Chương 1:

Vector và Trường

❖Nội dung chương 1:

1.1 Đại số vector.

1.2 Các hệ tọa độ.

1.3 Yếu tố vi phân và các tích phân.

1.4 Các toán tử cơ bản.

1.5 Khái niệm trường điện từ.

1.6 Các định luật cơ bản của trường điện từ.

1.7 Dòng điện dịch - Hệ phương trình Maxwell.

1.8 Điều kiện biên của trường điện từ.

1.1 Đại số vector

a) Vector ($\vec{A}$) và Vô hướng (A):

- **Vector: Đại lượng vật lý, đặc trưng bởi cả độ lớn và hướng trong không gian.**

  - **Ví dụ: Vận tốc,lực …**

- **Vô hướng: Đại lượng vật lý, đặc trưng chỉ bởi độ lớn.**

  - **Ví dụ: Khối lượng, điện tích …**

b) Vector đơn vị:

- độ lớn là 1, hướng theo chiều tăng các trục tọa độ, ký hiệu $\vec{a}$ và các chỉ số :

$$\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3$$

- Một vector bất kỳ có thể biểu diễn theo các vector đơn vị như sau:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z = E_x(x,y,z,t)\vec{a}_x + E_y(x,y,z,t)\vec{a}_y + E_z(x,y,z,t)\vec{a}_z$$

- Vector đơn vị dọc theo một vector:

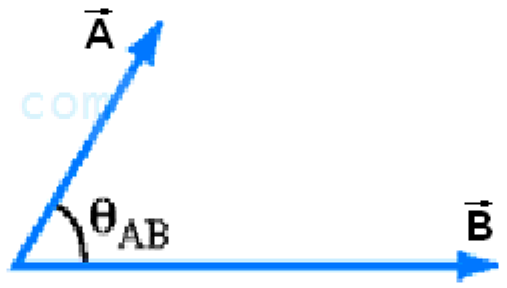
$$\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_1\vec{a}_1 + A_2\vec{a}_2 + A_3\vec{a}_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

c) Tích vô hướng:

- **Là một vô hướng:**

$$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \mathrm{A.B.}\cos\theta_{AB}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = \mathrm{A}^2$$



- **Rất thuận tiên khi tìm góc giữa 2 vector:**

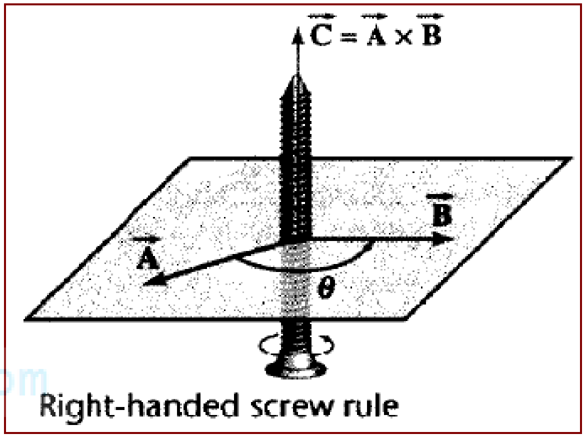
$$\theta_{\mathrm{AB}} = \cos^{-1}\left((\vec{\mathrm{A}}.\vec{\mathrm{B}}) \middle/ (\mathrm{A.B}) \right)$$

d) Tích có hướng:

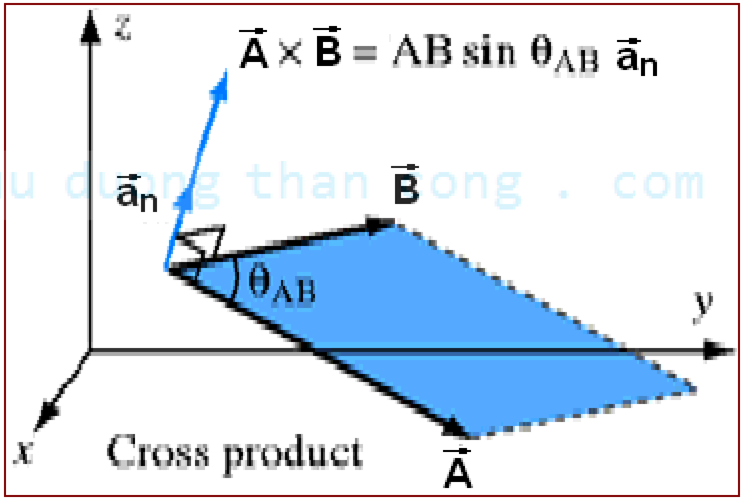
- Là một vector, vuông góc với cả hai vector $\vec{A}$ và $\vec{B}$

$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=-\vec{B}\times\vec{A}$$



- Rất tiện lợi để tìm vector đơn vị vuông góc với mặt phẳng chứa 2 vector:



$$\vec{a}_n=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$$

e) Tích hỗn hợp có hướng:

- Là vector : $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})}$

- Tổng quát : $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) \neq \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})}$

f) Tích hỗn hợp vô hướng:

- là vô hướng :

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

❖ Ví dụ 1.1.1: Đại số vectơ

Cho 3 vector: $\vec{A} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

$$\vec{B} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$$

$$\vec{C} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$$

---

a) Tính: $\vec{A} + \vec{B} - 4\vec{C}$?

$$= (3+1-4)\vec{a}_1 + (2+1-8)\vec{a}_2 + (1-1-12)\vec{a}_3$$

$$= -5\vec{a}_2 - 12\vec{a}_3$$

$$\Rightarrow \left|\vec{A} + \vec{B} - 4\vec{C}\right| = \sqrt{25+144} = 13$$

❖ Ví dụ 1.1.1: Đại số vectơ (tt)

b) Tính: $\vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$?

$$= (3+2-1)\vec{a}_1 + (2+2-2)\vec{a}_2 + (1-2+3)\vec{a}_3$$

$$= 4\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$$

Vector đơn vị $= \dfrac{4\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3}{\left|4\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3\right|}$

$$= \frac{1}{3}\ 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3$$

❖ Ví dụ 1.1.1: Đại số vectơ (tt)

Cho 3 vector: $\vec{A} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

$$\vec{B} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$$

$$\vec{C} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$$

c) Tính: $\vec{A}.\vec{C} = (3*1) + (2*2) + (1*3) = 10$

d) Xác định: $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

❖ Ví dụ 1.1.1: Đại số vectơ (tt)

Cho 3 vector: $\vec{A} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$

$\vec{B} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$

$\vec{C} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$

e) **Tính:** $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$?

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(3+2) + 2(-1-3) + 1(2-1) = 8$$

❖ Ví dụ 1.1.2: Đại số vectơ

Cho 2 vector: $\vec{A} = 3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y - \vec{a}_z$ $\vec{B} = \vec{a}_x - 3\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$

a) **Tính:** $\vec{C} = 2\vec{A} - 3\vec{B}$

b) **Xác định vector đơn vị $\vec{a}_C$ và góc hợp bởi nó với trục Oz ?**

a) **Ta có:** $\vec{\mathbf{C}} = 2\vec{\mathbf{A}} - 3\vec{\mathbf{B}} = 2[3\vec{\mathbf{a}}_x + 2\vec{\mathbf{a}}_y - \vec{\mathbf{a}}_z] - 3[\vec{\mathbf{a}}_x - 3\vec{\mathbf{a}}_y + 2\vec{\mathbf{a}}_z]$

$$= 3\vec{\mathbf{a}}_x + 13\vec{\mathbf{a}}_y - 8\vec{\mathbf{a}}_z$$

$$\Longrightarrow C = \sqrt{3^2 + 13^2 + (-8)^2} = 15.556$$

b) **Vector đơn vị :** $\vec{\mathbf{a}}_c = \frac{\vec{\mathbf{C}}}{C} = 0.193\vec{\mathbf{a}}_x + 0.836\vec{\mathbf{a}}_y - 0.514\vec{\mathbf{a}}_z$

$$\Longrightarrow \theta_z = \cos^{-1}\left[\frac{C_z}{C}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{-8}{15.556}\right] = 120.95^\circ$$

1.2: Các hệ tọa độ

1.2.1 Hệ tọa độ Đề các:

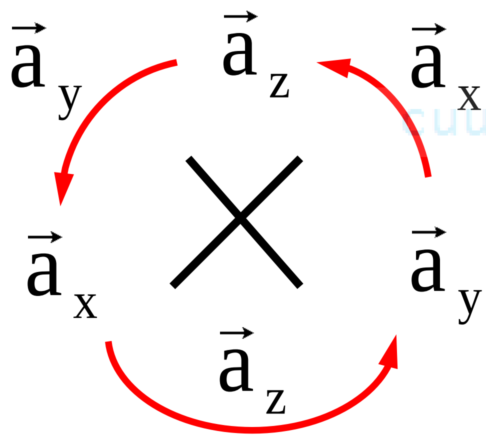
a) Các vector đơn vị:

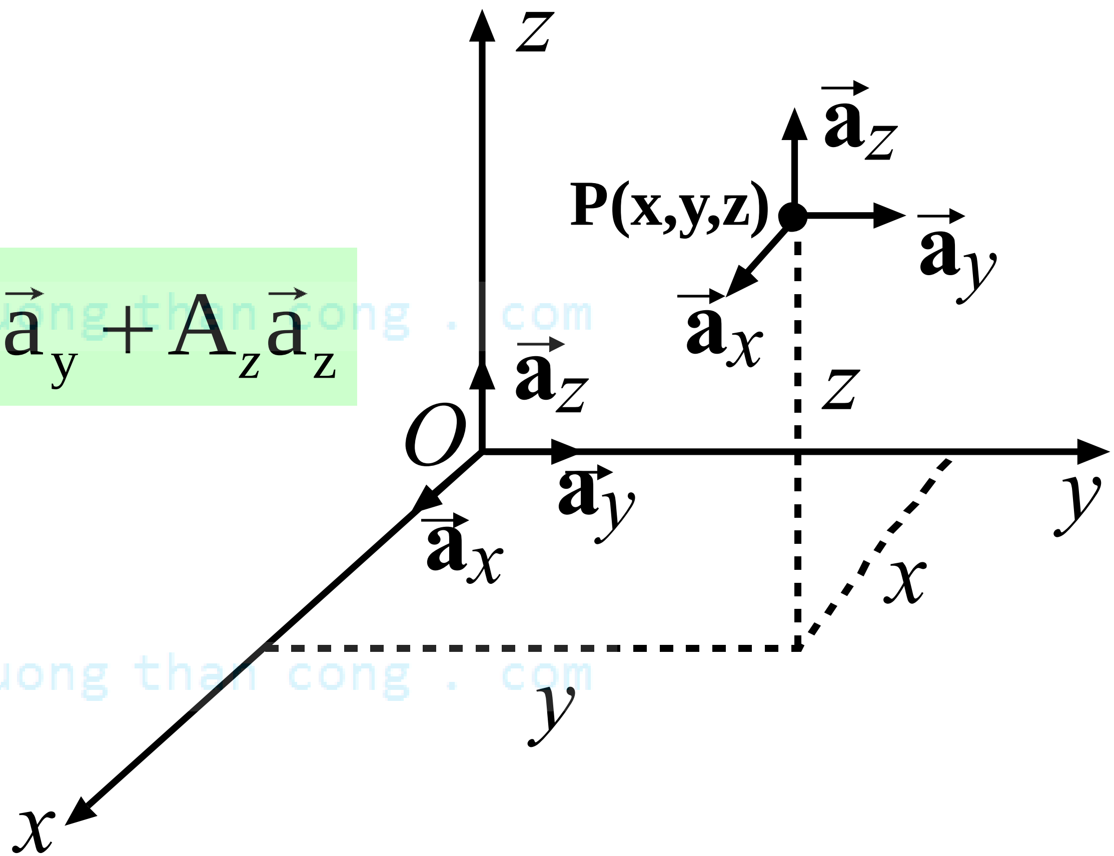
* $P(x, y, z)$

* $\vec{a}_x, \ \vec{a}_y, \ \vec{a}_z$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + A_z\vec{a}_z$$

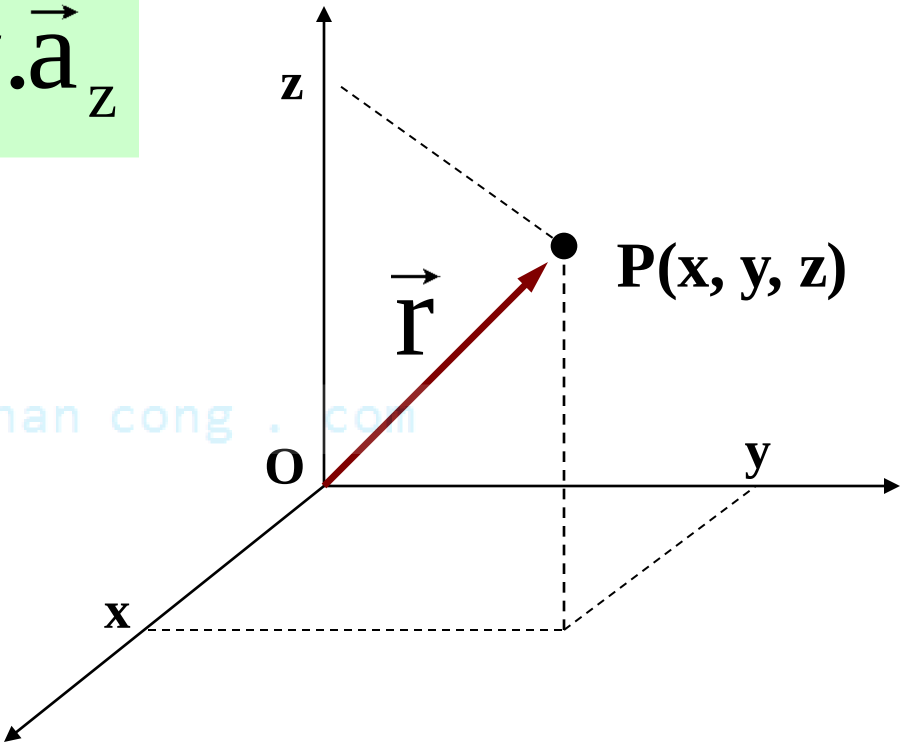
* **Luật bàn tay phải :**



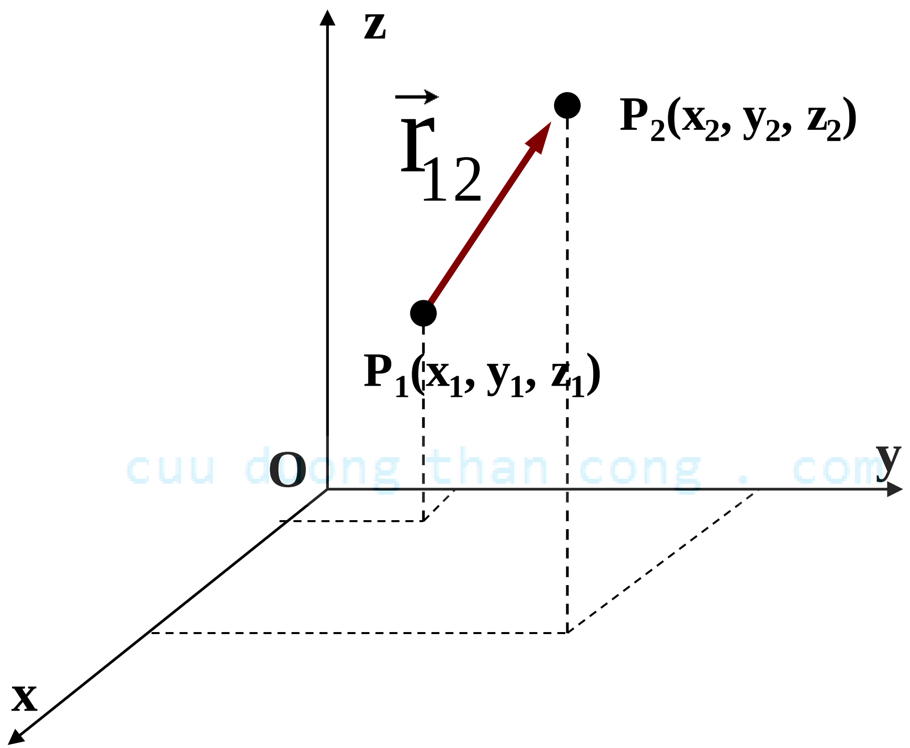


b) Vector vị trí:

$$\vec{r} = x.\vec{a}_x + y.\vec{a}_y + z.\vec{a}_z$$



c) Vector từ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ đến $P_2(x_2,y_2,z_2)$:



$$\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1)\vec{a}_x + (y_2 - y_1)\vec{a}_y + (z_2 - z_1)\vec{a}_z$$

❖ Ví dụ 1.2.1:

Cho: *A*(12, 0, 0), *B*(0, 15, 0), C(0, 0, –20).

a) Khoảng cách từ *B* đến *C* ?

$$= \left|(0-0)\vec{a}_x + (0-15)\vec{a}_y + (-20-0)\vec{a}_z\right| = 25$$

b) Thành phần vector từ *A* đến *C* dọc theo từ *B* đến C ?

- Vector từ *A* đến C: $\vec{r}_{AC} = -12\vec{a}_x - 20\vec{a}_z$

- Vector đơn vị từ *B* đến C: $\vec{a}_{BC} = \dfrac{-15\vec{a}_y - 20\vec{a}_z}{25} = \dfrac{-3\vec{a}_y - 4\vec{a}_z}{5}$

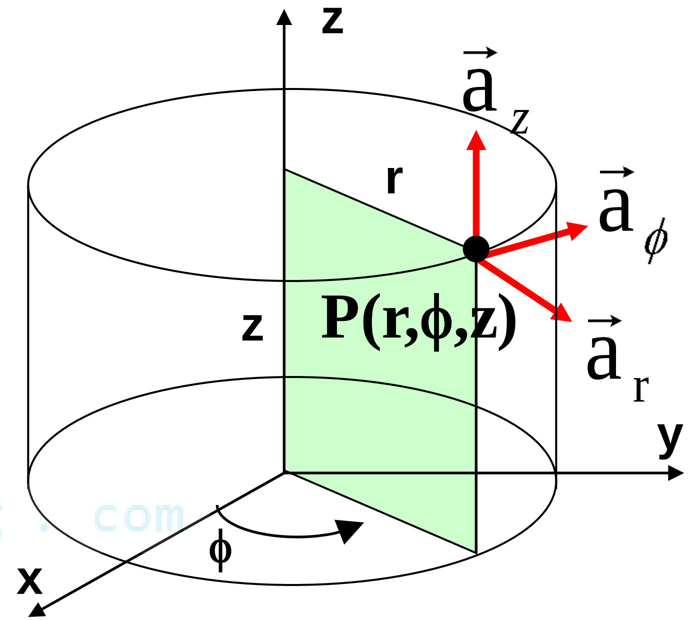
$$\Rightarrow (\vec{r}_{AC}.\vec{a}_{BC})\vec{a}_{BC} = -9.6\vec{a}_y - 12.8\vec{a}_z$$

1.2.2 Hệ tọa độ trụ:

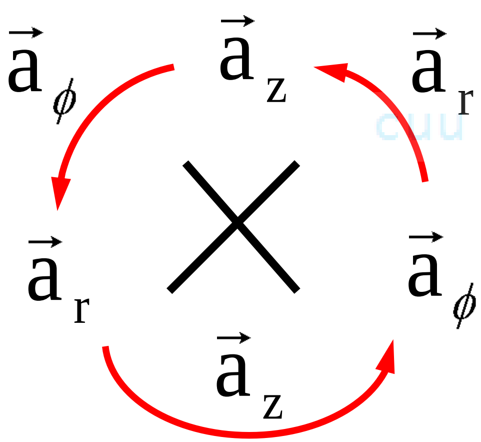
* $P(r, \phi, z)$

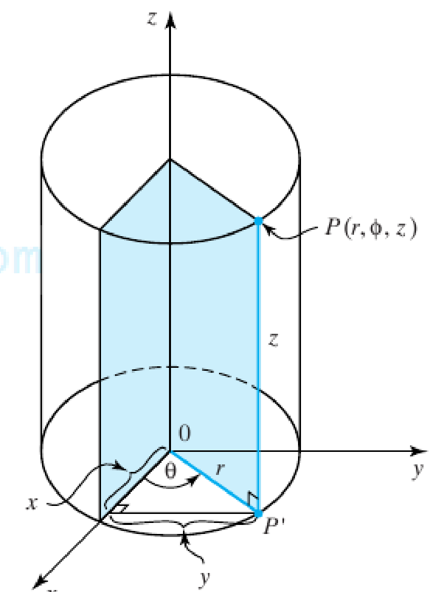
* $\vec{a}_r, \ \vec{a}_\phi, \ \vec{a}_z$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\phi\vec{a}_\phi + A_z\vec{a}_z$$



