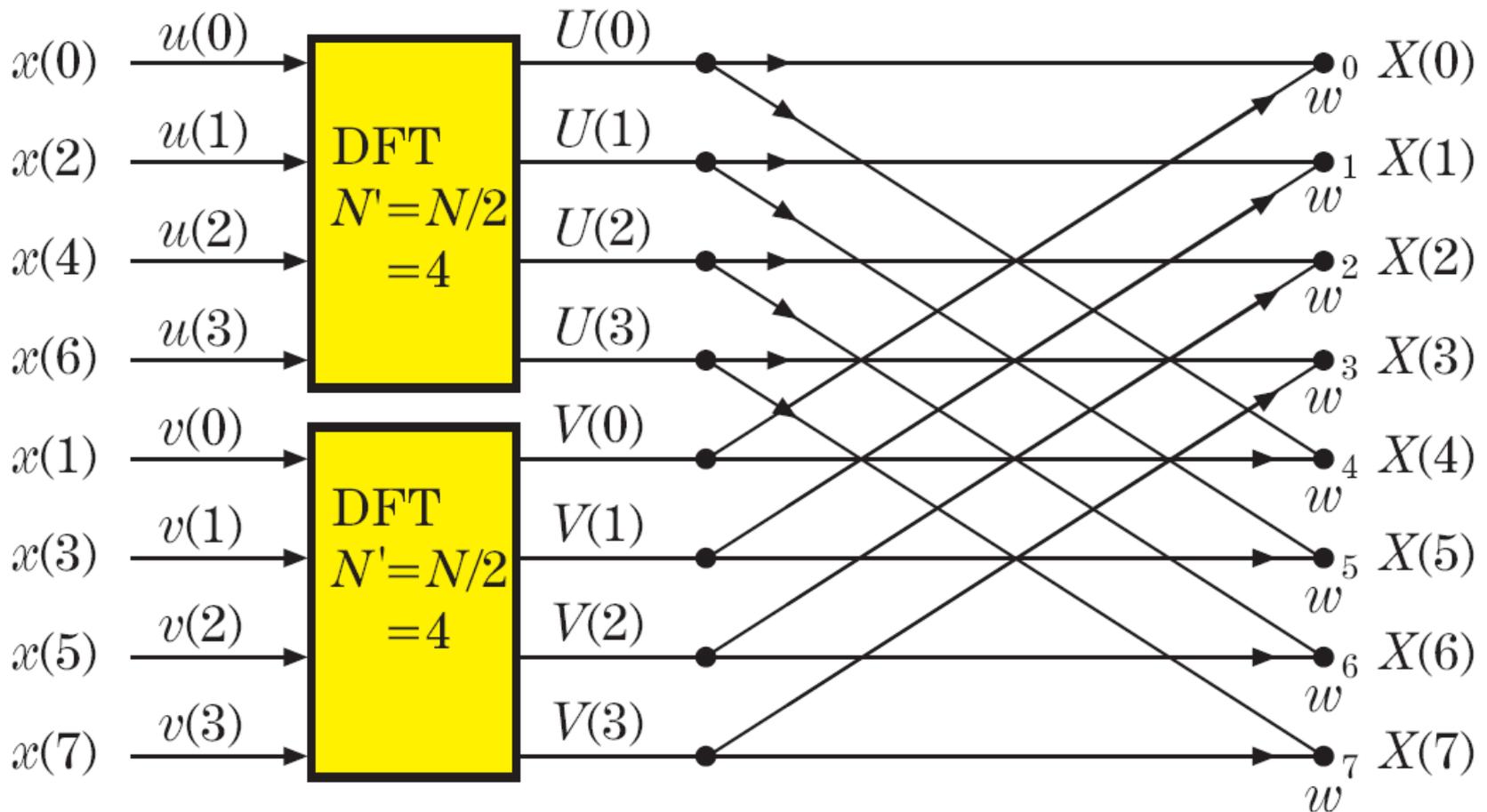
- So với tính trực tiếp: chi phí tính toán thấp hơn



