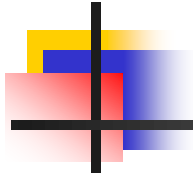


Chương 2:

Trường điện tĩnh



❖ Nội dung chương 2:

2.1 Luật Coulomb và nguyên lý xếp chồng.

2.2 Thế điện vô hướng.

2.3 Áp dụng luật Gauss cho trường điện tĩnh.

2.4 Phương trình Poisson Laplace .

2.5 Vật liệu trong trường điện tĩnh.

2.6 Năng lượng trường điện (W_e).

2.7 Tụ điện và tính điện dung của tụ điện.

2.8 Phương pháp ảnh điện .

2.9 Dòng điện không đổi .



Giới thiệu trường điện tĩnh:

- Tạo ra bởi các vật mang điện đứng yên và không thay đổi theo thời gian.
- Mô hình:

Phương trình:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho_v \end{cases}$$

Điều kiện biên:

$$\begin{cases} E_{1t} - E_{2t} = 0 \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \end{cases}$$

Và :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

2.1: Luật Coulomb và nguyên lý xếp chồng:

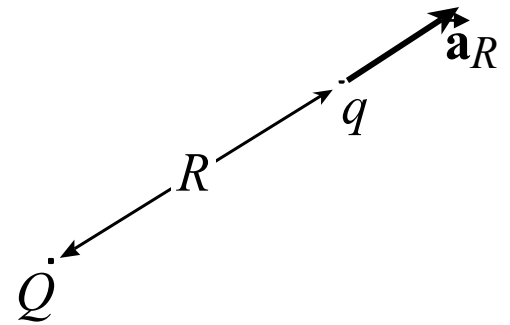
cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

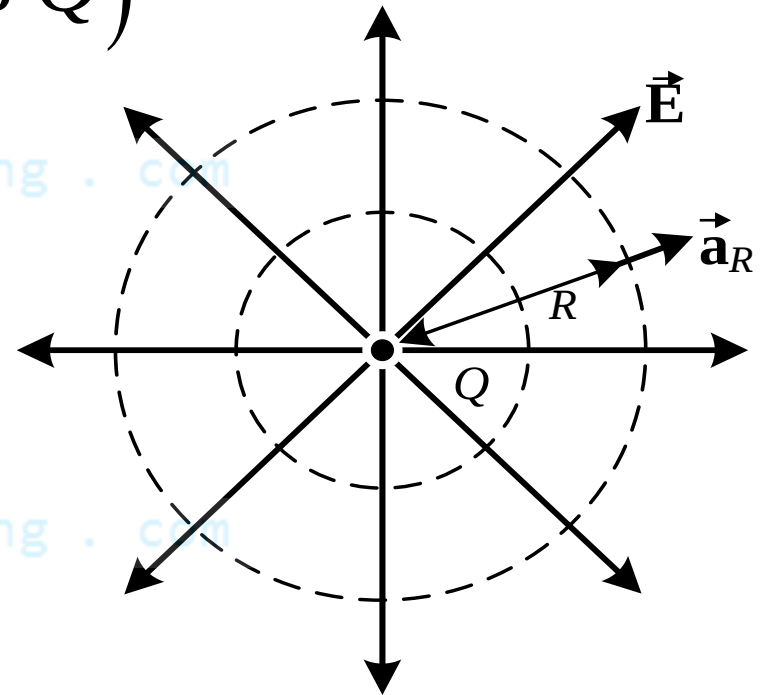
a) Trường điện do một điện tích điểm:

$$\vec{F}_e = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2} \vec{a}_R \text{ (Luật Coulomb)}$$

$$= q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \vec{a}_R \right) = q (\vec{E} \text{ do } Q)$$



$$\vec{E} \text{ do } Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \vec{a}_R$$

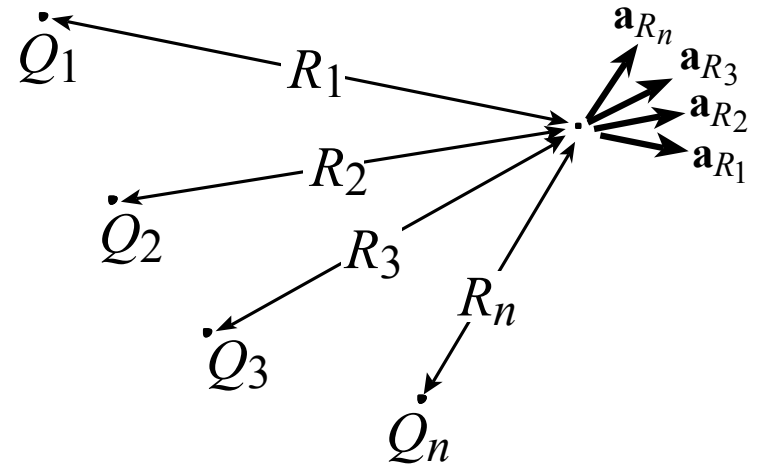


Trường điện có tính hướng tâm và không đổi trên mặt cầu, tâm tại vị trí điện tích điểm.

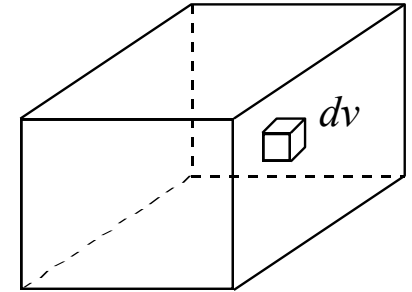
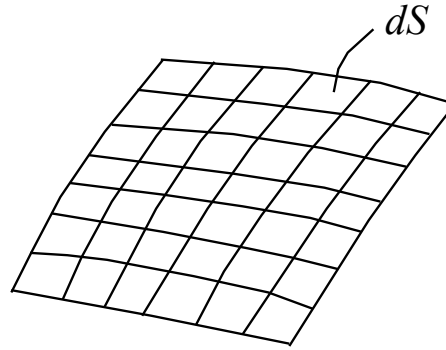
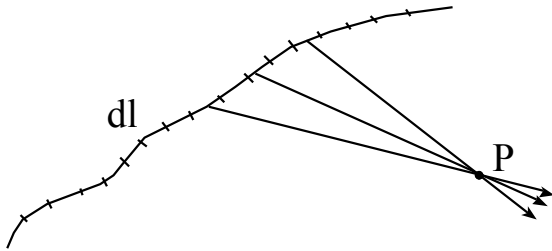
b) Trường điện do hệ điện tích điểm :

Xác định theo luật xếp chồng :

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon R_j^2} \vec{a}_{Rj}$$

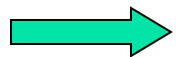


c) Trường điện do điện tích phân bố:



Vi phân điện tích :

$$dq = \begin{cases} \rho_L d\ell \\ \rho_S dS \\ \rho_V dV \end{cases}$$



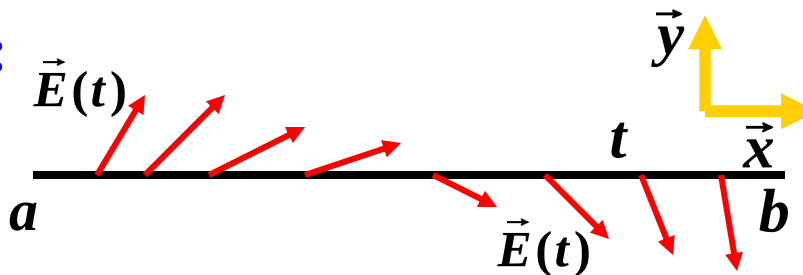
$$\vec{E} = \int_{L,S,V} \frac{dq}{4\pi\epsilon R^2} \vec{a}_R = \int_{L,S,V} \frac{dq}{4\pi\epsilon R^3} \vec{R}$$



Tìm trường điện dùng tích phân vector:

Tích phân chứa hàm vector:

$$\int_a^b \vec{E}(t) dt$$



Dùng cách nào để tính tích phân như trên ?

$\int_a^b \vec{E}(t) dt$ - Kết quả là một vector, và ta xác định các thành phần của nó.

Ta viết: $\vec{E}(t) = E_1(t)\vec{x} + E_2(t)\vec{y}$, với các hàm vô hướng $E_1(t), E_2(t)$ chỉ phụ thuộc vào t , không phụ thuộc các vector đơn vị $\vec{x}, \vec{y}$.

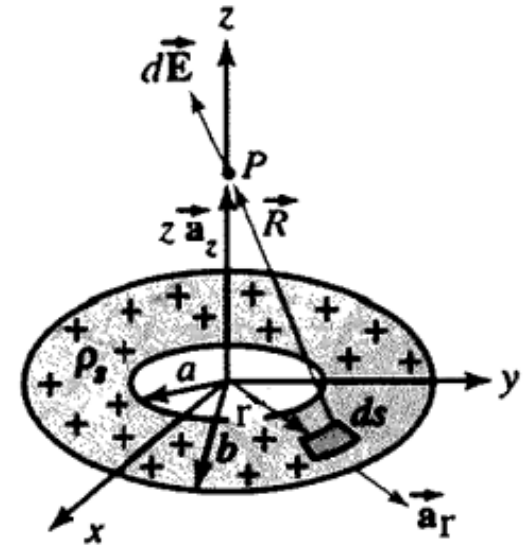
Sau đó chuyển tích phân về :

$$\int_a^b \vec{E}(t) dt = \vec{x} \int_a^b E_1(t) dt + \vec{y} \int_a^b E_2(t) dt$$

Các hàm dưới dấu tích phân lúc này là vô hướng

❖ VD 2.1.1: Luật Coulomb & xếp chồng

Đĩa vành khăn, bán kính trong là a , bán kính ngoài là b , tích điện mặt với mật độ ρ_s , trong môi trường $\epsilon = \epsilon_0$. Xác định vector cường độ trường điện tại điểm P trên phần dương trục Oz ?



cGiảiuong than cong . com

❖ Chọn hệ tọa độ trụ, vi phân điện tích $dq = \rho_s dS_z = \rho_s(rdrd\phi)$.

❖ Vi phân trường điện tại P do dq :
$$d\vec{E} = \frac{\rho_s(rdrd\phi)}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{R}$$

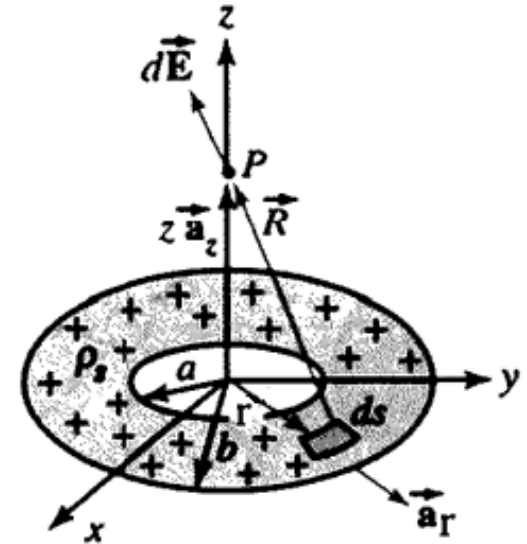
cuu duong than cong . com

Vector khoảng cách: $\vec{R} = -r\vec{a}_r + z\vec{a}_z$

→ $R = \sqrt{r^2 + z^2}$

❖ VD 2.1.1: Luật Coulomb & xếp chồng (tt)

Đĩa vành khăn, bán kính trong là a , bán kính ngoài là b , tích điện mặt với mật độ ρ_s , trong môi trường $\epsilon = \epsilon_0$. Xác định vector cường độ trường điện tại điểm P trên phần dương trục Oz ?

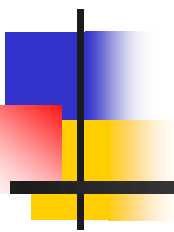


Giải CuuDuongThanCong.com

❖ Trường điện tại P theo xếp chồng:

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r^2 dr d\phi \vec{a}_r + rz dr d\phi \vec{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} \right)$$

❖ Do: $\int_0^{2\pi} d\phi \vec{a}_r = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \vec{a}_z$



2.2 Thế điện vô hướng:

cuu duong than cong . com

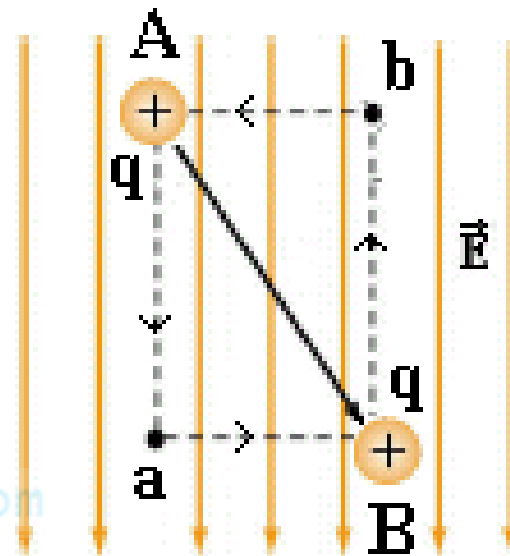
cuu duong than cong . com

a) Tính chất thế của trường điện tĩnh:

❖ Trong trường điện tĩnh, công trên đường cong kín luôn bằng 0.

$$\oint_{AaBbA} \vec{F} d\vec{l} = q \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{AaB} \vec{F} d\vec{l} = \int_{AbB} \vec{F} d\vec{l}$$



❖ Công thức hiện độc lập với đường đi.

➡ Trường điện tĩnh có tính chất thế.

➡ Trường điện tĩnh có thể đặc trưng bởi thế điện vô hướng.

b) Thế điện vô hướng:

❖ Ký hiệu là : φ hay V , đơn vị volt(V).

❖ Định nghĩa:
$$\begin{cases} \text{rot}(\text{grad} \varphi) = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{cases}$$

→
$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi$$

φ : Thế điện vô hướng (V)

■ Nhận xét : i. Chiều $\vec{E}$ là chiều giảm thế.

ii. φ liên tục trong không gian.

❖ Quan hệ giữa trường điện $\vec{E}$ và φ :

$$\begin{aligned}\text{❖ Có: } d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} du_3 \\ &= \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \vec{a}_1 + \dots \right) (h_1 du_1 \vec{a}_1 + \dots) \\ &= \text{grad } \varphi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

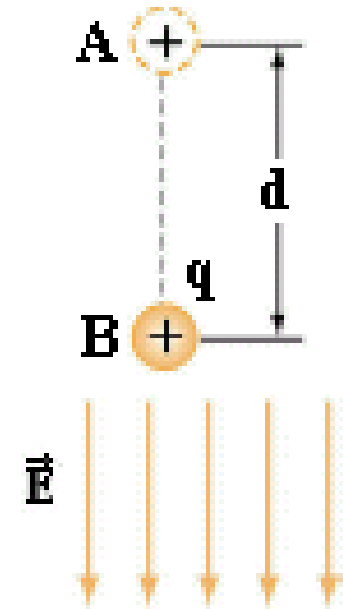
$$\Rightarrow \varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} + C$$

Qui ước: + hệ hữu hạn $\varphi_{\infty} = 0$
+ hệ kỹ thuật $\varphi_{\text{đất}} = 0$

❖ Hiệu thế điện giữa A và B :

➤ Là công của lực điện tĩnh khi dịch chuyển 1 đvị điện tích dương từ A đến B.

