

Chương 2

Thu Gọn Hệ Lực

Phương Trình Cân Bằng Của Hệ Lực

Nội dung:

Chương này đưa ra các dạng thu gọn tương đương của hệ lực, những điều kiện cân bằng của hệ lực làm cơ sở để đánh giá tác dụng của chúng và giải bài toán cân bằng của vật rắn, hệ vật rắn.

§1. HAI ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC:

1.1. Vector chính của hệ lực:

□ Định nghĩa:

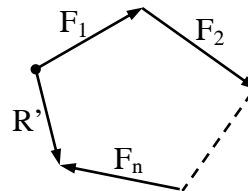
Vector chính của hệ lực là vector tự do ($\vec{R}'$) bằng tổng các vector lực thuộc hệ:

$$\varphi(\vec{F}_k) : \vec{R}' = \sum \vec{F}_k \quad (2.1)$$

□ Phương pháp xác định:

a. Hình học: Vectơ đóng kín đa giác lực.

b. Giải tích :



$$\vec{R}'(X', Y', Z') \Leftrightarrow X' = \sum F_{kx} ; Y' = \sum F_{ky} ; Z' = \sum F_{kz} \quad (2.2)$$

1.2. Vector moment chính của hệ lực đối với một tâm:

□ 2.1 Định nghĩa:

Vector moment chính của hệ lực đối với tâm O ($\vec{M}_o$) của hệ lực bằng tổng các vector moment của lực thuộc hệ lấy cùng đối với tâm đó.

$$\vec{M}_o = \sum \vec{m}_o(\vec{F}_k) \quad (2.3)$$

□ Phương pháp xác định:

Dùng (1.2) chúng ta nhận được:

$$\vec{M}_o = \sum (Z_k Y_k - Y_k Z_k) \vec{i} + \sum (X_k Z_k - Z_k X_k) \vec{j} + \sum (Y_k X_k - X_k Y_k) \vec{k} \quad (2.4)$$

Trong đó lực $\vec{F}(X_k, Y_k, Z_k)$, bán kính điểm đặt lực thứ k là $\vec{r}_k(x_k, y_k, z_k)$

§2. ĐỊNH LÝ TƯƠNG ĐƯƠNG CƠ BẢN:

Định lý :

$$\varphi_1(\vec{F}_k) \equiv \varphi_2(\vec{P}_i) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}'_1 = \vec{R}'_2 \\ \vec{M}_{1/O} = \vec{M}_{2/O} \end{cases}$$

Nhận xét:

Từ định lý này ta thấy hệ lực tương đương tối giản nhất là hệ lực chỉ gồm một vector lực bằng vector chính và một vector moment bằng vector moment chính của hệ lực đối với một tâm cùng đặt tại tâm đó (kể cả các trường hợp các thành phần đó bằng 0).

§3. CÁC HỆ QUẢ:

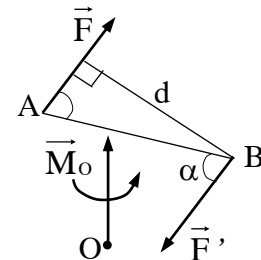
3.1. Vector moment ngẫu lực:

□ **Hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ có $\vec{R}' = 0$ và $\vec{M}_0 \neq 0$ (O tùy ý xác định):**

Chúng ta nhận thấy đây chỉ có thể là hệ gồm hai lực cùng phương, ngược chiều, cùng độ lớn nhưng không cùng giá (được gọi là ngẫu): $\varphi(\vec{F}_k) \equiv (\vec{F}, \vec{F}')$.