Ví dụ

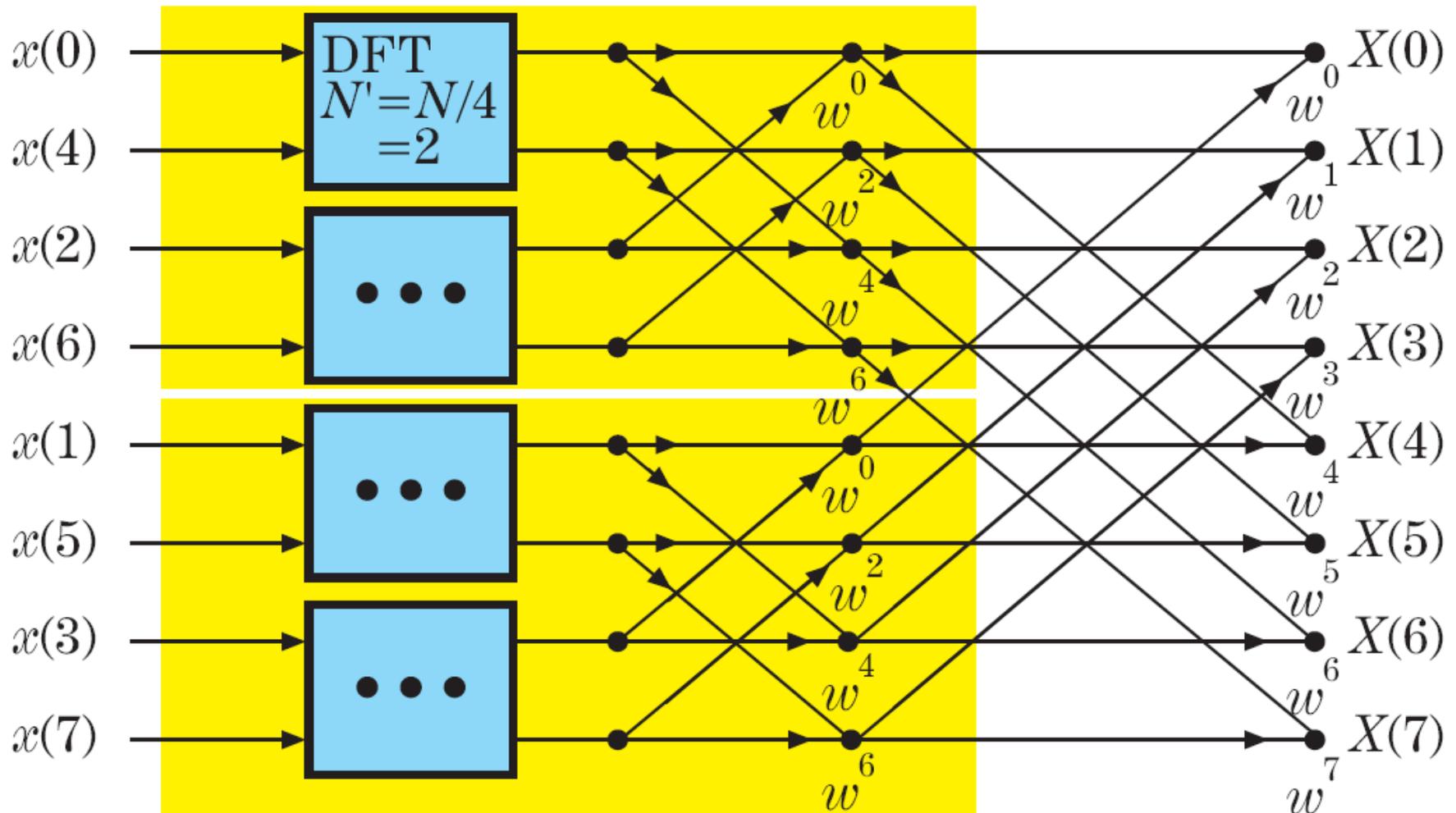


- FFT 8 điểm phân chia theo thời gian



