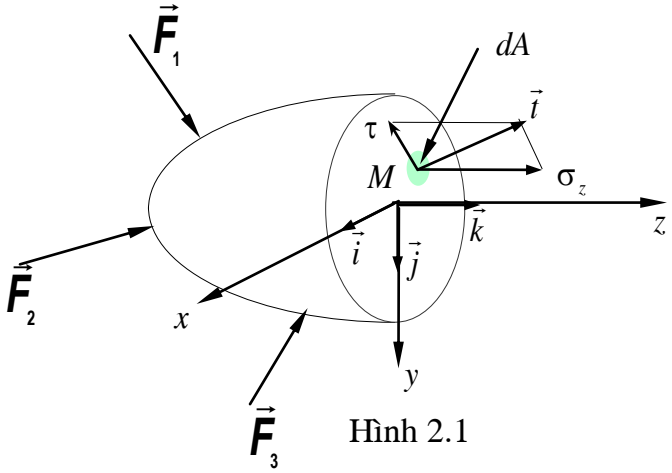
Chương 2

ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

ξ1. ỨNG SUẤT:

1.1. Khái niệm:

Chia vật bằng một mặt cắt và khảo sát tính chất của các lực tiếp xúc truyền qua mặt này do phần tách ra tác động lên. Các lực tiếp xúc phân bố khắp mặt cắt với chiều và giá trị thay đổi, chúng được gọi là ứng lực (hay ứng suất) $\vec{t}$ tại một điểm.



Hình 2.1

Xét một điểm M trên mặt cắt và một phân tố diện tích chung quanh M: dA. Nếu gọi ứng lực trên dA là $d\vec{P}_i$ thì ứng suất $\vec{t}$ tại M trên mặt phẳng vuông góc oz là:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{P}_i}{dA} \quad khi\ dA \to 0 \qquad (2.1)$$

Chọn hệ trục Cartesian như hình 5.1, với oz vuông góc với mặt cắt; các vector đơn vị trên 0x, 0y, 0z lần lượt là: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Thế thì ứng suất của một 1 điểm M trên mặt phẳng vuông góc với trục oz là:

$$\vec{t} = \sigma_z.\vec{k} + \tau_{xy}.\vec{j} + \tau_{zx}.\vec{i} \qquad (2.2)$$

Với:

σ_z: ứng suất pháp

τ_{zy} , τ_{zx}: Các ứng suất tiếp ($\vec{\tau} = \tau_{zy}.\vec{j} + \tau_{zx}.\vec{i}$).

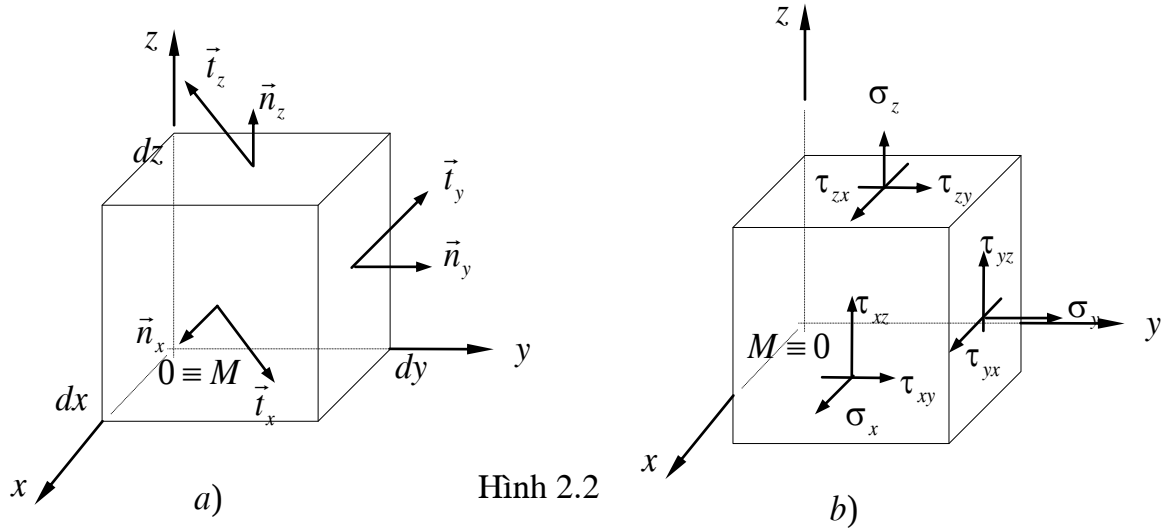
Chỉ số z ngụ ý τ nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục z và chỉ số thứ hai (x, y) chỉ phương song song của τ.

Qui ước dấu của các thành phần ứng suất như sau:

- Ứng suất pháp σ_z xem là dương khi vector biểu diễn nó cùng chiều với pháp tuyến ngoài của mặt cắt.
- Ứng suất tiếp : τ_{zy} , τ_{zx} la dương khi vector biểu diễn nó cùng chiều với 0y, 0x.

1.2. Các thành phần ứng suất:

Tách một phân tố tại M bằng 6 mặt vi phân trực giao với các trục toạ độ (hình 2.2a). Trên 3 mặt vi phân dương có các vector ứng suất : $\vec{t}_x$, $\vec{t}_y$ $\vec{t}_z$.



Hình 2.2

Mỗi vector trong chúng có 3 thành phần song song với 3 trục toạ độ:

$$\vec{t}_x\{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\},\ \vec{t}_y\{\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}\},\ \vec{t}_z\{\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z\} \qquad (2.3)$$

Bây giờ ta hình dung rằng các mặt vi phân vô cùng bé và tất cả tập trung quanh 0 ≡ M. Lúc đó, các thành phần ứng suất: σ_i, τ_{ij} $(i, j = x, y, z)$ là các thành phần của 3 vector ứng suất tác động tại cùng một điểm trên 3 mặt phẳng vi phân trực giao từng đôi một. Như vậy, ta có một khái niệm: ứng suất tại 1 điểm được đặc trưng bởi 9 thành phần và chúng được viết dưới dạng 1 tensor.

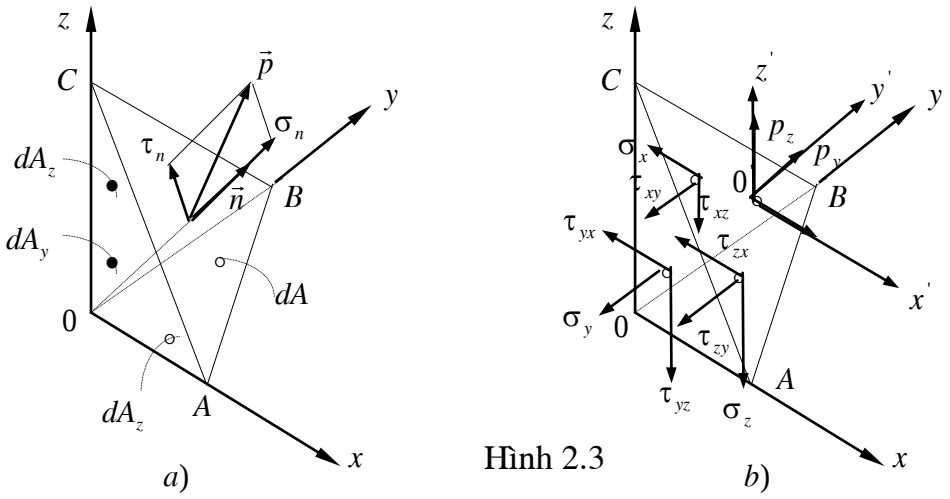
$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \qquad (2.4)$$

ξ2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT:

2.1. Trạng thái ứng suất tại 1 điểm:

Nếu cho qua M những mặt cắt π khác nhau, thì tương ứng với mỗi vị trí của π ta được 1 vector ứng suất $\vec{t}$. Tập hợp tất cả mọi $\vec{t}$ của tất cả các mặt qua M được gọi là trạng thái ứng suất tại M.

Tập hợp đó không là một tập hợp các vector độc lập. Thực vậy để khảo sát trạng thái ứng suất tại một điểm M của môi trường liên tục, ta đưa vào các trục 0x, 0y, 0z với 0≡M của một hệ toạ độ cartesian và tách ra một phân tố tứ diện 0ABC, (hình 2.3a).



Hình 2.3

Gọi: $\vec{n}\{n_x, n_y, n_z\}$ là pháp tuyến đơn vị của mặt phẳng nghiêng

Và:

- dA là diện tích của tam giác ABC
- dA_x là diện tích của tam giác 0BC $\Rightarrow dA_x = dA.n_x$
- dA_y là diện tích của tam giác 0AC $\Rightarrow dA_y = dA.n_y$
- dA_z là diện tích của tam giác 0AB $\Rightarrow dA_x = dA.n_z$

$\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z$ & $\vec{p}\{p_x, p_y, p_z\}$ là ứng suất trên các mặt 0BC, 0AC, 0AB, ABC.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là vector đơn vị trên các trục toạ độ.