Chúng ta sẽ chứng tỏ moment chính của ngẫu không phụ thuộc tâm lấy moment:

$$\begin{aligned} \text{Có: } \vec{M}_O &= \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') \\ &= \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OB} \times \vec{F}' \\ &= \vec{OA} \times \vec{F} + \vec{OA} \times \vec{F}' + \vec{AB} \times \vec{F}' \\ &= \vec{OA} \times (\vec{F} + \vec{F}') + \vec{AB} \times \vec{F}' = \vec{AB} \times \vec{F}' \end{aligned}$$



Hình 2.3

Điều này chứng tỏ vector moment chính của ngẫu không phụ thuộc tâm lấy moment.

□ Hai ngẫu $(\vec{F}, \vec{F}')$ và $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ có vector moment chính bằng nhau sẽ tương đương nhau (vì $\vec{R}' = 0$).

3.2. Định lý thu gọn:

Hệ lực $\varphi(\vec{F}_k)$ khi thu gọn về một tâm (O) tương đương với một lực bằng vector chính của hệ lực ($\vec{R}'$) và một ngẫu bằng vector moment chính của hệ lấy cùng với tâm đó :

$$\varphi(\vec{F}_k) \equiv (\vec{R}'_0, \vec{M}_0).$$

$$\text{với } \vec{R}'_0 = \sum \vec{F}_k \text{ và } \vec{M}_0 = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k).$$

3.3. Các trường hợp đặc biệt:

$$3.3.1 \quad 0 \neq \vec{R}' \perp \vec{M}_0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{F}_k) \equiv \vec{R}_\Delta.$$

(hợp lực $\vec{R}$ có giá Δ với $\vec{R} = \vec{R}'$ và giá Δ thỏa $\vec{m}_O(\vec{R}_\Delta) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$).

a) Hệ lực song song: ($\vec{F}_k \parallel \vec{Oz}$)

Nếu $\vec{R}' \neq 0$ sẽ có hợp lực: $\varphi(\vec{F}_k) \equiv \vec{R}_\Delta$.

b) Hệ lực phẳng: ($\vec{F}_k \in Oxy$)

Nếu $\vec{R}' \neq 0 \Rightarrow \varphi(\vec{F}_k) \equiv \vec{R}_\Delta$ (có hợp lực) do ta lấy điểm $A \in Oxy$ làm tâm thu gọn
 $\Rightarrow \vec{M}_A \perp Oxy \Rightarrow \vec{M}_A \perp \vec{R}$.

c) Hợp lực của hệ lực phẳng song song:

Cho hệ lực phân bố như hình 2.4:

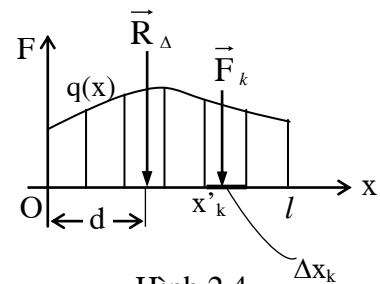
Xét phân tố Δx_k , hệ lực phân bố trên độ dài này tương đương:

$$F_k = q(x'_k) \cdot \Delta x_k \text{ đặt tại } x'_k.$$

$$\text{Hợp lực } R_\Delta = F = \sum F_k = \int_0^l q(x) dx.$$

$$\text{Tìm } \Delta \text{ từ } \vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k) = \int_0^l q(x)x dx \Rightarrow R_\Delta d = \vec{M}_0$$

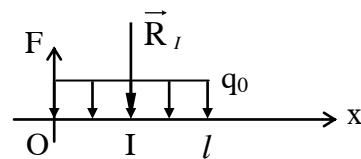
$$\Rightarrow d = \frac{\vec{M}_0}{R_\Delta} = \frac{\int_0^l q(x)x dx}{\int_0^l q(x) dx}$$



Hình 2.4

♦ Hệ lực phân bố đều (hình 2.5):

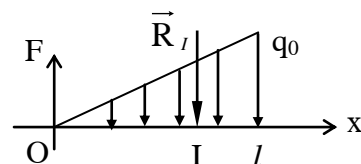
$$\text{Hợp lực } \vec{R}_I; R = q_0 l; OI = \frac{q_0 \frac{l^2}{2}}{q_0 l} = \frac{l}{2}$$



Hình 2.5

♦ Hệ lực phân bố tuyến tính (hình 2.6):

$$\text{Có ngay } q_{(x)} = \frac{q_0}{l} x \rightarrow R_I = \frac{q_0 l}{2}; OI = \frac{2}{3} l$$



Hình 2.6

Nhận xét:

Các hợp lực có cường độ bằng diện tích phân bố, đi qua trọng tâm của biểu đồ diện tích.