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$



❖ Nếu chọn B là gốc thế, thế điện tại điểm A xác định theo:

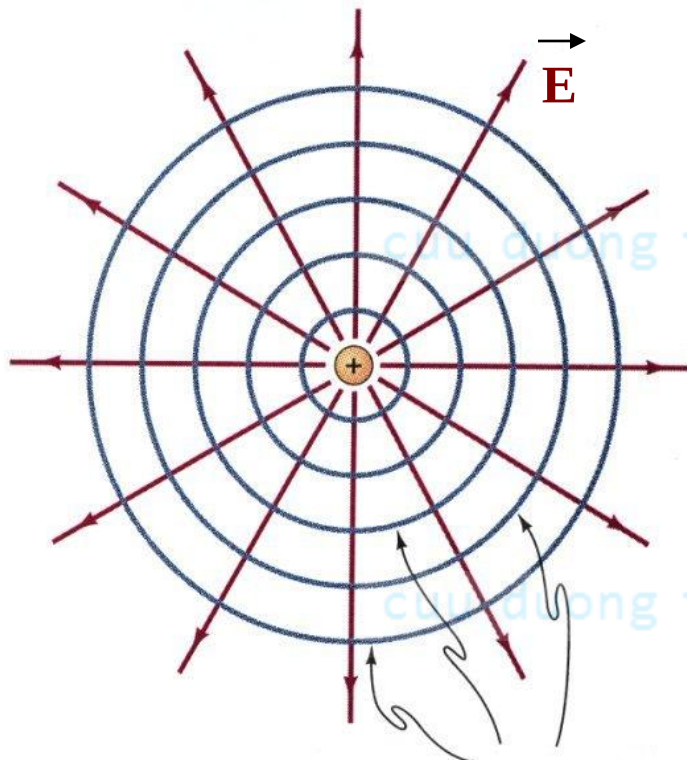
$$\varphi_A = \int_A^{(\varphi=0)} \vec{E} d\vec{l}$$

← Công thức khác để tính thế điện từ trường điện.

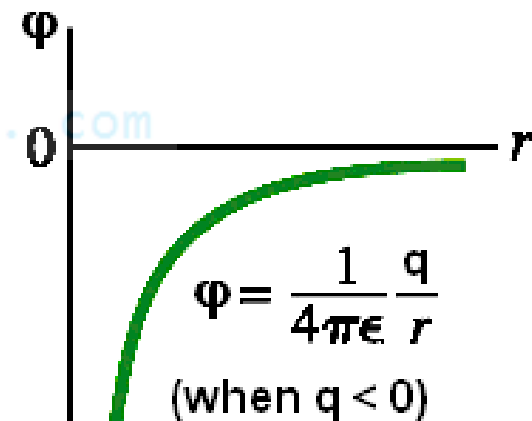
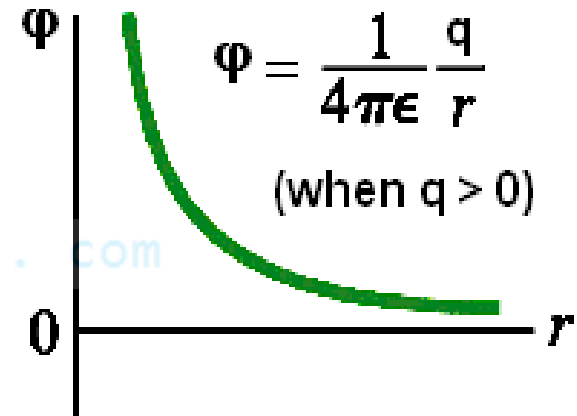
❖ Thế điện do một điện tích điểm :

➤ Gốc thế chọn ở ∞ ($\varphi_{\infty} = 0$) :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$



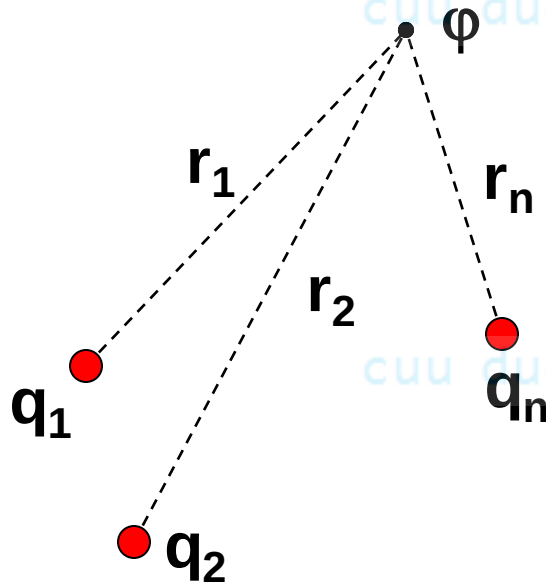
Equipotential lines



❖ Thế điện có tính xếp chồng:

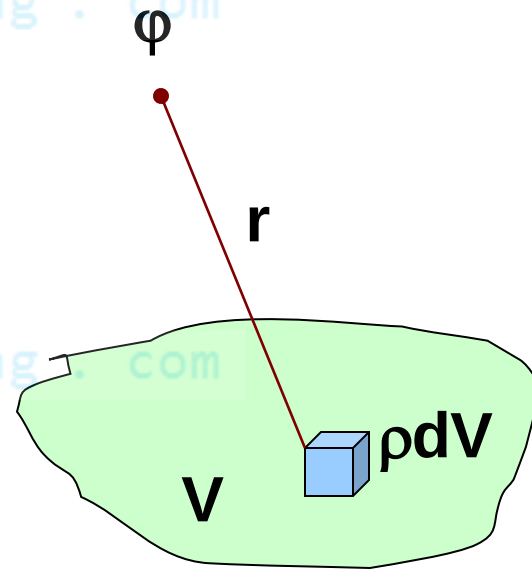
▪ Hệ điện tích điểm:

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon r_k}$$



▪ hệ điện tích phân bố:

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon r} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon r}$$



❖ Tìm thế điện: tích phân vô hướng

- Thế điện cũng có tính xếp chồng. Như vậy ta có thể tính thế điện tại 1 điểm dùng công thức xếp chồng.
- Thế điện là đại lượng vô hướng: tích phân trên là tích phân vô hướng.

→ Dễ xác định.

cuu duong than cong . com

- Suy ra trường điện bằng công thức tổng quát:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

(Thế tọa độ tương ứng nếu ta cần tìm trường điện tại một điểm nào đó)

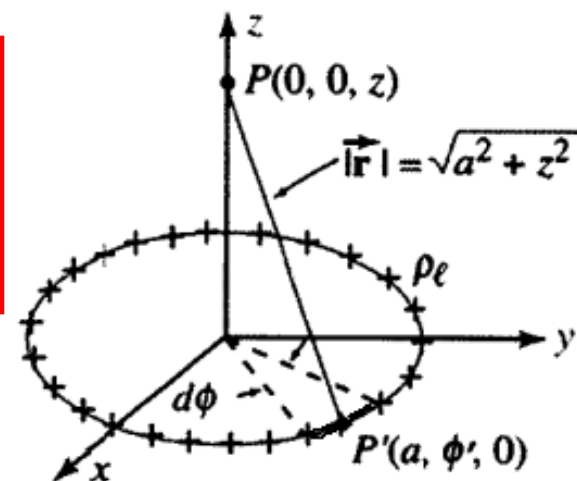
cuu duong than cong . com

✓ Lưu ý: Sự khiếm khuyết của tạo độ trong biểu thức của φ khi vật mang điện là bất đối xứng sẽ kéo theo sự thiếu sót thành phần trong biểu thức vector cường độ trường điện !

❖ VD 2.2.1: Xếp chồng thế điện

Dây dẫn hình tròn bán kính a , tích điện với mật độ dài ρ_ℓ (C/m). Tìm thế điện tại $P(0, 0, z)$? Suy ra cường độ trường điện ?

Giải



❖ Chọn hệ tọa độ trụ, vi phân $dq = \rho_\ell dl = \rho_\ell(r d\phi) = \rho_\ell(a d\phi)$.

❖ Vi phân thế điện tại P do dq:
$$d\varphi = \frac{\rho_\ell(a d\phi)}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + z^2}}$$

❖ Thế điện tại P do vòng dây:

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_\ell(a d\phi)}{4\pi\epsilon\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_\ell a}{2\epsilon\sqrt{a^2 + z^2}}$$

❖ VD 2.2.1: Xếp chồng thế điện (tt)

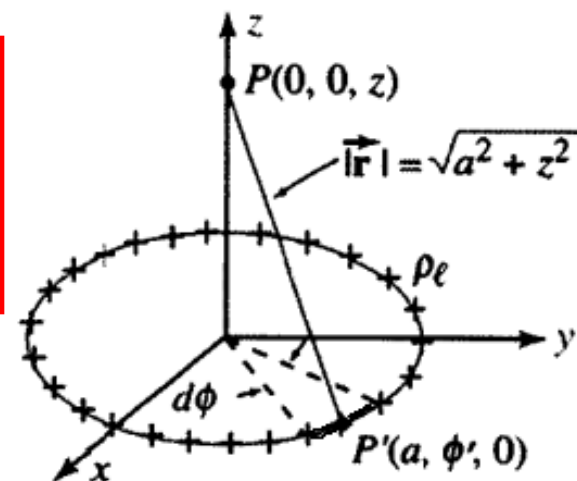
Dây dẫn hình tròn bán kính a , tích điện với mật độ dài ρ_ℓ (C/m). Tìm thế điện tại $P(0, 0, z)$? Suy ra vector cường độ trường điện?

Giải

❖ Vector cường độ trường điện tại P do vòng dây:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell a}{2\varepsilon} \frac{z}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} \vec{a}_z$$



❖ VD 2.2.2: Xếp chồng thế điện

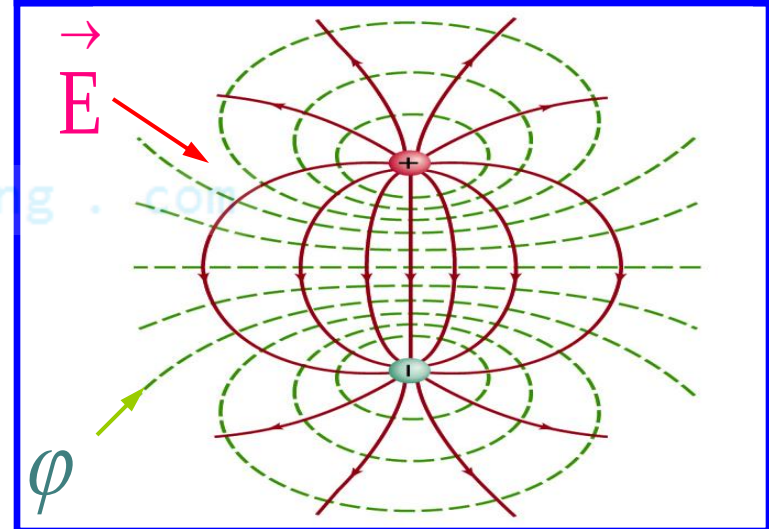
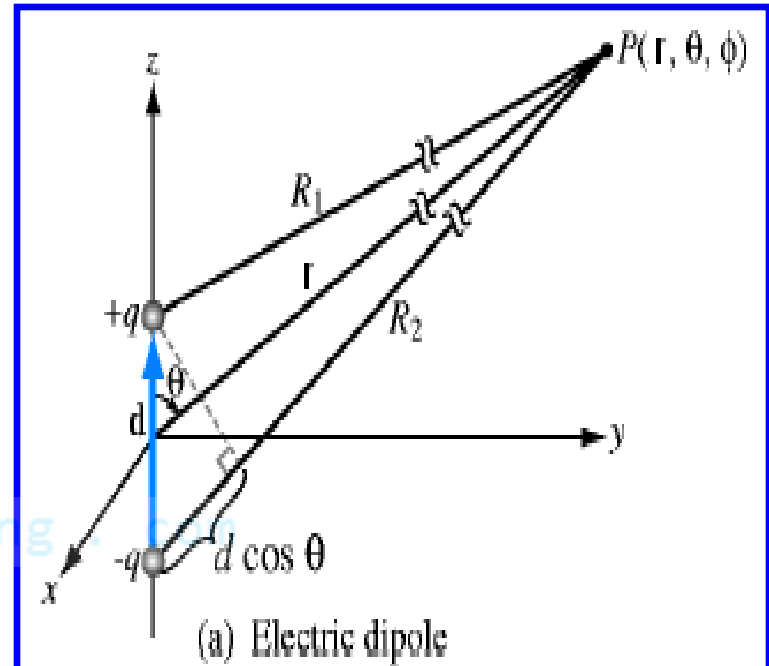
❖ Tìm thế điện và trường điện tạo ra từ dipole điện ?