Thế thì:

$$\begin{aligned}\vec{t}_x &= -(\sigma_x.\vec{i} + \tau_{xy}.\vec{j} + \tau_{xz}.\vec{k})\\ \vec{t}_y &= -(\tau_{yx}.\vec{i} + \sigma_y.\vec{j} + \tau_{yz}.\vec{k})\\ \vec{t}_z &= -(\tau_{zx}.\vec{i} + \tau_{zy}.\vec{j} + \sigma_z.\vec{k})\end{aligned} \quad (2.5)$$

2.1.1. Điều kiện vector tổng bằng không (vector chính bằng không):

Từ điều kiện cân bằng của phân tố:

$$\begin{aligned}&\vec{t}_x.dA_x + \vec{t}_y.dA_y + \vec{t}_z.dA_z + \vec{p}.dA = \vec{0}\\ &\Rightarrow \vec{t}_x.n_x + \vec{t}_y.n_y + \vec{t}_z.n_z + \vec{p} = \vec{0}\end{aligned} \quad (2.6)$$

Chiếu xuống các trục:

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x.n_x + \tau_{yx}.n_y + \tau_{zx}.n_z\\ p_y = \tau_{xy}.n_x + \sigma_y.n_y + \tau_{zy}.n_z\\ p_z = \tau_{xz}.n_x + \tau_{yz}.n_y + \sigma_z.n_z \end{cases} \quad (2.7)$$

$$p_j = \sigma_{ij} n_i \quad (2.8)$$

Và:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y.n_y^2 + \sigma_z.n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x.n_y + 2\tau_{xz}.n_x n_z + 2\tau_{yz} n_y n_z = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (2.9)$$

2.1.2. Điều kiện moment tổng bằng 0 (vector moment chính bằng không):

Từ điều kiện cân bằng của phân tố:

Gọi $0'$: trọng tâm của tam giác ABC.

Dựng hệ trục toạ độ $0'x'y'z'$ // $0xyz$.

$$\begin{cases} \sum m(\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z, \vec{p})/_{0'x'} = \tau_{zy}.dA_z.\dfrac{0C}{3} - \tau_{yz}.dA_y.\dfrac{0B}{3} = 0 \\ \sum m(\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z, \vec{p})/_{0'y'} = \tau_{zx}.dA_z.\dfrac{0C}{3} - \tau_{xz}.dA_x.\dfrac{0A}{3} = 0 \\ \sum m(\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z, \vec{p})/_{0'z'} = \tau_{yx}.dA_y.\dfrac{0B}{3} - \tau_{xy}.dA_x.\dfrac{0B}{3} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Vì:

$$dA_z.\frac{0C}{3} = dA_y.\frac{0B}{3} = dA_x.\frac{0A}{3} = dV : \text{thể tích tứ diện} \quad (2.11)$$

Nên:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad ; \tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (2.12)$$

Từ kết quả này ta rút ra 2 hệ luận:

a.) Trên 2 mặt vi phân trực giao, các thành phần ứng suất tiếp vuông góc với cạnh chung thì bằng nhau và có chiều cùng hướng vào hay hướng ra cạnh chung. Đây là ***nguyên lý tương hỗ của ứng suất tiếp***.

b.) Tensor ứng suất là một tensor đối xứng; do đó trạng thái ứng suất tại một điểm của môi trường liên tục chỉ còn phụ thuộc 6 thông số và được đặc trưng bởi tensor ứng suất T_σ.

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{xz} \\ đx & & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

2.2. Phương chính và ứng suất chính:

Nếu có một mặt cắt mà trên đó phương của $\vec{p}$ trùng với phương pháp tuyến $\vec{n}$ thì mặt đó được gọi là mặt chính. Lúc đó các thành phần ứng suất tiếp bằng không: $\tau_n = 0$ và thành phần ứng suất pháp : σ_n được gọi là ứng suất chính.

$$\vec{p} = \sigma_n.\vec{n} \tag{2.14}$$

Phương chính của mặt chính được xác định như sau:

Từ (5.14): $p_x = \sigma_n.n_x$; $p_y = \sigma_n.n_y$; $p_z = \sigma_n.n_z$; (2.15)

Từ (5.15) và (5.8):

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_n).n_x + \tau_{yx}.n_y + \tau_{zx}.n_z = 0 \\ \tau_{xy}.n_x + (\sigma_y - \sigma_n).n_y + \tau_{zy}.n_z = 0 \\ \tau_{xz}.n_x + \tau_{yz}.n_y + (\sigma_z - \sigma_n).n_z = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Trong đó n_x, n_y, n_z là 3 ẩn số phải tìm.

Vì $\vec{n}$ là pháp tuyết đơn vị, nên : $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Điều này chứng tỏ n_x, n_y, n_z

Không thể đồng thời bằng không và như vậy định thức của hệ phương trình thuần nhất (2.10):

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_n) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_n) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.17}$$

Khai triển: $\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2.\sigma_n - I_3 = 0$ (2.18)

Với:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{2.19}$$

$$\mathbf{I}_2 = -\begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\sigma_z & \tau_{xz}\\ \tau_{zx} & \sigma_x\end{vmatrix} \qquad (2.20)$$
$$= -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y.\sigma_z - \sigma_z.\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2$$

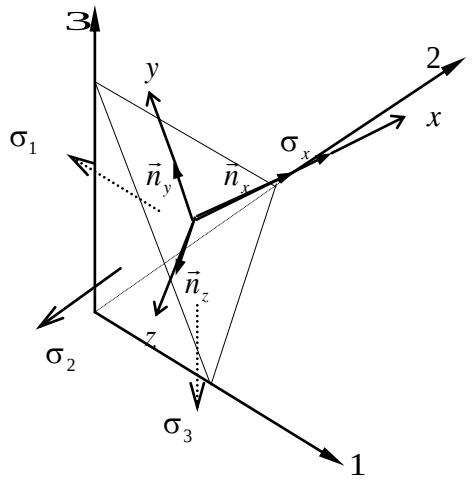
$$\mathbf{I}_3 = \begin{vmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}.\tau_{yz}.\tau_{zx} - \sigma_x.\tau_{yz}^2 - \sigma_y.\tau_{xz}^2 - \sigma_z.\tau_{xy}^2 \qquad (2.21)$$

I_1 , I_2 , I_3 : được gọi là 3 bất biến (không phụ thuộc hệ toạ độ) của tensor ứng suất.

Xét 1 mặt nghiêng so với 3 phương chính 1, 2, 3. Pháp tuyến của mặt nghiêng là x. Ứng suất pháp của mặt nghiêng:

$$\sigma_x = \sigma_1.\mathbf{n}_{x1}^2 + \sigma_2.\mathbf{n}_{x2}^2 + \sigma_3\mathbf{n}_{x3}^2 \qquad (2.22)$$

Với $\vec{n}_x\{\ n_{x1} + n_{x2} + n_{x3}\ \}$: pháp tuyến đơn vị $\{\ n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + n_{x3}^2 = 1\ \}$



Hình 2.4

-Tương tự xét 1 mặt nghiêng các pháp tuyến đơn vị:

$$\vec{n}_y\{\ n_{y1} + n_{y2} + n_{y3}\ \} \perp \vec{n}_x(n_{y1}^2 + n_{y2}^2 + n_{y3}^2 = 1) \qquad (2.23)$$

$$\sigma_y = \sigma_1.n_{y1}^2 + \sigma_2.n_{y2}^2 + \sigma_3.n_{y3}^2 \qquad (2.24)$$

-Và mặt nghiêng có pháp tuyến đơn vị $\vec{n}_z\{n_{z1}, n_{z2}, n_{z3}\}$ vuông góc với 2 mặt trên

$$(n_{z1}^2 + n_{z2}^2 + n_{z3}^2 = 1) \quad (2.25)$$

$$\sigma_z = \sigma_1.n_{z1}^2 + \sigma_2.n_{z2}^2 + \sigma_3.n_{z3}^2 \quad (2.26)$$

Do đó:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1(n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + .n_{z1}^2) + \sigma_2(n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + .n_{z2}^2) + \sigma_3(n_{x3}^2 + n_{y3}^2 + .n_{z3}^2) \quad (2.27)$$

Vì $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$ là 3 pháp tuyến đơn vị vuông góc với nhau từng đôi một, nên:

$$n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2 = 1\,;\, n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2 = 1\,;\, n_{x3}^2 + n_{y3}^2 + n_{z3}^2 = 1 \quad (2.28)$$

Và do (x, y, z) là 1 hệ toạ độ vuông góc bất kỳ, nên:

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{I_1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = const \quad (2.29)$$

Phương trình (2.18) có 3 nghiệm số, có thể xảy ra 2 trường hợp: hoặc cả 3 nghiệm đều thực hay 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức liên hiệp.