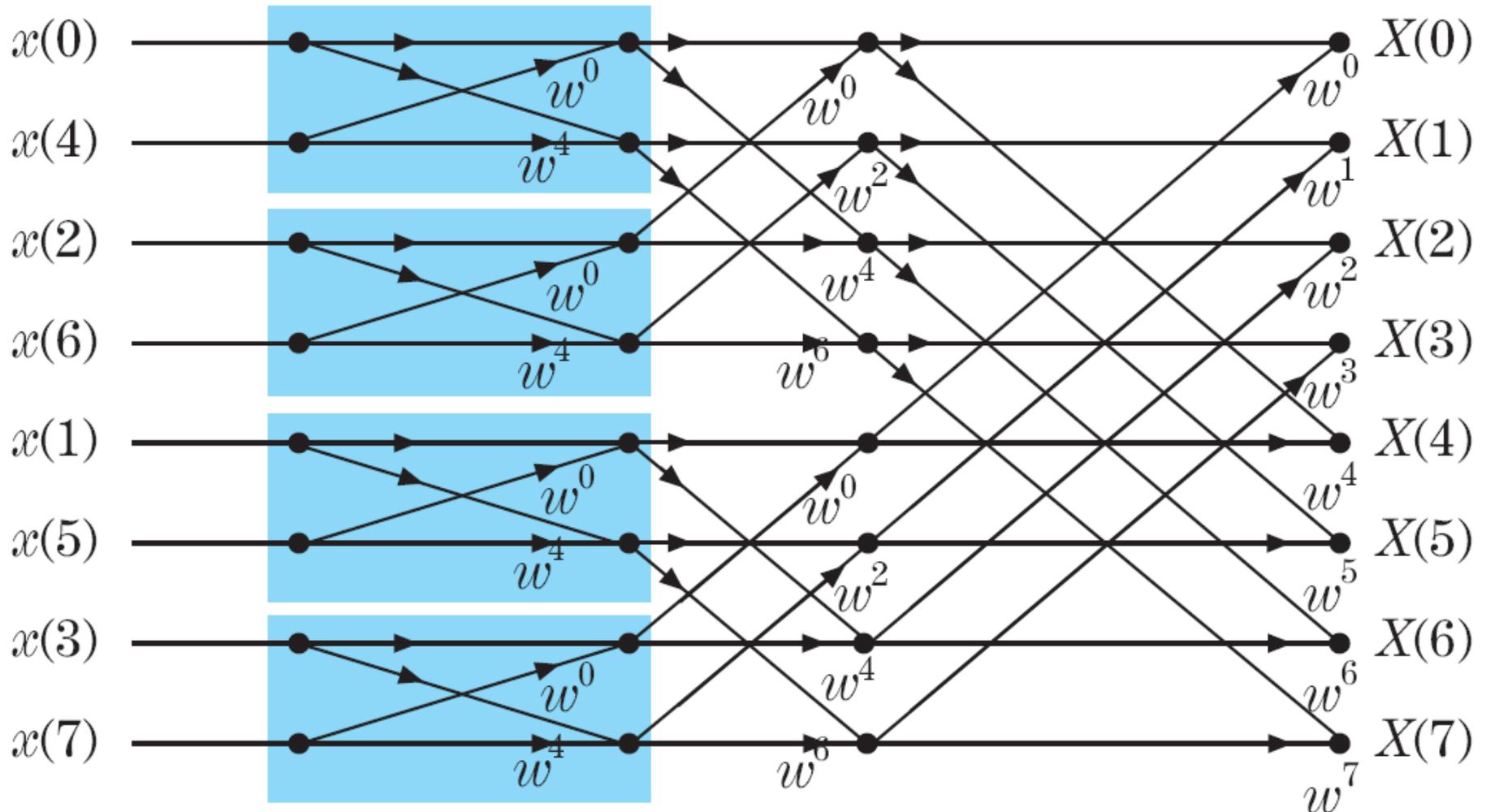
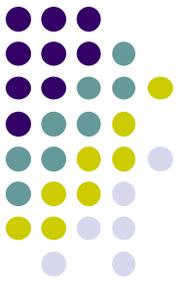
Ví dụ