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon R_2} = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon r^2}$$

Có: $R_2 - R_1 \simeq d \cos \theta$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{qd}{4\pi\epsilon} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon r^3} (2 \cos \theta \vec{a}_r + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$



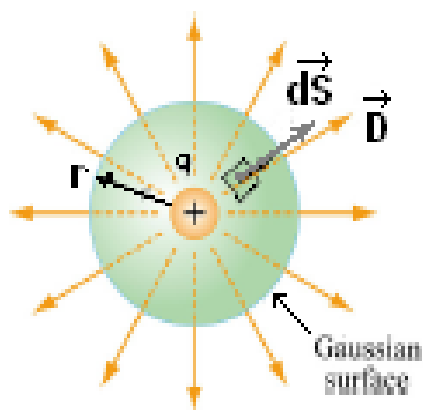
2.3 Áp dụng luật Gauss cho trường điện tĩnh

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Các dạng đối xứng & cảm ứng điện:

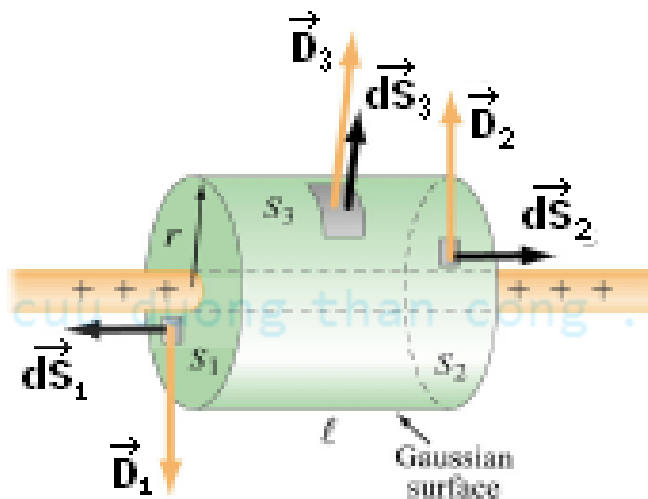
Đối xứng cầu



$$\begin{aligned} S: \quad & \vec{D} \parallel d\vec{S} \\ & D = \text{const} \end{aligned}$$

$$D.S = q^*$$

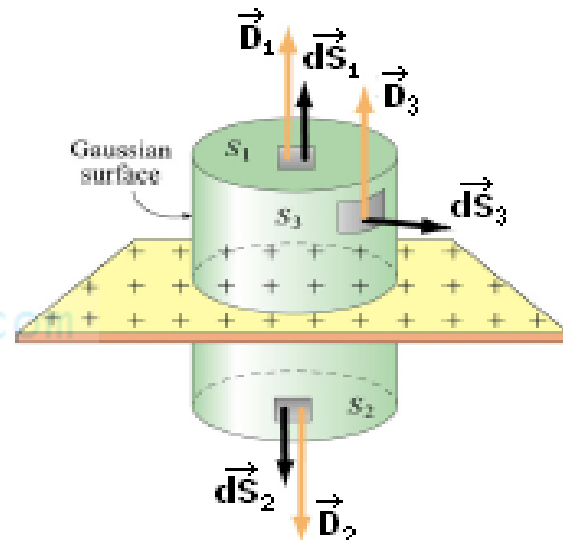
Đối xứng trụ



$$\begin{aligned} S_{xq}: \quad & \vec{D} \parallel d\vec{S}, D = \text{const} \\ S_d: \quad & D \perp d\vec{S} \end{aligned}$$

$$D.S_{xq} = q^*$$

Đối xứng phẳng



$$\begin{aligned} S_{xq}: \quad & \vec{D} \perp d\vec{S} \\ S_d: \quad & \vec{D} \parallel d\vec{S}, D = \text{const} \end{aligned}$$

$$D.S_d = q^*$$

b) Qui trình bài toán dùng luật Gauss:

- 1. Nêu ra tính đối xứng của bài toán và dạng của vector đặc trưng trường điện.**
- 2. Chọn mặt Gauss (theo tính đối xứng) đi qua điểm cần tính trường điện và công thức tính độ lớn trường điện.**
- 3. Xác định điện tích chứa trong mặt Gauss (là q^*).**
- 4. Dùng công thức từ luật Gauss để tính độ lớn của vector trường điện; viết lại dạng vector.**

❖ VD 2.3.1: Áp dụng luật Gauss

Quả cầu, bán kính a , $\rho_V = \rho_0 = \text{const}$, Tìm cường độ trường điện trong & ngoài quả cầu ?

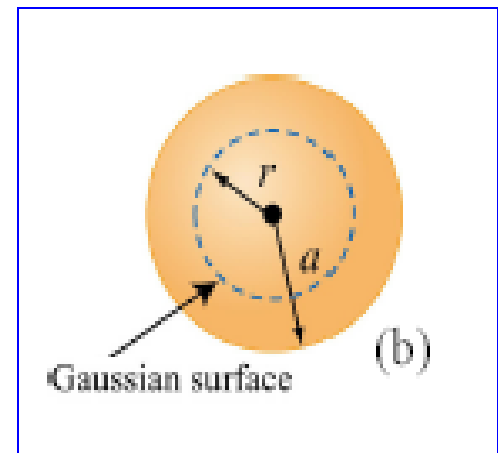
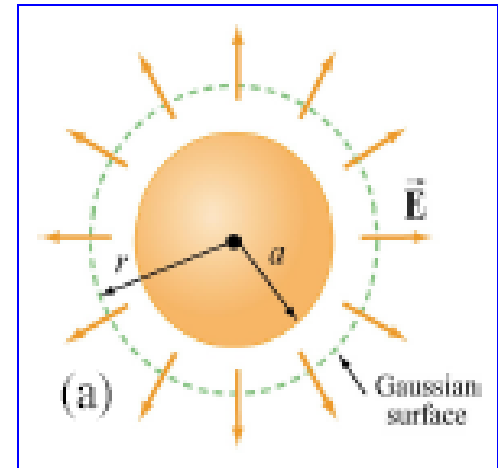
- Bài toán đối xứng cầu: $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{a}_r$
- Mặt Gauss là mặt cầu; và: $\epsilon_0 \cdot E \cdot 4\pi r^2 = q^*$

- Miền ngoài ($r > a$): $\epsilon_0 E_1 4\pi r^2 = q_1^* = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

- Miền trong ($r < a$): $\epsilon_0 E_2 4\pi r^2 = q_2^* = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$

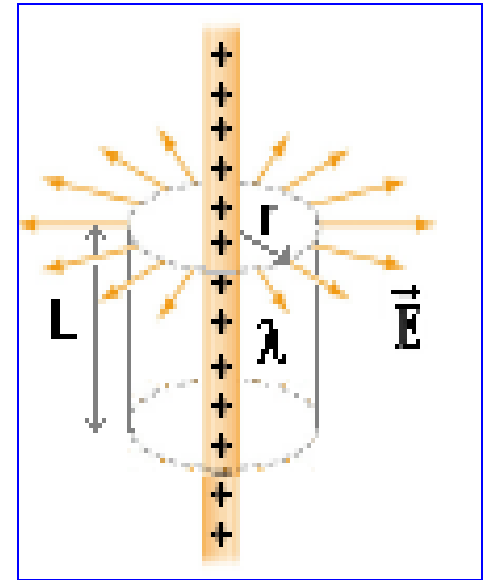
$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \vec{a}_r$$



❖ VD 2.3.2: Áp dụng luật Gauss

Trục dài vô hạn, mang điện mật độ dài $\rho_\ell = \lambda$, tìm cường độ trường điện tại điểm cách trục khoảng cách r ?

- Bài toán đối xứng trụ: $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{a}_r$
- Mặt Gauss là mặt trụ và : $\varepsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi r L = q^*$



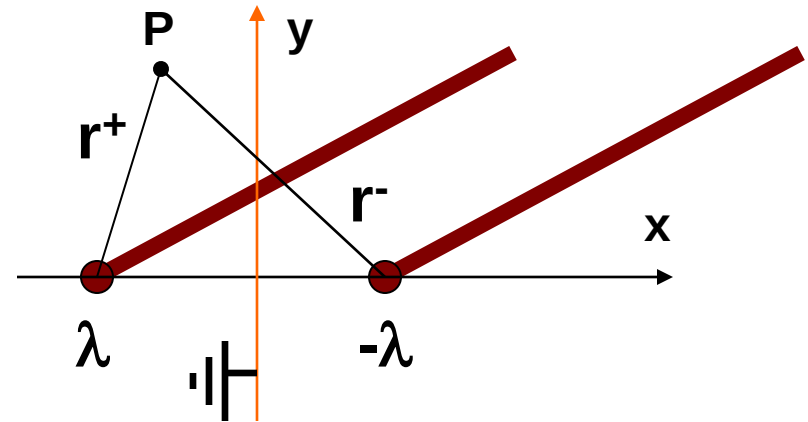
$$\Rightarrow \varepsilon_0 E \cdot 2\pi r \cdot L = \lambda \cdot L$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \cdot \vec{a}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{a}_r$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln r + C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{A}{r}$$

Mở rộng cho 2 trục tích điện:

▪ Thế điện tại điểm P xác định theo công thức trên và tính xấp xỉ:

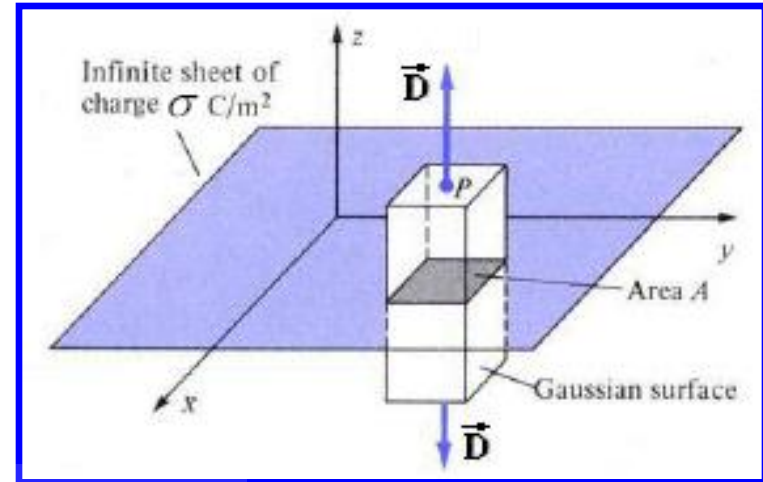


$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln r^+ - \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon} \ln r^- + C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r^-}{r^+} + C$$

→ $\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r^-}{r^+}$ (Chọn gốc thế ở mặt trung trực)

❖ VD 2.3.3: Áp dụng luật Gauss

Tìm cảm ứng điện bên ngoài mặt tích điện rộng vô hạn với mật độ mặt $\rho_s = \sigma = \text{const}$?



❖ Bài toán đối xứng phẳng: $\vec{D} = D \cdot \vec{n}$

❖ Mặt Gauss là mặt hộp và: $D \cdot \sum S_d = q^*$

❖ Giá trị: $D \cdot A + D \cdot A = q^* = \sigma A$. $\rightarrow D = \sigma/2$.

❖ Tổng quát: $\vec{D} = \frac{1}{2} \left[\sigma \cdot \vec{n} \right]$ $\vec{n}$: Vector pháp tuyến, hướng vào miền khảo sát.

❖ VD 2.3.4: Áp dụng luật Gauss

Môi trường $\varepsilon = \varepsilon_0$ tồn tại phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ khối : $\rho_V = \begin{cases} ar & \text{ar khi } 0 < r < R \\ 0 & \text{khi } R < r \end{cases}$

- a) Xác định cường độ trường điện các miền ($r < R$ và $r > R$)?
- b) Xác định thế điện các miền (Chọn gốc thế ở ∞) ? Cho biết giá trị thế điện tại $r = 0$?

a) Tính trường điện: bài toán đối xứng cầu ($\vec{E} = E_r \vec{a}_r$). Mặt Gauss là mặt cầu bán kính r , tâm tại O.

▪ Miền trong ($r < R$) : Điện tích chứa trong mặt Gauss là :

$$q_1^* = \int_V \rho_V dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (ar)(r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi)$$

$$\longrightarrow q_1^* = a \frac{r^4}{4} 4\pi$$

$$\longrightarrow E_{1r} = \frac{q_1^*}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{a}{4\varepsilon_0} r^2$$

❖ VD 2.3.4: Áp dụng luật Gauss (tt)

Môi trường $\varepsilon = \varepsilon_0$ tồn tại phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ khối : $\rho_V = \begin{cases} ar & \text{ar khi } 0 < r < R \\ 0 & \text{khi } R < r \end{cases}$

- a) Xác định cường độ trường điện các miền ($r < R$ và $r > R$)?
- b) Xác định thế điện các miền (Chọn gốc thế ở ∞) ? Cho biết giá trị thế điện tại $r = 0$?

■ Miền ngoài ($r > R$) : Điện tích chứa trong mặt Gauss là :

(lưu ý cận tích phân)

$$q_2^* = \int_V \rho_V dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (ar)(r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi)$$

$$\rightarrow q_2^* = a \frac{R^4}{4} 4\pi$$

$$\rightarrow E_{2r} = \frac{q_2^*}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

❖ VD 2.3.4: Áp dụng luật Gauss (tt)

Môi trường $\varepsilon = \varepsilon_0$ tồn tại phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ khối : $\rho_v = \begin{cases} ar & \text{ar khi } 0 < r < R \\ 0 & \text{khi } R < r \end{cases}$

- a) Xác định cường độ trường điện các miền ($r < R$ và $r > R$)?
- b) Xác định thế điện các miền (Chọn gốc thế ở ∞) ? Cho biết giá trị thế điện tại $r = 0$?

b) Tính thế điện ta dùng công thức : $\varphi = -\int E_r dr + C$

▪ Miền ngoài ($r > R$) : $\varphi_2 = -\int \frac{aR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr + C_2 = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0 r} + C_2$

Từ điều kiện gốc thế: $\varphi_{r=\infty} = C_2 = 0$

→ $\varphi_2 = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0 r}$

❖ VD 2.3.4: Áp dụng luật Gauss (tt)

Môi trường $\varepsilon = \varepsilon_0$ tồn tại phân bố điện tích đối xứng cầu với mật độ khối : $\rho_v = \begin{cases} ar & \text{ar khi } 0 < r < R \\ 0 & \text{khi } R < r \end{cases}$

- a) Xác định cường độ trường điện các miền ($r < R$ và $r > R$)?
- b) Xác định thế điện các miền (Chọn gốc thế ở ∞) ? Cho biết giá trị thế điện tại $r = 0$?

▪ Miền trong ($r < R$): $\varphi_1 = -\int \frac{a}{4\varepsilon_0} r^2 dr + C_1 = -\frac{ar^3}{12\varepsilon_0} + C_1$

Từ điều kiện liên tục: $\varphi_1(r = R) = \varphi_2(r = R)$

$$\longrightarrow -\frac{aR^3}{12\varepsilon_0} + C_1 = \frac{aR^3}{4\varepsilon_0} \longrightarrow C_1 = \frac{aR^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\longrightarrow \boxed{\varphi_1 = -\frac{ar^3}{12\varepsilon_0} + \frac{aR^3}{3\varepsilon_0}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\varphi_{r=0} = \frac{aR^3}{3\varepsilon_0}}$$



2.4 Phương trình Poisson Laplace :

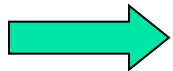
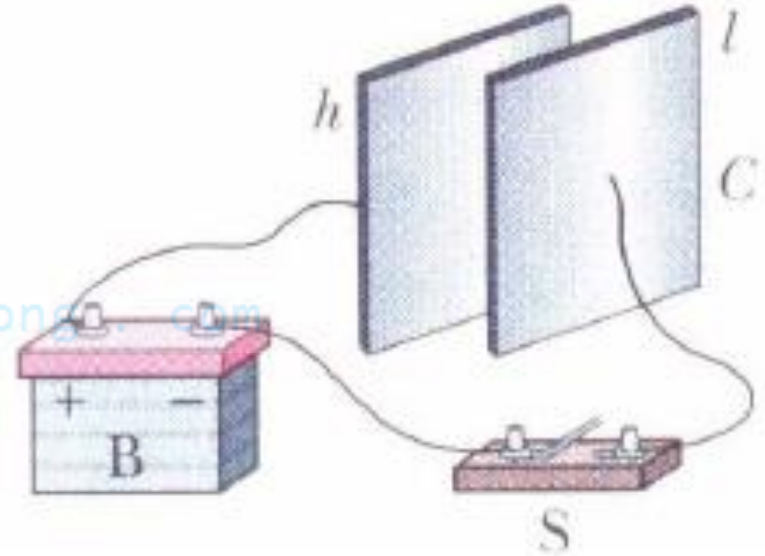
cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Giới thiệu:

- Khi giải bài toán trường điện tĩnh, nếu biết phân bố điện tích, ta có thể xác định trường điện và thế điện dùng luật Coulomb hay luật Gauss .
- Trong một số bài toán thực tiễn, phân bố điện tích là chưa biết, nhưng giá trị thế điện tại một số điểm là đã biết, ta cũng có thể xác định được các vector đặc trưng của trường điện.
- Và tiếp theo đó, phân bố điện tích trong hệ sẽ được suy ra nhờ các phương trình điều kiện biên.