Xét trường hợp có 3 nghiệm thực: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Các pháp tuyến đơn vị tương ứng với 3 nghiệm đó:

$$\vec{n}_1\{n_{x1}, n_{y1}, n_{z1}\}; \vec{n}_2\{n_{x2}, n_{y2}, n_{z2}\}; \vec{n}_3\{n_{x3}, n_{y3}, n_{z3}\} \quad (2.30)$$

Từ (5.16):

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1).n_{x1} + \tau_{yx}.n_{y1} + \tau_{zx}.n_{z1} = 0 \\ \tau_{xy}.n_{x1} + (\sigma_y - \sigma_1).n_{y1} + \tau_{zy}.n_{z1} = 0 \\ \tau_{xz}.n_{x1} + \tau_{yz}.n_{y1} + (\sigma_z - \sigma_1).n_{z1} = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

Nhân phương trình thứ nhất với n_{x2}, phương trình thứ 2 với n_{y2} và phương trình thứ 3 với n_{z2} rồi cộng lại:

$$\begin{aligned} &[(\sigma_x - \sigma_1)n_{x1} + \tau_{yz}.n_{y1} + \tau_{zx}.n_{z1}]n_{x2} + [\tau_{xy}.n_{x1} + (\sigma_y - \sigma_1).n_{y1} + \\ &+ \tau_{zy}.n_{z1}].n_{y2} + [\tau_{xz}.n_{x1} + \tau_{yz}.n_{y1} + (\sigma_z - \sigma_1).n_{z1}].n_{z2} = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Tương tự:

$$[(\sigma_x-\sigma_2)n_{x2}+\tau_{yz}.n_{y2}+\tau_{zx}.n_{z2}]n_{x1}+[\tau_{xy}.n_{x2}+(\sigma_y-\sigma_2).n_{y2}+\tau_{zy}.n_{z2}].n_{y1}+$$
$$+[\tau_{xz}.n_{x2}+\tau_{yz}.n_{y2}+(\sigma_z-\sigma_2).n_{z2}].n_{z1}=0 \quad (2.33)$$

Trừ (5.33) với (5.32)

$$(\sigma_x-\sigma_2)n_{x1}.n_{x2}+n_{y1}.n_{y2}+n_{z1}.n_{z2}=0 \quad (2.34)$$
$$\forall\sigma_1 \,\&\, \sigma_2.$$

Vậy:

$$n_{x1}.n_{x2}+n_{y1}.n_{y2}+n_{z1}.n_{z2}=0 \quad (2.35)$$

Điều này chứng tỏ $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2 \quad \Leftrightarrow \vec{\sigma}_1\perp\vec{\sigma}_2$

Vậy: các phương chính vuông góc với nhau từng đôi một.

Ta có thể chứng minh trường hợp 1 nghiệm thực, 2 nghiệm phức liên hiệp là không tồn tại! (tự chứng minh).

Tóm lại, tại mỗi điểm của vật thể đàn hồi ta luôn tìm được 3 phương chính. Trên các mặt chính các ứng suất luôn trùng với pháp tuyến của mặt chính, gọi là các ứng suất chính; qui ước $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$.Các ứng suất chính không phụ thuộc việc chọn trục toạ độ.

Để tìm 3 phương chính $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3$ ta lần lượt thay $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ vào vị trí σ_n của hệ phương trình (5.16). Mỗi lần thay σ_i ta sẽ tìm được phương chính thứ i:

$$\vec{n}_i\{n_{xi},n_{yi},n_{zi}\}, \quad (i=1,2,3)$$

bằng cách kết hợp với phương trình: $n_{xi}^2+n_{yi}^2+n_{zi}^2=1.$ (2.36)

2.3. Các trạng thái ứng suất:

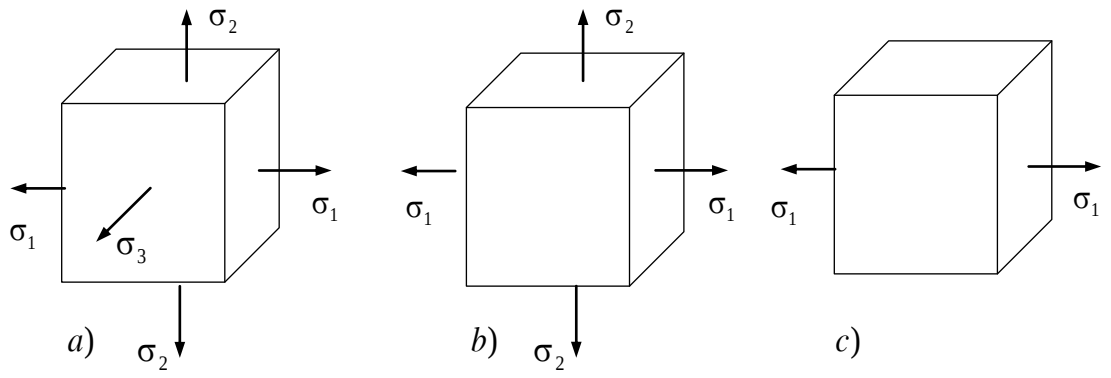
Nếu chọn các phương chính làm hệ trục toạ độ, tensor ứng suất có dạng:

$$T_\sigma=\begin{Bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Khi $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ đều khác không thì ta gọi trạng thái ứng suất tại một điểm là trạng thái ứng suất khối, (hình 2.5a).

Khi có 1 trong 3 ứng suất chính bằng 0 thì ta có trạng thái ứng suất phẳng, (hình 2.5b).

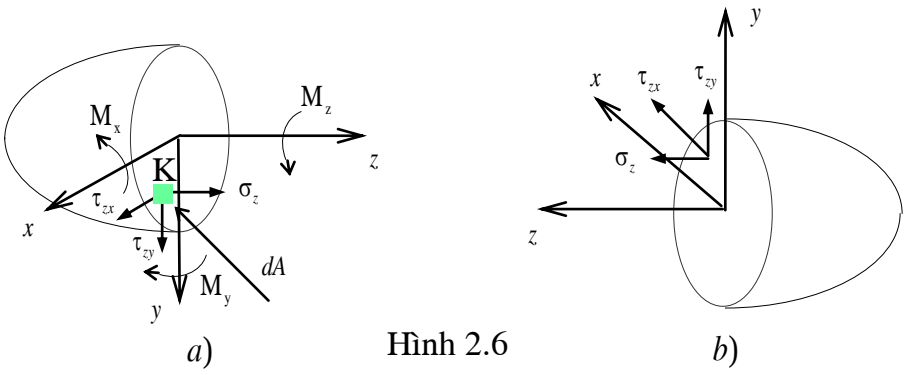
Khi có 2 trong 3 ứng suất chính bằng 0 thì ta có trạng thái ứng suất đơn, (hình 2.5c).



Hình 2.5

2.4. Tương quan giữa nội lực và ứng suất:

Gọi $\vec{t}_z\{\tau_{zx},\tau_{zy},\sigma_z\}$ là ứng suất tại 1 điểm bất kỳ trên mặt cắt (xem hình): K(x,y). Lấy 1 phân tố diện tích dA chung quanh A. Sáu thành phần nội lực là do ảnh hưởng của 3 thành phần ứng suất trên toàn bộ mặt cắt gây nên:



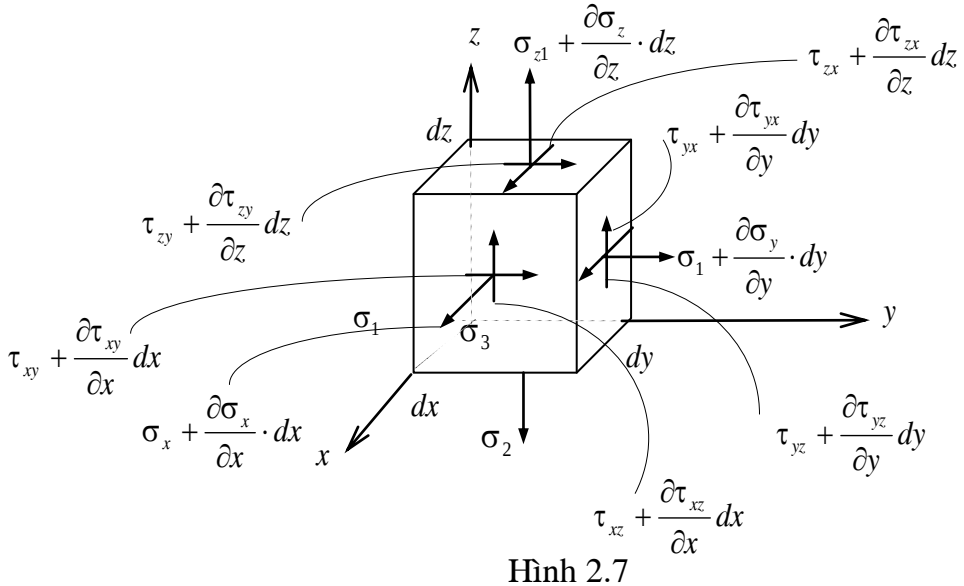
Hình 2.6

$$\begin{cases} N_z = \int_A \sigma_z.dA \; ; \; Q_y = \int_A \tau_{zy}.dA \; ; \; Q_x = \int_A \tau_{zx}.dA \\ M_x = \pm\int_A y.\sigma_z.dA \quad ; \quad M_y = \pm\int_A -x.\sigma_z.dA \\ M_z = \pm\int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}.y)dA \end{cases} \tag{2.38}$$

(dấu +, - cho mặt cắt thuộc phần vật bên trái, phải).