* **Luật bàn tay phải :**

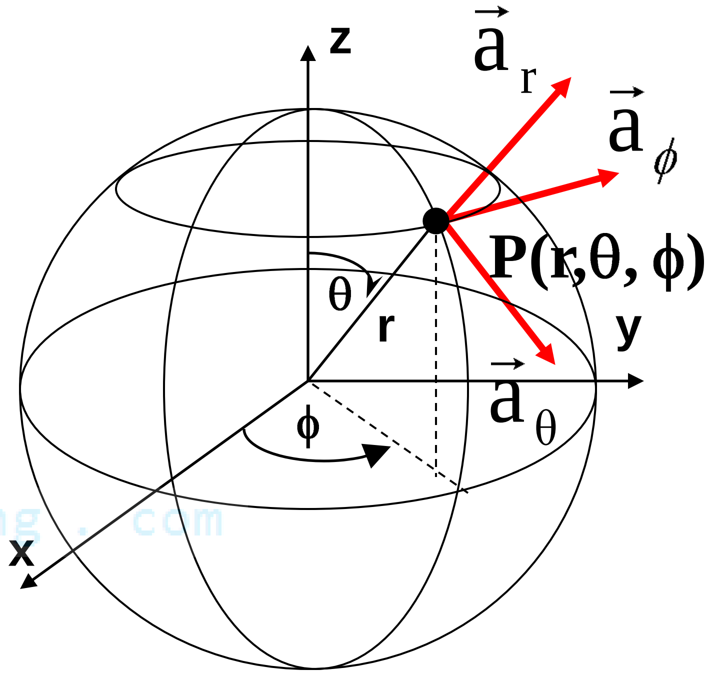




1.2.3 Hệ tọa độ cầu:

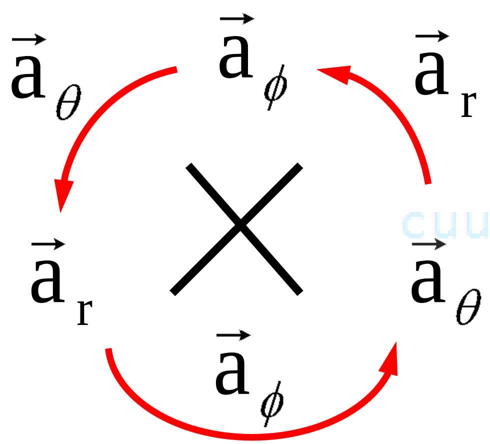
* $P(r, \theta, \phi)$

* $\vec{a}_r, \vec{a}_\theta, \vec{a}_\phi$



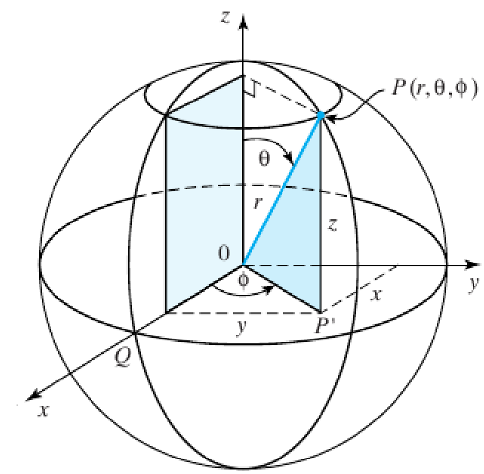
$$\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi$$

* **Luật bàn tay phải :**



❖**Chú ý:**

- **Hệ trụ:** $\vec{a}_{rc}$
- **Hệ cầu:** $\vec{a}_{rs}$



1.2.4 Chuyển đổi giữa các hệ tọa độ:

Đề các **Trụ**

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = tg^{-1}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \longleftarrow (r, \phi, z)$$

1.2.4 Chuyển đổi giữa các hệ tọa độ:

Đề các → **Cầu**

$$(x, y, z) \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = tg^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = tg^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{matrix}\right\} \leftarrow (r, \theta, \phi)$$

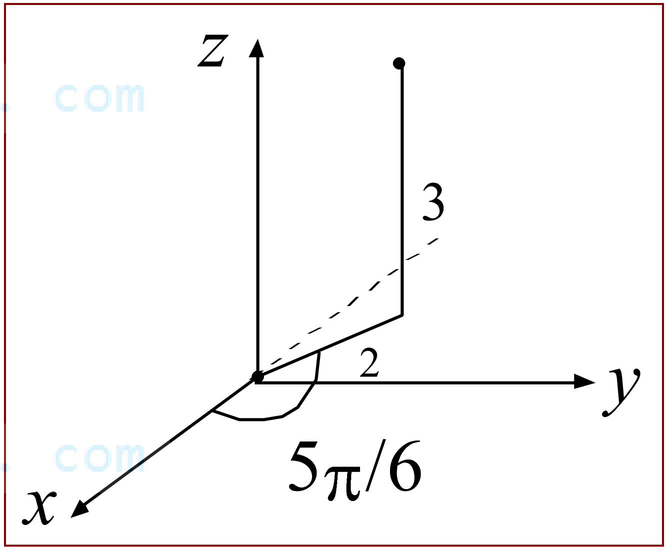
❖Ví dụ 1.2.2: Xác định x, y, z ?

Chú ý: x	=	$r\cos\phi$	x	=	$r\sin\theta\cos\phi$
y	=	$r\sin\phi$	y	=	$r\sin\theta\sin\phi$
z	=	z	z	=	$r\cos\theta$

(a) **Cho P(2, 5π/6, 3) trong hệ tọa độ trụ.**

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3} \\ y &= 2\sin 5\pi/6 = 1 \end{aligned}\right\} \sqrt{3+1} = 2$$

$$z = 3$$



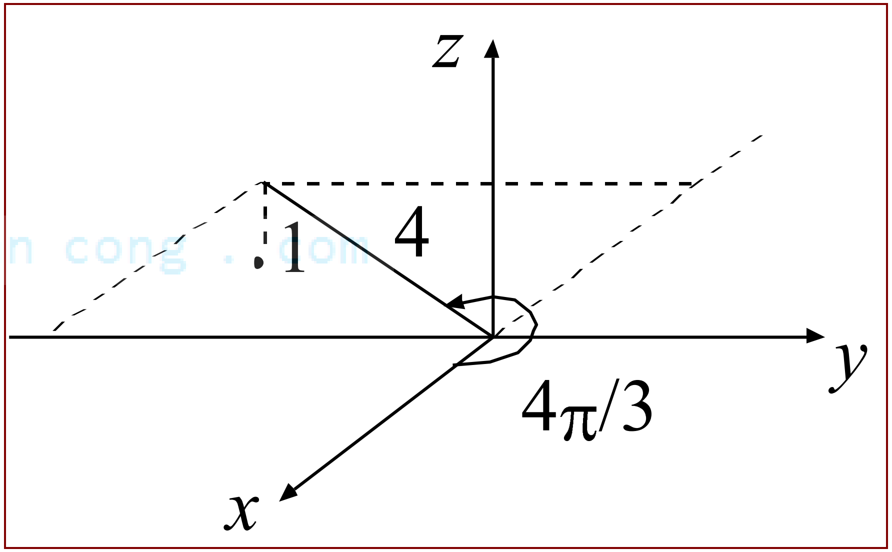
❖ Ví dụ 1.2.2: Xác định x, y, z ?

Chú ý:	x	=	$r\cos\phi$	x	=	$r\sin\theta\cos\phi$
	y	=	$r\sin\phi$	y	=	$r\sin\theta\sin\phi$
	z	=	z	z	=	$r\cos\theta$

(b) Cho P(4, 4π/3, -1) trong hệ tọa độ trụ.

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\cos 4\pi/3 = -2 \\ y &= 4\sin 4\pi/3 = -2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \sqrt{4+12} = 4$$

$$z = -1$$

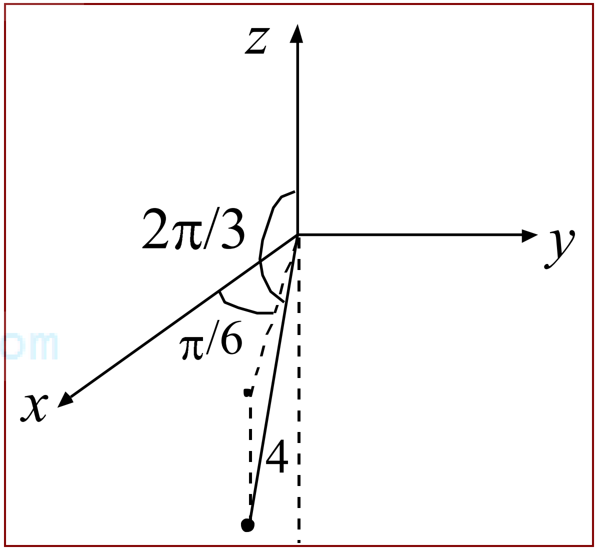


❖ Ví dụ 1.2.2: Xác định x, y, z ?

Chú ý: x	=	$r\cos\phi$	x	=	$r\sin\theta\cos\phi$
y	=	$r\sin\phi$	y	=	$r\sin\theta\sin\phi$
z	=	z	z	=	$r\cos\theta$

(c) Cho P(4, 2π/3, π/6) trong hệ tọa độ cầu.

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} = 3 \\ y &= 4\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ z &= 4\cos\frac{2\pi}{3} = -2 \end{aligned}\right\} \sqrt{9+3+4} = 4$$

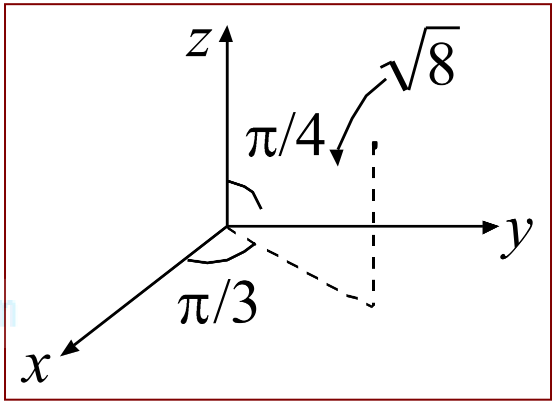


❖ Ví dụ 1.2.2: Xác định x, y, z ?

Chú ý: x	=	$r\cos\phi$	x	=	$r\sin\theta\cos\phi$
y	=	$r\sin\phi$	y	=	$r\sin\theta\sin\phi$
z	=	z	z	=	$r\cos\theta$

(d) Cho $P\left(\sqrt{8}, \pi/4, \pi/3\right)$ **trong hệ tọa độ cầu.**

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{8}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 1 \\ y &= \sqrt{8}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ z &= \sqrt{8}\cos\frac{\pi}{4} = 2 \end{aligned}\right\} \sqrt{1+3+4} = \sqrt{8}$$



1.2.5 Chuyển đổi vector giữa các hệ tọa độ:

Đề các ⟷ **Trụ**

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

1.2.5 Chuyển đổi vector giữa các hệ tọa độ:

Đề các ⟷ **Cầu**

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

❖ Ví dụ 1.2.3: Chuyển đổi vector

Cho:

$$\vec{A} = \vec{a}_r \quad \text{at} \quad 2, \pi/6, \pi/2 \quad ?$$

$$\vec{B} = \vec{a}_\theta \quad \text{at} \quad 1, \pi/3, 0 \quad ?$$

$$\vec{C} = \vec{a}_\phi \quad \text{at} \quad 3, \pi/4, 3\pi/2 \quad ?$$

→ **Đề các**

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\pi/6)\cos(\pi/2) & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin(\pi/6)\sin(\pi/2) & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos(\pi/6) & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{A} = \sin(\pi/6)\vec{a}_y + \cos(\pi/6)\vec{a}_z = \frac{1}{2}\vec{a}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z$$

❖ Ví dụ 1.2.3: Chuyển đổi vector

Cho:

$$\vec{A} = \vec{a}_r \quad \text{at} \quad 2, \pi/6, \pi/2 \quad ?$$

$$\vec{B} = \vec{a}_\theta \quad \text{at} \quad 1, \pi/3, 0 \quad ?$$

$$\vec{C} = \vec{a}_\phi \quad \text{at} \quad 3, \pi/4, 3\pi/2 \quad ?$$

→ **Đề các**

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos(\pi/3)\cos 0 & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos(\pi/3)\sin 0 & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin(\pi/3) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \cos(\pi/3)\vec{a}_x - \sin(\pi/3)\vec{a}_z = \frac{1}{2}\vec{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z$$

❖ Ví dụ 1.2.3: Chuyển đổi vector

Cho:

$$\vec{A} = \vec{a}_r \quad \text{at} \quad 2, \pi/6, \pi/2 \quad ?$$

$$\vec{B} = \vec{a}_\theta \quad \text{at} \quad 1, \pi/3, 0 \quad ?$$

$$\vec{C} = \vec{a}_\phi \quad \text{at} \quad 3, \pi/4, 3\pi/2 \quad ?$$

→ **Đề các**

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin(3\pi/2) \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos(3\pi/2) \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ $$\vec{C} = -\sin(3\pi/2)\vec{a}_x = -\vec{a}_x$$

1.3: Yếu tố vi phân và các tích phân :

a) Công thức chung:

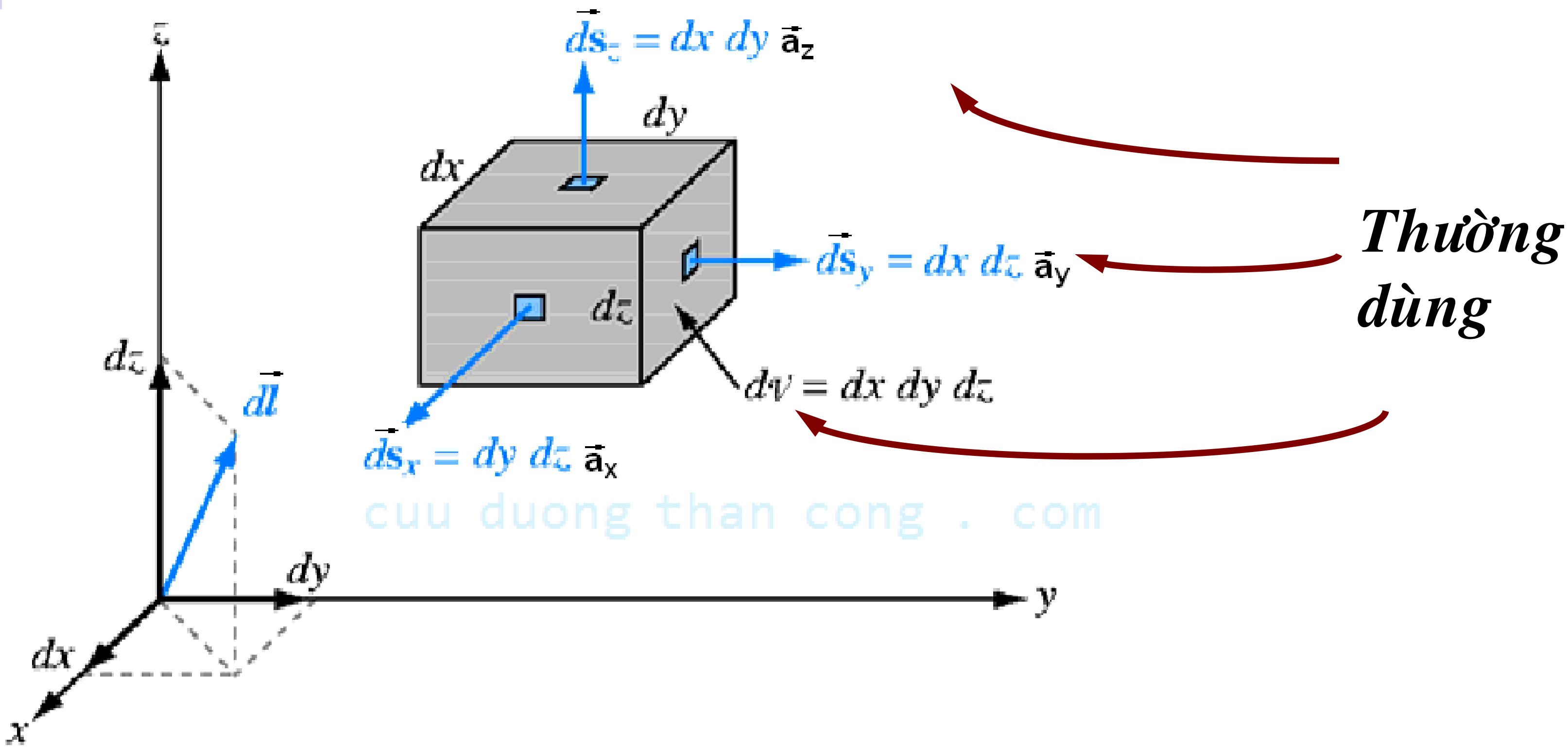
$$\boxed{d\vec{l} = h_1 du_1 \vec{a}_1 + h_2 du_2 \vec{a}_2 + h_3 du_3 \vec{a}_3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d\vec{S} &= d\vec{S}_1 + d\vec{S}_2 + d\vec{S}_3 = \pm dS_1 \vec{a}_1 \pm dS_2 \vec{a}_2 \pm dS_3 \vec{a}_3 \\ &= \pm h_2 h_3 du_2 du_3 \vec{a}_1 \pm h_1 h_3 du_1 du_3 \vec{a}_2 \pm h_1 h_2 du_1 du_2 \vec{a}_3 \end{aligned}}$$

$$\boxed{dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3}$$

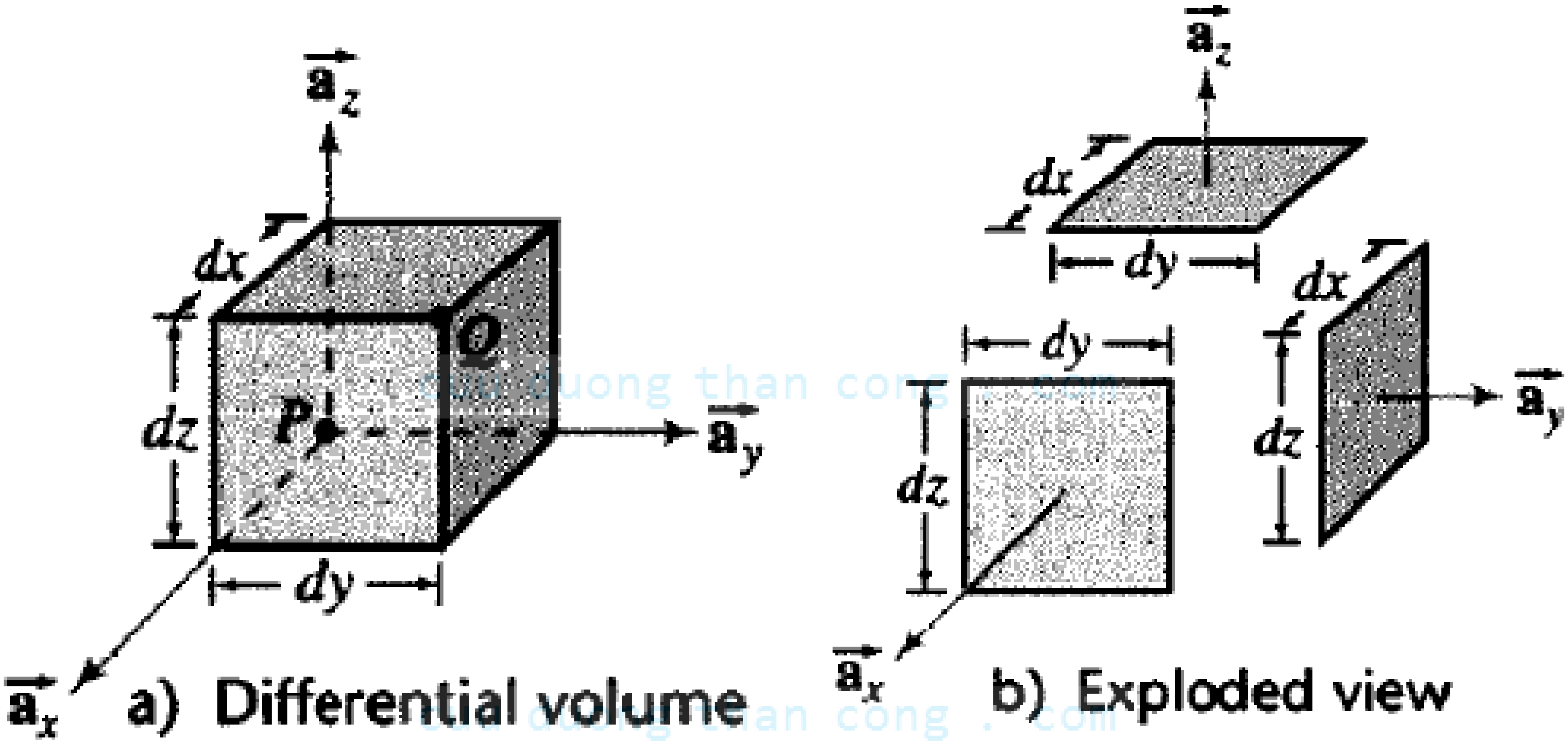
Hệ số tọa độ (Larmor)	h_1	h_2	h_3
Đề các :	1	1	1
Trụ :	1	r	1
Cầu:	1	r	$r\sin\theta$

b) Yếu tố vi phân ở hệ tọa độ Đề các :