Phương trình Poisson – Laplace sẽ hỗ trợ quá trình trên.

2.4.1 Phương trình Poisson-Laplace :

❖ Từ: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_V \longrightarrow \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -\rho_V$

khi $\varepsilon = \text{const}$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

(Phương trình Poisson)

❖ Nếu không có phân bố điện tích ($\rho_V = 0$): chân không, không khí, điện môi lý tưởng ...

$$\Delta \varphi = 0$$

(Phương trình Laplace)

khi $\varepsilon = \varepsilon(x,y,z)$

$$\operatorname{div}[\varepsilon \operatorname{grad}(\varphi)] = -\rho_V$$

❖ Nếu không có phân bố điện tích ($\rho_V = 0$): chân không, không khí, điện môi lý tưởng ...

$$\operatorname{div}[\varepsilon \operatorname{grad}(\varphi)] = 0$$

❖ Qui trình giải dùng Pt Poisson-Laplace:

i. Giải pt Laplace (nếu $\rho_v = 0$) hay pt Poisson (nếu $\rho_v \neq 0$) dùng:

Tích phân trực tiếp nếu $\varphi =$ hàm 1 biến.

Tách biến nếu $\varphi =$ hàm nhiều biến.

ii. Dùng các phương trình ĐKB để có 1 nghiệm duy nhất.

iii. Từ φ : suy ra $\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$ & $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

cuu duong than cong . com

❖ Các TH đặc biệt khi giải pt Laplace:

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\text{Phương trình Laplace})$$

Nếu φ chỉ phụ thuộc biến thứ 1 trong các hệ tọa độ:

▪ **Đề các:** $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = Ax + B$

▪ **Trụ:** $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = A \ln r + B$

▪ **Cầu:** $\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{A}{r} + B$

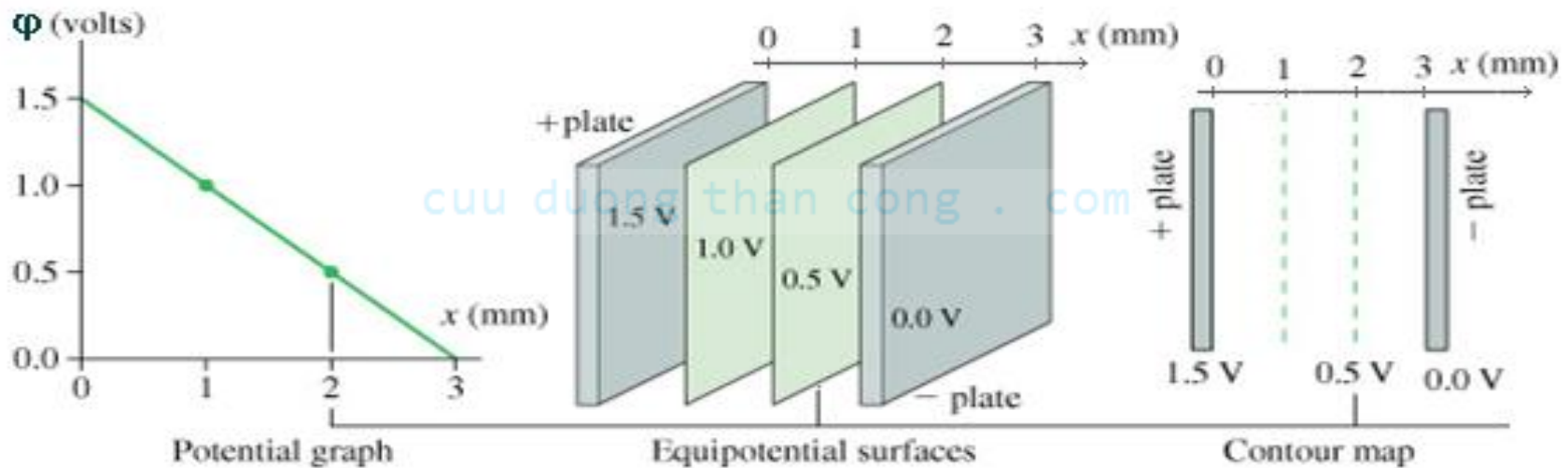
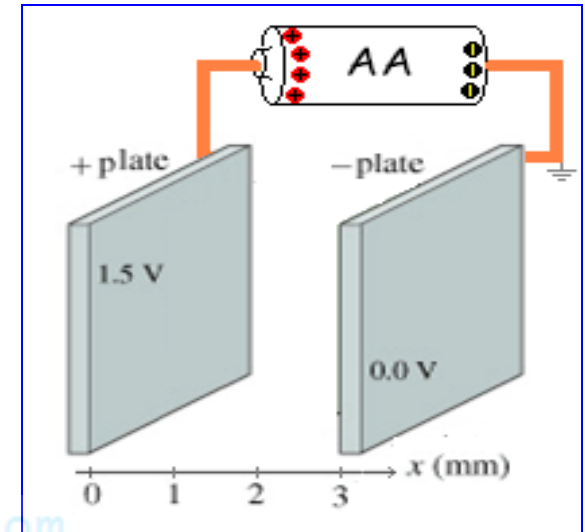
❖ VD 2.4.1: Dùng pt Laplace & ĐKB

Tìm thế điện giữa 2 bản cực tụ phẳng, hiệu thế $U = 1,5 \text{ V}$? **Giải**

❖ Giả sử φ chỉ phụ thuộc vào x : $\varphi = \varphi(x)$.

❖ Do: $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \rightarrow \varphi = Ax + B$

❖ Có: $\begin{cases} \varphi(0) = U \\ \varphi(d) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{U}{d}x + U$



2.4.2 Tích phân trực tiếp trường $\vec{D}$:

a) Phần lớn các vật mang điện trong kỹ thuật đều có tính đối xứng. Khi đó thế điện chỉ phụ thuộc vào một biến tọa độ. Kéo theo các vector $\vec{D}$ và $\vec{E}$ cũng chỉ có một thành phần.

b) Dựa vào phương trình: $\text{div } \vec{D} = \rho_v$ hay $\text{div } \vec{D} = 0$

→ Biểu thức của $\vec{D}$ (và các hằng số tích phân).

c) Vector c. độ trường điện: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$

d) Áp dụng : $U_{ab} = \int_{a \rightarrow b} \vec{E} d\vec{l}$ suy ra các hằng số tích phân.

(Dùng điều kiện biên của thế điện: suy ra trường điện)

❖ VD 2.4.2: Tích phân trực tiếp $\vec{D}$

Tìm thế điện giữa 2 bản cực tụ phẳng, hiệu thế $U = 1,5 \text{ V}$?

Giải

❖ Do $\varphi = \varphi(x)$ nên : $\vec{D} = D_x \cdot \vec{a}_x$.

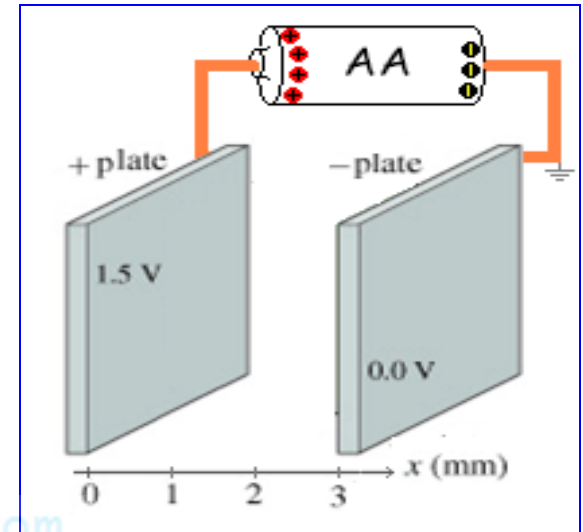
❖ Từ: $\text{div} \vec{D} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0$

$$\longrightarrow D_x = A = \text{const} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{D_x}{\epsilon} \vec{a}_x = \frac{A}{\epsilon} \vec{a}_x$$

$$\text{❖ Từ: } U = \int_0^d \frac{A}{\epsilon} dx = \frac{A}{\epsilon} d \quad \longrightarrow \quad A = \frac{\epsilon U}{d} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{U}{d} \vec{a}_x$$

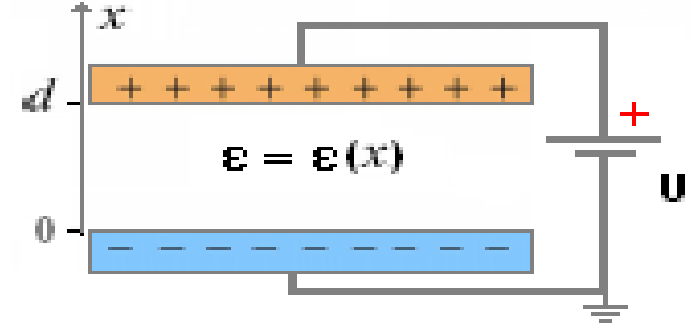
❖ Theo đ nghĩa:

$$\varphi = \int_x^d \frac{U}{d} dx' = \frac{U}{d} x' \Big|_x^d = U - \frac{U}{d} x$$



❖ VD 2.4.3: Môi trường không đồng nhất

Tụ phẳng, khoảng cách giữa 2 bản cực là d , hiệu thế U . Điện môi lý tưởng có: $\epsilon = 4\epsilon_0 d / (x + d)$, tìm thế điện và trường điện trong điện môi ?



▪ Cách 1:

▪ Giả sử: $\varphi = \varphi(x)$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{A}{\epsilon} \rightarrow \varphi = \frac{A}{4\epsilon_0 d} \left[\frac{x^2}{2} + xd \right] + B$$

$$\varphi(d) = U, \varphi(0) = 0 \Rightarrow A, B$$

$$\rightarrow \vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

❖ Cách 2:

▪ Do: $\vec{D} = D_x \vec{a}_x$

$$\text{div} \vec{D} = 0 \rightarrow D_x = \text{const}$$

$$U = \int_d^0 E_x dx = \int_d^0 \frac{D_x}{4\epsilon_0 d} (x+d) dx \rightarrow D_x$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{D_x \vec{a}_x}{\epsilon} \rightarrow \varphi(x) = \int_x^0 E_x dx$$

2.4.3 Điều kiện biên đối với thế điện φ :

❖ Dùng khi môi trường cần tính thế điện không đồng nhất. Ta cần thêm các điều kiện biên φ .

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{a}_n - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \vec{a}_\tau \rightarrow \begin{cases} E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \\ E_t = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \end{cases}$$

❖ Các điều kiện biên cơ bản của φ trên biên 2 môi trường:

▪ Điều kiện liên tục của φ :

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

▪ Điều kiện biên đối với D_n :

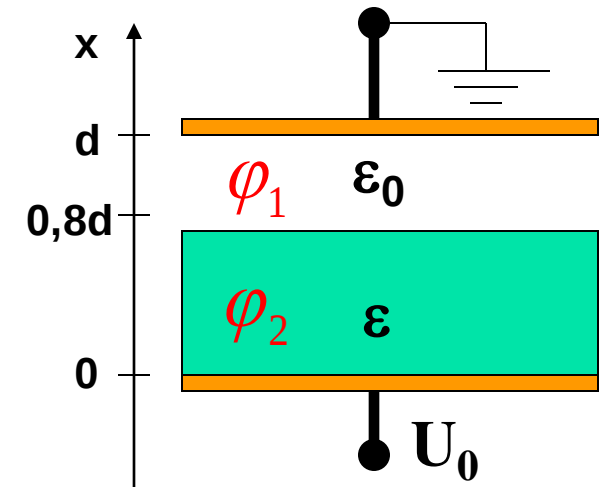
$$-\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho_s$$

▪ Điều kiện biên đối với E_t :

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} = 0$$

VD 2.4.4: ĐKB đối với thế điện φ

Tìm thế điện trong hai điện môi:



❖ Do môi trường đồng nhất , tuyến tính :

$$\varphi_1 = A_1 x + B_1 \quad ; \quad \varphi_2 = A_2 x + B_2$$

❖ Điều kiện biên:

$$\varphi_1(d) = 0$$

$$\varphi_2(0) = U_0$$

$$\varphi_1(0,8d) = \varphi_2(0,8d) \quad (\text{Điều kiện liên tục của thế điện})$$

$$-\varepsilon_1 \left. \frac{d\varphi_1}{dx} \right|_{0,8d} + \varepsilon_2 \left. \frac{d\varphi_2}{dx} \right|_{0,8d} = \rho_s = 0 \quad (\text{điều kiện tp pháp tuyến})$$

VD 2.4.4: ĐKB đối với thế điện φ (tt)

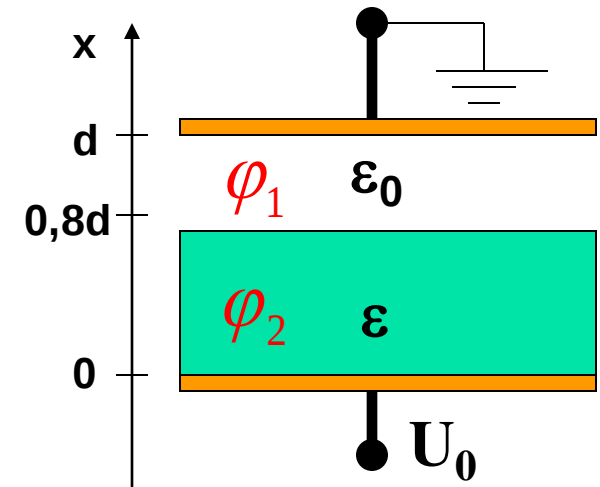
❖ Giải hệ:

$$A_1 d + B_1 = 0$$

$$B_2 = U_0$$

$$A_1(0,8d) + B_1 = A_2(0,8d) + B_2$$

$$-\varepsilon_0 A_1 + \varepsilon A_2 = 0$$



$$\rightarrow \begin{cases} A_1(0,2d) + A_2(0,8d) = -U_0 \\ -A_1 + \varepsilon_r A_2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_2 = \frac{-5U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} & B_2 = U_0 \\ A_1 = \frac{-5\varepsilon_r U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} & B_1 = \frac{5\varepsilon_r}{(4 + \varepsilon_r)} U_0 \end{cases}$$