2.5. Phương trình vi phân cân bằng:

Xét một phân tố có kích thước vi phân dx, dy, dz. Gọi X, Y, Z là các thành phần hình chiếu của lực thể tích trên một đơn vị khối lượng của phân tố và ρ khối lượng riêng.



Hình 2.7

Phương trình vi phân cân bằng theo x, y, z:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0 \end{cases} \qquad (2.39)$$

§3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẲNG:

3.1. Định nghĩa và cách biểu diễn:

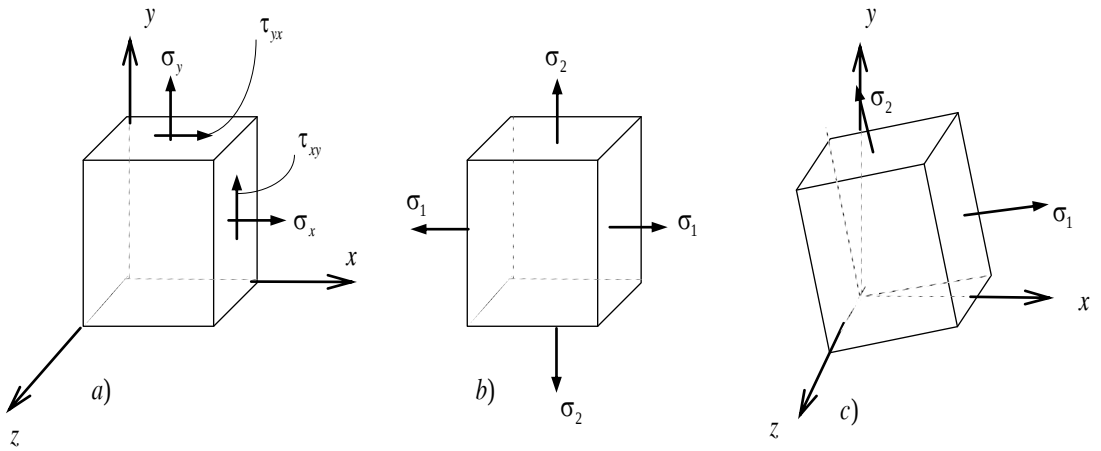
Đa số bài toán thường gặp là những bài toán đã xác định một mặt chính và trên mặt chính đó ứng suất bằng không, lúc đó ta có trạng thái ứng suất phẳng. Vậy trạng thái ứng suất phẳng khi, tại 1 điểm, vector ứng suất (tổng) luôn nằm trong cùng một mặt phẳng, với mọi mặt vi phân khảo sát. Tensor của trạng thái ứng suất phẳng:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

Hay

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

Trạng thái ứng suất phẳng của một phân tố có thể được biểu diễn: (hình2.8)



Hình 2.8

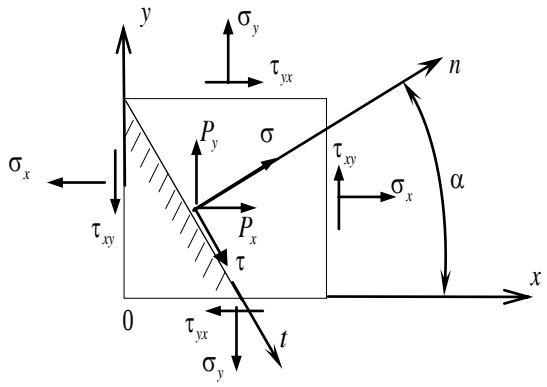
3.2. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng bất kỳ:

Gọi $\alpha = (x,n)$

Điều kiện cân bằng:

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x.\cos\alpha + \tau_{yx}.\sin\alpha \\ p_y = \tau_{xy}.\cos\alpha + \sigma_y.\sin\alpha \\ p_z = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

$$\vec{p}\{p_x, p_y\} \quad \text{hay} \quad \vec{p}\{\sigma, \tau\} \tag{2.43}$$



Hình 2.9

Chiếu p_x , p_y lên phương pháp tuyến n và tiếp tuyến t của mặt nghiêng:

$$\sigma = p_x.\cos\alpha + p_y.\sin\alpha = \sigma_x.\cos^2\alpha + \sigma_y.\sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \qquad (2.44)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}.\sin 2\alpha \qquad (2.45)$$

$$\tau = p_x \sin\alpha - p_y.\cos\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha \qquad (2.46)$$

3.2.1. Điều kiện xác định phương chính:

$$\tau = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (2.47)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.\mathrm{arctg}\left[\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right] \pm \frac{\pi}{2} \qquad (2.48)$$

3.2.2. Các ứng suất chính:

Ta có một ứng suất chính: $\sigma_i = 0$

Hai ứng suất chính còn lại được xác định:

$$\cos 2\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha}} \quad ; \quad \sin 2\alpha = \frac{\pm \mathrm{tg}2\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha}} \qquad (2.49)$$

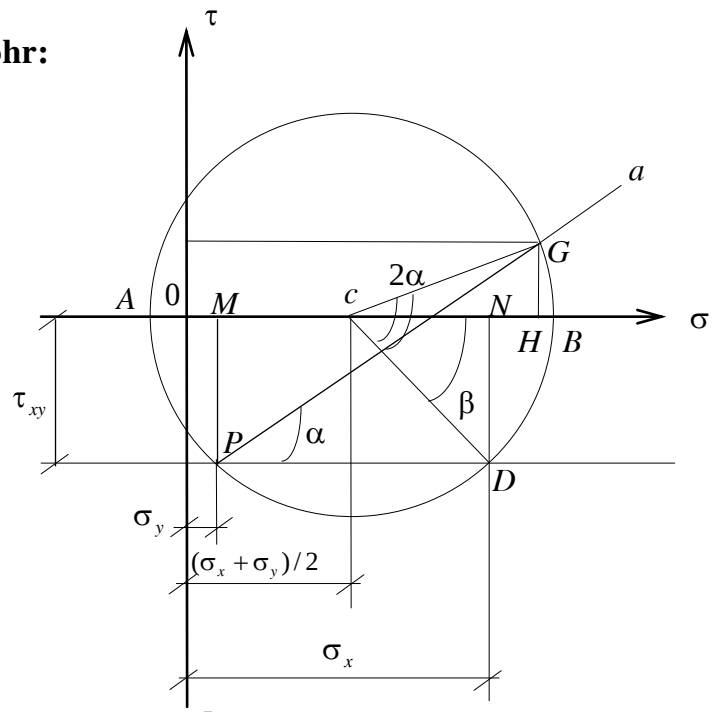
$$\Rightarrow \sigma_{j,k} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (2.50)$$

Các ứng suất chính: $\sigma_1 = \max[\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k]$; $\sigma_3 = \min[\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k]$.

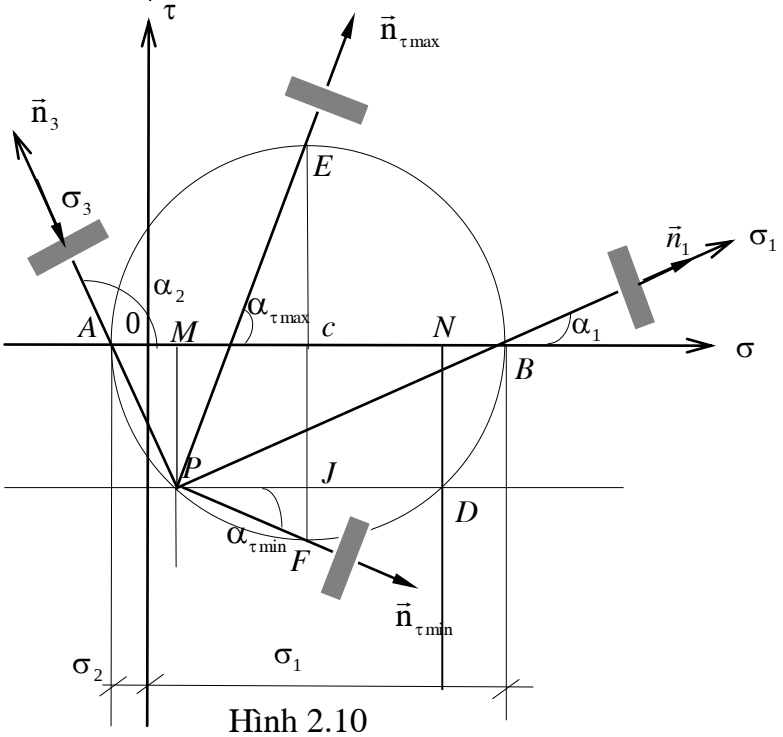
3.3. Vòng tròn Mohr ứng suất cho trạng thái ứng suất phẳng:

3.3.1. Vòng tròn Mohr:

a)



b)



Hình 2.10

Từ 2 công thức (5.45) và (5.46) ta có:

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2 \qquad (2.52)$$

$$\left(\sigma-\frac{\mathbf{I}_1}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\mathbf{I}_1}{2}\right)^2+\mathbf{I}_2=\mathbf{const} \qquad (2.53)$$

Từ (2.52) và (2.53) ta thấy rằng:

Nếu chọn hệ trục toạ độ phẳng vuông góc (σ, τ) thì ta có thể biểu diễn trạng thái ứng suất phẳng của 1 điểm bằng 1 đường tròn, gọi là vòng tròn Mohr ứng suất.