3.3.2. $\vec{R}' = 0, \vec{M}_0 \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{F}_k) \equiv \text{ngẫu}(\vec{Q}, \vec{Q}')$ có moment bằng moment chính của hệ lực đối với tâm O.

Chú ý:

Khi $\vec{R}' = 0, \varphi(\vec{F}_k) \equiv \text{ngẫu}(\vec{Q}, \vec{Q}')$ nên moment chính của hệ không phụ thuộc tâm lấy moment.

$$\text{3.3.3. } \vec{R}' = 0, \vec{M}_0 = 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{F}_k) \equiv 0 \quad (2.8)$$

3.4. Hệ ba lực cân bằng:

Hệ ba lực cân bằng thì đồng phẳng. Nếu các lực không song song với nhau thì còn phải đồng quy.

§4 ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC:

Từ (2.8) chúng ta nhận được những điều kiện cân bằng của hệ lực:

4.1. Hệ lực tổng quát (không gian):

$$0 \equiv \varphi(\vec{F}_k) \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \mathbf{R}'_x &= \Sigma F_{kx} = 0 \\ \mathbf{R}'_y &= \Sigma F_{ky} = 0 \\ \mathbf{R}'_z &= \Sigma F_{kz} = 0 \\ \overline{M}_{ox} &= \Sigma \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \\ \overline{M}_{oy} &= \Sigma \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \\ \overline{M}_{oz} &= \Sigma \overline{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Với các hệ lực đặc biệt một số phương trình có thể tự thỏa mãn nên số điều kiện giảm đi.

4.2. Hệ lực song song ($\vec{F}_k // \vec{Oz}$):

$$0 \equiv \varphi(\vec{F}_k) \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \Sigma F_{kz} &= 0 \\ \overline{M}_x &= \Sigma \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0 \\ \overline{M}_y &= \Sigma \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Do 3 phương trình còn lại tự thỏa mãn.

4.3. Hệ lực đồng quy $\varphi(\vec{F}_{ok})$, các lực đi qua O:

$$0 \equiv \varphi(\vec{F}_k) \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \Sigma F_{kx} &= 0 \\ \Sigma F_{ky} &= 0 \\ \Sigma F_{kz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Do $\vec{M}_0 = \Sigma \vec{m}_0(\vec{F}_k) = 0$ tự thỏa mãn.

4.4. Hệ lực phẳng $\varphi(\vec{F}_k), \forall \vec{F}_k \in \text{Oxy}$:

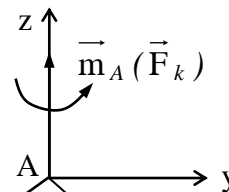
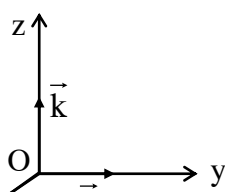
Với điểm A tùy ý thuộc mặt phẳng lực Oxy:

$$\vec{m}_A(\vec{F}_k) = \overline{m}_{Az}(\vec{F}_k) \cdot \vec{k} = \pm d_k F_k \vec{k}.$$

Vector moment của các lực này đều cùng phương nên ta có thể quy ước thay thế $\vec{m}_A(\vec{F}_k)$ bởi giá trị đại số:

$$\overline{m}_A(\vec{F}_k) = \overline{m}_{Az}(\vec{F}_k) = \pm d_k F_k \quad (2.12)$$

Ta lấy dấu (+) hoặc (-) theo quy tắc moment của lực đối với trục (hình 2.7).



Điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng có 3 dạng:

4.4.1 Dạng 1:

$$0 \equiv \varphi(\vec{F}_k) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \Sigma F_{ky} = 0 \\ \Sigma \vec{m}_A(\vec{F}_k) = \vec{M}_A = 0 \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

với A tùy ý thuộc mặt phẳng lực.

$$\text{Điều này hiển nhiên do (2.12)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_A = 0 \end{array} \right.$$

4.4.2 Dạng 2:

$$(2.14) \quad 0 \equiv \varphi(\vec{F}_k) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \Sigma F_{kx} = 0 \\ \vec{M}_A = \Sigma \vec{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \\ \vec{M}_B = \Sigma \vec{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \end{array} \right\}$$

(với $\vec{AB} \perp \vec{Ox}$)

4.4.3 Dạng 3:

$$0 \equiv \varphi(\vec{F}_k) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{M}_A = \Sigma \vec{m}_A(\vec{F}_k) = 0 \\ \vec{M}_B = \Sigma \vec{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \\ \vec{M}_C = \Sigma \vec{m}_C(\vec{F}_k) = 0 \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

Sử dụng phương pháp chứng minh trên: nếu $\vec{R}'_A \neq 0$ thì $\vec{R}'$ phải có giá chứa đoạn AB và AC, do A,B,C không thẳng hàng nên không thể xảy ra trường hợp trên.

§5. BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN:

5.1. Mô hình bài toán:

Một vật rắn không tự do (chịu liên kết) chịu tác dụng của lực (lực hoạt động) đang cân bằng.

Những yêu cầu được đặt ra là:

- **Xác định các phản lực liên kết.**
- **Tìm điều kiện cân bằng.**

Tìm các yêu cầu của lực hoạt động và các yếu tố hình học để vật khảo sát được cân bằng.

5.2. Phương pháp giải:

- **Chọn vật khảo sát:**

Xem xét kĩ mô hình bài toán (hình vẽ), chúng ta chọn vật rắn nào (có thể là chất điểm) chịu tác động của tất cả các lực hoạt động.

- **2.2 Đặt lực:**

Lực ở đây bao gồm các lực hoạt động và phản lực liên kết.

Xem xét kĩ mô hình vật khảo sát, xác định đầy đủ các liên kết, so sánh với các mô hình mẫu để thay thế hết các liên kết bằng các phản lực tương ứng.

- **Lập phương trình cân bằng:**

a) Phân tích các lực đặt vào vật khảo sát (kể cả phản lực) theo ba phương của trục tọa độ.

b) Lập các phương trình cân bằng từ điều kiện cân bằng của hệ lực (kể cả các phản lực):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_{kx} = 0 ; \\ \Sigma F_{ky} = 0 ; \\ \Sigma F_{kz} = 0 ; \end{array} \right. \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_{ox} = \Sigma \bar{m}_x (\vec{F}_k) = 0 ; \\ \bar{M}_{oy} = \Sigma \bar{m}_y (\vec{F}_k) = 0 ; \\ \bar{M}_{oz} = \Sigma \bar{m}_z (\vec{F}_k) = 0 ; \end{array} \right.$$

c) Với lưu ý các ngẫu tồn tại trong hệ lực đặt vào vật không xuất hiện trong các phương trình hình chiếu bảo đảm vectơ chính bằng không.

Chú ý:

➤ Nếu $\vec{F} \perp \Delta \Rightarrow \vec{m}_\Delta (\vec{F}) = \pm Fd$ trong đó d là đoạn vuông góc chung giữa Δ và $\vec{F}$.

Các lực thành phần:

$\vec{F}_{kx}$ vuông góc với trục y, z ; $\vec{F}_{ky}$ vuông góc với trục x, z ; $\vec{F}_{kz}$ vuông góc với trục x, y .