VD 2.4.4: ĐKB đối với thể điện φ (tt)

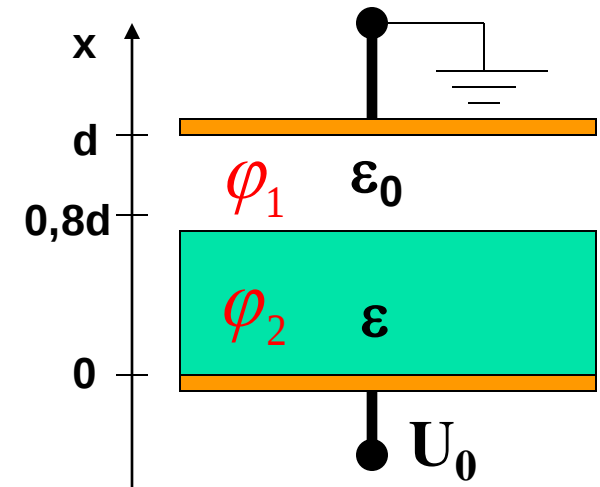
❖ Tìm thế điện & cường độ trường điện:

$$\varphi_1 = \frac{-5\varepsilon_r U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} x + \frac{5\varepsilon_r U_0}{(4 + \varepsilon_r)}$$

→
$$\vec{E}_1 = -\text{grad} \varphi_1 = \frac{5\varepsilon_r U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} \vec{a}_x$$

$$\varphi_2 = \frac{-5U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} x + U_0$$

→
$$\vec{E}_2 = -\text{grad} \varphi_2 = \frac{5U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} \vec{a}_x$$



VD 2.4.4: ĐKB đối với thể điện φ (tt)

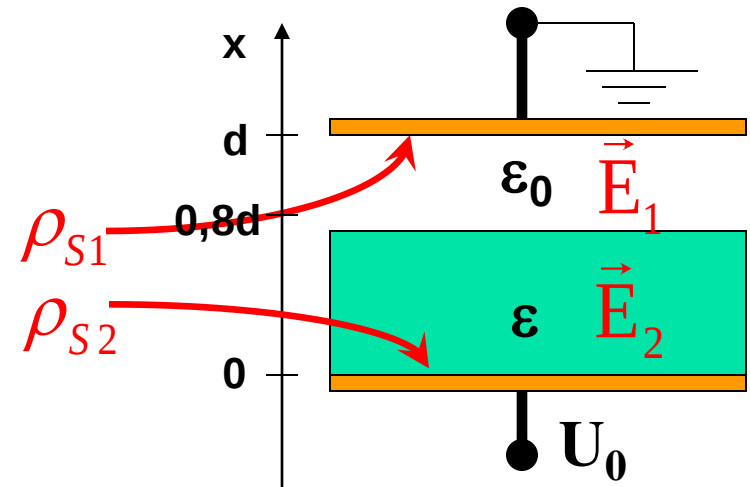
❖ Tìm mật độ điện tích mặt trên cốt tụ:

$$\vec{E}_1 = -\text{grad} \varphi_1 = \frac{5\varepsilon_r U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} \vec{a}_x$$

$$\rightarrow \rho_{S1} = 0 - \varepsilon_0 E_{1n} = \frac{-5\varepsilon_0 \varepsilon_r U_0}{(4 + \varepsilon_r)d}$$

$$\vec{E}_2 = -\text{grad} \varphi_2 = \frac{5U_0}{(4 + \varepsilon_r)d} \vec{a}_x$$

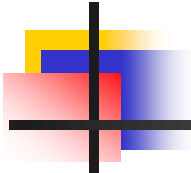
$$\rightarrow \rho_{S2} = \varepsilon E_{2n} - 0 = \frac{5\varepsilon U_0}{(4 + \varepsilon_r)d}$$



2.5 Vật liệu trong trường điện tĩnh

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



**Đối với bài toán
TĐT, vật liệu có
thể phân loại**

**Vật dẫn và bán
dẫn**

Điện môi

**Vật liệu
từ**

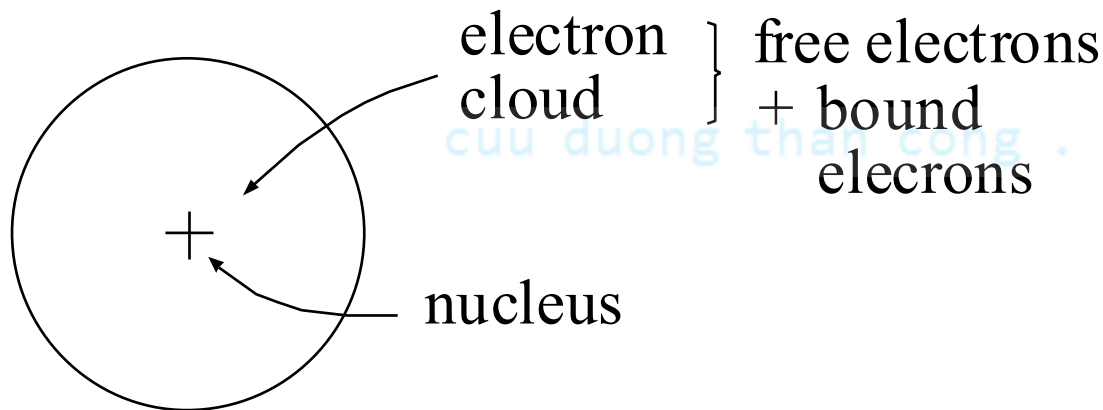
**Tính
chất
điện**

Tính chất từ

2.5.1 Vật dẫn và bán dẫn :

a) Giới thiệu:

❖ Vật dẫn đặc trưng bởi tính chất dẫn điện, hiện tượng các electron tự do chuyển động dưới tác dụng của trường điện bên ngoài.



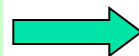
Electrons



Dòng điện

❖ Đối với vật liệu bán dẫn, dòng điện hình thành không chỉ do electron mà còn do lỗ trống.

Electrons và lỗ trống



Dòng điện

b) Vector mật độ dòng điện:

❖ Đối với môi trường dẫn (vật dẫn hay bán dẫn), vector mật độ dòng thường sử dụng nhiều hơn dòng điện.

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{Luật Ohm dạng vi phân})$$

σ = độ dẫn điện của môi trường dẫn (S/m)

$$\sigma = \begin{cases} \mu_e N_e |e| & = \text{vật dẫn.} \\ \mu_e N_e |e| + \mu_h N_h |e| & = \text{bán dẫn.} \end{cases}$$

μ = độ linh động của điện tử hay lỗ trống.

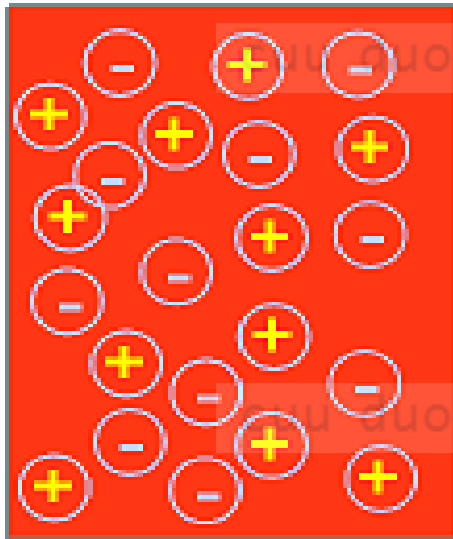
$N_{e,h}$ = mật độ của điện tử hay lỗ trống.

c) Tính chất vật dẫn trong trường điện tĩnh:

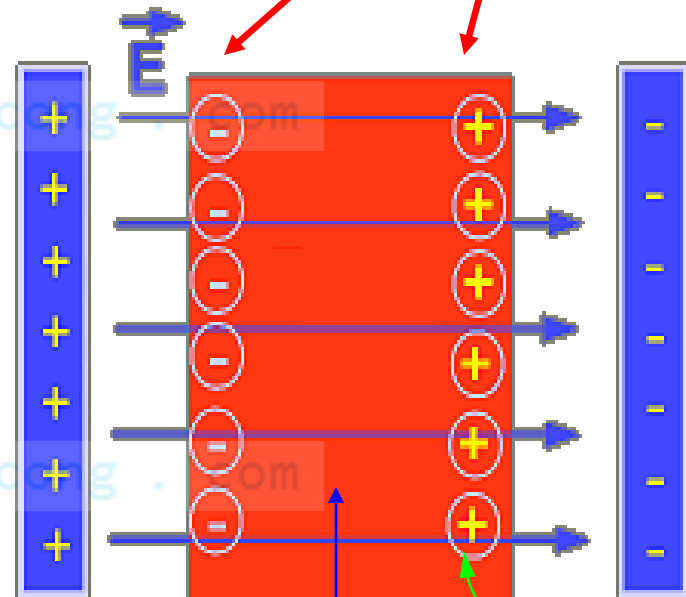
c₁) Tính chất 1: $\rho_V = 0$; $\rho_S \neq 0$.

Điện tích cảm ứng bề mặt

E bên ngoài = 0



E bên ngoài $\neq 0$



$\rho_V = 0$

ρ_S

❖ VD2.5.1: Vật dẫn trong trường điện tĩnh

Gọi ρ_0 là mật độ điện tích khối tự do tại $t = 0$ trong vật dẫn có ($\epsilon = \epsilon_0$; $\sigma = 6,17 \cdot 10^7$ S/m), tìm qui luật thay đổi của ρ_v trong vật dẫn khi đặt nó trong trường điện tĩnh tại $t = 0$?

Giải

■ Từ ptrình liên tục: $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{div } \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$

$$\longrightarrow \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho_v = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

■ Có thể thấy:

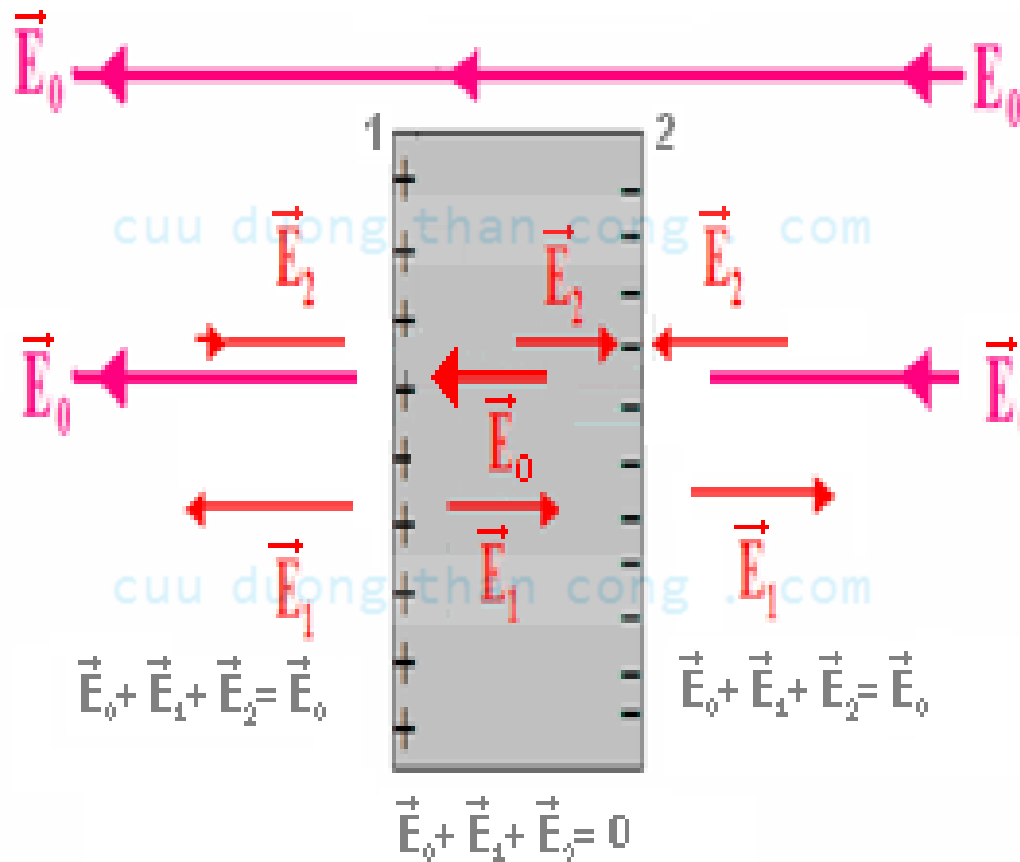
$$\text{Tại } t = \tau = \epsilon/\sigma = 1,43 \cdot 10^{-19} \text{ s} \quad \longrightarrow \quad \rho_v = 0,368 \cdot \rho_0$$

$$\text{Tại } t = 5\tau \quad \longrightarrow \quad \rho_v = 6,7 \cdot 10^{-3} \cdot \rho_0$$

c) Tính chất vật dẫn trong trường điện tĩnh:

c₂) Tính chất 2: Cường độ trường điện bên trong vật dẫn = 0.

Trường điện do điện tích cảm ứng $\leftrightarrow$ trường điện ngoài

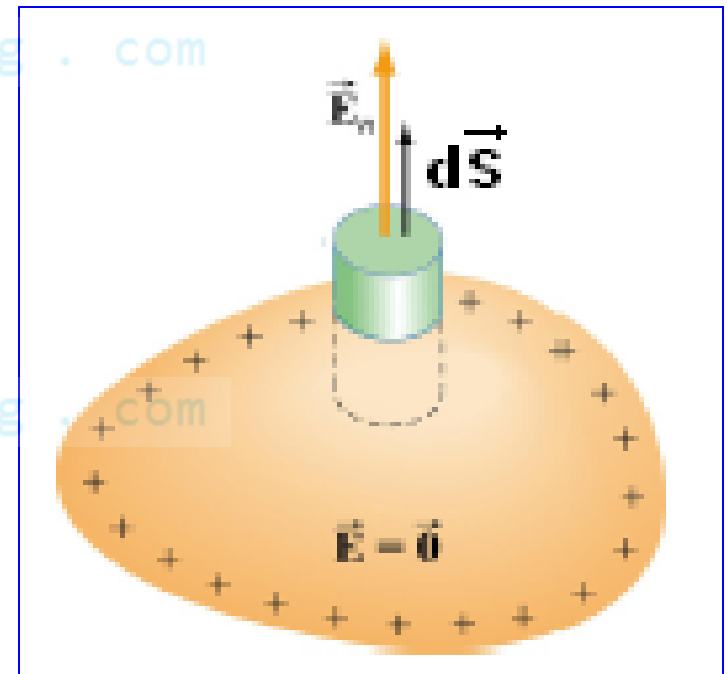


c) Tính chất vật dẫn trong trường điện tĩnh:

c₃) Tính chất 3: Vật dẫn có tính đẳng thế .