- FFT 8 điểm phân chia theo thời gian



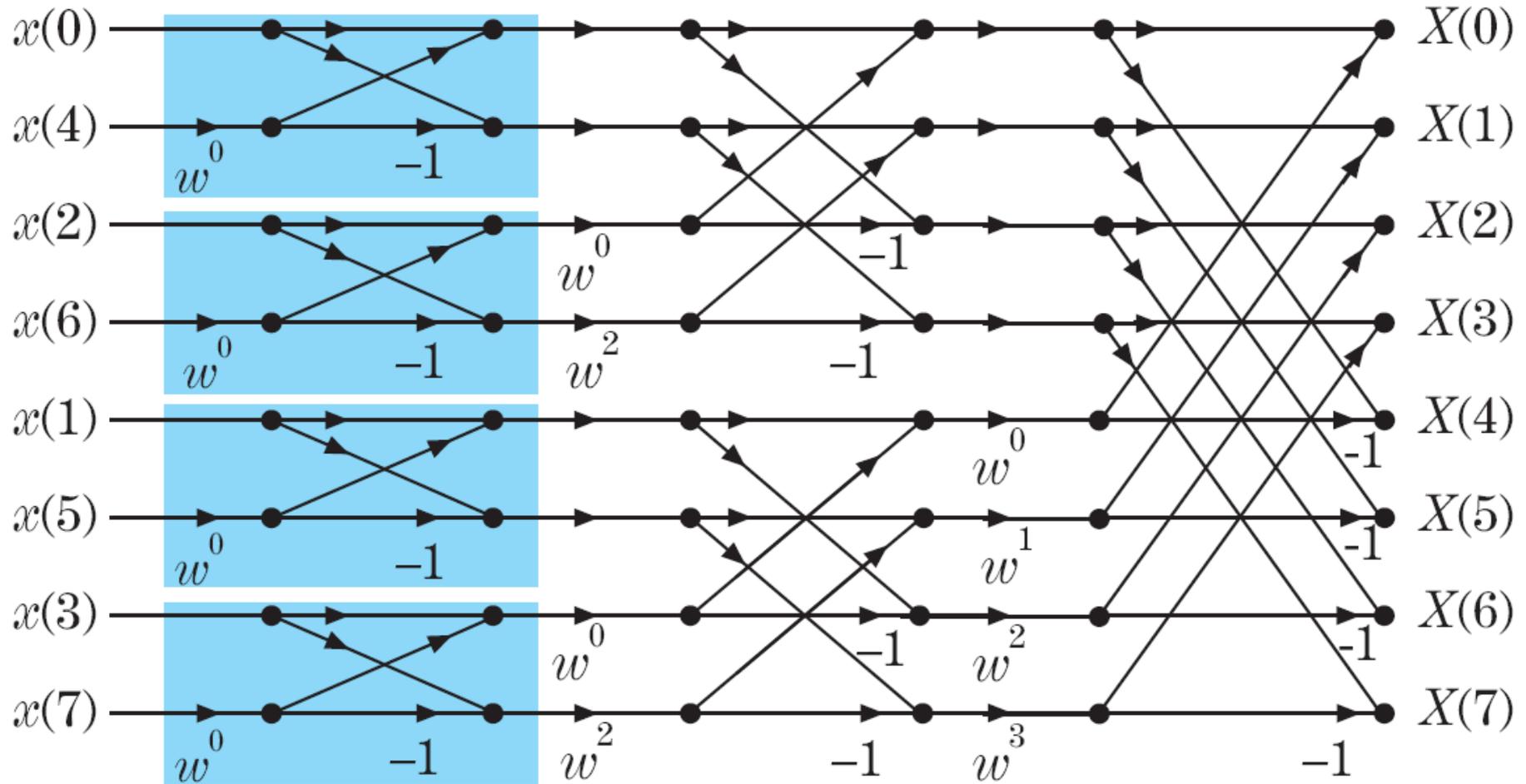
Ví dụ

- FFT 8 điểm phân chia theo thời gian



Ví dụ

- FFT 8 điểm phân chia theo thời gian