➤ Dùng (1.4) và (2.4) chúng ta nhận được:

$$\bar{M}_{Ox} = \Sigma (F_{kz}y_k - F_{ky}z_k) = 0 ; \quad \bar{M}_{Oy} = \Sigma (F_{kx}z_k - F_{kz}x_k) = 0 ; \quad \bar{M}_{Oz} = \Sigma (F_{ky}x_k - F_{kx}y_k) = 0 .$$

Ở đây (x_k, y_k, z_k) là tọa độ điểm đặt của lực $\vec{F}_k$.

d) Trường hợp hệ lực phẳng ($\vec{F}_k \in Oxy$): dùng (2.12) lập phương trình cân bằng ngẫu lực.

5.3. Đánh giá bài toán:

- ❑ **3.1 Nếu số phương trình cân bằng độc lập lập được (r) bằng số ẩn số (s) (số thành phần phản lực), bài toán có nghiệm duy nhất (được gọi là bài toán tĩnh định).**

- ❑ **3.2 Nếu $r > s$ có hai khả năng xảy ra:**

a) Sẽ dư ra một số phương trình ($= r - s$) không chứa ẩn số (phản lực). Đây chính là các điều kiện ràng buộc các lực hoạt động và những đại lượng hình học trong bài toán. Những điều kiện này được gọi là điều kiện cân bằng.

b) Trong hệ phương trình lập được tồn tại các phương trình mâu thuẫn với nhau. Chúng ta xem xét lại mô hình bài toán:

- Đặt phản lực đúng chưa?
- Mô hình bài toán có tồn tại trong thực tế không?

3.3 Nếu $r < s$:

Bài toán thuộc loại siêu tĩnh, chúng sẽ được giải quyết trong môn học sau.

5.4. Giải phương trình và biện luận:

Theo nguyên tắc:

- Phản lực tựa một chiều và sức căng dây luôn luôn dương.
- Các phản lực khác có chiều đúng như đã chọn nếu kết quả dương. Ngược chiều đã chọn nếu kết quả âm.

§6. BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN CHỈ KẾ ĐẾN MA SÁT TRƯỢT:

6.1. Mô hình bài toán:

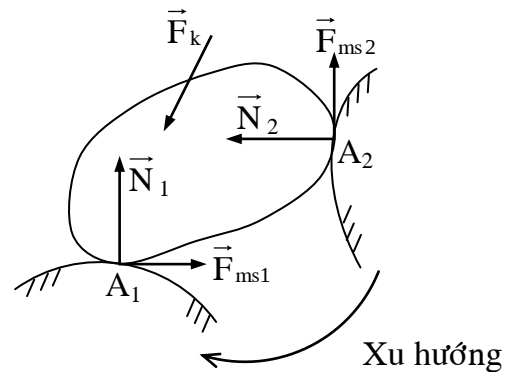
Vật rắn S cân bằng:

a) Hệ lực cân bằng $\varphi(\vec{F}_k, \vec{F}_{mi})$.

(bao gồm cả các thành phần ma sát).

b) Điều kiện không trượt:

$$F_I \leq f_I N_I \quad (I = 1, 2, \dots).$$



Hình 2.8

6.2. Phương pháp giải:

□ Sử dụng điều kiện cân bằng giải tích:

Dùng điều kiện cân bằng của hệ lực và điều kiện không trượt chúng ta thu được một hệ hỗn hợp gồm các phương trình và bất phương trình. Nghiệm thu được từ hệ này sẽ là các bất đẳng thức nên vật khảo sát cân bằng nằm trong một miền nào đó (không phải một vị trí như trước).

Sau khi tìm được miền cân bằng, chúng ta mới giải các phản lực ẩn.