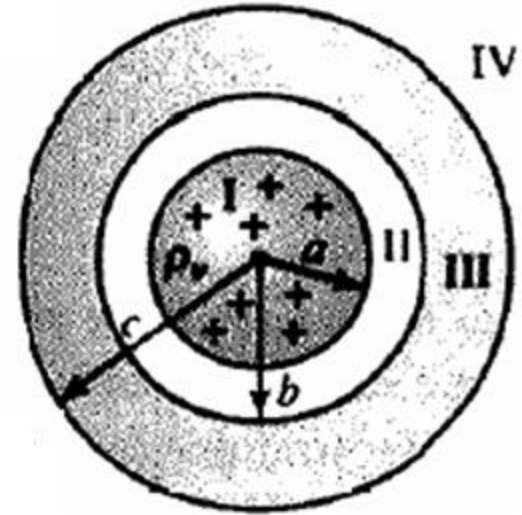
c₄) Tính chất 4: Trường điện vuông góc với bề mặt vật dẫn.

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \vec{a}_n$$



❖ VD2.5.2: Vật dẫn trong trường điện tĩnh

Điện tích phân bố đều bên trong quả cầu bán kính a với mật độ khối ρ_v , đồng tâm với vỏ cầu bán kính trong là b , bán kính ngoài là c . Xác định vector cường độ trường điện các miền (cho $\epsilon = \epsilon_0$) và mật độ điện tích mặt trên 2 bề mặt của vỏ cầu dẫn.



Giải

❖ Bài toán đối xứng cầu: mặt Gauss là mặt cầu, bán kính r .

a) Miền I ($r < a$): Điện tích chứa trong mặt Gauss :

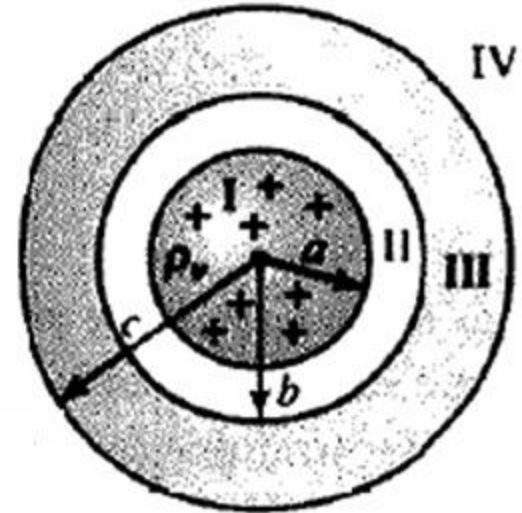
$$Q_1^* = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_v$$



$$\vec{E}_1 = \frac{r}{3\epsilon_0} \rho_v \vec{a}_r$$

❖ VD2.5.2: Vật dẫn trong trường điện tĩnh

Điện tích phân bố đều bên trong quả cầu bán kính a với mật độ khối ρ_v , đồng tâm với vỏ cầu bán kính trong là b , bán kính ngoài là c . Xác định vector cường độ trường điện các miền (cho $\epsilon = \epsilon_0$) và mật độ điện tích mặt trên 2 bề mặt của vỏ cầu dẫn.



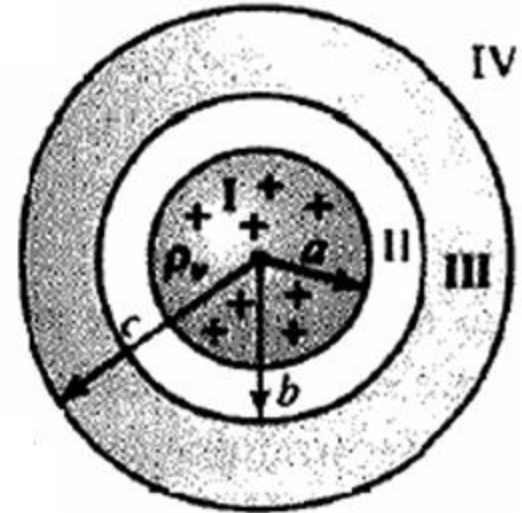
Giải

b) Miền II ($a < r < b$): Điện tích chứa trong mặt Gauss :

$$Q_2^* = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_v \longrightarrow \vec{E}_2 = \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2} \rho_v \vec{a}_r$$

❖ VD2.5.2: Vật dẫn trong trường điện tĩnh

Điện tích phân bố đều bên trong quả cầu bán kính a với mật độ khối ρ_v , đồng tâm với vỏ cầu bán kính trong là b , bán kính ngoài là c . Xác định vector cường độ trường điện các miền (cho $\varepsilon = \varepsilon_0$) và mật độ điện tích mặt trên 2 bề mặt của vỏ cầu dẫn.



Giải

c) Miền III ($b < r < c$): Miền vật dẫn nên theo tính chất :

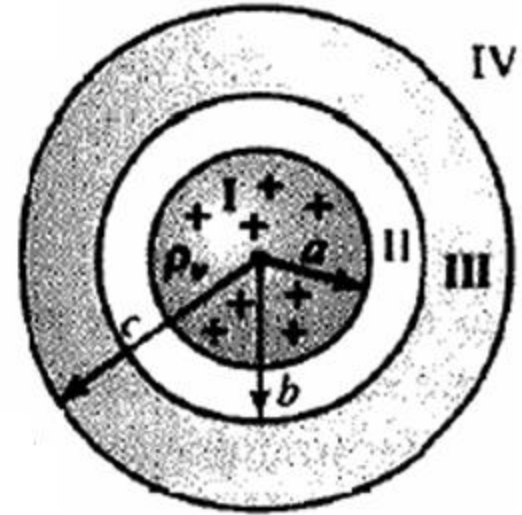
$$\vec{E}_3 = 0$$

d) Miền IV ($c < r$): Điện tích chứa trong mặt Gauss giống như khi tính cho miền II nên ta có:

$$\vec{E}_4 = \frac{a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \rho_v \vec{a}_r$$

❖ VD2.5.2: Vật dẫn trong trường điện tĩnh

Điện tích phân bố đều bên trong quả cầu bán kính a với mật độ khối ρ_v , đồng tâm với vỏ cầu bán kính trong là b , bán kính ngoài là c . Xác định vector cường độ trường điện các miền (cho $\varepsilon = \varepsilon_0$) và mật độ điện tích mặt trên 2 bề mặt của vỏ cầu dẫn.



Giải

e) Mật độ điện tích trên bề mặt $r = b$:

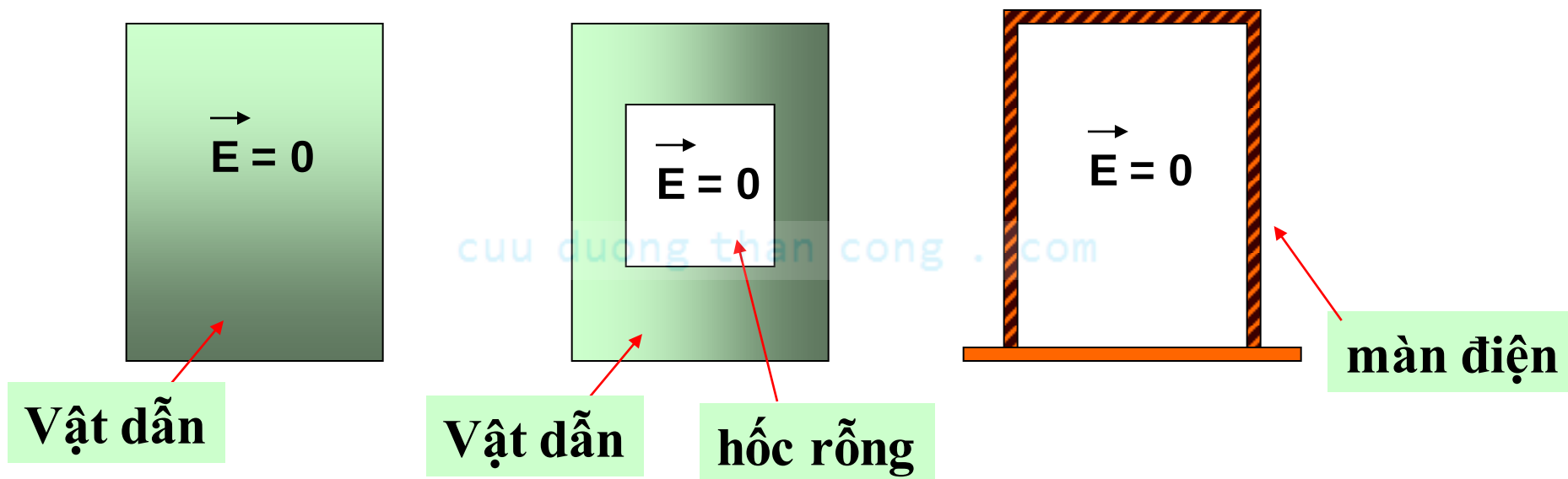
$$\rho_s(r = b) = \vec{a}_r \left(0 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 \right) \Big|_{r=b} = -\frac{a^3}{3b^2} \rho_v$$

f) Mật độ điện tích trên bề mặt $r = c$:

$$\rho_s(r = c) = \vec{a}_r \left(\varepsilon_0 \vec{E}_4 - 0 \right) \Big|_{r=c} = \frac{a^3}{3c^2} \rho_v$$

d) Màn điện:

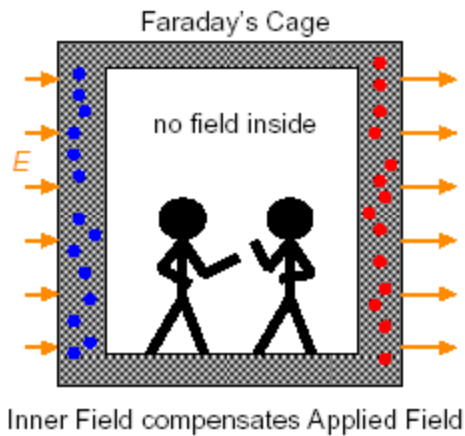
❖ Hốc rỗng bên trong vật dẫn: trường điện trong hốc rỗng sẽ bằng 0 : nguyên lý màn điện .



❖ Màn điện được dùng để chắn nhiễu của trường điện ngoài, hay không cho nhiễu từ thiết bị ảnh hưởng lên môi trường ngoài.

❖ Trong thực tế, ở một số trường hợp màn điện có thể là lưới kim loại.

❖ Lòng Faraday:



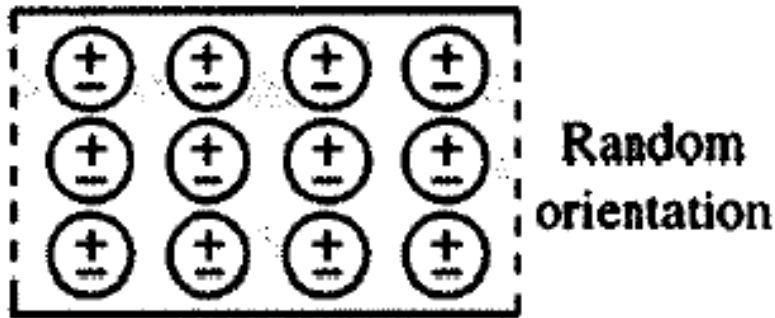
Don't Try This at Home!

2.5.2 Điện môi trong trường điện tĩnh:

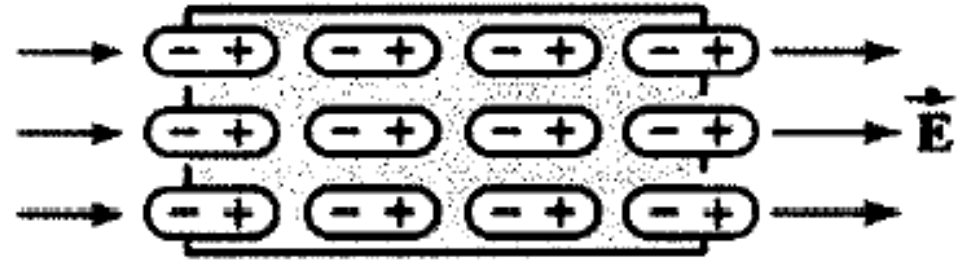
cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Tính phân cực của điện môi:



a) A dielectric in its normal



b) A polarized dielectric

cuu duong than cong . com

❖ Để đặc trưng cho mức độ phân cực, ta định nghĩa vector phân cực. Đối với điện môi tuyến tính:

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \text{ [C/m}^2\text{]}$$

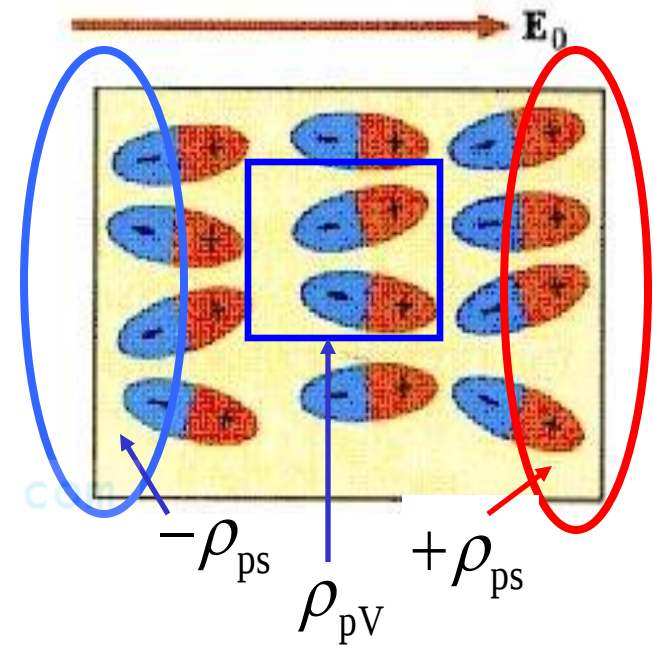
b) Điện tích phân cực (liên kết) :

- Mật độ điện tích phân cực mặt:

$$\rho_{pS} = -\vec{a}_n \left(\vec{P}_1 - \vec{P}_2 \right) = -P_{1n} + P_{2n} \text{ [C/m}^2\text{]}$$

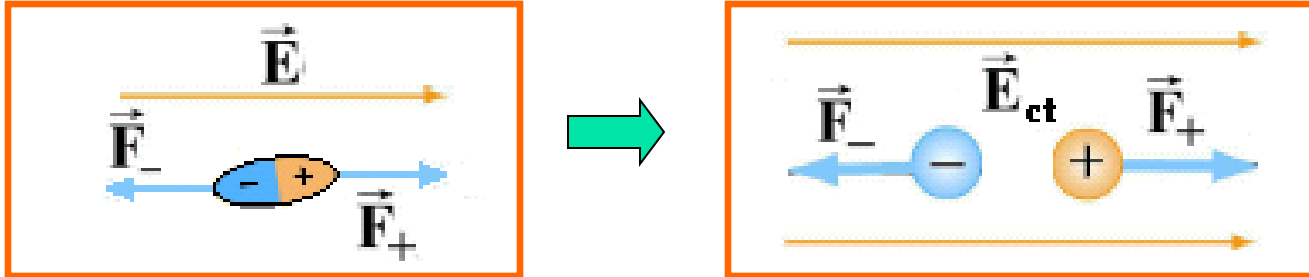
- Mật độ điện tích phân cực khối :

$$\rho_{pV} = -\text{div } \vec{P}$$



c) Đánh thủng điện môi:

- Khi trường điện ngoài $E \geq E_{ct}$: điện môi trở nên dẫn điện.