Trong công thức (2.45) và (2.46), cho α biến thiên từ 0 tới 2π, ta khảo sát sự biến thiên của σ_a ,τ_a , tìm được các mặt cắt nơi σ_a hoặc τ_a đạt cực trị. Tuy nhiên phương pháp giản tiện khảo sát σ_a ,τ_a theo α được áp dụng nhờ việc dựng một vòng tròn (gọi là vòng tròn Mohr ứng suất) theo trình tự sau, (hình 2.10.a).

- Lập hệ trục toạ độ sát $(\sigma, -\tau)$ có trục σ song song với trục x trên hình;
- Từ gốc toạ độ đặt các đoạn 0M = σ_y và 0N = σ_x ;
- Chia đôi đoạn MN, ta được điểm C;
- Xác định vị trí điểm P có toạ độ P (σ_y, $-\tau_{xy}$). Điểm P được gọi là điểm cực của vòng tròn.
- Lấy điểm C làm tâm, vẽ vòng tròn bán kính R bằng đoạn CP.

Để tìm ứng suất trên mặt cắt xác định bởi góc α. Thỏa mãn điều kiện (2.45) và (2.46) ta làm như sau: Từ P kẻ đường song song với trục hoành, cắt vòng tròn tại điểm D. Dễ dàng nhận thấy DN song song với PM. Từ P kẻ tia P_a hợp với trục σ góc α. Giao của P_a với vòng tròn ta kí hiệu là G. Toạ độ G trên trục hoành và trục tung lần lượt cho ta các giá trị σ_α ,τ_α. Sau đây ta sẽ chứng minh điều nhận định trên. Từ G kẻ GH vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm H. Ta cần chứng minh OH = σ_a và GH = τ_a. Ký hiệu góc

<DCB = β. Từ cách dựng vòng tròn ta có 1 số hệ thức sau:

$$< \mathbf{GCD} = 2\alpha; \qquad (2.54)$$

$$\begin{aligned} &MN = \sigma_x - \sigma_y; \\ &MC = CN = MN/2 = (\sigma_x - \sigma_y)/2; \\ &OC = OM + CM = \sigma_y + (\sigma_x - \sigma_y)/2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2; \\ &R = \sqrt{CM^2 + MP^2} = \sqrt{\left[(\sigma_x - \sigma_y)/2\right]^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad (2.56)$$

Vậy ta sẽ có:

$$\begin{aligned} CH &= R.\cos(< GCD - < DCB) = R.\cos(2\alpha - \beta) \\ &= R.\cos 2\alpha.\cos\beta + R.\sin 2\alpha.\sin\beta \end{aligned} \quad (2.57)$$

Đề ý CD = R, vậy từ tam giác CDN ta có:

$$\begin{aligned} &R.\cos\beta = CN = (\sigma_x - \sigma_y)/2; \\ &R.\sin\beta = DN = \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Nên biểu thức (j) có dạng:

$$CH = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\alpha + \tau_{xy}.\sin 2\alpha \quad (2.59)$$

suy ra:

$$OH = OC + CH = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\alpha + \tau_{xy}.\sin 2\alpha \quad (2.60)$$

So sánh biểu thức cuối với biểu thức (5.45), ta nhận thấy hoành độ điểm G cho ta giá trị ứng suất pháp σ_a.

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} GH &= CG.\sin(< GCD - < DCB) = R.\sin(2\alpha - \beta) \\ &= R.\sin 2\alpha.\cos\beta - R.\cos 2\alpha.\sin\beta \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\sin 2\alpha - \tau_{xy}.\cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2.61)$$

So sánh biểu thức GH vừa thu được với biểu thức (2.46) ta thấy GH = τ_a.

3.3.2. Các nhận xét rút ra từ đặc điểm của vòng tròn vòng Mohr ứng suất:

3.3.2.1 Giao của vòng tròn với trục hoành (điểm A và điểm B) là nơi có ứng suất tiếp bằng không. Vậy 0A, 0B lần lượt cho ta 2 giá trị ứng suất chính còn lại. Ngoài ra, ta còn nhận thấy trong mọi giá trị ứng suất pháp thì 0A cho ta giá trị nhỏ nhất và 0B cho ta giá trị lớn nhất.

$$\mathbf{0A} = \sigma_{\min} = \sigma_3 \; ; \mathbf{0B} = \sigma_{\max} = \sigma_1 \qquad (2.62)$$

(ứng suất chính thứ 2 bằng 0, trên mặt vuông góc trục z).

3.3.2.2. Phương của pháp tuyến mặt cắt so với trục x trên hình 2.9, trùng với phương tia P_a trên hình 2.10a. Vì vậy tia PB, PA lần lượt là phương pháp tuyến mặt chính thứ nhất và mặt chính thứ ba (ký hiệu $\vec{n}_1, \vec{n}_3$ trên hình 2.10b).

Để ý góc <APB chắn cung nửa vòng tròn, vì vậy $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_3$, vậy 2 mặt chính vuông góc nhau, đồng thời vuông góc với mặt chính thứ 2 là mặt có trục z làm pháp tuyến. Điều này hoàn toàn phù hợp với kết luận rút ta ở mục ứng suất chính đối với trường hợp trạng thái ứng suất tổng quát.

Từ hình vẽ ta suy ra giá trị 2 ứng suất chính còn lại:

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = 0B = 0C + R = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \\ \sigma_{\min} = 0A = 0C - R = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \end{cases} \qquad (2.63)$$

$$\begin{cases} \mathbf{tg}\alpha_1 = \dfrac{\mathbf{PM}}{\mathbf{MB}} = \dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y} \\ \mathbf{tg}\alpha_2 = -\dfrac{\mathbf{PM}}{\mathbf{MB}} = -\dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\min}} \end{cases} \qquad (2.64)$$

3.3.2.3. Điểm trên vòng tròn cho giá trị ứng suất tiếp lớn nhất là điểm giao đường tròn với đường kính song song trục tung, tức tại các điểm E, F. Ta có:

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \mathbf{R} = \frac{1}{2}\sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \qquad (2.65)$$

3.3.2.4. Phương của vector pháp tuyến của mặt nghiêng cho trị ứng suất tiếp lớn nhất là phương PE và PF (ký hiệu $\vec{n}_{\tau max}, \vec{n}_{\tau min}$ trên hình 2.10b). Để ý góc < EPF chắn nửa cung vòng tròn, vậy $\vec{n}_{\tau max} \perp \vec{n}_{\tau min}$ hay các mặt chứa ứng suất tiếp lớn nhất vuông góc nhau. Ngoài ra:

$$\begin{cases} tg\alpha_{\tau max} = \dfrac{EJ}{PJ} = \dfrac{R + JC}{MC} = \dfrac{R + PM}{MC} = \dfrac{R + \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \\ tg\alpha_{\tau min} = \dfrac{-JF}{PJ} = -\dfrac{R - JC}{MC} = -\dfrac{R - \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \end{cases} \quad (2.67)$$

3.3.2.5. Góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{AE}$ là 90^0, vậy các pháp tuyến này hợp với nhau góc 45^0. Từ đây suy ra mặt chính và mặt chứa ứng suất tiếp cực trị hợp với nhau góc 45^0.

3.3.2.6. Từ các biểu thức (2. 63) ta suy ra:

$$\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y \quad (2.68)$$

tức tổng ứng suất pháp trên 2 mặt vuông góc nhau là một hằng số.

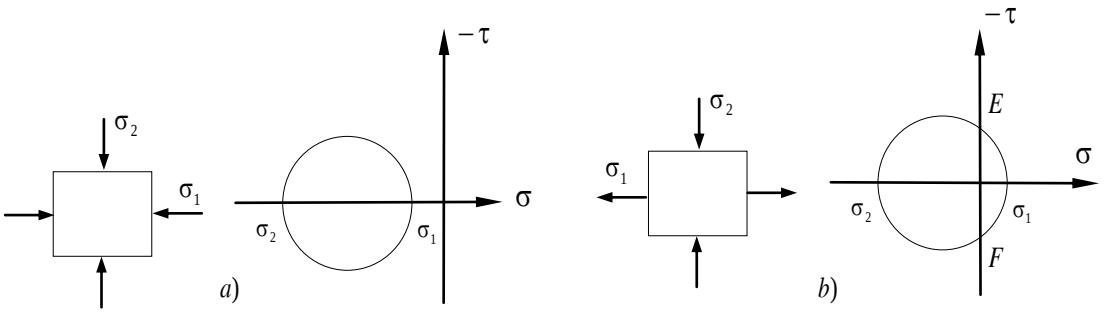
3.3.2.7. Từ hình 2.10b ta có:

$$\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2 \quad (2.69)$$

3.4. Các trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt:

3.4.1. Nếu $\sigma_1, \sigma_2 < 0$ (nén):

Vòng tròn Mohr nằm hoàn toàn phía trái trục -τ (hình 2.11.a); điều này là lý tưởng cho vật liệu chịu kéo kém (đá, bêtông,…).