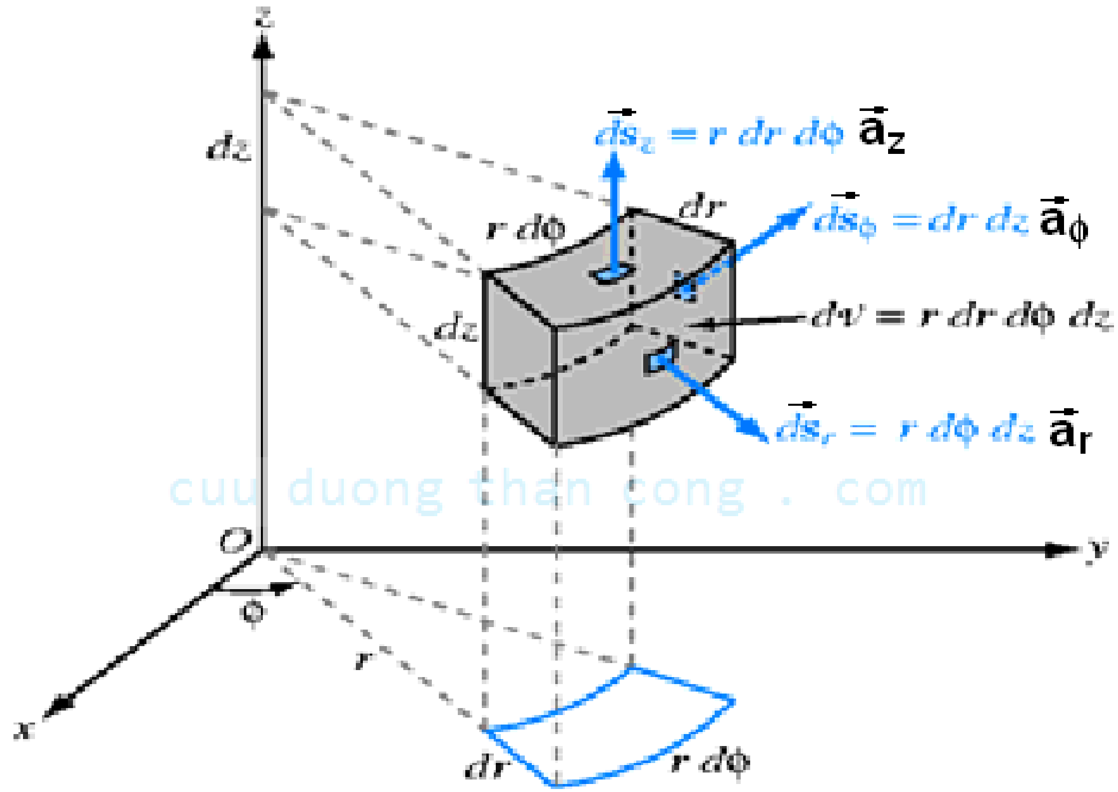


$d\vec{l} = dx\,\vec{i}_x + dy\,\vec{i}_y + dz\,\vec{i}_z$
$d\vec{S} = \pm dydz\,\vec{i}_x \pm dxdz\,\vec{i}_y \pm dxdy\,\vec{i}_z$
$dV = dxdydz$

❖ Vi phân thể tích:



c) Yếu tố vi phân ở hệ tọa độ trụ :

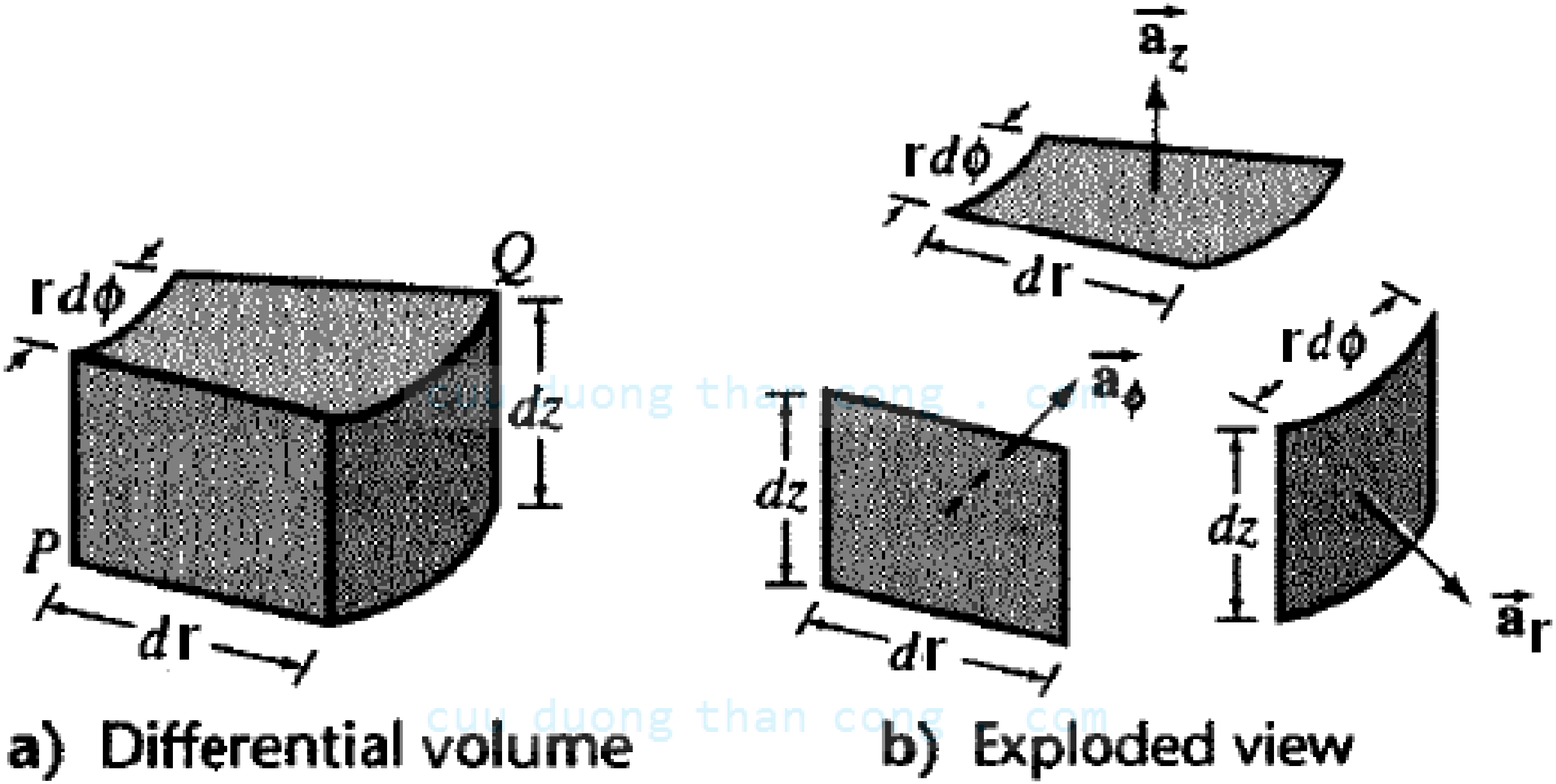


$$d\vec{l} = dr\,\vec{a}_r + rd\phi\,\vec{a}_\phi + dz\,\vec{a}_z$$

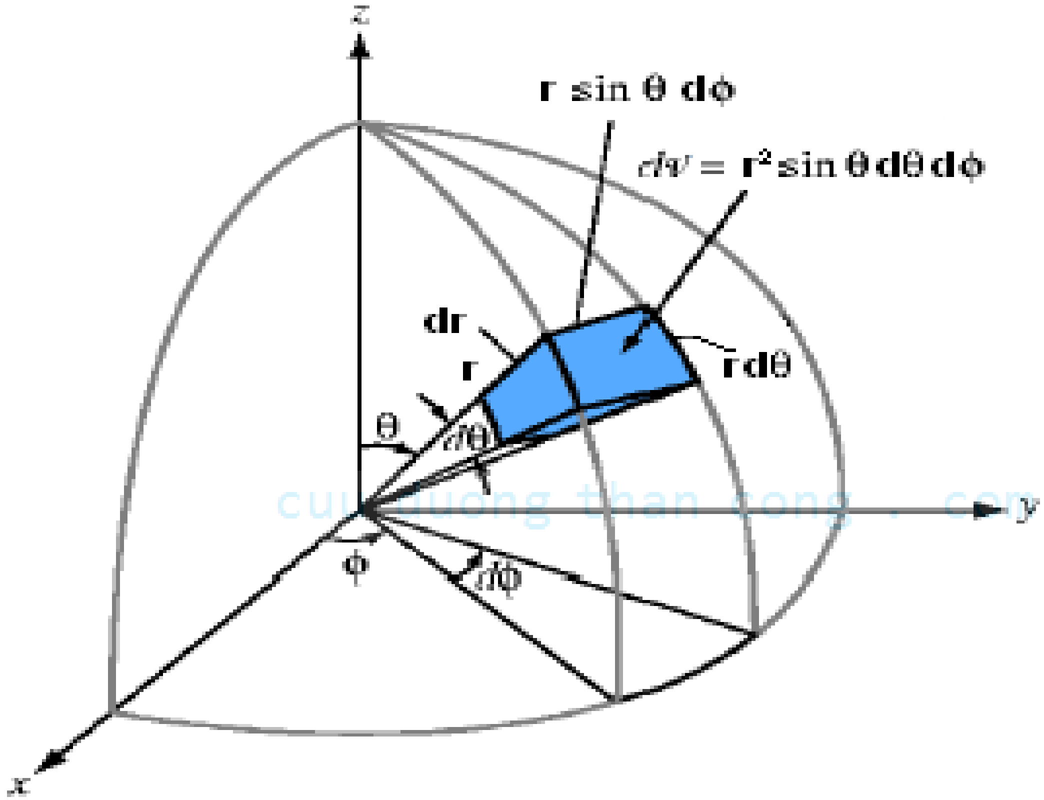
$$d\vec{S} = \pm rd\phi dz\,\vec{a}_r \;\pm\; drdz\,\vec{a}_\phi \;\pm\; rdrd\phi\,\vec{a}_z$$

$$dV = rdrd\phi dz$$

❖ Vi phân thể tích:



d) Yếu tố vi phân ở hệ tọa độ cầu :

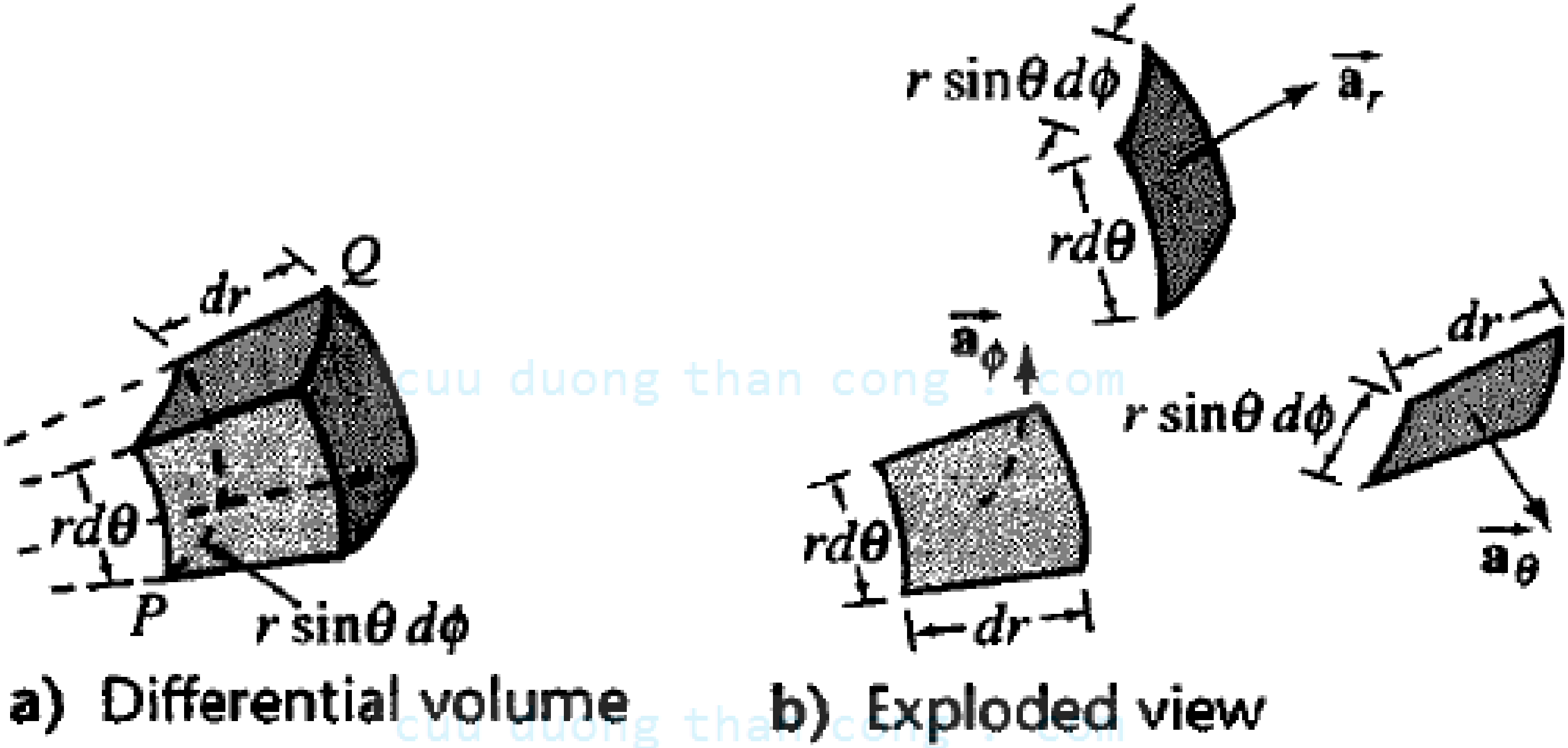


$$d\vec{l} = dr\,\vec{a}_r + r d\theta\,\vec{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\,\vec{a}_\phi$$

$$d\vec{S} = \pm r^2 \sin\theta d\theta d\phi\,\vec{a}_r \pm r\sin\theta dr d\phi\,\vec{a}_\theta \pm r dr d\theta\,\vec{a}_\phi$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

❖ Vi phân thể tích:



e) Tích phân đường, mặt và khối :

i. Tích phân đường:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$ =Tích phân đường của $\vec{E}$ từ *A* đến *B*.

- Ý nghĩa của tích phân này phụ thuộc tính chất của trường vectơ $\vec{E}$. Ví dụ nếu $\vec{E}$ là trường lực thì tích phân cho ta công của lực.

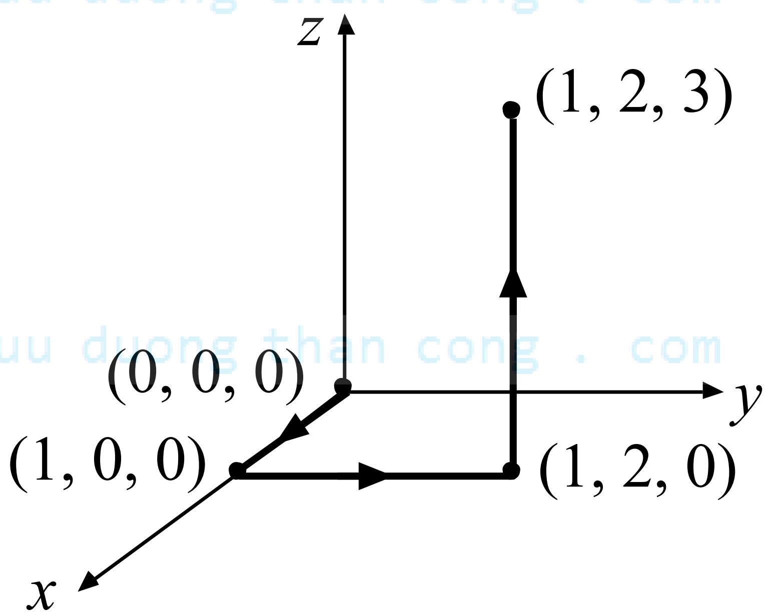
$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l}$$ =Tích phân đường của $\vec{E}$ dọc theo đường kín C.

= còn gọi là lưu số của trường $\vec{E}$ trên đường C.

❖ Ví dụ 1.3.1: Tính tích phân đường

Cho: $\vec{F} = (yz)\vec{a}_x + (zx)\vec{a}_y + (xy)\vec{a}_x$ **tìm** $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \vec{F}d\vec{l}$

Với đường C: từ (0, 0, 0) đến (1, 0, 0), từ (1, 0, 0) đến (1, 2, 0) và từ (1, 2, 0) đến (1, 2, 3).