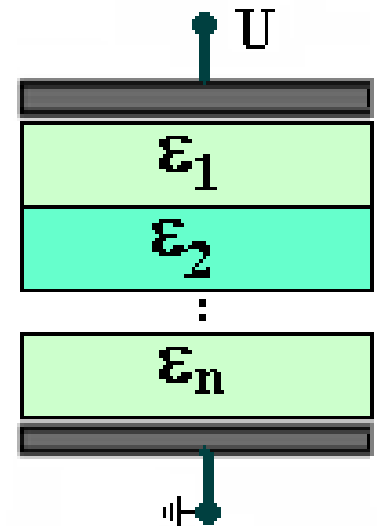


cuu duong than cong . com

- U_{ct} : điện áp tạo ra $E = E_{ct}$.

- Nếu điện môi không đồng nhất:

$$U_{brk} = \min\{U_{brk1}, U_{brk2}, \dots, U_{brkn}\}$$

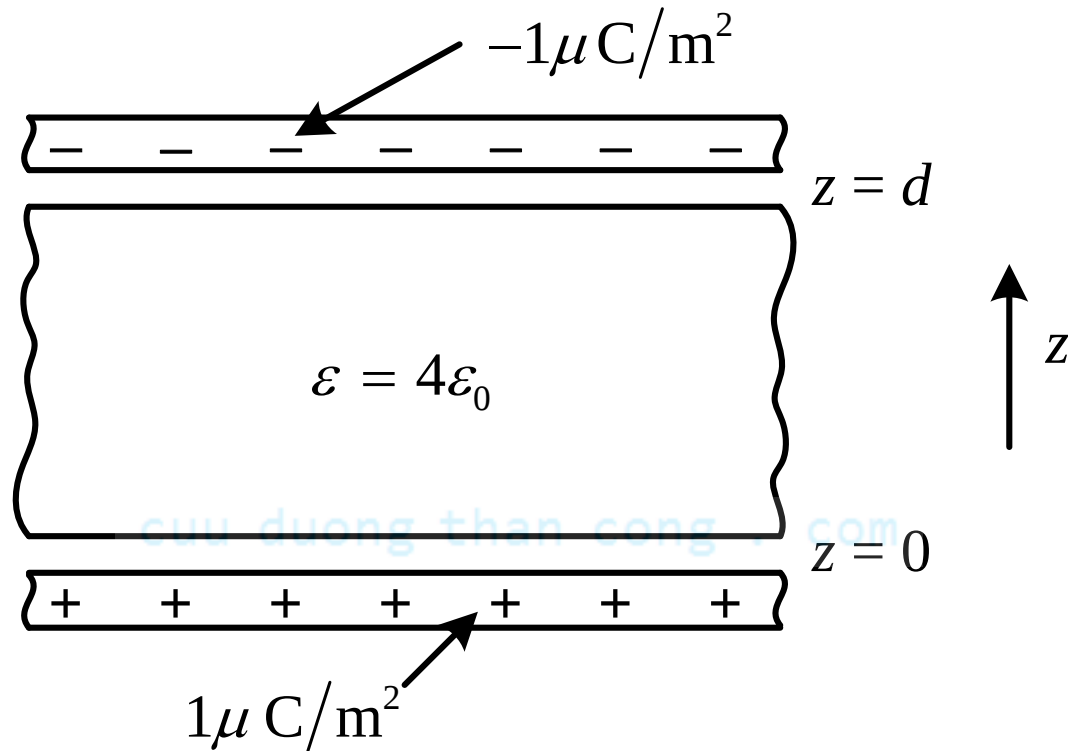


■ Thông số E_{ct} của một số vật liệu:

Approximate dielectric constant and dielectric strength of some materials

Dielectric material	Dielectric constant	Dielectric strength (kV/m)
Air	1.0	3,000
Bakelite	4.5	21,000
Ebonite	2.6	60,000
Epoxy	4	35,000
Glass (Pyrex)	4.5	90,000
Gutta-percha	4	14,000
Mica	6	60,000
Mineral oil	2.5	20,000
Paraffin	2.2	29,000
Polystyrene	2.6	30,000
Paranol	5	20,000
Porcelain	5	11,000
Quartz (fused)	5	30,000
Rubber	2.5–3	25,000
Transformer oil	2–3	12,000

❖ VD 2.5.3: Điện môi trong trường điện

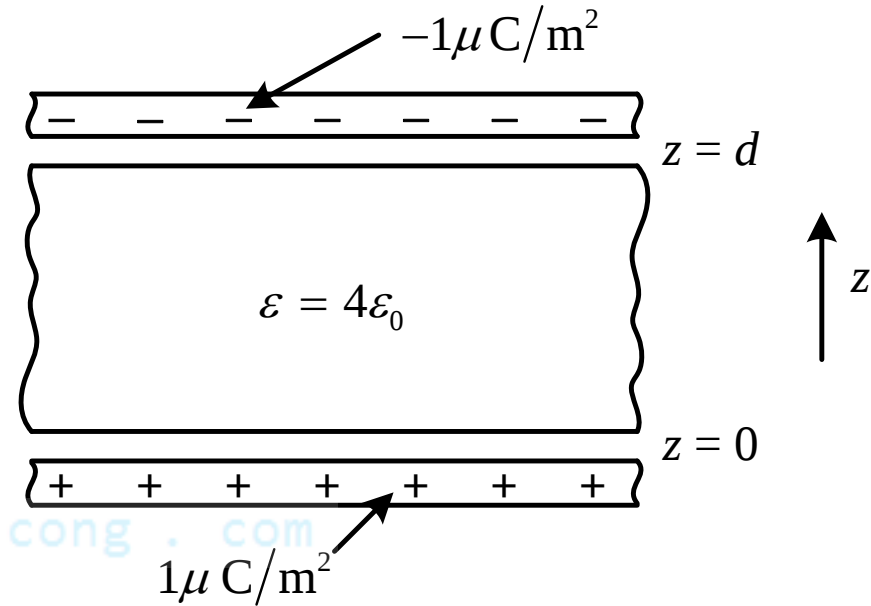


Khi $0 < z < d$,

$$(a) \quad \vec{D} = \rho_{S0} \vec{a}_z = 10^{-6} \vec{a}_z \text{ C/m}^2$$

❖ VD 2.5.3: Điện môi trong trường điện

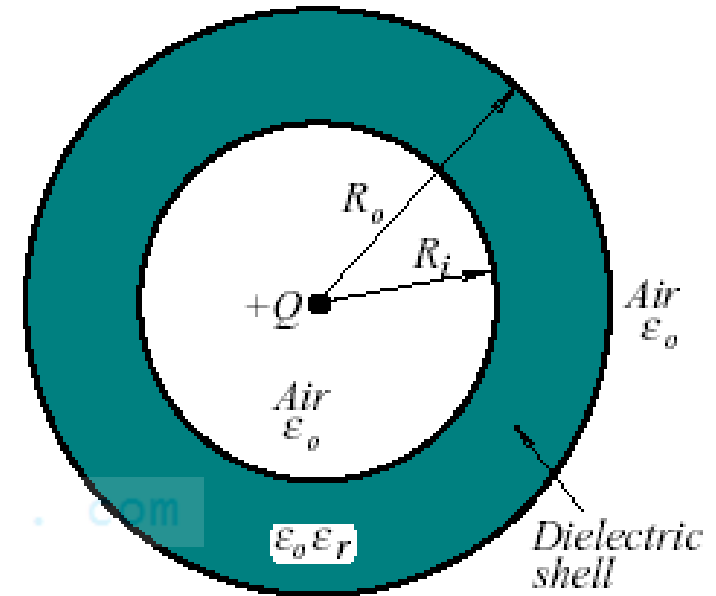
$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \vec{E} &= \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{1}{4\varepsilon_0} (10^{-6} \vec{a}_z) \\ &= \frac{36\pi}{4 \times 10^{-9}} \times 10^{-6} \vec{a}_z \\ &= 9000\pi \vec{a}_z \text{ V/m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \vec{P} &= \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \\ &= 10^{-6} \vec{a}_z - 0.25 \times 10^{-6} \vec{a}_z \\ &= 0.75 \times 10^{-6} \vec{a}_z \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

❖ VD 2.5.4: Điện môi trong trường điện

Điện tích dương Q đặt tại tâm vỏ cầu điện môi bán kính trong R_i , ngoài R_o , có hằng số điện môi ϵ_r . Xác định các vector cường độ trường điện, cảm ứng điện, phân cực điện và thế điện các miền.



Giải

❖ Khi $r > R_o$:

$$D_1 = \frac{Q}{4\pi r^2} \rightarrow E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$
$$\rightarrow P_1 = 0$$
$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

❖ VD 2.5.4: Điện môi trong trường điện

❖ Khi $R_i < r < R_o$:

$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$



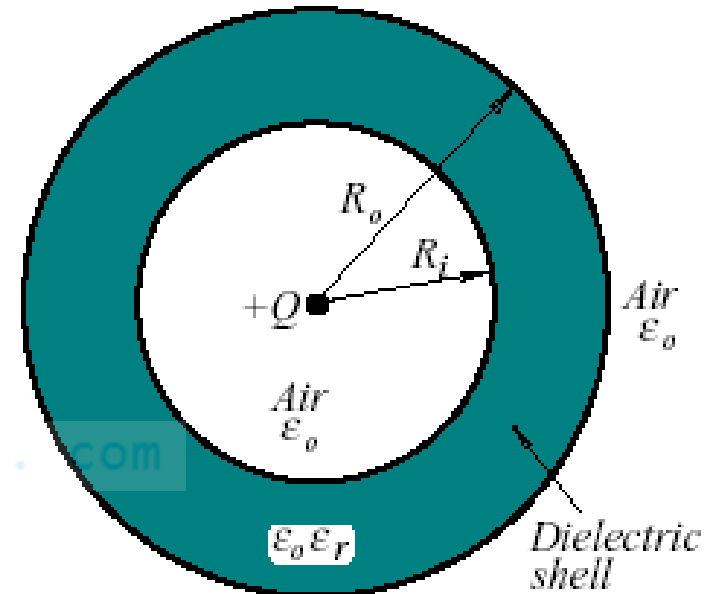
$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$



$$P_2 = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$



$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon R_o} (\epsilon_r - 1)$$



❖ VD 2.5.4: Điện môi trong trường điện

❖ Khi $r < R_i$:

$$D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$



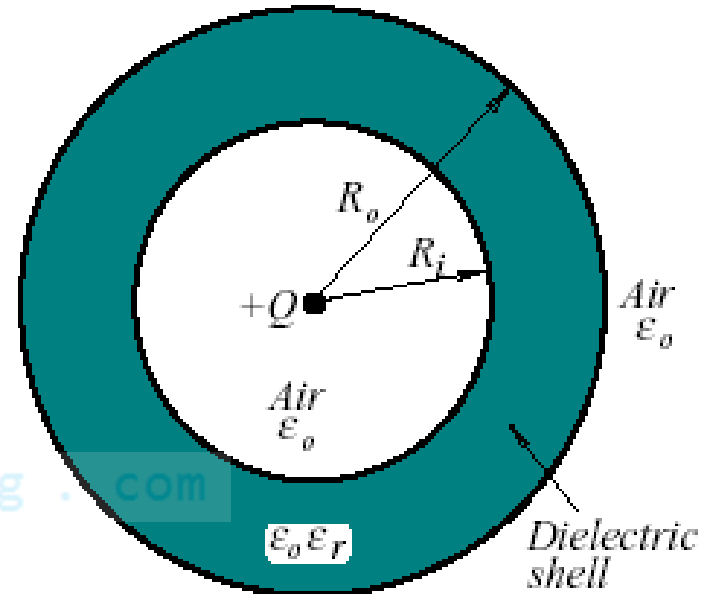
$$E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$$P_3 = 0$$



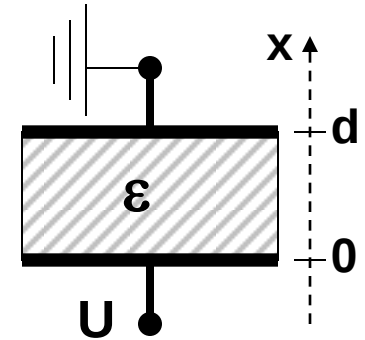
$$\varphi_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon R_0}(\epsilon_r - 1) - \frac{Q}{4\pi\epsilon R_i}(\epsilon_r - 1)$$



❖ VD 2.5.5: Điện môi trong trường điện

Tụ phẳng, đặt dưới điện áp $U = \text{const}$. Cho $d = 0,5 \text{ cm}$ và điện môi lý tưởng $\varepsilon = 4\varepsilon_0$.

- a) Tìm E , D và P trong điện môi khi đặt tụ dưới điện áp $U = 200\text{V}$?
- b) Nếu $E_{\text{ct}} = 200 \text{ kV/cm}$, tìm hiệu thế điện chọc thủng của tụ?



❖ Dùng p-trình Laplace, tìm φ . Suy ra $\vec{E}$, $\vec{D}$ và $\vec{P}$.

❖ Cho $E_{\text{max}} = E_{\text{ct}}$, suy ra U_{ct} .