Hình 2.11

3.4.2. Nếu $\sigma_1 > 0$ (kéo) & $\sigma_2 < 0$ (nén):

Vòng tròn cắt trục -τ ở 2 điểm E, F trên đo σ = 0 (hình 2.11.b).

3.4.3. Nếu $\sigma_1 > 0$ & $\sigma_2 = 0$ **:**

Ta có trạng thái kéo thuần túy, (hình 2.12.a).

3.4.4. Nếu $\sigma_2 < 0$ & $\sigma_1 = 0$:

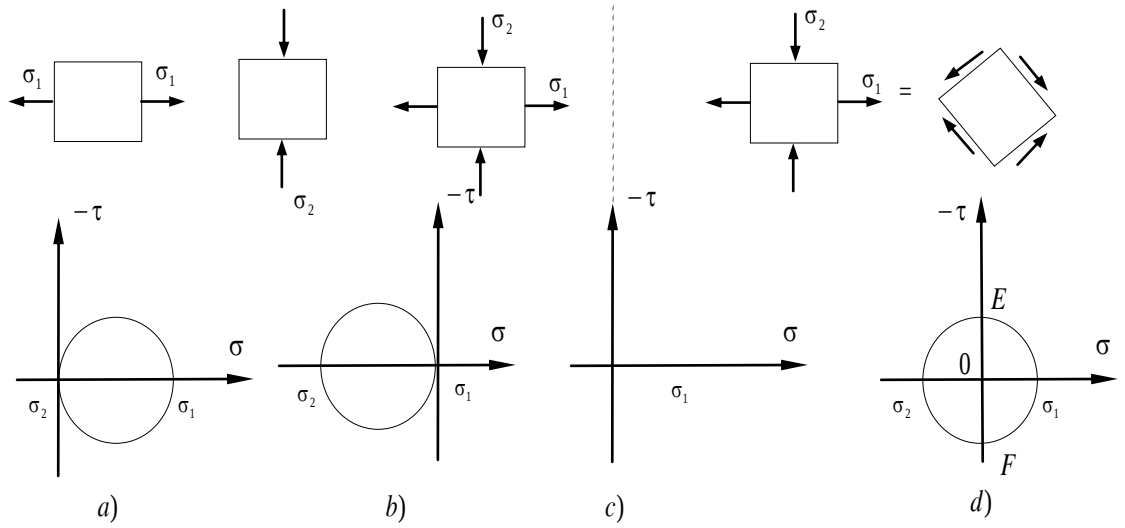
Ta có trạng thái nén thuần túy, (hình 2.12.b).

3.4.5. Nếu $\sigma_1 = \sigma_2$:

Vòng tròn có tâm đặt ở gốc toạ độ và ta có trạng thái ứng suất thủy tĩnh. Lúc này mọi mặt đều chịu một ứng suất đơn, (hình 2.12c).

3.4.6. Nếu $\sigma_1 = -\sigma_2 > 0$:

Vòng tròn có tâm đặt ở gốc toạ độ và ta có trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Trên các mặt nghiêng 1 góc 45^0 so với phương chính (E, F), các ứng suất pháp σ = 0 và ứng suất tiếp $\tau = \pm\sigma_1$ (hình 2.12.d).

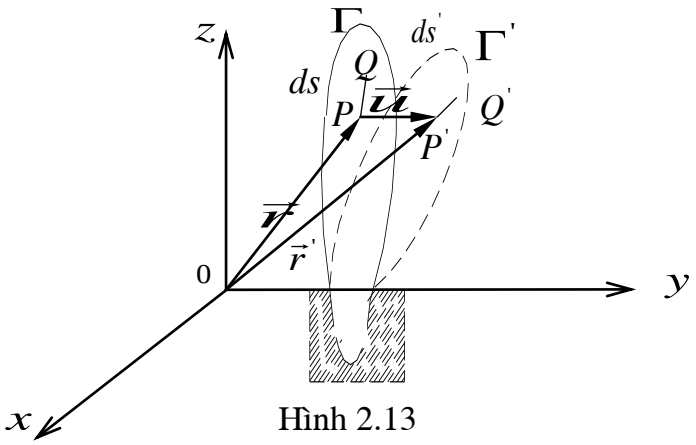


Hình 2.12

ξ4. BIẾN DẠNG:

4.1. Chuyển động, chuyển vị và biến dạng:

Khảo sát một vật thể đàn hồi chịu lực. Gọi Γ là hình thái ban đầu trong hệ toạ độ 0xyz lúc chưa chịu lực, và Γ/ là hình thái của vật khi chịu lực (hình 2.13).



Hình 2.13

Gọi P là 1 điểm bất kỳ trong Γ được xác định bởi vector $\vec{r}\{x, y, z\}$.

Sau khi tác dụng lực P có vị trí P/ trong Γ/ được xác định bởi $\vec{r}'\{x', y', z'\}$.

Ta gọi chuyển động, hay sự thay đổi vị trí của môi trường liên tục là phép biến đổi điểm. Tương quan giữa P và P/ là quan hệ 1-1 giữa các điểm của miền Γ và Γ/.

Ta gọi chuyển vị của điểm P là vector:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PP'} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{u}\{u, v, w\} \qquad (2.70)$$

Các thành phần của vector chuyển vị $\vec{u}$: $\{x' - x, y' - y, z' - z\}$

Tập hợp các vector $\vec{u}$ tạo thành trường chuyển vị.

Khi môi trường thay đổi hình thái, mỗi phân tố thể tích bị thay đổi hình dạng, nói ngắn gọn là nó bị biến dạng; sự biến dạng này thay đổi từ điểm này sang điểm khác. Để khảo sát biến dạng tại 1 điểm, ta khảo sát cách vận động của một phần tử thẳng ds nối điểm P(x, y, z) với Q(x+dx, y+dy, z+ dz).

Nếu ds' là ảnh của ds, ta có thể chia sự chuyển động thành:

- Sự chuyển động tổng thể mang ds đến ds' nhưng không làm nó biến dạng (không làm nó thay đổi chiều dài); sự chuyển vị này được thực hiện bằng 1 phép quay toàn khối và được gọi là sự dịch chuyển như một cố thể hay sự quay toàn khối và được gọi là sự dịch chuyển như một cố thể hay sự quay cứng (rigid rotation).
- Sau đó là sự biến dạng, nói một cách khác: mang ds = ds'. Sự biến dạng cần độc lập với chuyển vị cứng; nói khác đi, sự quay cứng phải gây 1 biến dạng bằng không.

4.2. Tensor biến dạng:

Quan sát hình , P'Q' là ảnh của PQ sau biến dạng. Toạ độ của P' và Q': $P'\{x', y', z'\}$, $Q'\{x' + dx', y' + dy', z' + dz'\}$

Bình phương khoảng cách PQ trước và sau biến dạng:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.71}$$

$$\left|\overrightarrow{P'Q'}\right|^2 = ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \tag{2.72}$$

$$ds^2 = dx_k.dx_k = \delta_{ij}dx_i.dx_j$$

$$ds'^2 = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} \cdot dx_i.dx_j \tag{2.73}$$

Vì x', y', z' là những hàm số theo các biến x, y, z:

$$x' = x'(x, y, z);\ y' = y'(x, y, z);\ z' = z'(x, y, z). \tag{2.74}$$

Do đó:

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial x'}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial x'}{\partial z} \cdot dz \tag{2.75}$$

$$dx'_k = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} dx_i \tag{2.76}$$

$$dy' = \frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy + \frac{\partial y'}{\partial z}dz \tag{2.77}$$

$$dz' = \frac{\partial z'}{\partial x}dx + \frac{\partial z'}{\partial y}dy + \frac{\partial z'}{\partial z}dz \tag{2.78}$$

Hiệu các khoảng cách bình phương là 1 hàm của biến dạng

$$ds'^2 - ds^2 = (dx'^2 - dx^2) + (dy'^2 - dy^2) + (dz'^2 - dz^2) \tag{2.79}$$

Với:

$$\begin{aligned} dx'^2 - dx^2 = &\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - 1\right]dx^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)^2 dz^2 + 2\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}\cdot\frac{\partial x'}{\partial y}dxdy + \\ &+ 2\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}\cdot\frac{\partial x'}{\partial z}\cdot dxdz + 2\cdot\frac{\partial x'}{\partial y}\cdot\frac{\partial x'}{\partial z}dydz \end{aligned} \tag{2.80}$$

Tương tự:

$$dy'^2 - dy^2 \quad \text{và} \quad dz'^2 - dz_2$$

Nếu δ_{ij} là kí hiệu kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad i = j \\ 0 & \text{khi} \quad i \neq j \end{cases} \tag{2.81}$$
$$i, j, k = 1 \div 3$$

Đại lượng trong ngoặc là 1 tensor hạng hai và gọi là tensor biến dạng, nó có tính đối xứng đối với các chỉ số i & j. Ta dùng các kí hiệu để chỉ các thành phần tensor đó:

$$2\cdot e_{ij} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x'_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \tag{2.82}$$

Nếu kí hiệu $\vec{u}\{u_1, u_2, u_3\}$ thì:

$$x'_k = u_k + x_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki} \tag{2.83}$$
$$u_k = x'_k - x_k$$

Thay (2.83) vào (2.82):

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\left(\delta_{kj}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{2.84}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{5.85}$$

Nếu chuyển qua kí hiệu thông thường ta sẽ có 6 thành phần độc lập của tensor biến dạng:

$$\begin{cases} e_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ e_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\ e_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\ e_{xy} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\right] = e_{yx} \\ e_{xz} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = e_{zx} \\ e_{yz} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right] = e_{zy} \end{cases} \tag{2.86}$$

Và Tensor biến dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{Bmatrix} \tag{2.87}$$

Trên đây là cách diễn tả đúng đắn của biến dạng bất chấp cấp của độ lớn của chuyển vị. Việc sử dụng nó dẫn đến việc phân tích hình học phi tuyến của kết cấu, điều này làm bài toán rất phức tạp.