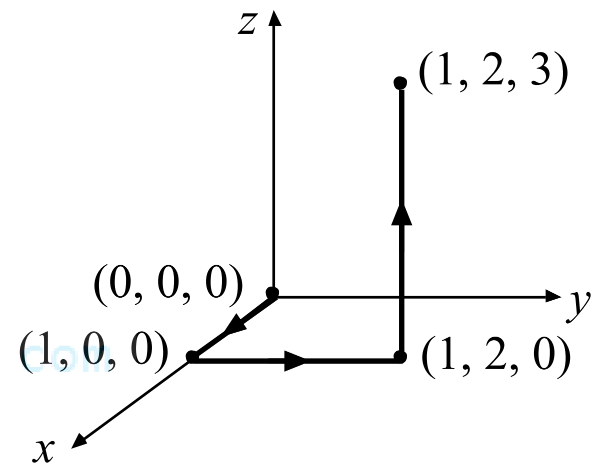


❖ Ví dụ 1.3.1: Tính tích phân đường (tt)

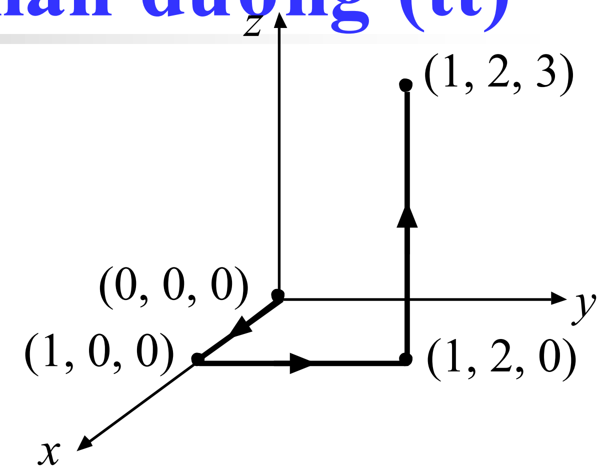
- **Từ (0, 0, 0) đến (1, 0, 0):**

$$z = 0, y = 0 \Rightarrow dz = 0, dy = 0$$

$$\vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \vec{F}d\vec{l} = 0$$



❖ Ví dụ 1.3.1: Tính tích phân đường (tt)



- **Từ (1, 0, 0) đến (1, 2, 0),**

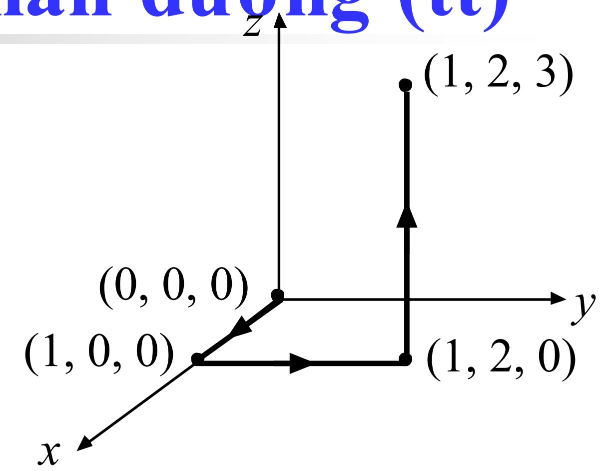
$$x = 1, z = 0 \Rightarrow dx = 0, dz = 0$$

$$\vec{F} = y\vec{a}_x$$

$$d\vec{l} = (dx)\vec{a}_x + (dy)\vec{a}_y + (dz)\vec{a}_z = (dy)\vec{a}_y$$

$$\vec{F}.d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{(1,0,0)}^{(1,2,0)} \vec{F}d\vec{l} = 0$$

❖ Ví dụ 1.3.1: Tính tích phân đường (tt)



- **Từ (1, 2, 0) đến (1, 2, 3),**

$$x = 1, y = 2 \Rightarrow dx = 0, dy = 0$$

$$\vec{F} = 2\vec{a}_z$$

$$d\vec{l} = (dx)\vec{a}_x + (dy)\vec{a}_y + (dz)\vec{a}_z = (dz)\vec{a}_z$$

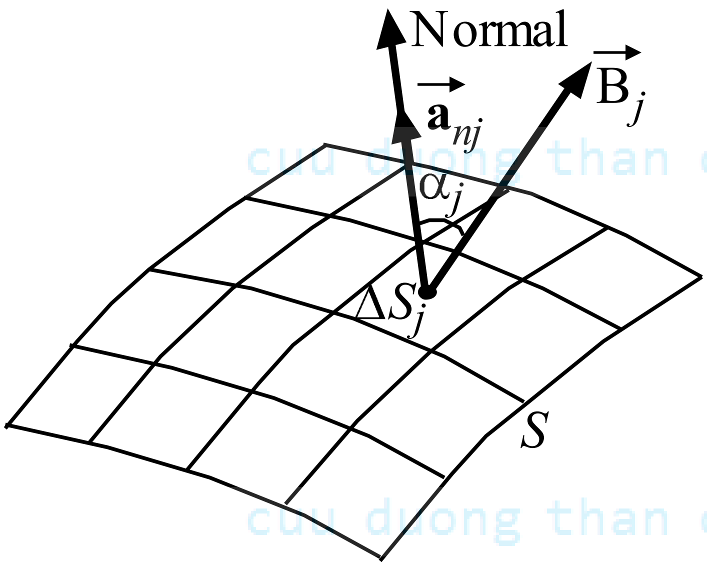
$$\vec{F}.d\vec{l} = 2dz \Rightarrow \int_{(1,2,0)}^{(1,2,3)} \vec{F}d\vec{l} = \int_0^3 2dz = 6$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \vec{F}d\vec{l} = 0 + 0 + 6 = 6$$

ii. Tích phân mặt:

❖ **Dùng để tính thông lượng của một trường vector gửi qua mặt .**

$$\psi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \;=\text{Tích phân mặt của } \vec{\mathbf{B}} \text{ trên } S.$$

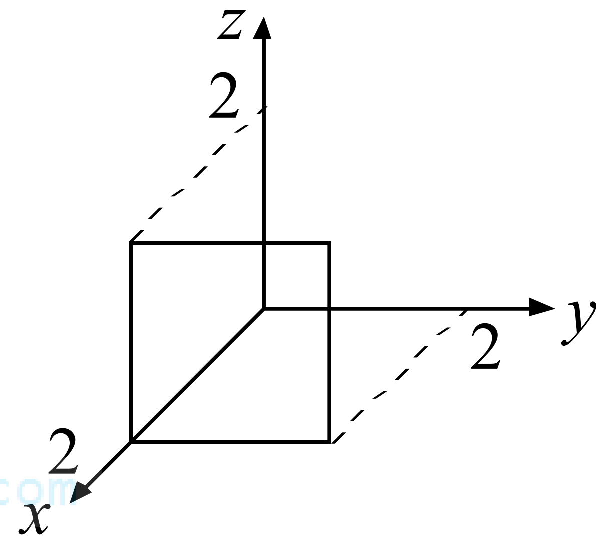


$$d\vec{S} = \pm dS\vec{a}_n$$

❖ Ví dụ 1.3.2 : Tính tích phân mặt

Cho: $\vec{A} = (x)\vec{a}_x + (x)\vec{a}_y$,

Tìm: $\int_S \vec{A}d\vec{S}$



$$x = 2 \;\Rightarrow\; \vec{A} = (2)\vec{a}_x + (2)\vec{a}_y$$

$$d\vec{S} = \pm dydz\vec{a}_x$$

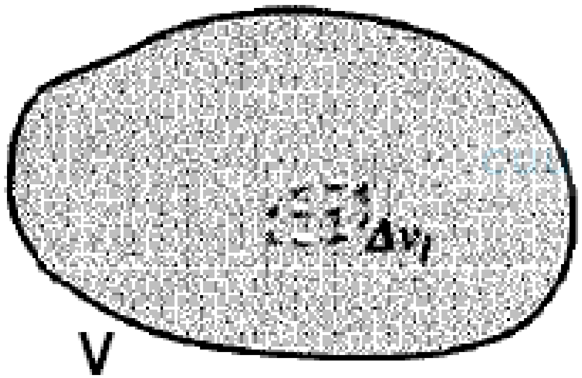
$$\Rightarrow \int_S \vec{A}d\vec{S} = \pm \int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{2} 2dydz = \pm 8$$

iii. Tích phân khối :

❖ **Định nghĩa bởi:**

$$\int_V f dV = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} f_i \Delta v_i$$

$$\int_V \vec{F} dV = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta V_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Delta v_i$$



❖ Ví dụ 1.3.3: Tính tích phân khối

Mật độ electron bên trong khối cầu bán kính 2 m cho bởi qui luật:

$$n_e = \frac{1000}{r}\cos\frac{\phi}{4} \quad (\text{electron/m}^3)$$

Tìm điện tích của toàn bộ khối cầu biết điện tích của electron là $-1{,}6.10^{-19}$ C.

❖ **Gọi N = số electron chứa trong khối cầu, ta có :**

$$N = \int_v n_e\,dv = \int_v \frac{1000}{r}\cos(\phi/4)\,dv$$

$$= \int_0^2 \frac{1000}{r} r^2\,dr \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \cos(\phi/4)\,d\phi$$

$$= 16{,}000 \text{ electrons}$$

❖ **Điện tích khối cầu: Q =N*e =** $\boxed{-2.56 \times 10^{-15} \text{ coulomb.}}$

1.4 Các toán tử cơ bản

a) Gradient của trường vơ hướng:

❖ **Toán tử grad:**

$$gradU \text{ or } \nabla U = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1}\vec{a}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\vec{a}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3}\vec{a}_3$$

❖ Ví dụ 1.4.1: Tính toán toán tử grad

Cho hàm vô hướng: $\phi(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$

Tìm grad(ϕ) , hay $\nabla\phi$, tại điểm P(1, -2, -1) ?

- **Theo công thức:**

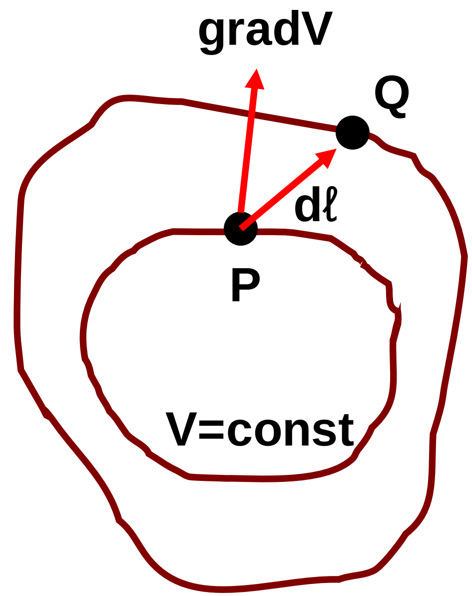
$$grad\phi = (\vec{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z})(3x^2y - y^3z^2)$$

$$= 6xy.\vec{a}_x + (3x^2 - 3y^2z^2)\vec{a}_y - 2y^3z.\vec{a}_z$$

- **Tại P(1,-2,-1):** $grad\phi = -12.\vec{a}_x - 9.\vec{a}_y - 16.\vec{a}_z$

❖ Các tính chất của toán tử grad:

i. Biên độ của gradV bằng tốc độ tăng cực đại của hàm V trong không gian ($dV/d\ell_{max}$).



ii. Hướng của gradV là hướng tăng cực đại của hàm V trong không gian.

iii. GradV tại điểm P sẽ vuông góc với mặt V = const tại P. Và vectơ đơn vị pháp tuyến của mặt V = const tại P xác định theo:

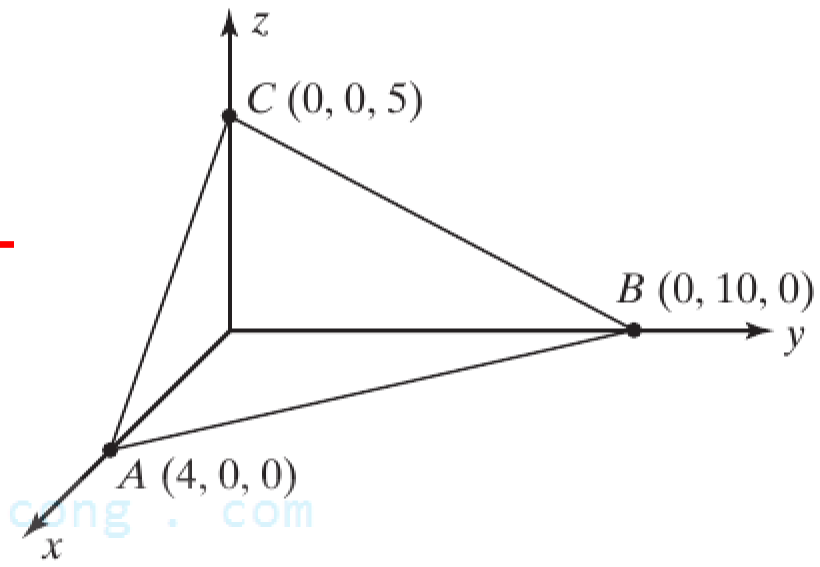
Vector đơn vị pháp tuyến tại P = ± ($gradV_P$) / |$gradV_P$|

iv. Độ tăng của hàm V theo hướng $\vec{a}_\ell$ là hình chiếu của gradV xuống hướng đó.

$$\frac{dV}{d\ell} = \mathrm{gradV}.\vec{a}_\ell$$

❖ Ví dụ 1.4.2: Ứng dụng toán tử grad

Tìm vectơ đơn vị vuông góc với mặt phẳng: 5x + 2y + 4z = 20



- **Theo công thức:**

$$\vec{a}_n = \pm \frac{\text{gradV}}{|\text{gradV}|}$$

- **Tính toán tử:**

$$\vec{a}_n = \pm \frac{5\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 4\vec{a}_z}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{5}} \left(5\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 4\vec{a}_z\right)$$

b) Divergence của trường vector :

❖**Định nghĩa: Là thông lượng của trường thoát khỏi một đơn vị thể tích.**

$$\mathrm{div}\,\vec{A} \quad \text{or} \quad \nabla \bullet \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{F} d\vec{s}}{\Delta V}$$

❖**Công thức tính:**

$$\mathrm{div}\,\vec{A} \quad \text{or} \quad \nabla \bullet \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \ldots\right]$$

❖ Ví dụ 1.4.3: Tính toán toán tử div

Cho vector: $\vec{A} = x^2 z.\vec{a}_x - 2y^3 z^2.\vec{a}_y + xy^2 z.\vec{a}_z$

Tìm div$\overrightarrow{A}$, hay $\nabla \cdot \vec{A}$ **, tại điểm P(1, -1, 1) ?**

- **Theo công thức:**

$$div\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 z)\right)$$

$$= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2$$

- **Tại P(1,-1,1):** $div\vec{A} = -3$

❖ Định lý Divergence :

$$\int_V div\,\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\,d\vec{S}$$

($d\vec{S}$ hướng ra bên ngoài mặt S)

- **Vế phải của định lý là thông lượng của trường $\vec{A}$ gửi qua mặt kín S.**

❖ Ví dụ 1.4.4: Kiểm chứng định lý div

Kiểm chứng tính đúng đắn của định lý Divergence bằng cách xét: $\vec{A} = (3x)\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$

Và S là mặt hộp giới hạn bởi : x = 0; x = 1; y = 0; y = 2; z = 0; z = 3

❖ **Trên mặt x = 0:**

$$\vec{A} = (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$$

$$d\vec{S} = -dydz\vec{a}_x$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{A}d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x=0} \vec{A}d\vec{S} = 0$$

❖Ví dụ 1.4.4: Kiểm chứng định lý div (tt)

Kiểm chứng tính đúng đắn của định lý Divergence bằng cách xét: $\vec{A} = (3x)\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$

Và S là mặt hộp giới hạn bởi : x = 0; x = 1; y = 0; y = 2; z = 0; z = 3

❖Trên mặt x = 1:

$$\vec{A} = 3\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$$

$$d\vec{S} = dydz\vec{a}_x \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}d\vec{S} = 3dydz$$

$$\Rightarrow \int_{x=1} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^2 \int_0^3 3dydz = 18$$

❖Ví dụ 1.4.4: Kiểm chứng định lý div (tt)

Kiểm chứng tính đúng đắn của định lý Divergence bằng cách xét: $\vec{A} = (3x)\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$

Và S là mặt hộp giới hạn bởi : x = 0; x = 1; y = 0; y = 2; z = 0; z = 3

❖ **Trên mặt y = 0:**

$$\vec{A} = 3x\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$$

$$d\vec{S} = -dxdz\vec{a}_y \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{A}d\vec{S} = 3dxdz$$

$$\Longrightarrow \int_{y=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^3 3dxdz = 9$$

❖Ví dụ 1.4.4: Kiểm chứng định lý div (tt)

Kiểm chứng tính đúng đắn của định lý Divergence bằng cách xét: $\vec{A} = (3x)\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$

Và S là mặt hộp giới hạn bởi : x = 0; x = 1; y = 0; y = 2; z = 0; z = 3

❖ **Trên mặt y = 2:**

$$\vec{A} = 3x\vec{a}_x - \vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$$

$$d\vec{S} = dxdz\vec{a}_y \qquad \Rightarrow \quad \vec{A}d\vec{S} = -dxdz$$

$$\Rightarrow \int_{y=2} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1\int_0^3 -dxdz = -3$$

❖Ví dụ 1.4.4: Kiểm chứng định lý div (tt)

Kiểm chứng tính đúng đắn của định lý Divergence bằng cách xét: $\vec{A} = (3x)\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$

Và S là mặt hộp giới hạn bởi : x = 0; x = 1; y = 0; y = 2; z = 0; z = 3

❖ **Trên mặt z = 0:**

$$\vec{A} = 3x\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$$

$$d\vec{S} = -dxdy\vec{a}_z \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A}d\vec{S} = -2dxdy$$

$$\Rightarrow \int_{z=0} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^2 -2dxdy = -4$$

❖Ví dụ 1.4.4: Kiểm chứng định lý div (tt)

Kiểm chứng tính đúng đắn của định lý Divergence bằng cách xét: $\vec{A} = (3x)\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$

Và S là mặt hộp giới hạn bởi : x = 0; x = 1; y = 0; y = 2; z = 0; z = 3

❖ **Trên mặt z = 3:**

$$\vec{A} = 3x\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y - \vec{a}_z$$

$$d\vec{S} = dxdy\vec{a}_z \qquad \Rightarrow \quad \vec{A}d\vec{S} = -dxdy$$

$$\Rightarrow \int_{z=3} \vec{A}d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^2 -dxdy = -2$$

❖Ví dụ 1.4.4: Kiểm chứng định lý div (tt)

Kiểm chứng tính đúng đắn của định lý Divergence bằng cách xét: $\vec{A} = (3x)\vec{a}_x + (y-3)\vec{a}_y + (2-z)\vec{a}_z$

Và S là mặt hộp giới hạn bởi : x = 0; x = 1; y = 0; y = 2; z = 0; z = 3

❖ **Vậy:** $\oint_S \vec{A}d\vec{S} = 0 + 18 + 9 - 3 - 4 - 2 = 18$

❖ **Ta tính:** $\operatorname{div}\vec{A} = 3$

$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V (\operatorname{div}\vec{A})dv = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 3dxdydz = 18$$

→ **Định lý Divergence được kiểm chứng.**

❖ Tổng kết:

- Nếu div$\vec{E} > 0$: thông lượng của $\vec{E}$ hướng ra bên ngoài S.

- Nếu div$\vec{E} < 0$: thông lượng của $\vec{E}$ hướng vào bên trong S.

- Nếu div$\vec{E} = 0$: thông lượng của $\vec{E}$ vào và ra mặt kín S là như nhau.

c) Curl (rot) của trường vector :

❖**Định nghĩa: Là lưu số cực đại của trường trên một đơn vị diện tích.**

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} \quad \text{or} \quad \nabla \times \vec{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{F} d\vec{\ell}}{\Delta S} \right)_{\max} \vec{a}_n$$

(Chiều $\vec{a}_n$ và chiều C theo qui tắc bàn tay phải)

❖**Công thức tính:**

$$curl\,\vec{A} \quad \text{or} \quad rot\,\vec{A} \quad \text{or}\ \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{a}_1 & h_2 \vec{a}_2 & h_3 \vec{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

❖ Ví dụ 1.4.5: Tính toán toán tử rot

Cho vector: $\vec{A} = xz^3.\vec{a}_x - 2x^2yz.\vec{a}_y + 2yz^4.\vec{a}_z$

Tìm rot$\overrightarrow{A}$, hay $\nabla \times \vec{A}$, tại điểm P(1, -1, 1) ?

- **Theo công thức:**

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\vec{a}_x + (3xz^2)\vec{a}_y + (-4xyz)\vec{a}_z$$

- **Tại P(1,-1,1):** $\boxed{\nabla \times \vec{A} = 3\vec{a}_y + 4\vec{a}_z}$

❖ Định lý Stokes :

$$\int_S rot\,\vec{A}\,d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\,d\vec{l}$$

- Vế phải của định lý là lưu số của trường vector trên đường C.

- Định lý chuyển từ tích phân mặt sang tích phân đường.

- Chiều của đường kín C hợp với chiều của vector pháp tuyến $d\vec{S}$ theo qui tắc bàn tay phải.

❖ Kết luận:

- Toán tử rot mô tả tính chất xoáy của trường vector.

- Nếu $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$ ta nói trường $\vec{E}$ là trường không xoáy, hay còn gọi là trường thế.

d) Toán tử Laplace:

❖ **Toán tử Laplace của trường vô hướng:**

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = div(grad\,\varphi)$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right) + \ldots\right]$$

❖ **Toán tử Laplace của trường vector :**

$$\Delta\vec{A} = \nabla^2\vec{A} = grad(div\,\vec{A}) - rot(rot\,\vec{A})$$

e) Các định thức khác:

$$\nabla(fg) = \mathrm{grad}(f.g) = f.grad(g) + g.grad(f)$$

$$\nabla(f\vec{\mathrm{A}}) = \mathrm{div}(f.\vec{\mathrm{A}}) = f.\mathrm{div}(\vec{\mathrm{A}}) + \vec{\mathrm{A}}.\mathrm{grad}(f)$$

$$\nabla(\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}) = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}) = \vec{\mathrm{B}}.\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{A}}) - \vec{\mathrm{A}}.\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{B}})$$

$$\nabla\times(f\vec{\mathrm{A}}) = \mathrm{rot}(f\vec{\mathrm{A}}) = \mathrm{grad}(f)\times\vec{\mathrm{A}} + f.\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{A}})$$

$$\nabla(\nabla\times\vec{A}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$$

$$\nabla\times(\nabla f) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$$

1.5:

Khái niệm trường điện từ

a) Khái niệm trường :

<u>Trường</u> là mô tả toán học, sự phụ thuộc vào không gian và thời gian của một đại lượng vật lý nào đó.