Trong nhiều trường hợp, chúng ta khảo sát vật rắn cân bằng ở trạng thái tới hạn (sắp trượt). Lúc này ($F_I = f_I N_I$) điều kiện cân bằng của vật rắn lúc này là một hệ phương trình. Nghiệm nhận được là một giá trị chỉ biên của miền cân bằng, có thể biện luận dựa vào thực tế để suy ra miền cân bằng.

□ Điều kiện cân bằng hình học:

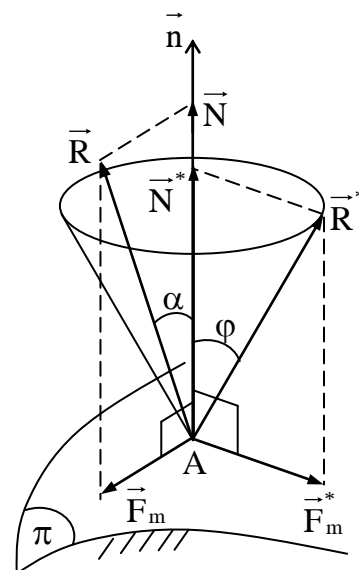
Đặt phản lực tựa tổng hợp là $\vec{R} \equiv (\vec{F}_m, \vec{N})$.

Gọi góc nghiêng giữa $\vec{R}$ và pháp tuyến $\vec{n}$ là α .

Do $F_m \leq fN$ nên:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_m}{N} \leq f.$$

Ở trạng thái tới hạn, vector phản lực tổng hợp $\vec{R}^*$ tạo với $\vec{n}$ một góc φ (phương thay đổi trong không gian). Đặt:



Hình 2.9

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_m^*}{N^*} = f.$$

Điều kiện không trượt (cân bằng): $\alpha \leq \varphi$.

Hình nón có đỉnh là điểm tựa, trục là pháp tuyến $\vec{n}$ (ra khỏi mặt tựa), góc ở đỉnh 2φ gọi là nón ma sát.

Chúng ta có điều kiện cân bằng:

- Phản lực toàn phần $\vec{R}$ nằm trong nón ma sát.
- Khi $\vec{R}$ nằm trên biên của nón ma sát, vật ở trạng thái tới hạn.

6.3. Ví dụ :

Tải A trọng lượng Q đặt trên mặt nghiêng như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt giữa A và mặt nghiêng là f. Tìm điều kiện của góc nghiêng α để tải cân bằng.

Giải:

Giả sử tải A đang cân bằng ứng với góc nghiêng α như hình vẽ.

- Hệ lực đặt vào A: $\varphi(\vec{F}_k) \equiv (\vec{Q}, \vec{N}_A, \vec{F}_m) \equiv 0$.

- Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = F_m - Q \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = N_A - Q \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\text{Điều kiện không trượt: } F_m \leq f N_A \quad (3)$$

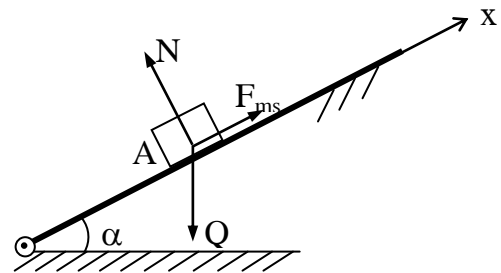
- Giải hệ phương trình:

$$F_m = Q \sin \alpha ; N_A = Q \cos \alpha .$$

$$(3) \Rightarrow Q \sin \alpha \leq f Q \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Đặt $f = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow$ điều kiện cân bằng: $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi \Leftrightarrow \alpha \leq \varphi$.