Trong đa số các áp dụng thực tiễn vào kết cấu, một cách đơn giản hợp lý là giả thiết tuyến tính hình học: gradient của các chuyển vị rất bé:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} << 1$$

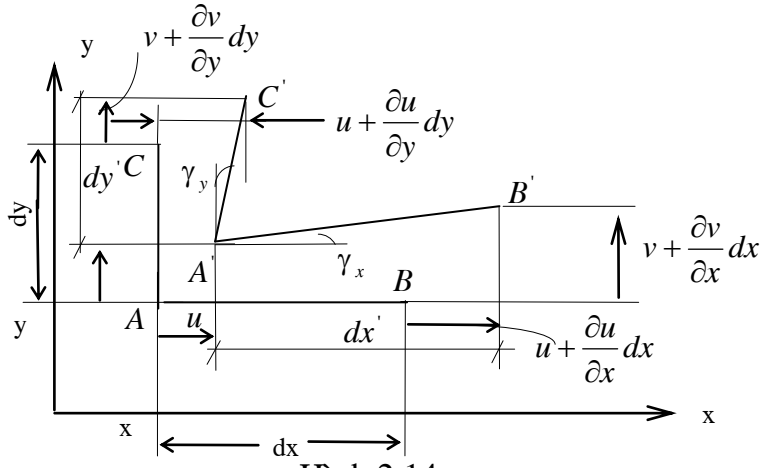
Suy ra bình phương và tích số của chúng có thể bỏ qua.

Như thế (5.86) thành:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \tag{2.88}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right); \tag{2.89}$$

Để nắm vững ý nghĩa hình học của các đại lượng ε_{ij} , chỉ cần suy luận trong một mặt phẳng (x, y), (hình 2.14). Gọi AB và AC là 2 phần tử đường của hình thái ban đầu, vuông góc với nhau, chuyển vị đến $A'B'$ và $A'C'$ trong hình thái đã biến dạng. Gọi u, v là chuyển vị của A theo phương x, y ; γ_1 , γ_2 là góc quay của AB so với x và AC so với trục y.



Hình 2.14

$$\frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx} \tag{2.90}$$

$$\frac{A'C' - AC}{AC} \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy} \tag{2.91}$$

Vì:

$$\gamma_x \approx tg\gamma_1 = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x}.dx - v}{dx'} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.92)$$

$$\gamma_y \approx tg\gamma_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y}.dy - u}{dy'} \approx \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.93)$$

$$\gamma_x, \gamma_y << 1 \quad (2.94)$$

$$dx' = dx(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \approx dx \quad (2.95)$$

$$dy' = dy(1 + \frac{\partial v}{\partial y}) \approx dy \quad (2.96)$$

Biến dạng góc vuông:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2.\varepsilon_{xy} \quad (2.97)$$

Tương tự:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2.\varepsilon_{xz} \quad (2.98)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2.\varepsilon_{yz} \quad (2.99)$$

Vì γ còn gọi là góc trượt nên các thành phần (2.97), (2.98), (2.99) còn gọi là biến dạng trượt. Còn ε_{xx}, ε_{yy} , ε_{zz}: biến dạng pháp (biến dạng dài).

Tensor còn có thể diễn tả dưới dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ đx & & \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

4.3. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng:

Đối với vật liệu đồng chất và đẳng hướng, Hooke đã tìm ra mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng (còn gọi là định luật Hooke):

Ta có:

E: Modulus đàn hồi của vật liệu, [lực/ bình phương chiều dài). Nó tùy thuộc vào vật liệu và là hằng số cho mỗi vật liệu.

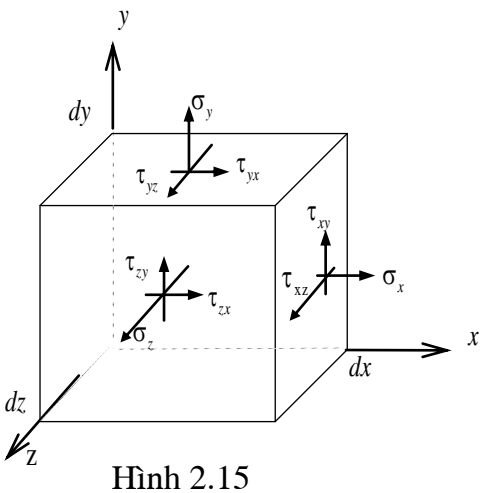
μ: hệ số poisson, tùy thuộc vật liệu, $\mu = 0 \div 0{,}5$.

G: modulus trượt, [lực/bình phương chiều dài)

$$G = \frac{E}{[2(1+\mu)]} \tag{2.101}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \;\; ; \;\; \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \;\; ; \;\; \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \;\; ; \;\; \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases} \tag{2.102}$$

4.4. Thế năng biến dạng đàn hồi:



Hình 2.15

Xét một phân tố có tensor ứng suất như hình 2.15. Giả sử trong khoảng thời gian δt phân tố có các biến dạng: $\delta\varepsilon_x, \delta\varepsilon_y, \delta\varepsilon_z, \delta\gamma_{xy}, \delta\gamma_{xz}, \delta\gamma_{yz}$. Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc cao ta có thể xem công ngoại lực tác động lên phân tố như tổng công của các thành phần ứng lực riêng rẻ trong các độ dời tương ứng:

$$\begin{aligned} dA = {} & \sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x dxdydz + \sigma_y \cdot \delta\varepsilon_y dxdydz + \\ & + \sigma_z \cdot \delta\varepsilon_z dxdydz + \tau_{xy} \cdot \delta\gamma_{xy} dxdydz + \\ & + \tau_{xz} \cdot \delta\gamma_{xz} dxdydz + \tau_{yz} \cdot \delta\gamma_{yz} dxdydz \end{aligned} \tag{2.103}$$

Nếu không có sự tổn thất năng lượng thì công này được chuyển hóa hoàn toàn thành thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố:

$$\delta(dU) = dA \tag{2.104}$$

Đặt :

$$u = \frac{dU}{dv} = \frac{dU}{dxdydz}, \tag{2.105}$$

Ta có:

$$u = \int \delta u = \int \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}\right) \tag{2.106}$$

(do quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là bậc nhất): nguyên lý cộng tác dụng.

$$u = \frac{1}{2}\left[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right] \tag{2.107}$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right] + \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right] \tag{2.108}$$

$$u = u_{hd} + u_{tt} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \tag{2.109}$$

Với:

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+\mu}{E}\cdot\tau_0^2 \tag{2.110}$$

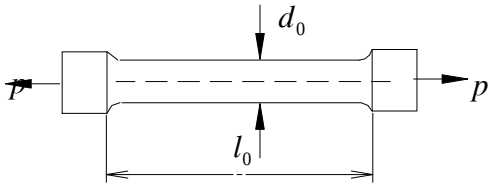
$$u_{tt} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{(1-2\mu)3}{2E}\cdot\sigma_0^2 \tag{2.111}$$

ξ5. THUYẾT BỀN:

5.1. Thí nghiệm kéo và nén vật liệu:

Để tìm điều kiện bền cho trạng thái ứng suất đơn, người ta tiến hành thí nghiệm kéo (đối với vật liệu dẻo) và thí nghiệm nén (đối với vật liệu dòn).

5.1.1. Thí nghiệm kéo:



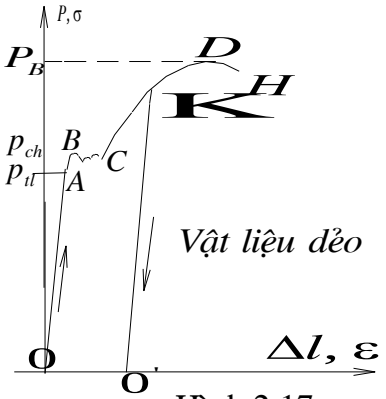
Mẫu thí nghiệm kéo bằng thép.

l_0: chiều dài phần thí nghiệm

d_0: đường kính ban đầu của mẫu.

Hình 2.16

Trong quá trình mẫu chịu kéo, đoạn l_0 có một độ giãn Δl. Dùng bút ghi trên máy ta tìm thấy tương quan giữa Δl và P như đồ thị ở hình . Sự làm việc của vật liệu có 3 giai đoạn: (hình 2.17).