Fields

Scalar Fields

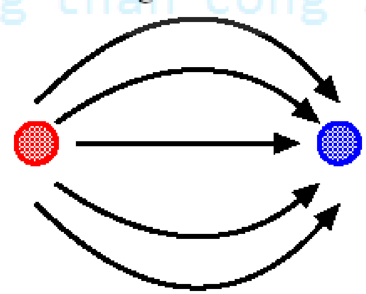
describe a scalar property
e.g.. temperature, pressure,
elevation

Vectorial fields

describe a
property with magnitude and direction
e.g. wind, gravity

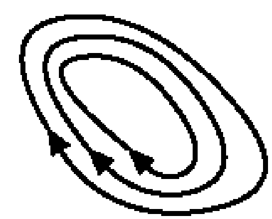
Conservative Fields
(Source Fields, Irrotaional Fields)

Field lines have a source
and a sink
e.g. electric fields



Rotational Fields

field lines circle around
e.g. hurricanes



b) Trường điện từ :

❖ **Trường điện từ:** 1 dạng vật chất, tồn tại trong không gian xung quanh các vật mang điện đứng yên hay chuyển động.

❖ **Trường điện & Trường từ**: 2 mặt được phân chia của Trường điện từ.

❖ Điện tích:
- Đứng yên -> trường điện.
- Chuyển động -> trường từ.

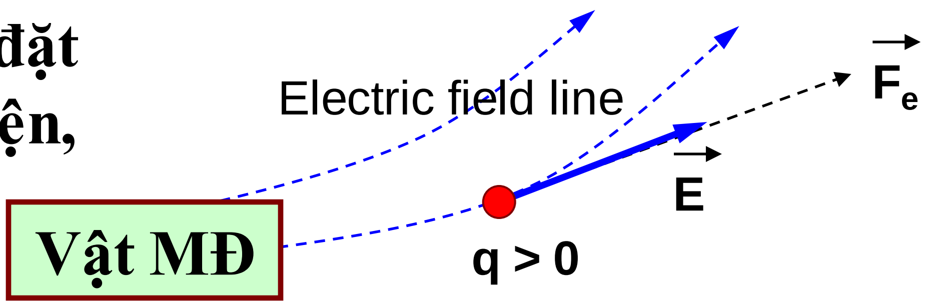
❖ Trường tĩnh : Trường không thay đổi theo thời gian.

❖ Trường biến thiên: Trường thay đổi theo thời gian.

c) Trường điện:

❖ **Vector cường độ trường điện $\vec{E}$:**

- Một điện tích điểm đặt bên cạnh vật mang điện, chịu tác dụng một lực .



➢ Ta nói bên cạnh vật mang điện tồn tại trường điện , xác định bởi :

- Vector cường độ trường điện = lực điện / đvị điện tích .

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}_e}{q} \quad [V/m]$$

❖ Vector cảm ứng điện $\vec{D}$:

- **Môi trường chân không:** $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad [C/m^2]$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \ [F/m]$$ **= hằng số điện.**

- **Môi trường điện môi:** $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [C/m^2]$

(Vectơ phân cực điện)

✓**Nếu điện môi đẳng hướng & tuyến tính:** $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 (1+\chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \Longrightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

ε = $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ = độ thẩm điện tuyệt đối của môi trường [F/m].
ε_r = độ thẩm điện tương đối ; χ_e = độ cảm điện. Cả 2 có thứ nguyên [0].

▪ Độ thẩm điện tương đối (hằng số điện môi) :

Approximate dielectric constant and dielectric strength of some materials

Dielectric material	Dielectric constant	Dielectric strength (kV/m)
Air	1.0	3,000
Bakelite	4.5	21,000
Ebonite	2.6	60,000
Epoxy	4	35,000
Glass (Pyrex)	4.5	90,000
Gutta-percha	4	14,000
Mica	6	60,000
Mineral oil	2.5	20,000
Paraffin	2.2	29,000
Polystyrene	2.6	30,000
Paranol	5	20,000
Porcelain	5	11,000
Quartz (fused)	5	30,000
Rubber	2.5–3	25,000
Transformer oil	2–3	12,000

❖ Điện tích:

- **Là nguồn tạo ra trường điện. Có 2 mô hình cơ bản:**

i. Điện tích tập trung: được dùng khi kích thước của vật mang điện không đáng kể so với không gian khảo sát. Ký hiệu q (C).

ii. Điện tích phân bố: được dùng khi kích thước của vật mang điện là đáng kể so với không gian khảo sát, đặc trưng bởi thông số là mật độ điện tích phân bố.

❖Mật độ điện tích phân bố:

i. Mật độ điện tích dài: $\rho_\ell = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell} = \frac{dq}{d\ell}$ [C/m]

ii. Mật độ điện tích mặt : $\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ [C/m^2]

iii. Mật độ điện tích khối : $\rho_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ [C/m^3]

- **Điện tích tổng:** $Q = \int_L \rho_\ell d\ell \ \text{ or } \int_S \rho_S dS \text{ or } \int_V \rho_V dV \ \ [\text{C}]$

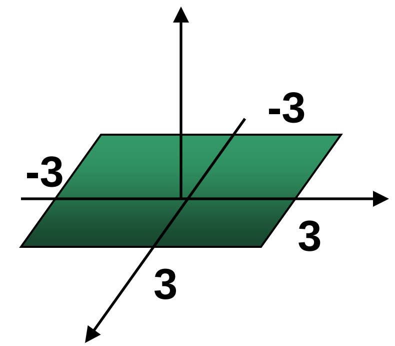
- **Nếu phân bố đều, mật độ điện tích không phụ thuộc tọa độ. Khi đó điện tích tổng xác định :**

$$Q = \rho_\ell L \ \text{ or } \ \rho_S S \text{ or } \ \rho_V V \ \ [\text{C}]$$

❖ VD 1.5.1: Tính điện tích của mặt

Mặt vuông nằm trong mặt phẳng x-y giới hạn (-3 < x < 3) và (-3 < y < 3) mang điện với mật độ $\rho_s = 2y^2$ ($\mu C/m^2$) . Tìm Q của mặt ?

Giải



❖**Ta có:** $Q = \int_S \rho_S . dS_z$

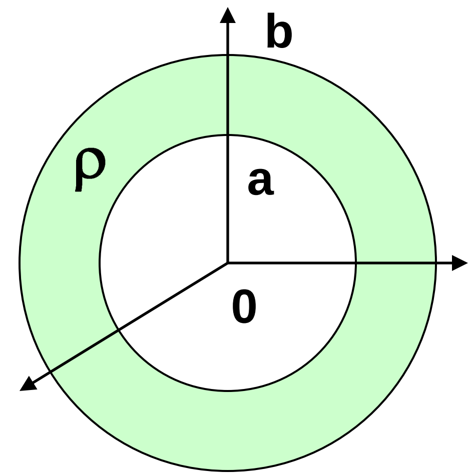
$$\Rightarrow Q = \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3}(2y^2)(dxdy) = \int_{-3}^{3}dx\int_{-3}^{3}(2y^2)dy$$

$$\Rightarrow Q = 6.\frac{2}{3}[3^3-(-3)^3] = 216\ \mu C$$

❖ VD 1.5.2: Tính điện tích vỏ cầu

Vỏ cầu, tâm tại gốc tọa độ, bkính trong a = 2 cm , bkính ngoài b = 3 cm, mang điện với mật độ khối $\rho_V = 6r.10^{-4}\ C/m^3$. Tìm Q của vỏ cầu ?

Giải



❖**Ta có:** $Q = \int_V \rho_V .dV$

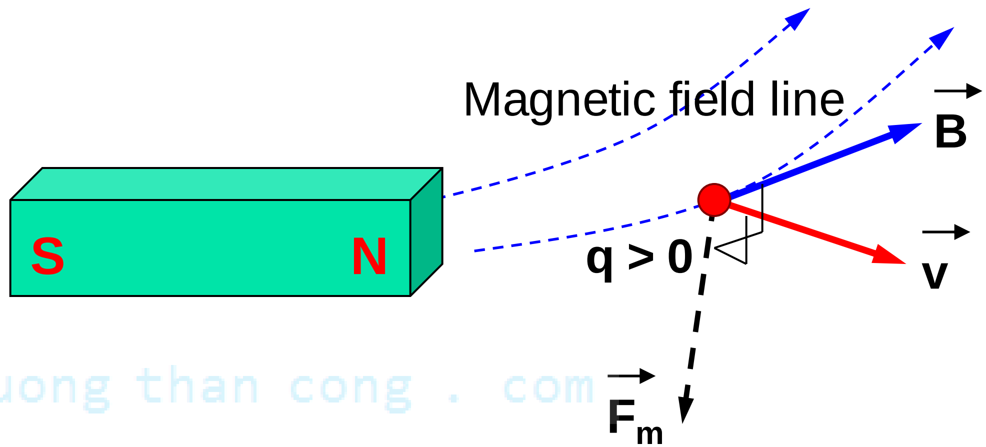
$$\Rightarrow Q = \int_a^b \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (6r)(r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi).10^{-4}$$

$$= \frac{6}{4}(r^4)\Big|_a^b (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} (\phi)\Big|_0^{2\pi} .10^{-4} \Rightarrow \boxed{Q = 1,225\ nC}$$

d) Trường từ:

❖ **Vector cảm ứng từ $\vec{B}$:**

- **Điện tích điểm nếu chuyển động bên cạnh một nam châm: chịu tác dụng của một lực.**



➢ **Ta nói bên ngoài nam chaâm tồn tại một trường từ , đặc trưng bởi:**

- **Vector cảm ứng từ :**

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_{m(\max)} \times \vec{a}_m}{q.v} [Wb/m^2] \; or \; [T]$$

Với: $\begin{cases} \vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{a}_m = \text{vectơ đơn vị của } \vec{v} \text{ khi } \vec{F}_m \to (\max) \end{cases}$

❖ Vector cường độ trường từ $\vec{H}$:

- **Môi trường chân không:** $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \quad [A/m]$

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \; [H/m]$ **= hằng số từ.**

- **Môi trường từ môi:** $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \quad [A/m]$

(Vectơ phân cực từ)

✓ **Nếu từ môi đẳng hướng và tuyến tính:** $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$$

$\mu = \mu_0\mu_r$ = độ thẩm từ tuyệt đối của môi trường [H/m].

μ_r = độ thẩm từ tương đối [0].

χ_m = độ cảm từ [0].

Độ thẩm từ tương đối của một số vật liệu:

Type	Material	μ_r
Diamagnetism	Silver	0,999921
	Lead	0,999984
	Copper	0,99999
Paramagnetism	Vacuum	1
	Air	1,00000035
	Aluminum	1,000024
	Tungsten	1,000067
	Platinum	1,000256
Ferromagnetism	Iron	$\gg 1000$

Table 7.1: Relative Permeabilities of Some Materials

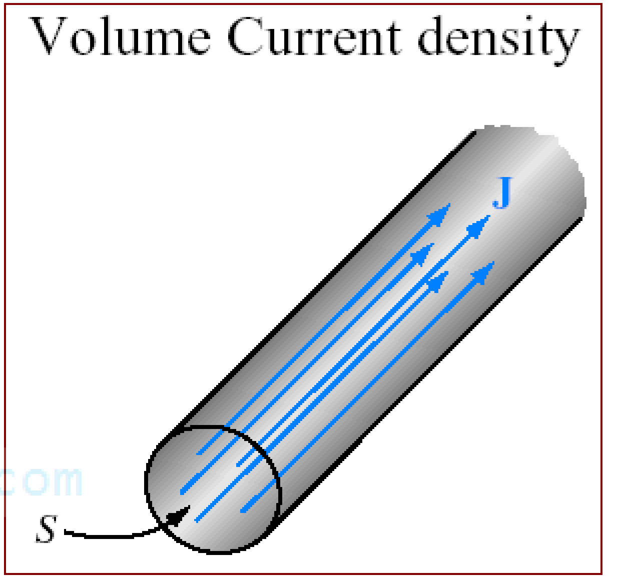
❖ Dòng điện:

- **Định nghĩa :** $$I = \frac{dq}{dt} \quad (A)$$

- **Là nguồn tạo ra trường từ. Có 2 mô hình cơ bản:**

i. Vector mật độ dòng khối :

- **Đặc điểm của vectơ mật độ dòng khối:**



+ chiều trùng chiều dòng.

+ độ lớn: J = dI/dS

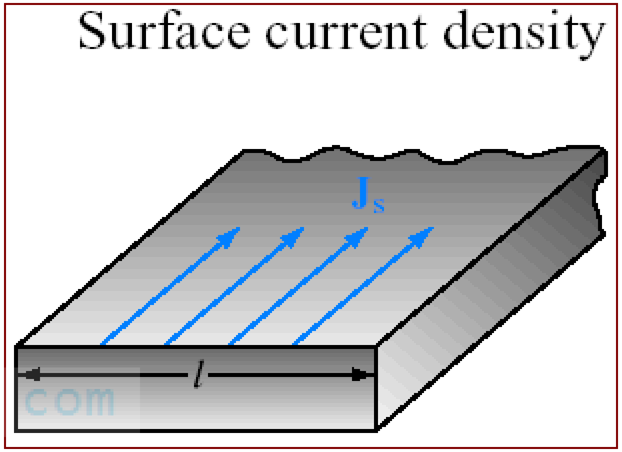
- **Dòng điện chạy qua diện tích S :** $I = \int_S \vec{J}.d\vec{S}$

❖ **Định luật Ohm:** $\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$

σ : **Độ dẫn điện** $[S/m][1/\Omega m]$

ii. Vector mật độ dòng mặt :

- Đặc điểm của vectơ mật độ dòng mặt :



+ chiều trùng chiều dòng.
+ độ lớn: $J_s = dI/d\ell$

- Dòng điện chạy qua đường L : $I = \int_L J_s dl$

1.6

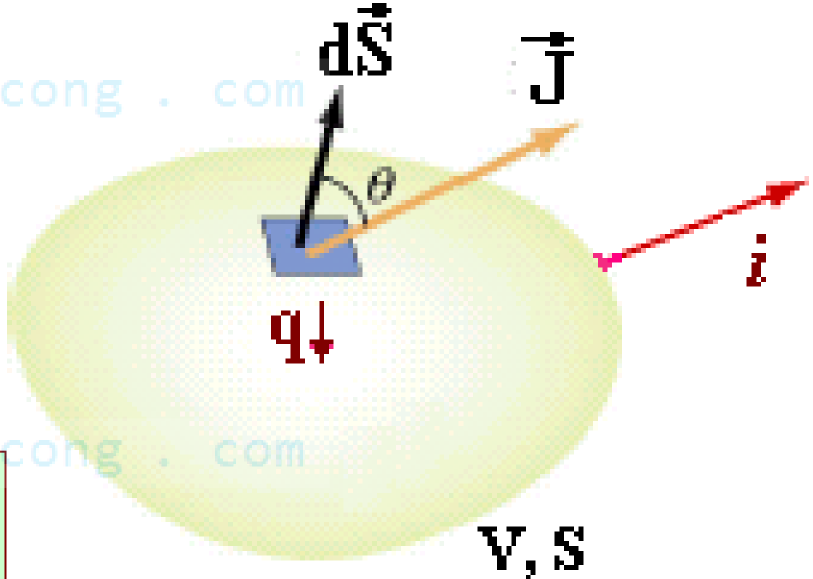
Các định luật cơ bản của trường điện từ

1.6.1 Luật bảo toàn điện tích :

a) Phát biểu và dạng tích phân:

Dòng điện thoát ra bên ngoài mặt kín S bằng tốc độ giảm của điện tích chứa bên trong mặt S.

$$i(t) = \frac{-dq}{dt}$$



$$\Rightarrow \quad i = \oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

b) Phương trình liên tục:

$$-dq/dt = i = \oint_S \vec{J}\, d\vec{S} \quad \begin{cases} -dq/dt = -\int_V \dfrac{\partial \rho_V}{\partial t} dV \\ \oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{J}\, dV \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{J}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV, \quad \forall V$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{J} = -\partial \rho_V / \partial t}$$

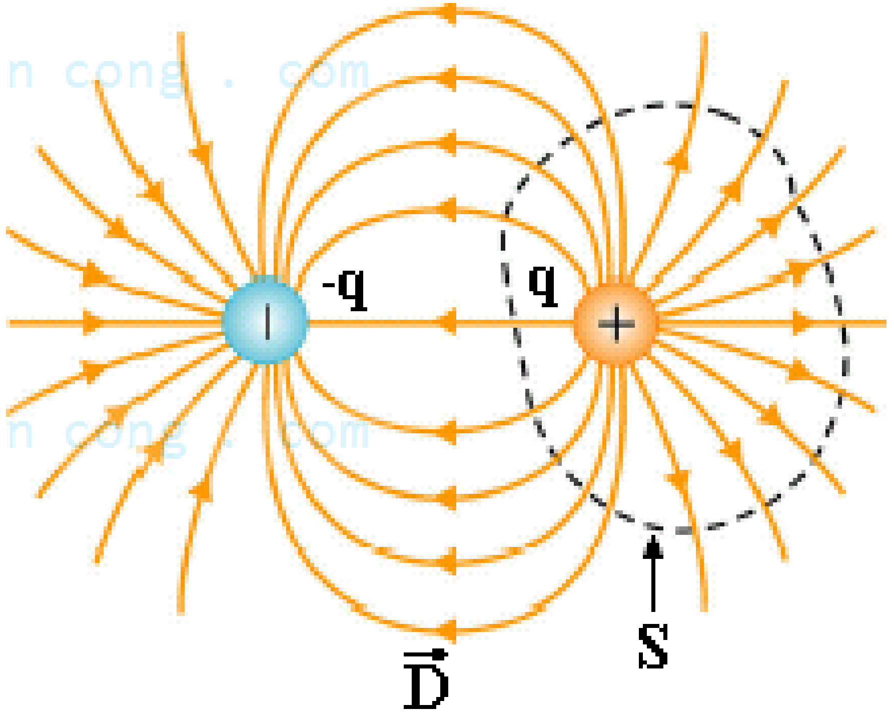
(Phương trình liên tục = Dạng vi phân của luật bảo toàn điện tích)

1.6.2 Luật Gauss về điện:

a) Phát biểu và dạng tích phân:

Thông lượng của vector cảm ứng điện thoát ra bên ngoài mặt kín S bằng tổng điện tích chứa trong miền V giới hạn bởi mặt S đó.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q = \int_V \rho_V dV$$

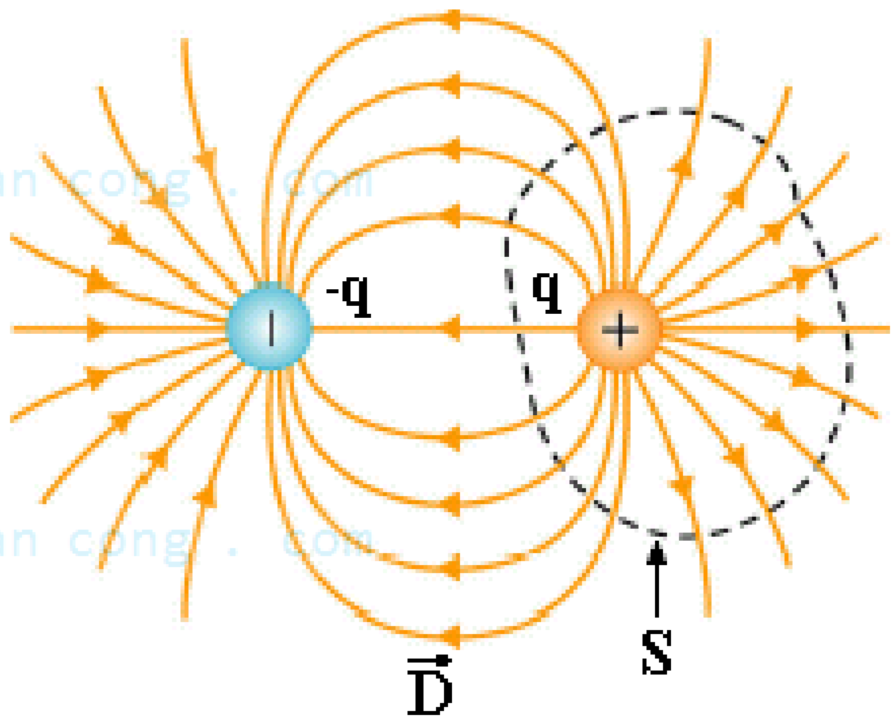


b) Dạng vi phân:

Từ: $$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q = \int_V \rho_V dV$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}\vec{D} = \nabla \bullet \vec{D} = \rho_V}$$

Dạng vi phân của luật Gauss về điện.