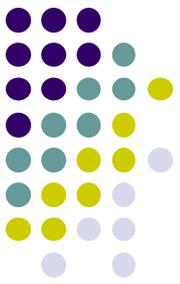
Ví dụ

- Thứ tự chuỗi $x(n)$ trong pp Decimation – in - time

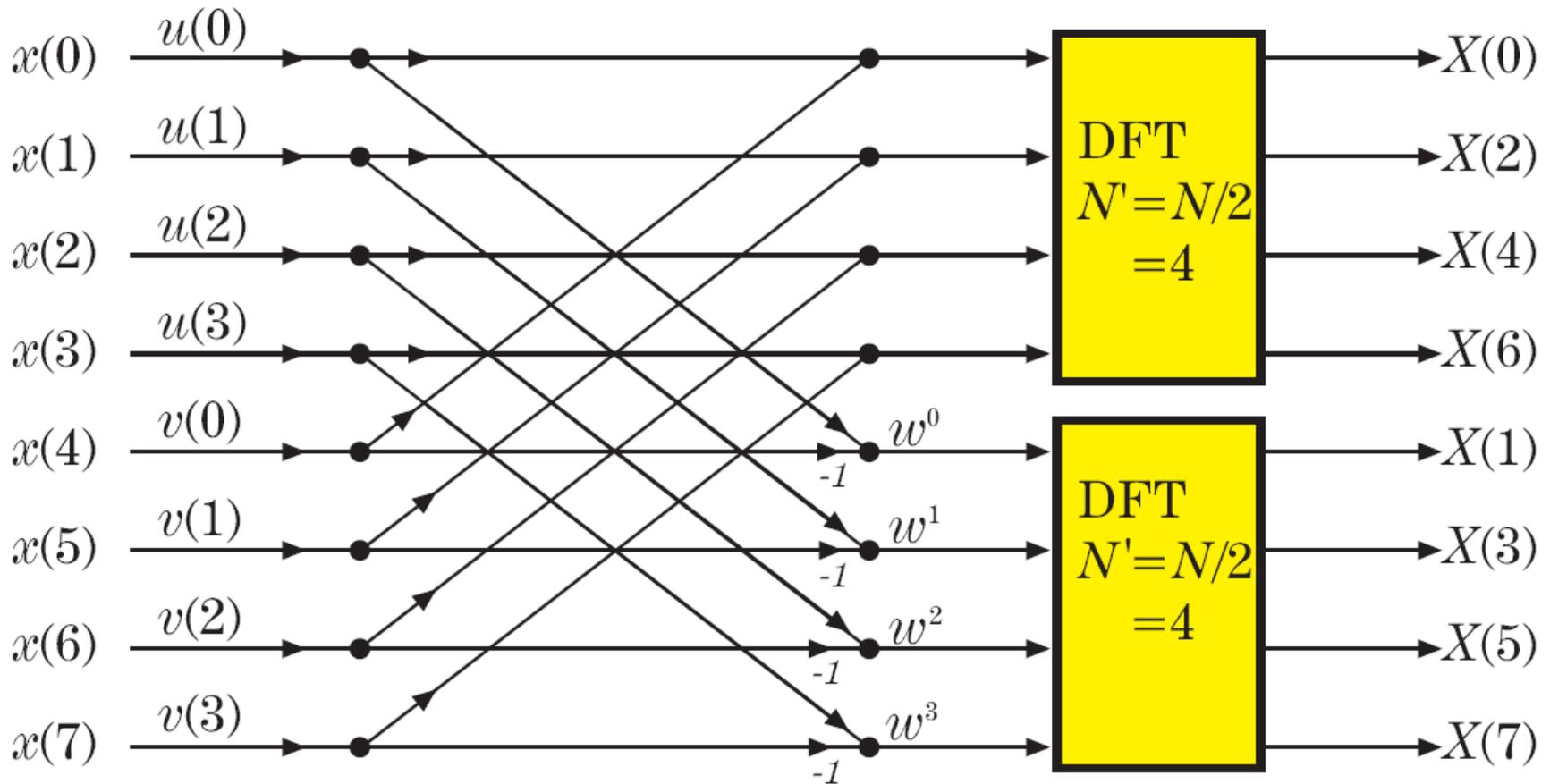


Số thứ tự
0
1
2
3
4
5
6
7

Ví dụ

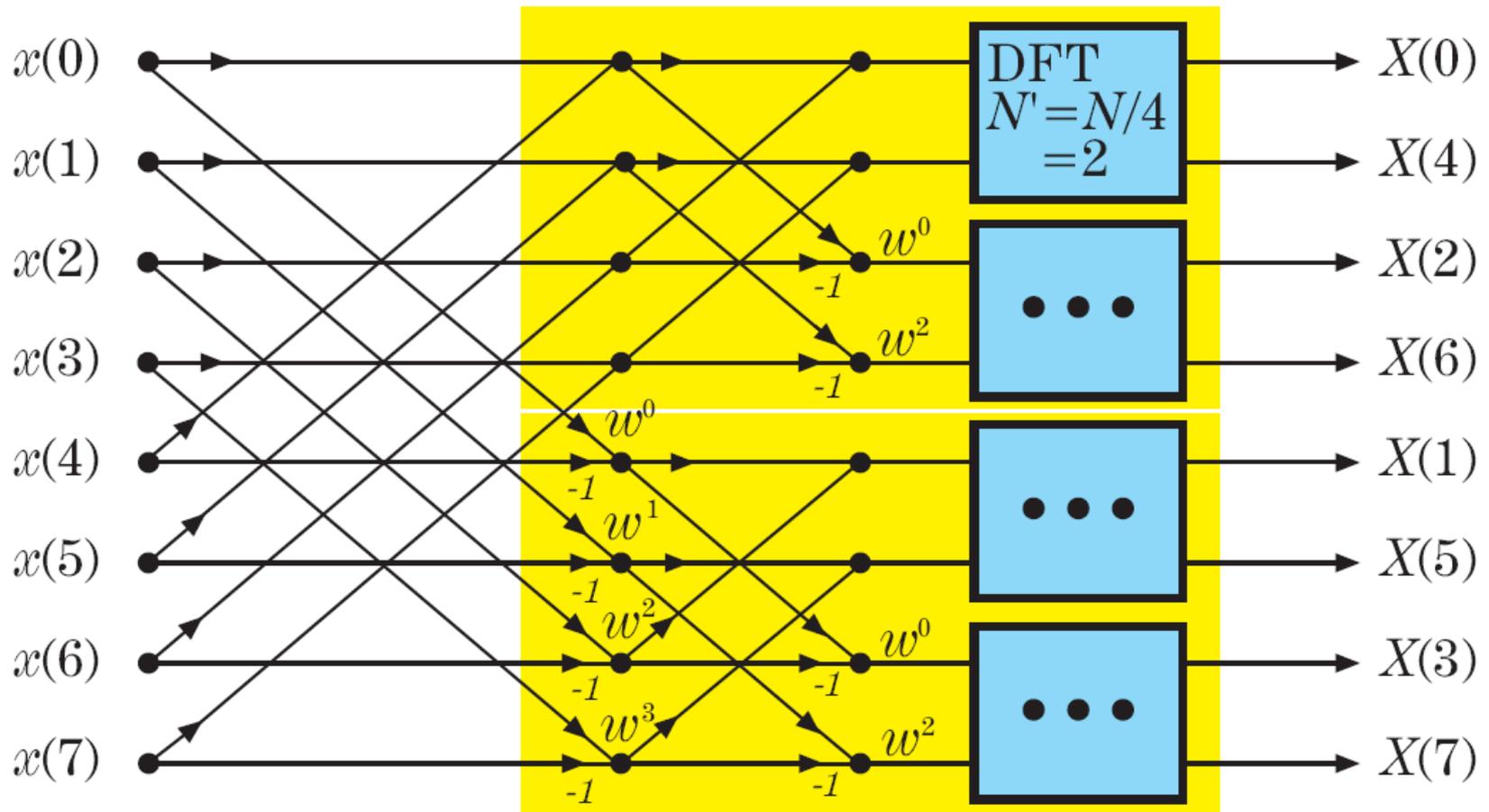
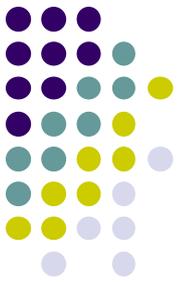


- FFT 8 điểm phân chia theo tần số (Decimation in freq)



Ví dụ

- FFT 8 điểm phân chia theo tần số



Ví dụ

- FFT 8 điểm phân chia theo tần số