Hình 2.17

5.1.1.1. Giai đoạn tương quan bậc nhất (đàn hồi): đoạn 0A.

Trong giai đoạn này tương quan giữa P và Δl là đoạn thẳng 0A, (bậc 1). Nếu ta kéo mẫu với lực $P < P_{tl}$ thì mẫu sẽ có một độ giãn dài tương ứng, sau đó ta giảm dần lực đi thì ta thấy bút ghi trên biểu đồ sẽ theo đường A0 về lại gốc 0. Tức là thanh không còn biến dạng lúc P = 0. Định luật Hooke hoàn toàn đúng trong giai đoạn này. Đoạn này gọi là giai đoạn đàn hồi tỉ lệ. Giới hạn tỉ lệ qui ước:

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{A_0} \qquad (N/cm^2) \tag{2.112}$$

5.1.1.2. Giai đoạn chảy: đoạn BC.

Do tốc độ thí nghiệm không đủ chậm, bút ghi sẽ vạch đường thẳng 0A lên quá điểm B rồi hạ xuống và tạo nên đường gẫy khúc trong đoạn BC. Tương ứng với B ta có lực P_{ch} và giới hạn chảy qui ước:

$$\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{A_0} \tag{2.113}$$

Trong đoạn này ta thấy lực không tăng nhưng biến dạng tiếp tục tăng. Vật liệu càng dẻo thì đoạn BC càng dài.

5.1.1.3. Giai đoạn củng cố (tái bền): đoạn CDH

Quan hệ giữa P và Δl là một đường cong, lực có tăng thì biến dạng mới tăng.

Nếu tăng lực đến điểm K trong đoạn CD và giảm lực có tăng thì biến dạng mới tăng.

Nếu tăng lực đến điểm K trong đoạn CD và giảm lực từ từ thì bút ghi sẽ vạch 1 đường song song với 0A đến $0'$. Điều này chứng tỏ trên thanh còn 1 biến dạng dư khi đã bỏ hết lực. Nếu lại tăng lực thì bút sẽ vạch theo đường $0'$KDH, $0'$K xem như 1 giai đoạn tỉ lệ. Hiện tượng giới hạn tỉ lệ tăng gọi là biến cứng nguội. Khi P =P_B, trên mẫu xuất hiện 1 chỗ thắt và thanh bắt đầu bị phá hỏng.

Giới hạn bền qui ước:

$$\sigma_B = \frac{P_B}{A_0} \qquad (N/cm^2) \tag{2.14}$$

Ba giới hạn: tỉ lệ, chảy, bền thể hiện tính chịu lực của vật liệu. Trong chế tạo máy, do yêu cầu các chi tiết làm việc không có biến dạng dư nên ta chỉ cho phép ứng suất thực trong chi tiết < σ_{ch}. Để có một độ an toàn chắc chắn ta thường lấy:

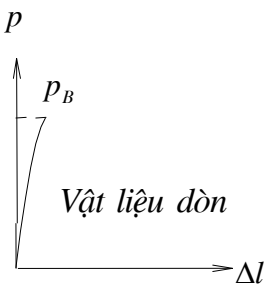
$$\sigma_Z = \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \tag{2.115}$$

N: hệ số an toàn, n>1

$[\sigma]$: ứng suất cho phép

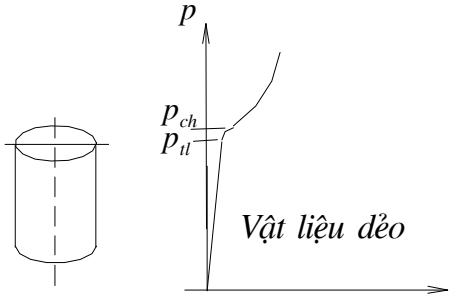
Trong xây dựng và vật liệu dòn:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} \tag{2.116}$$



Hình 2.18

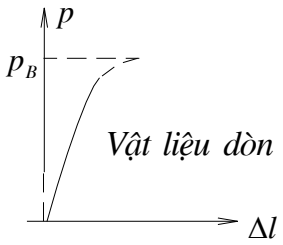
5.1.2. Thí nghiệm nén:



Hình 2.19

Mẫu thí nghiệm là hình trụ tròn. Chiều cao mẫu nén thường lấy từ (1÷1,5) đường kính. Quan hệ giữa P và Δl đối với vật liệu dẻo như hình.

Vật liệu cũng có 3 giai đoạn: tỉ lệ, chảy, củng cố nhưng không có giới hạn bền, (không vỡ).



Hình 2.20

Đối với vật liệu dòn, quan hệ giữa P và Δl là 1 đường cong, (hình 2.20) giống như kéo nhưng $P_{Bnén} > P_{B\ kéo}$.

Khi $P = P_B$ thì mẫu bị vỡ.

5.2. Các thuyết bền: (The Yield Criteria).

Với trạng thái ứng suất đơn, vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo khi ứng suất trong thanh đạt đến giới hạn dẻo σ_{ch}. Vớ trạng thái ứng suất phẳng và khối ta không thể xác định giới hạn đó 1 cách tổng quát bằng thí nghiệm vì giới hạn đó phụ thuộc độ lớn của các ứng suất và tỉ lệ giữa chúng. Có nhiều giả thuyết để suy đoán 1 cách tổng quát giới hạn mà ở đó vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo. Hiện nay chỉ còn 2 giả thuyết của Tresca và von Mises là đúng cho vật liệu dẻo (thép) và 1 giả thuyết của Mohr là đúng cho vật liệu dòn.

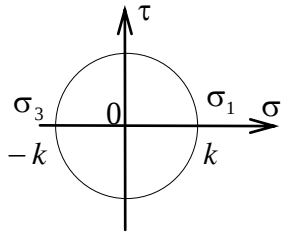
5.2.1. Điều kiện dẻo của Tresca hay thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất: (the Tresca criterion).

Gọi σ_1, σ_2, σ_3 là 3 ứng suất chính, với $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Để vật liệu làm việc trong miền đàn hồi với 1 hệ số an toàn n, ta phải có điều kiện:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 \le \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \qquad (2.117)$$

$[\sigma] = Y$: ứng suất chảy trong thí nghiệm kéo nén

$[\sigma] = 2k$: ứng suất tiếp chảy trong thí nghiệm xoắn thuần



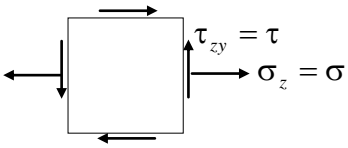
Hình 2.21

- Trạng thái ứng suất phẳng: thay (2.47)

$$\sigma_{td} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \le [\sigma] \qquad (2.118)$$

- Trạng thái ứng suất đặc biệt: ($\sigma_y = 0$).

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma] \qquad (2.119)$$



Hình 2.22

-Trượt thuần túy:

$$\tau \le \frac{[\sigma]}{2} \qquad (2.120)$$

5.2.2. Điều kiện dẻo của von Mises hay thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng: (the von Mises criterion).

Trạng thái dẻo bắt đầu xuất hiện tại 1 điểm khi ứng suất tiếp bát diện đạt tới 1 trị số giới hạn nào đó ứng với vật liệu đã cho.

$$\sigma_{td} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} = \sqrt{\frac{3E.u_{hd}}{1+\mu}} = \frac{3.\tau_0}{\sqrt{2}} \le [\sigma] \quad (2.121)$$

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \le \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \qquad (2.122)$$

- Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt (hình 5.22):

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma] \qquad (2.123)$$

-Trạng thái trượt thuần túy:

$$\sigma_{td} = \sqrt{3\tau^2} \le [\sigma] \qquad (2.124)$$

$$\Rightarrow \tau \le \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \qquad (2.125)$$

5.2.3. Thuyết bền Mohr:

(đối với vật liệu dòn có giới hạn bền kéo khác giới hạn bền nén)

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_{0k}]}{|[\sigma_{0n}]|}\sigma_3 \le [\sigma_k] \qquad (2.126)$$

Với:

σ_{ok}, σ_{0n} : các giới hạn nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn (kéo, nén theo 1 phương).

5.2.4. Chú ý:

Trong Thuyết bền von Mises, $[\sigma]$ được xác định:

- Bằng thí nghiệm kéo – nén thuần túy đơn:

Vật liệu chảy dẻo hki ứng suất pháp kéo đạt đến giá trị Y

$$\sigma_1 = Y, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \Rightarrow [\sigma] = Y \qquad (2.127)$$

- Bằng thí nghiệm xoắn thuần túy:

Chảy dẻo xảy ra khi ứng suất tiếp tác dụng đạt giá trị giới hạn k.

Xét phân tố có τ_{max}, theo vòng tròn Mohr:

$$\sigma_1 = k; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -k \qquad (2.128)$$

$$\Rightarrow \sigma_{td} = [\sigma] = \sqrt{3}.k \qquad (2.129)$$

$$\Rightarrow 2k = \frac{2}{\sqrt{3}}Y = 1{,}155.Y \qquad (2.130)$$

Vì $[\sigma]$ phải là hằng cho mỗi vật liệu.