❖ Ví dụ 1.6.1: Áp dụng luật Gauss

Tìm thông lượng của vector cảm ứng điện thoát ra bên ngoài mặt S giới hạn bởi: x =   1, y =   1 và z =   1, biết mật độ điện tích khối bên trong : $\rho_V \;\; x, y, z \;\; = \rho_0 \;\; 3 - x^2 - y^2 - z^2$

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}} \bullet d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \rho_V \, dv$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} \int_{z=-1}^{1} \rho_0 \;\; 3 - x^2 - y^2 - z^2 \;\; dx\,dy\,dz$$

$$= 8\rho_0 \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} \;\; 3 - x^2 - y^2 - z^2 \;\; dx\,dy\,dz$$

$$= 8\rho_0 \left(3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

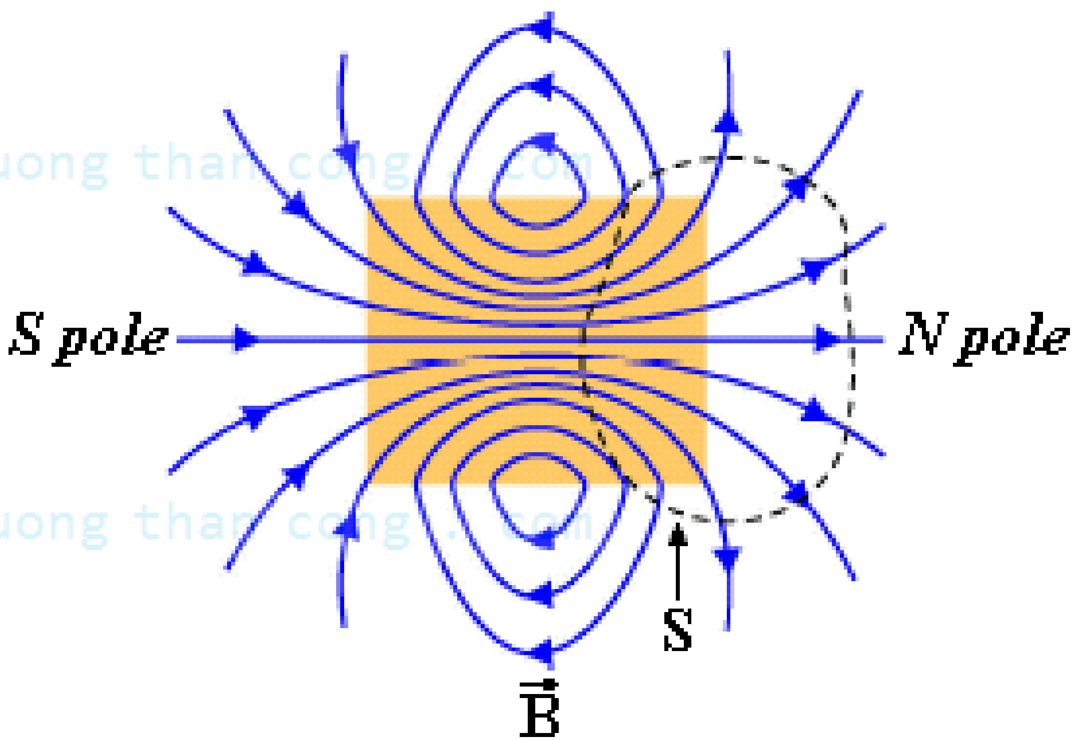
$$= 16\rho_0$$

1.6.3 Định luật Gauss về từ:

a) Phát biểu và dạng tích phân:

Thông lượng của vector cảm từ điện thoát ra bên ngoài mặt kín S luôn bằng 0.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

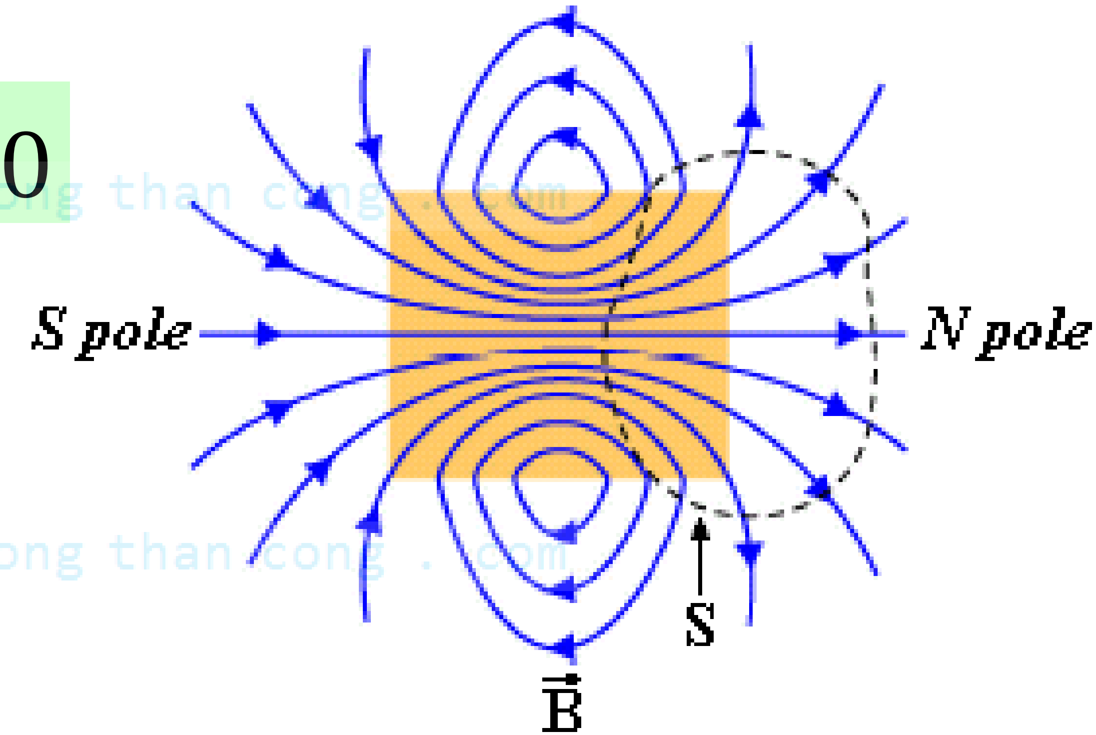


b) Dạng vi phân :

Từ: $$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{B} = \nabla \bullet \vec{D} = 0}$$

Dạng vi phân của luật Gauss về từ.



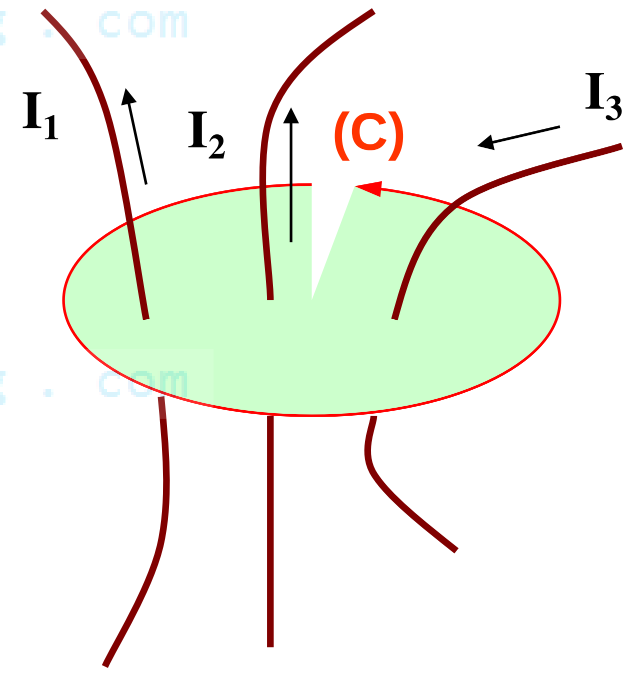
1.6.4 Định luật Ampere :

a) Phát biểu và dạng tích phân :

❖ Lưu số của vector cường độ trường từ $\vec{H}$ dọc theo đường kín (C) bất kỳ bằng tổng dòng chạy qua mặt S giới hạn bởi đường kín (C) đó.

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = I_{enc}}$$ *(Dạng tích phân)*

$$I_{enc} = \sum \pm I_k = I_1 + I_2 - I_3$$



b) Dạng vi phân :

Từ: $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{enc}$

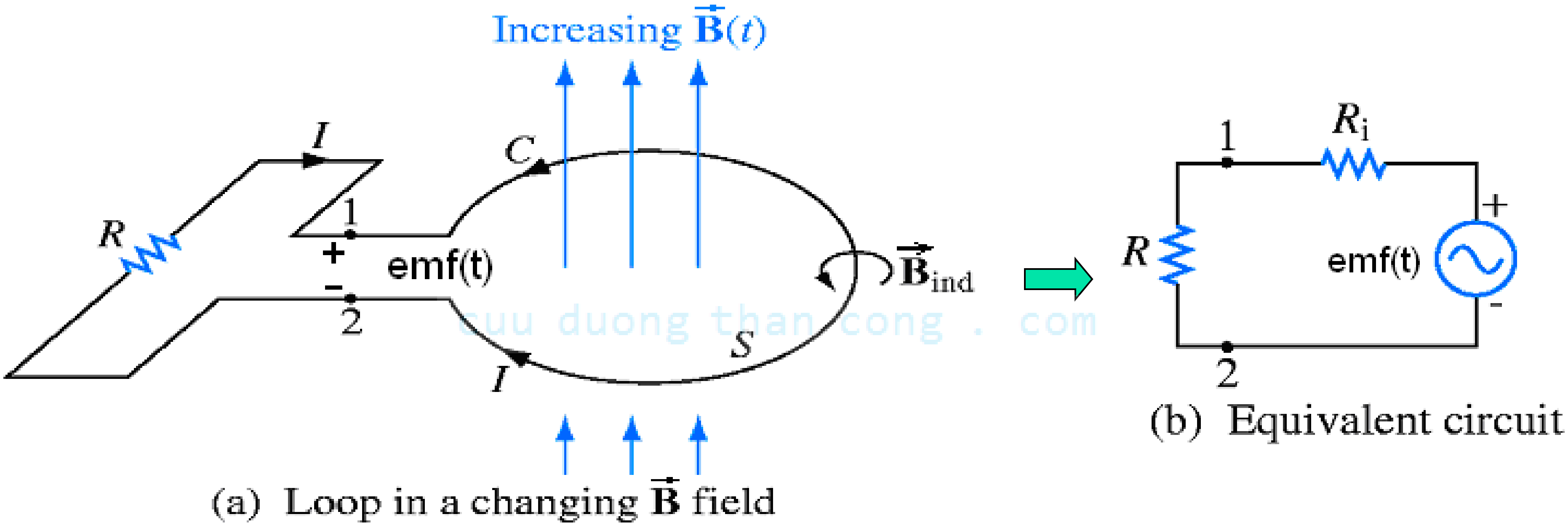
- **Do :** $I_{enc} = \int_S \vec{J}.d\vec{S}$ ⇒ $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I_{enc} = \int_S \vec{J} d\vec{S}$

Theo định lý Stokes: $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S rot\,\vec{H}\, d\vec{S}$

⇒ $\boxed{rot\,\vec{H} = \vec{J}}$ ***(Dạng vi phân)***

1.6.5 Định luật Faraday:

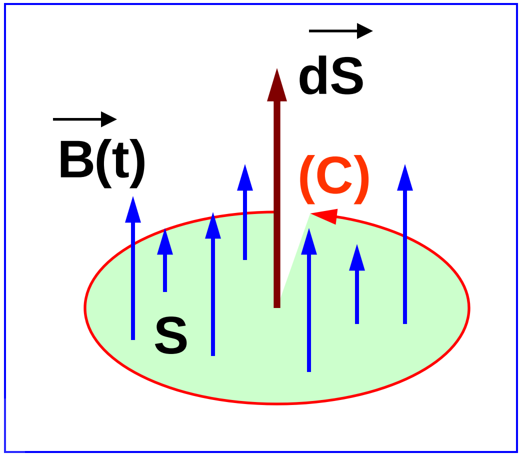
a) Phát biểu và dạng tích phân:



$$\text{emf} = \oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S}$$

b) Dạng vi phân :

Từ: $$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

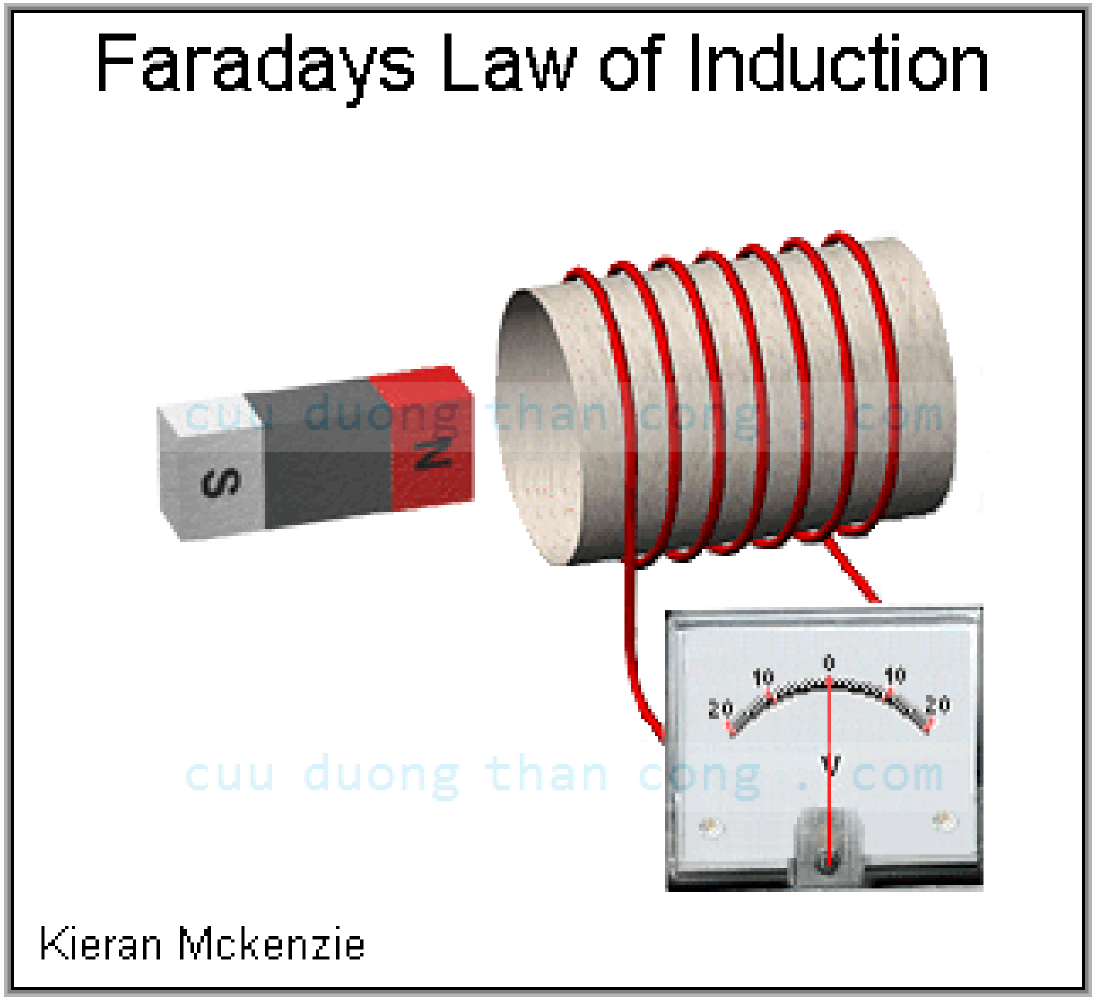


... $$\int_S rot\,\vec{E}\, d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \forall S$$

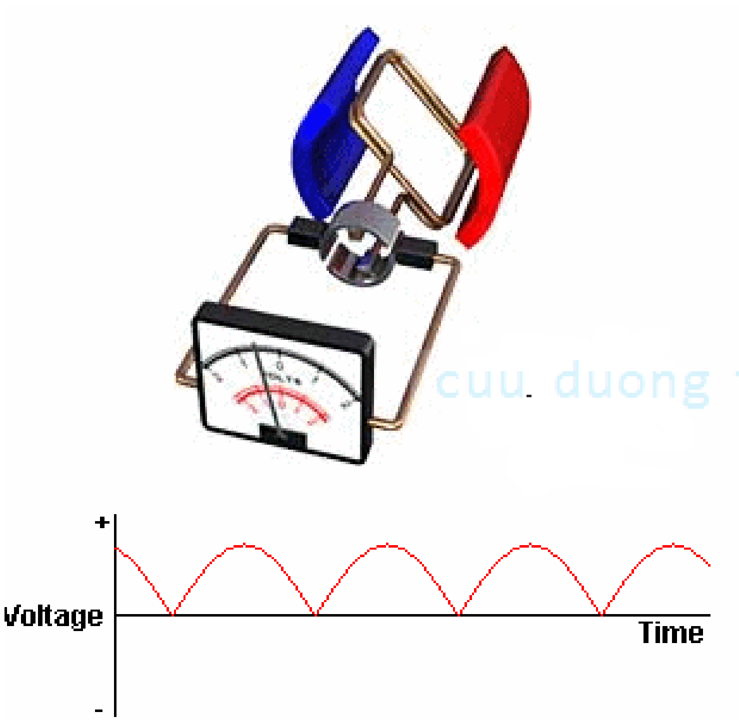
$$\Rightarrow \quad \text{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dạng vi phân

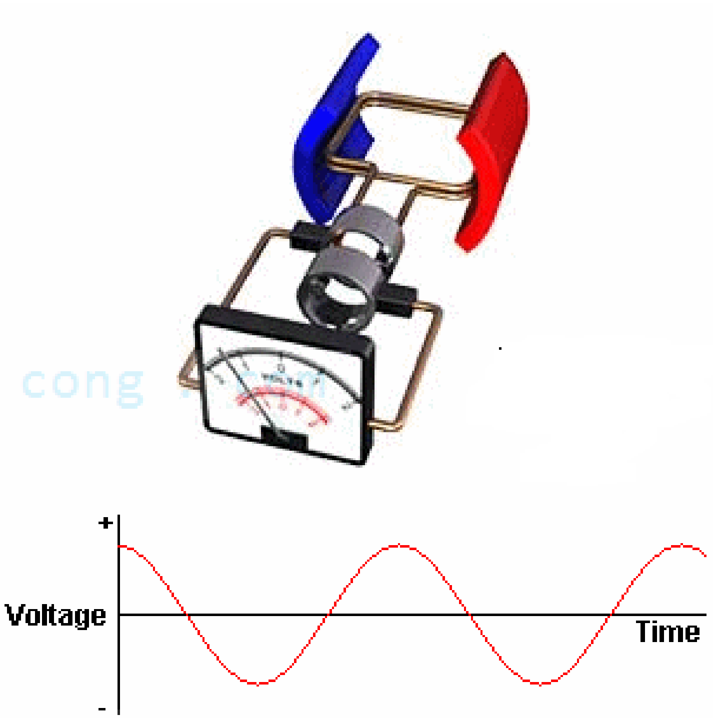
❖ Thí nghiệm Faraday:



❖ Ứng dụng của luật Faraday:



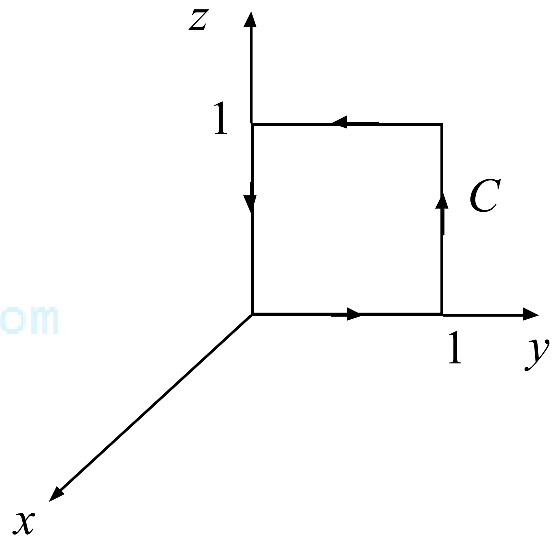
Máy phát DC



Máy phát AC

❖Ví dụ 1.6.2: D2.5 in Rao's book

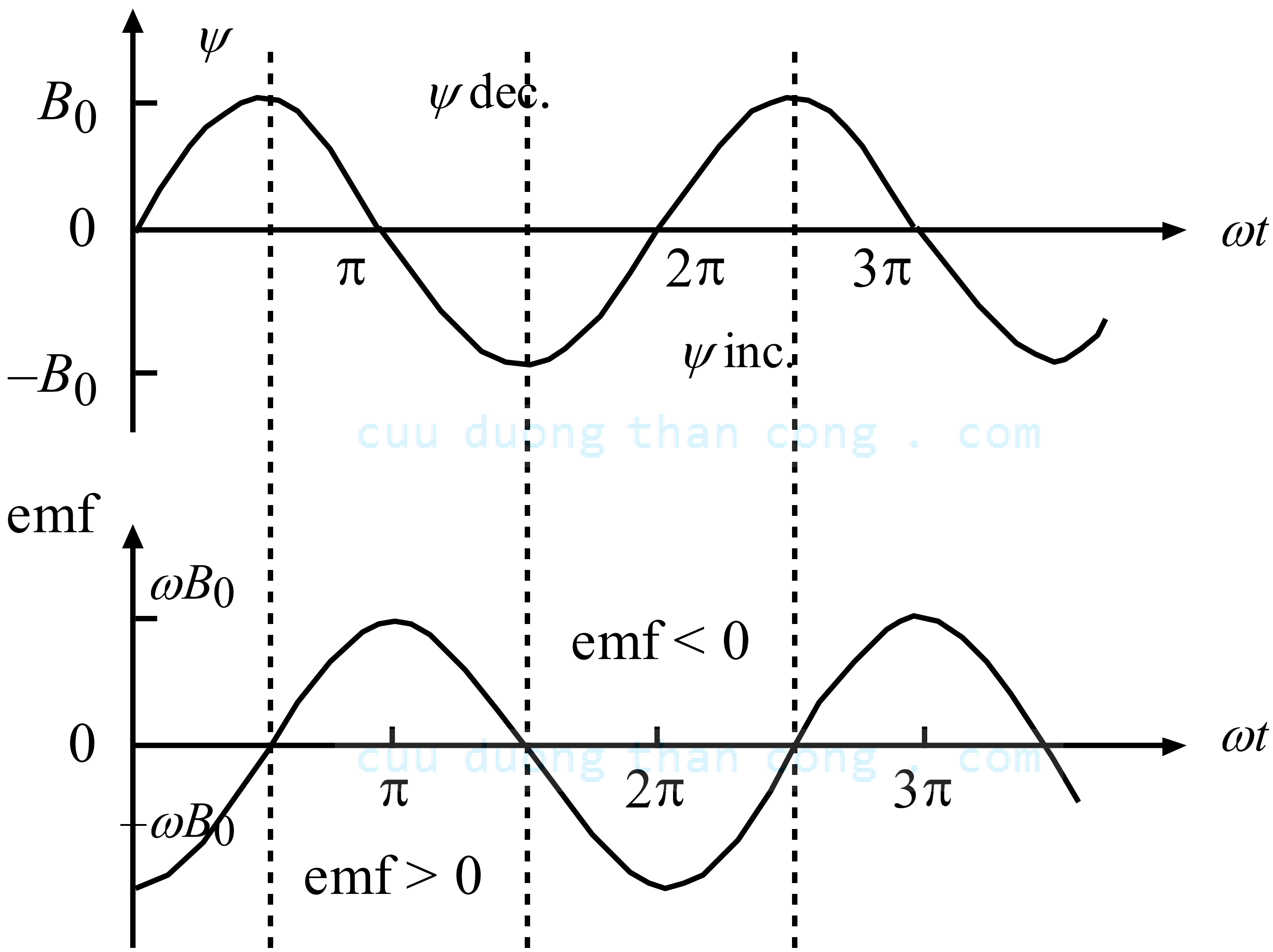
Cho: $\vec{B} = B_0(\sin\omega t.\vec{a}_x - \cos\omega t.\vec{a}_y)$ **, xác định emf ?**



Ta có: $\int_S \vec{B}d\vec{S} = B_0 \sin\omega t$

$$\Rightarrow \quad emf = \oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(B_0 \sin\omega t) = -\omega B_0 \cos\omega t$$

❖ Kiểm chứng luật Lenz:



❖Ví dụ 1.6.3: Áp dụng luật Faraday

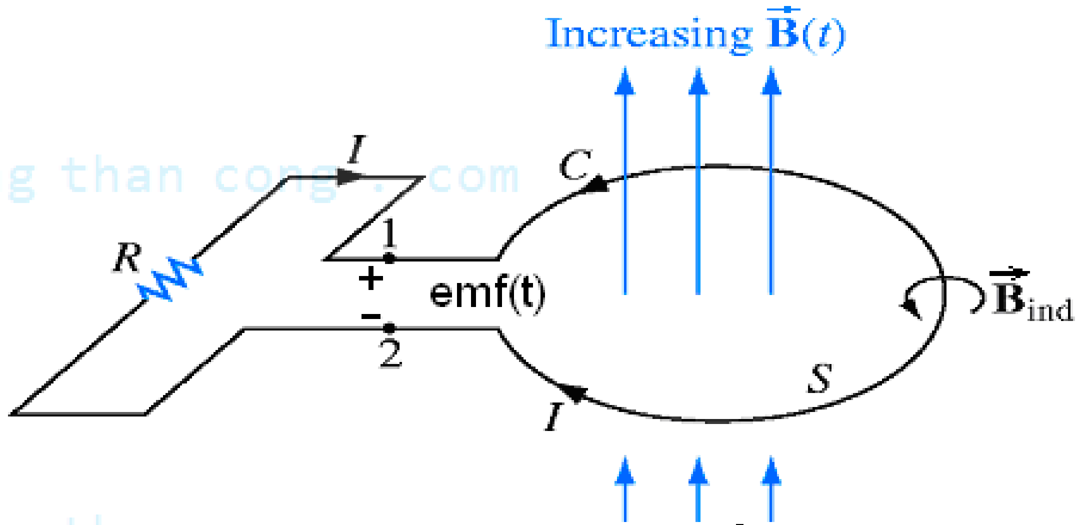
Cuộn dây N vòng tròn bán kính a, nằm trong mặt phẳng xOy, tâm tại O, nối với điện trở R, đặt trong trường từ $\vec{B} = B_o(2\vec{a}_y + 6\vec{a}_z)\sin\omega t$, ω là tần số góc, như hình vẽ bên dưới. Tìm:

a) Từ thông móc vòng qua một vòng dây ?

b) Sức điện động cảm ứng emf biết N = 10 , B_0 = 0.2T, a =10cm, ω = 10^3 rad/s ?

c) Cực tính của emf tại t = 0 ?

d) Dòng điện I trong mạch biết R = 1 kΩ ?



(a) Loop in a changing $\vec{B}$ field

❖ Ví dụ 1.6.3: Giải

a) Từ thông móc vòng qua một vòng dây :

$$\Phi_m = \int_S \vec{\mathbf{B}}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = \int_S \left[\mathrm{B}_0 \left(2\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} + 6\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} \right) \sin \omega t \right] .\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} dS = 6\pi a^2 \mathrm{B}_0 \sin \omega t$$

b) $\text{emf} = -N\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\left(6\pi \mathrm{Na}^2\mathrm{B}_0 \sin\omega t\right) = -6\pi \mathrm{N}\omega \mathrm{a}^2\mathrm{B}_0 \cos\omega t$

Khi N=10, a = 0.1 m, $\omega = 10^3$ rad/s and B_0 = 0.2 T: emf = $-377\cos 10^3 t$ V

c) Tại t = 0, emf = $-377\cos 10^3 t$ = - 377 volts : điểm 2 có thế cao hơn điểm 1.

d) Dòng I trong mạch là :

$$I = \frac{-\text{emf}}{R} = \frac{377}{10^3}\cos 10^3 t = 0.38 \cos 10^3 t \ \text{Amps}$$

1.7 Dòng điện dịch - Hệ phương trình Maxwell:

a) Dòng điện dịch:

❖ **Từ luật Ampere:** $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$

$$\Longrightarrow \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = \mathrm{div}\,\vec{J} = -\partial\rho_V/\partial t$$

Do $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = 0$ (vector analysis)

$$\Longrightarrow \frac{\partial\rho_V}{\partial t} = 0$$

➢ **Luật Ampere chỉ đúng với dòng điện DC !!!**

a) Dòng điện dịch : (tiếp theo)

❖ **Từ phương trình liên tục:**

$$\mathrm{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{J}_{\text{total}} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

- **Vector mật độ dòng dẫn :** $\vec{J} = \vec{J}_c \quad [\mathrm{A/m^2}]$

- **Vector mật độ dòng dịch:** $\vec{J}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad [\mathrm{A/m^2}]$

❖ Luật Ampere-Maxwell:

$$\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$ ***(Dạng tích phân)***

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ ***(Dạng vi phân)***

❖ Ví dụ 1.7.1: Dòng điện dịch

Môi trường chân không (σ = 0, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) tồn tại trường từ:

$$\vec{H} = H_0 \sin(\omega t - \beta z)\,\vec{a}_y \text{ (A/m)}$$

(Với β = const). Xác định: (a) Vector mật độ dòng dịch ? (b) Vector cường độ trường điện ?

Giải

a) Do σ = 0 nên:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_0 \sin(\omega t - \beta z) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \beta H_0 \cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$\boxed{\vec{J}_d = \beta H_0 \cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \text{ (A/m}^2\text{)}}$$

❖ Ví dụ 1.7.1: Dòng điện dịch

Môi trường chân không ($\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) tồn tại trường từ:

$$\vec{H} = H_0 \sin(\omega t - \beta z)\,\vec{a}_y \ \ (A/m)$$

(Với β = const). Xác định: (a) Vector mật độ dòng dịch ? (b) Vector cường độ trường điện ?

Giải

b) Từ câu (a) ta có: $\vec{D} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt = \frac{\beta H_0}{\omega} \sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \ (C/m^2)$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\beta H_0}{\omega \varepsilon_0} \sin(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \ (V/m)}$$

b) Hệ phương trình Maxwell:

Dạng tích phân		*Dạng vi phân*
$\oint_C \vec{H}\, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$	**(1)**	$\mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$	**(2)**	$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$	**(3)**	$\mathrm{div}\vec{D} = \rho_V$
$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	**(4)**	$\mathrm{div}\vec{B} = 0$

Luật bảo toàn điện tích:

$$\oint_S \vec{J}\, d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \qquad \textbf{(5)} \qquad div\, \vec{J} = -\partial \rho_V / \partial t$$

❖ Ví dụ 1.7.2: Hệ phương trình Maxwell

Môi trường chân không ($\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) tồn tại trường điện:

$$\vec{E}(z,t) = 5\cos(10^9 t - \beta z).\vec{a}_y \ \text{(V/m)}$$

Dùng hệ phương trình Maxwell xác định β và vector cường độ trường từ ?

Giải

❖ **Từ pt(2) của hệ pt Maxwell:** $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$-\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 5\cos(10^9 t - \beta z) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -5\beta \sin(10^9 t - \beta z)\vec{a}_x$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{-5\beta}{\mu_0 . 10^9} \cos(10^9 t - \beta z)\vec{a}_x$$

❖ Ví dụ 1.7.2: Hệ phương trình Maxwell

❖ **Từ pt(1) của hệ pt Maxwell:** $\mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \dfrac{-5\beta}{\mu_0.10^9}\cos(10^9 t - \beta z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5\beta^2}{\mu_0.10^9}\sin(10^9 t - \beta z)\vec{a}_y$$

Và: $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -5\varepsilon_0 10^9 \sin(10^9 t - \beta z)\vec{a}_y \quad \Rightarrow 5.\varepsilon_0.10^9 = \dfrac{5\beta^2}{\mu_0.10^9}$

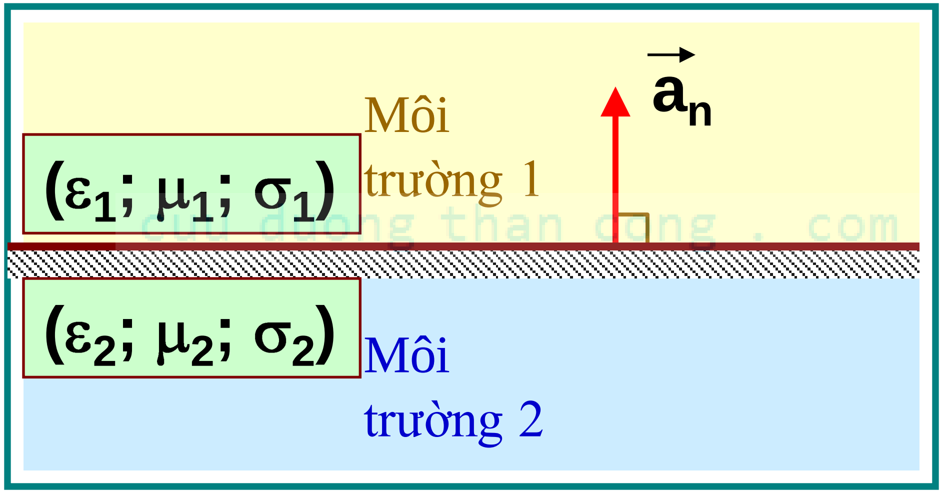
$$\Rightarrow \beta = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{-5}{120\pi}\cos(10^9 t - \beta z)\vec{a}_x \ \ (\mathrm{A/m})$$

1.8 Điều kiện biên của trường điện từ :

a) Khái niệm:

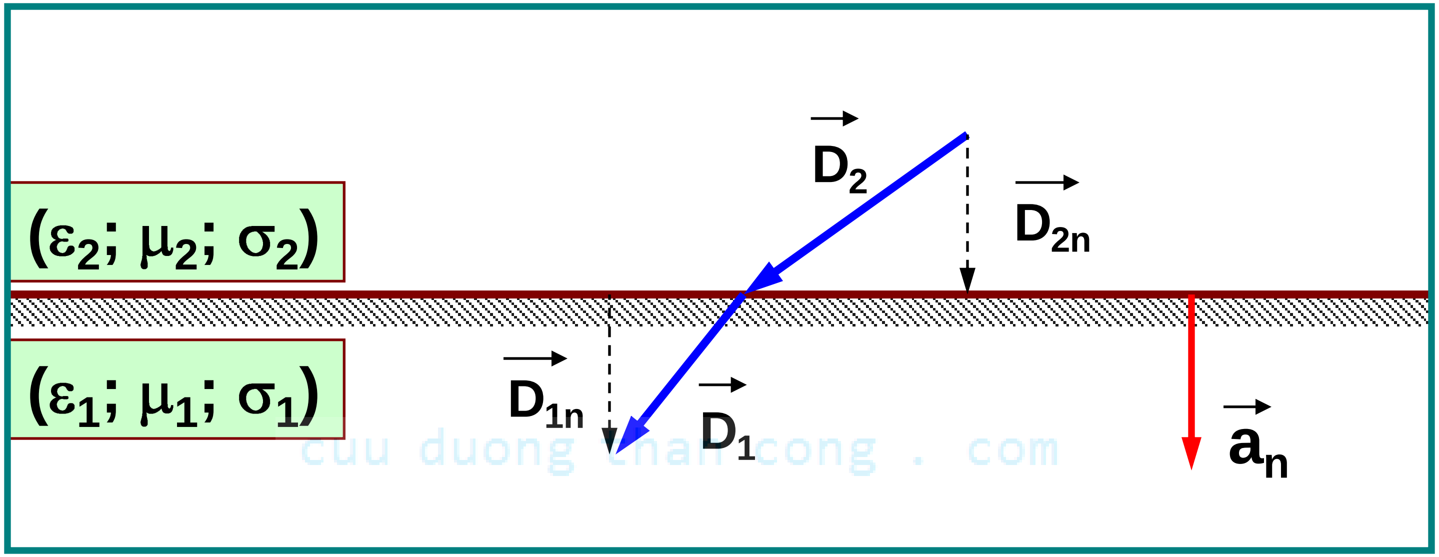
- ĐKB = là các phương trình toán, mô tả sự ràng buộc của các đại lượng đặc trưng của trường điện từ trên biên của hai môi trường .



- Lưu ý là trong các bài toán điều kiện biên, vector đơn vị pháp tuyến của biên luôn chọn theo qui tắc: hướng từ môi trường 2 sang môi trường 1.

$$\vec{a}_n : 2 \rightarrow 1$$

b) ĐKB cho thành phần pháp tuyến:



$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$
$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$
$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$\vec{a}_n(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$
$$\vec{a}_n(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$
$$\vec{a}_n(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

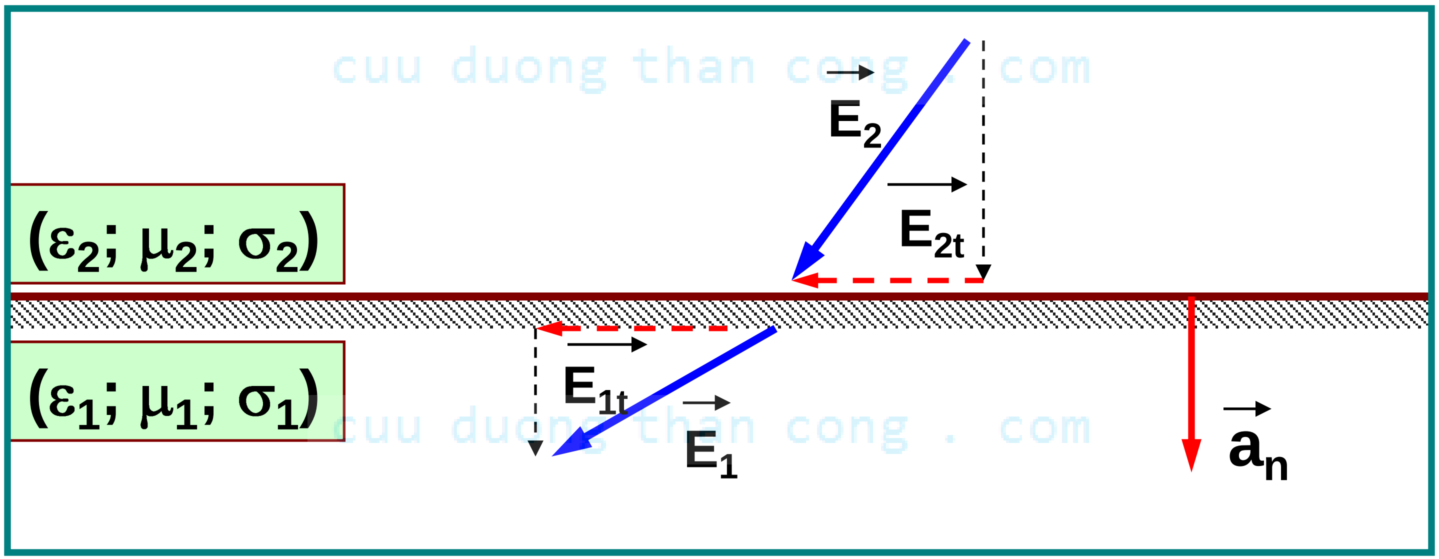
$$(\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n}) = \rho_s . \vec{a}_n$$
$$(\vec{B}_{1n} - \vec{B}_{2n}) = 0$$
$$(\vec{J}_{1n} - \vec{J}_{2n}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} . \vec{a}_n$$

c) ĐKB cho thành phần tiếp tuyến :

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S$$
$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

$$\vec{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$$
$$\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$(\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t}) = \vec{J}_S \times \vec{a}_n$$
$$(\vec{E}_{1t} - \vec{E}_{2t}) = 0$$



d) Các trường hợp đặc biệt:

❖ TH1: Cả 2 môi trường điện môi

❖**Nếu cả 2 môi trường là điện môi lý tưởng thì không tồn tại dòng mặt cũng như điện tích bề mặt trên biên 2 môi trường.**

$$\therefore J_s = 0, \rho_S = 0$$

Trường điện

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \Rightarrow \frac{\vec{D}_{1t}}{\vec{D}_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

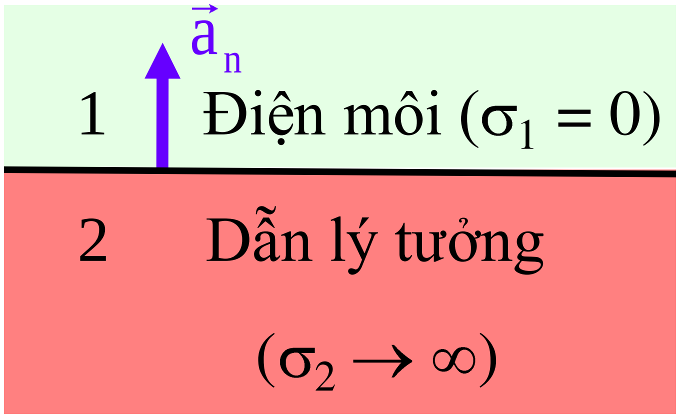
$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 \vec{E}_{1n} = \varepsilon_2 \vec{E}_{2n}$$