- Từ kết quả trên, chúng ta có thể suy ra phương pháp xác định hệ số ma sát trượt bằng thực nghiệm: *tăng góc α từ từ khi A bắt đầu chuyển động, tan của góc nghiêng tại vị trí đó bằng hệ số ma sát.*

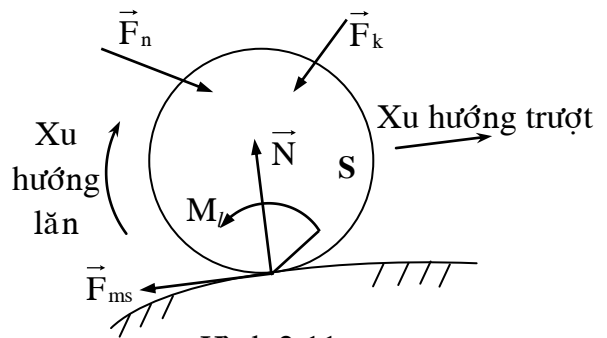


Hình 2.10

§7. MÔ HÌNH BÀI TOÁN CÂN BẰNG CÓ KỂ ĐẾN MA SÁT LĂN:

7.1. Mô hình bài toán và phương pháp giải:

- Vật rắn S cân bằng chịu tác dụng của hệ lực $\varphi(\vec{F}_k) = (\vec{F}_k, \vec{N}, \vec{F}_m, ngM_\ell) \equiv 0$.
- Phương trình cân bằng: lập các phương trình cân bằng từ $\varphi(\vec{F}_k) = 0$.
- Các điều kiện (ma sát):
 - Không trượt $F_m \leq fN$.
 - Không lăn $M_\ell \leq kN$.
- Biện luận các khả năng:
 - Điều kiện vật không lăn và không trượt.
 - Điều kiện vật lăn không trượt.
 - Điều kiện vật trượt không lăn.



Hình 2.11

7.2. Ví dụ :

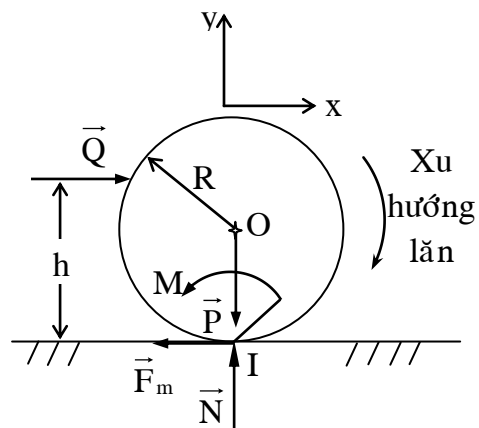
Con lăn đồng chất bán kính R, trọng lượng P chịu tác dụng của lực Q như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt và lăn giữa con lăn và mặt đường tương ứng là f, k. Tìm giá trị của Q để con lăn cân bằng.

Giải:

Trong các bài toán loại này, ta không áp dụng được các phương trình cân bằng tới hạn, bởi vì các điều kiện lăn và trượt là độc lập, không bắt buộc cùng đạt tới điều kiện tới hạn.

- Vật khảo sát: con lăn.
- Đặt lực: $\varphi(\vec{F}_k) = (\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_m, M) \equiv 0$.
- Phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= Q - F_m = 0 \\ \sum F_{ky} &= N - P = 0 \\ \sum \bar{m}_1 &= M - Qh = 0 \end{aligned}$$



Hình 2.12

- Giải hệ phương trình:

Giải 3 phương trình đầu chúng ta nhận được: $N = P$; $F_m = Q$; $M = Qh$.

$\Rightarrow$ Không trượt: $Q \leq fP$.

$\Rightarrow$ Không lăn: $Qh \leq kP \Leftrightarrow Q \leq Pk/h$.

- Để con lăn cân bằng (không lăn, không trượt): $\frac{Q}{P} \leq \min(f, \frac{k}{h})$.

- Chú ý: giả sử $\frac{k}{h} < f$, chúng ta có các trường hợp:

- $\frac{k}{h} < \frac{Q}{P} \leq f$: vật lăn không trượt.

- $\frac{k}{h} < f < \frac{Q}{P}$: vật vừa trượt vừa lăn.