Trường từ

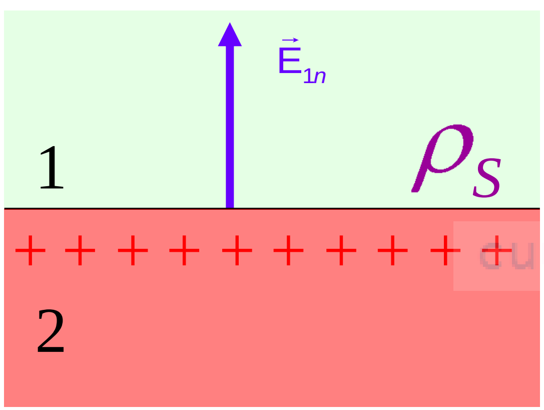
$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} \Rightarrow \frac{\vec{B}_{1t}}{\vec{B}_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

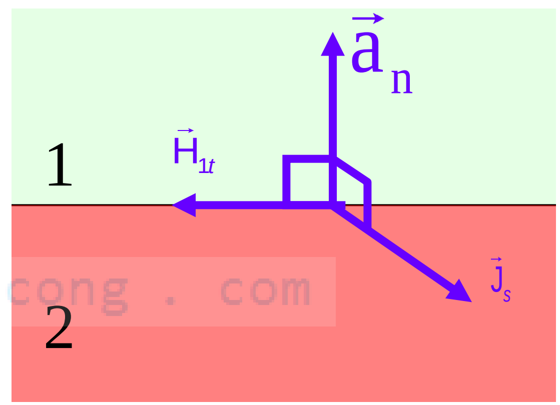
$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \Rightarrow \mu_1 \vec{H}_{1n} = \mu_2 \vec{H}_{2n}$$

❖TH 2: Một môi trường là dẫn lý tưởng



Môi trường 1	Môi trường 2
$E_{1t} = 0$	$E_{2t} = 0$
$\vec{a}_n \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$	$H_{2t} = 0$
$\vec{a}_n \cdot \vec{D}_1 = \rho_S$	$D_{2n} = 0$
$B_{1n} = 0$	$B_{2n} = 0$

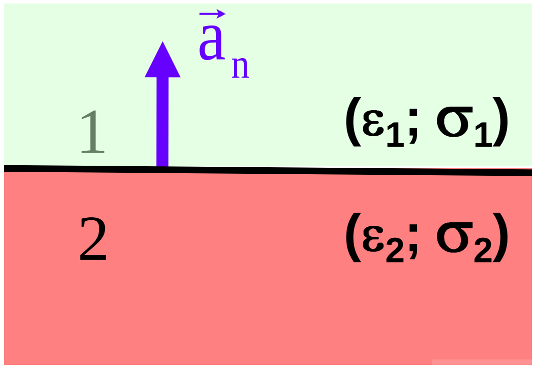


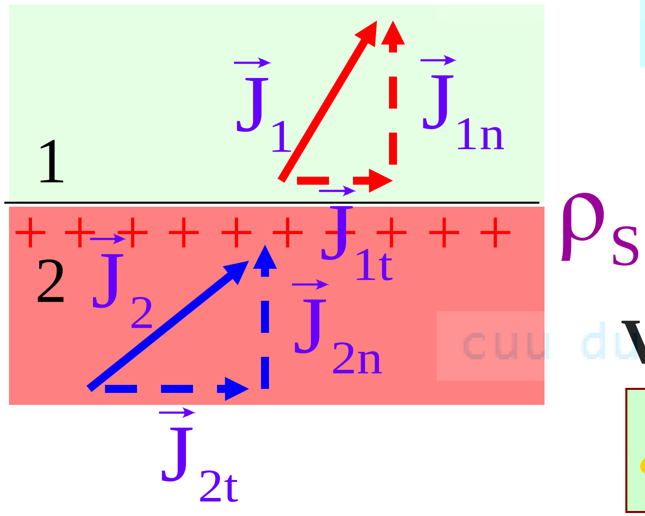


$$E_{1n} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_1}$$

$$H_{1t} = J_S$$

❖TH3: Cả 2 là môi trường dẫn





Điều kiện đối với trường tĩnh:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} \Rightarrow \frac{\vec{J}_{1t}}{\sigma_1} = \frac{\vec{J}_{2t}}{\sigma_2}$$

$$\vec{J}_{1n} = \vec{J}_{2n} \Rightarrow \sigma_1 \vec{E}_{1n} = \sigma_2 \vec{E}_{2n}$$

Và trên biên :

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_S}$$

e) Qui trình bài toán điều kiện biên:

Giả sử biết trường điện trên biên về phía môi trường 1 ($\vec{E}_1$), xác định trường điện trên biên về phía môi trường 2 ($\vec{E}_2$).

1. **Xác định vector đơn vị pháp tuyến $\vec{a}_n$.**
2. **Xác định các thành phần pháp tuyến & tiếp tuyến của $\vec{E}_1$.**

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1t} \Leftrightarrow \vec{E}_{1n} = (\vec{E}_1.\vec{a}_n).\vec{a}_n \quad \vec{E}_{1t} = \vec{E}_1 - \vec{E}_{1n}$$

3. **Áp dụng ĐKB tìm $\vec{E}_2$.**

- **Áp dụng ĐKB thành phần pháp tuyến xác định $\vec{E}_{2n}$.**
- **Áp dụng ĐKB thành phần tiếp tuyến xác định $\vec{E}_{2t}$.**

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2t}$$

❖ Ví dụ 1.8.1: Bài toán ĐKB

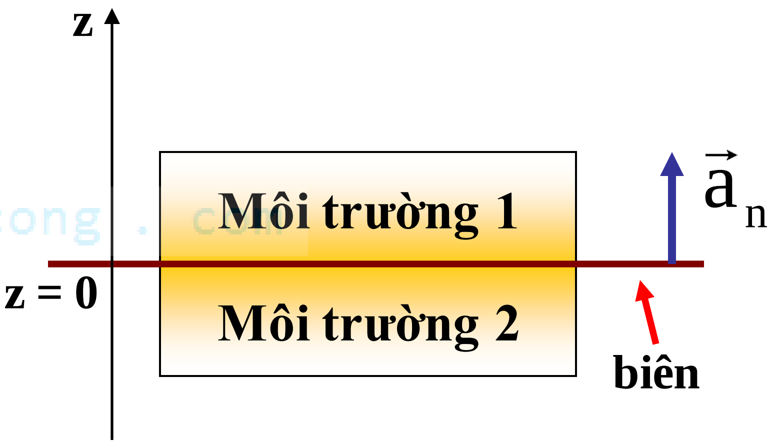
Mặt phẳng z = 0 là biên của hai môi trường: môi trường 2 chiếm miền z < 0 là chân không và môi trường 1 chiếm miền z > 0 là điện môi lý tưởng có ε_{1r} = 40. Biết trường điện trên biên về phía môi trường chân không là : $\vec{E}_2 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 50\vec{a}_z$ (V/m)

Tìm trường điện trên biên về phía môi trường điện môi ?

Giải

❖ **Xác định $\vec{a}_n$:**

Do vector đơn vị pháp tuyến của biên hướng từ môi trường 2 sang môi trường 1 nên ta có :



$$\vec{a}_n = \vec{a}_z$$

Mặt phẳng z = 0 là biên của hai môi trường: môi trường 2 chiếm miền z < 0 là chân không và môi trường 1 chiếm miền z > 0 là điện môi lý tưởng có ε_{1r} = 40. Biết trường điện trên biên về phía môi trường chân không là : $\vec{E}_2 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 50\vec{a}_z$ (V/m)

Tìm trường điện trên biên về phía môi trường điện môi ?

Giải

❖ **Các thành phần của $\vec{E}_2$:**

$$\vec{E}_{2n} = (\vec{E}_2.\vec{a}_n).\vec{a}_n = 50\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_{2t} = \vec{E}_2 - \vec{E}_{2n} = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y$$

❖ Ví dụ 1.8.1: Bài toán ĐKB (tt)

Mặt phẳng z = 0 là biên của hai môi trường: môi trường 2 chiếm miền z < 0 là chân không và môi trường 1 chiếm miền z > 0 là điện môi lý tưởng có $\varepsilon_{1r} = 40$. Biết trường điện trên biên về phía môi trường chân không là : $\vec{E}_2 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 50\vec{a}_z$ (V/m)

Tìm trường điện trên biên về phía môi trường điện môi ?

Giải

❖ Xác định các thành phần của $\vec{E}_1$ dùng phương trình ĐKB:

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y$$

$$\vec{E}_{1n} = \frac{\vec{D}_{1n}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{D}_{2n} + \rho_S\vec{a}_n}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2\vec{E}_{2n}}{\varepsilon_1} = \frac{1.50\vec{a}_z}{40} = 1.25\vec{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = 13\vec{a}_x + 40\vec{a}_y + 1.25\vec{a}_z \text{ (V/m)}$$

❖ Ví dụ 1.8.2: Bài toán ĐKB

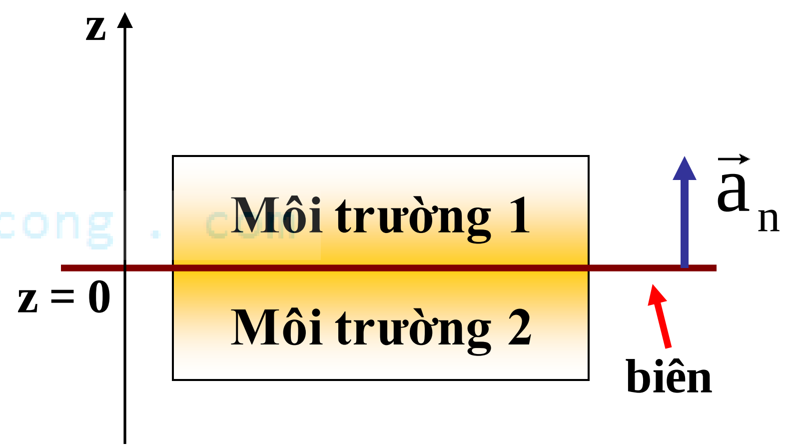
Mặt phẳng z = 0 là biên của hai môi trường: môi trường 2 chiếm miền z < 0 có $\mu_{2r} = 6$; môi trường 1 chiếm miền z > 0 có $\mu_{1r} = 4$. Biết mật độ dòng mặt trên biên là : $\vec{J}_S = (1/\mu_0)\vec{a}_y \ (\text{mA/m})$

và trường từ trên biên về phía môi trường 1 :

$$\vec{B}_1 = 5\vec{a}_x + 8\vec{a}_z \ (\text{mWb/m}^2)$$

Tìm trường từ trên biên về phía môi trường 2 ?

Giải



❖ Xác định $\vec{a}_n$:

$$\vec{a}_n = \vec{a}_z$$

❖ Ví dụ 1.8.2: Bài toán ĐKB (tt)

❖ **Các thành phần của $\vec{B}_1$:**

$$\vec{B}_{1n} = 8.10^{-3}\vec{a}_z \qquad \vec{B}_{1t} = 5.10^{-3}\vec{a}_x$$

❖ **Xác định các thành phần của $\vec{B}_2$ dùng phương trình ĐKB:**

$$\vec{B}_{2n} = \vec{B}_{1n} = 8.10^{-3}\vec{a}_z$$

$$\vec{B}_{2t} = \mu_2\vec{H}_{2t} = \mu_2[\vec{H}_{1t} - \vec{J}_S \times \vec{a}_n] = \mu_2 \frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} - \mu_2\vec{J}_S \times \vec{a}_n$$

$$\vec{B}_{2t} = 7,5.10^{-3}\vec{a}_x - 6\vec{a}_y \times \vec{a}_z.10^{-3} = 1,5.10^{-3}\vec{a}_x$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_2 = 1,5\vec{a}_x + 8\vec{a}_z \text{ (mWb/m}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{H}_2 = \vec{B}_2 / \mu_2 = 200\vec{a}_x + 1061\vec{a}_z \text{ (A/m)}$$

❖ Ví dụ 1.8.3: Bài toán ĐKB hệ trụ

Mặt trụ r = 0,1m là biên của hai môi trường. Môi trường 2 chiếm miền r < 0,1m là từ môi có $\mu_{2r} = 5$ và trường từ: $\vec{B}_2 = \frac{0,2}{r}\vec{a}_\phi$ (T)

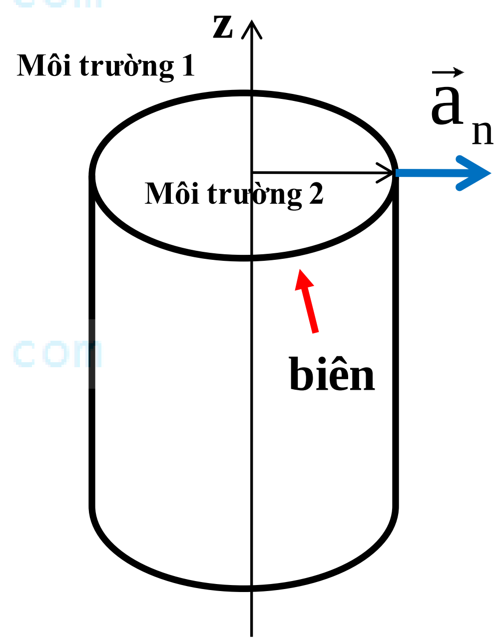
Môi trường 1 chiếm miền r > 0,1m là chân không. Tìm trường từ trên biên về phía môi trường chân không ?

Giải

❖ Xác định $\vec{a}_n$:

Do vector đơn vị pháp tuyến của biên hướng từ môi trường 2 sang môi trường 1 nên ta có :

$$\vec{a}_n = \vec{a}_r$$



❖ Ví dụ 1.8.3: Bài toán ĐKB hệ trụ (tt)

Mặt trụ r = 0,1m là biên của hai môi trường. Môi trường 2 chiếm miền r < 0,1m là từ môi có μ_{2r} = 5 và trường từ: $\vec{B}_2 = \frac{0,2}{r}\vec{a}_\phi$ (T)

Môi trường 1 chiếm miền r > 0,1m là chân không. Tìm trường từ trên biên về phía môi trường chân không ?

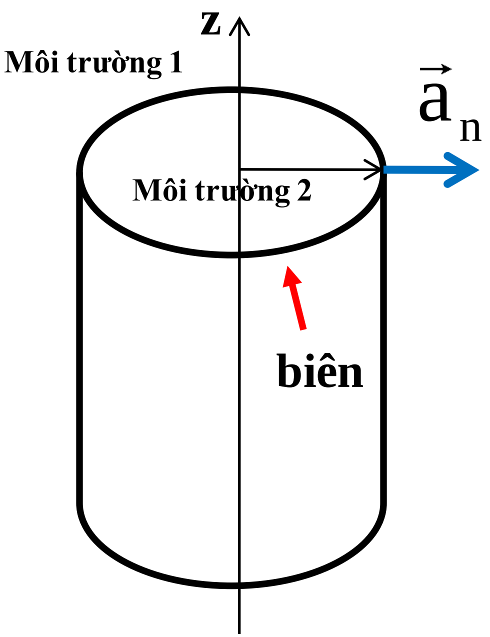
Giải

❖ **Các thành phần của $\vec{B}_2$: trường từ ngay biên:**

$$\vec{B}_2 = (0.2/0.1)\vec{a}_\phi = 2\vec{a}_\phi \ (T)$$

$$\vec{B}_{2n} = (\vec{B}_2.\vec{a}_n).\vec{a}_n = 0$$

$$\vec{B}_{2t} = \vec{B}_2 - \vec{B}_{2n} = 2\vec{a}_\phi$$



❖ Ví dụ 1.8.3: Bài toán ĐKB hệ trụ (tt)

Mặt trụ r = 0,1m là biên của hai môi trường. Môi trường 2 chiếm miền r < 0,1m là từ môi có μ_{2r} = 5 và trường từ: $\vec{B}_2 = \frac{0,2}{r}\vec{a}_\phi \ (T)$

Môi trường 1 chiếm miền r > 0,1m là chân không. Tìm trường từ trên biên về phía môi trường chân không ?

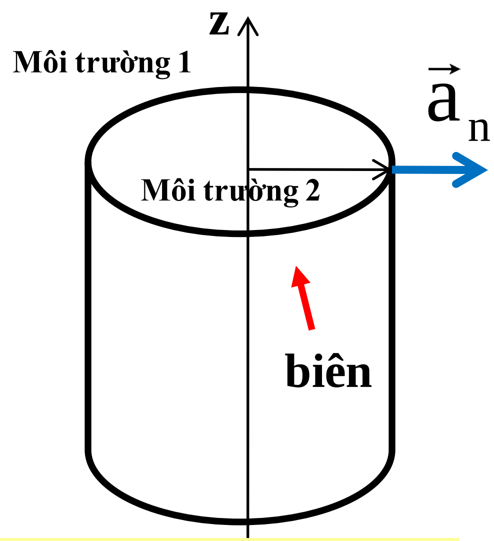
Giải

❖ Các thành phần của $\vec{B}_1$ dùng ĐKB :

$$\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} = 0$$

$$\vec{B}_{1t} = \mu_1 \vec{H}_{1t} = \mu_1 \ \vec{H}_{2t} + \vec{J}_S \times \vec{a}_n$$

$$= \frac{\mu_1}{\mu_2}\vec{B}_{2t} = 0.4\vec{a}_\phi$$



$$\vec{B}_1 = 0.4\vec{a}_\phi \ (T)$$

❖ Ví dụ 1.8.4: Chương trình MATLAB

Xây dựng chương trình MATLAB cho phép nhập vào độ thẩm từ của 2 môi trường, vector đơn vị pháp tuyến và trường từ ở một môi trường, tính trường từ ở môi trường còn lại ?

```
%   M-File: MLP0350
%   Given H1 at boundary between a pair of
%   materials with no surface current at boundary,
%   calculate H2.
Clc; clear
%   enter variables
disp('enter vectors quantities in brackets,')
disp('for example: [1 2 3]')
ur1=input('relative permeability in material 1: ');
ur2=input('relative permeability in material 2: ');
a12=input('unit vector from mtrl 1 to mtrl 2: ');
F=input('material where field is known (1 or 2): ');
Ha=input('known magnetic field intensity vector: ');
if F==1
   ura=ur1;   urb=ur2;   a=a12;
else
   ura=ur2;   urb=ur1;   a=-a12;
end
```

```
%   perform calculations
Hna=dot(Ha,a)*a;
Hta=Ha-Hna; Htb=Hta; Bna=ura*Hna;
%ignores uo since it will factor out
Bnb=Bna; Hnb=Bnb/urb;
display('The magnetic field in the other
medium is: ');
Hb=Htb+Hnb
```

```
Now run the program:
enter vectors quantities in brackets,
for example: [1 2 3]
relative permeability in material 1: 6000
relative permeability in material 2: 3000
unit vector from mtrl 1 to mtrl 2: [0 0 1]
material where field is known (1 or 2): 1
known magnetic field intensity vector: [6 2 3]
ans =
The magnetic field in the other medium is:
Hb =    6    2    6
```

❖ Ví dụ 1.8.5: Bài toán ĐKB

Cho vector cường độ trường từ phân bố trong hệ tọa độ trụ như sau :

$$\vec{H} = \begin{cases} \dfrac{ka^3}{3r}\vec{a}_\phi & \text{khi } r > a \\ \dfrac{kr^2}{3}\vec{a}_\phi & \text{khi } r < a \end{cases}$$

(Với k = const & r = bán kính hướng trục)

a) **Xác định vector mật độ dòng khối trong các miền ?**

b) **Xác định vector mật độ dòng mặt trên mặt r = a ?**

Giải

a) **Theo luật Ampere:**

$$\vec{J} = \text{rot}\vec{H} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ 0 & rH_\phi(r) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rH_\phi]\vec{a}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \begin{cases} 0 & \text{khi } r > a \\ kr\vec{a}_z & \text{khi } r < a \end{cases}}$$

❖ Ví dụ 1.8.5: Bài toán ĐKB (tt)

b) Chọn môi trường 1 là r > a, trường từ trên biên:

$$\vec{H}_1 = \frac{ka^3}{3a}\vec{a}_\phi = \frac{ka^2}{3}\vec{a}_\phi$$

Chọn môi trường 2 là r < a, trường từ trên biên :

$$\vec{H}_2 = \frac{ka^2}{3}\vec{a}_\phi$$

Và vector đơn vị pháp tuyến biên (hướng 2 → 1): $\vec{n} = \vec{a}_r$

❖Vector dòng mặt theo phương trình ĐKB:

$$\boxed{\vec{J}_S = \vec{n} \times \left[\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right] = 0}$$