❖ VD 2.5.6: Điện môi trong trường điện

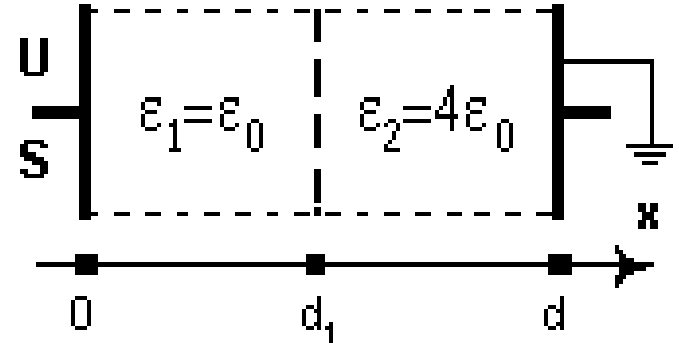
❖ Cho tụ phẳng hai lớp điện môi, có
 $d = 0,5 \text{ cm}$; $d_1 = 0,01 \text{ cm}$.

a) Xđịnh trường điện trong mỗi lớp ?

b) Tìm U_{ct} nếu :

$$E_{ct}(\text{kkhí}) = 30 \text{ kV/cm};$$

$$E_{ct}(\text{đmôi}) = 200 \text{ kV/cm}.$$



a) Do :

$$\begin{cases} \vec{\text{div}} \vec{D} = 0 \\ D_{1n} - D_{2n} = 0 \end{cases} \rightarrow D_1 = D_2 = A \rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{A}{\epsilon_1} \\ E_2 = \frac{A}{\epsilon_2} \end{cases}$$

$$\rightarrow U = \frac{A}{\epsilon_1} d_1 + \frac{A}{\epsilon_2} (d - d_1)$$

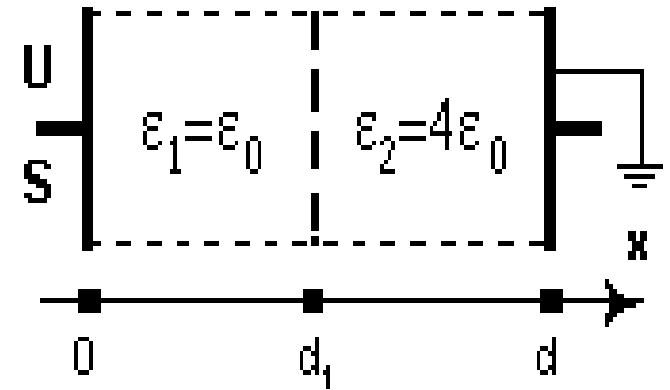
$$\vec{E}_1 = \frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 (d - d_1)} \vec{a}_x$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\epsilon_1 U}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 (d - d_1)} \vec{a}_x$$

❖ VD 2.5.6: Điện môi trong trường điện

b) Cho:
$$\begin{cases} E_1 = E_{ct}(\text{kkhi}) \rightarrow U_{ct1} \\ E_2 = E_{ct}(\text{đmôi}) \rightarrow U_{ct2} \end{cases}$$

→ $U_{ct} = \min\{U_{ct1}, U_{ct2}\}$

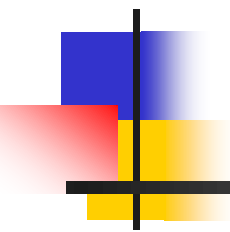


cuu duong than cong . com

Dễ thấy:
$$U_{ct} = U_{ct1} = \frac{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 (d - d_1) E_{ct}(\text{kkhi})}{\epsilon_2}$$

cuu duong than cong . com

Vậy:
$$U_{ct} = \frac{(4d_1 + d - d_1) E_{ct}(\text{kkhi})}{4} = 3,975 \text{ (kV)}$$

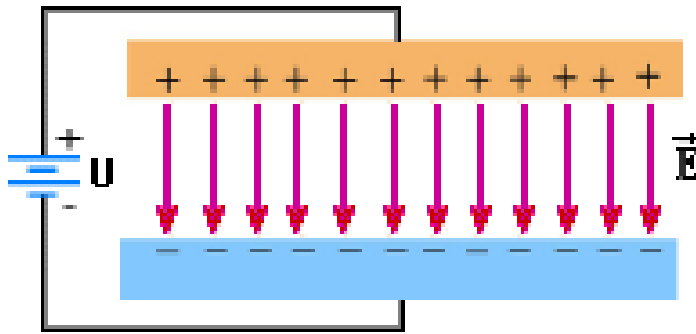


2.6 Năng lượng trường điện (W_e)

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Tính theo các vector đặc trưng :



$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \epsilon \cdot E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \frac{D^2}{\epsilon} dV \quad (J)$$

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2\epsilon} D^2 \text{ (J/m}^3\text{)} = \text{Mật độ năng lượng}$$

b) Tính theo thế điện & mật độ điện tích :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_L \rho_\ell \cdot \varphi \cdot d\ell$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \rho_S \cdot \varphi \cdot dS$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_V \cdot \varphi \cdot dV$$

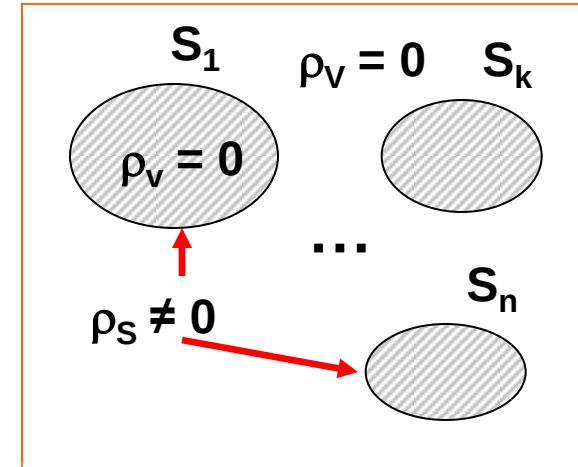
c) Năng lượng hệ N vật dẫn:

❖ Cho hệ n vật dẫn trong miền $\rho_V = 0$: chỉ tồn tại ρ_S trên bề mặt các vật dẫn.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_V \phi dV + \frac{1}{2} \int_S \rho_S \phi dS = \frac{1}{2} \int_S \rho_S \phi dS$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \rho_S \phi_k dS_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \phi_k \int_{S_k} \rho_S dS_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \phi_k q_k \quad \longrightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \phi_1 q_1 + \dots + \frac{1}{2} \phi_n q_n$$



❖ VD 2.6.1: Năng lượng trường điện

Điện tích phân bố đối xứng cầu theo qui luật :

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & (0 < r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

Xác định φ các miền & W_e tích lũy trong miền $r < R$?

❖ Dùng luật Gauss:

a) Khi $r > R$:
$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

▪ Suy ra thế điện :
$$\varphi_1 = -\int \vec{E}_1 d\vec{\ell} + C_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1$$

▪ Do $\varphi(r = \infty) = 0$, $C_1 = 0$.

$$\varphi_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1$$

❖ VD 2.6.1: Năng lượng trường điện (tt)

Điện tích phân bố đối xứng cầu theo qui luật :

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & (0 < r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

Xác định φ các miền & W_e tích lũy trong miền $r < R$?

b) Khi $r < R$: $\vec{E}_2 = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \vec{a}_r$

▪ Suy ra thế điện miền này : $\varphi_2 = -\int \vec{E}_2 d\vec{\ell} + C_2 = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + C_2$

▪ ĐK liên tục: $\varphi_1(r=R) = \varphi_2(r=R)$: $\frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} + C_2$

→ $\varphi_2 = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}$

❖ VD 2.6.1: Năng lượng trường điện (tt)

Điện tích phân bố đối xứng cầu theo qui luật :

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & (0 < r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

Xác định φ các miền & W_e tích lũy trong miền $r < R$?

c) Năng lượng trường điện: $W_e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 E^2 dV$

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \right)^2 (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{9\varepsilon_0} \int_0^R r^4 dr (4\pi) \rightarrow W_e = \frac{2\pi \rho_0^2 R^5}{45\varepsilon_0} \text{ (J)}$$



2.7 Tụ điện và điện dung của tụ điện:

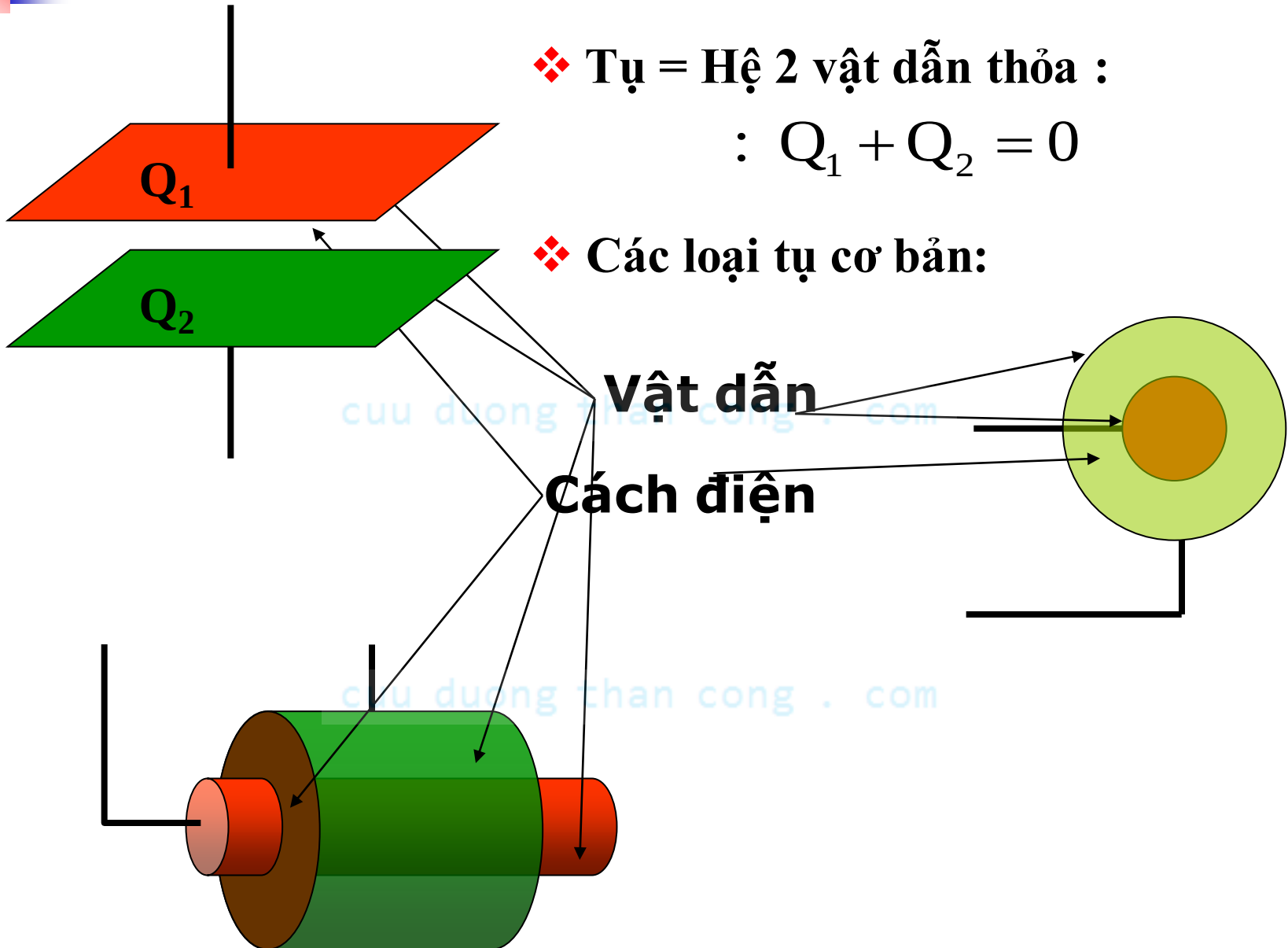
cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Tụ điện:

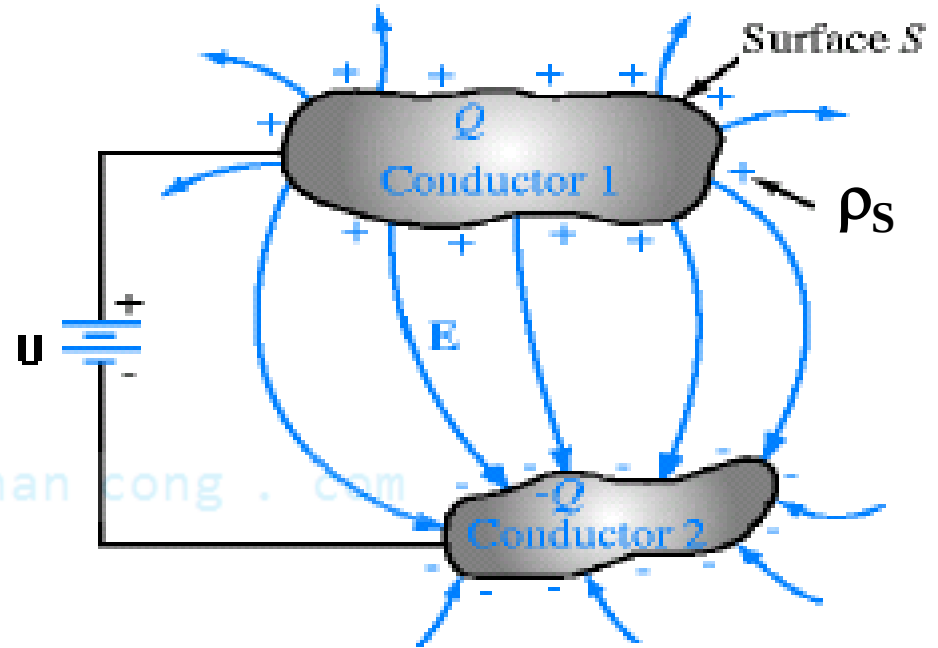
❖ Tụ = Hệ 2 vật dẫn thỏa :
: $Q_1 + Q_2 = 0$

❖ Các loại tụ cơ bản:



b) Điện dung của tụ điện:

❖ Điện dung C đặc trưng cho mức độ tích lũy năng lượng trường điện của tụ điện.



❖ Hai phương pháp tìm C cơ bản :

I. Gán Q trước và tìm U theo Q (có dùng đến luật Gauss).

II. Gán U trước và tìm Q theo U (có dùng đến phương trình Poisson – Laplace).



Qui trình bài toán xác định C :

- i.** Chọn hệ tọa độ.
- ii.** Cho U_{AB} = hiệu thế điện giữa 2 vật dẫn (Hoặc gán các vật dẫn mang điện tích Q và $-Q$).
- iii.** Xác định: $\vec{D}$ (hay $\vec{E}$)

iv. Xác định: $Q = \oint_S \vec{D} d\vec{S}$ (hay $U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$)

v. Xác định: $C = \left| \frac{Q}{U_{AB}} \right|$ (F)

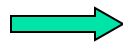
❖ VD 2.7.1: Tính điện dung

Tìm điện dung của tụ phẳng, điện môi ϵ , diện tích cốt tụ là S , cách nhau một khoảng là d ?

Giải

❖ Đặt tụ dưới hiệu thế U , ta xác định vectơ cường độ trường điện:

$$\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{a}_x$$



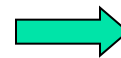
$$\vec{D} = \frac{\epsilon U}{d} \vec{a}_x$$

❖ Điện tích cốt tụ tại $x = 0$: Luật Gauss tích phân:

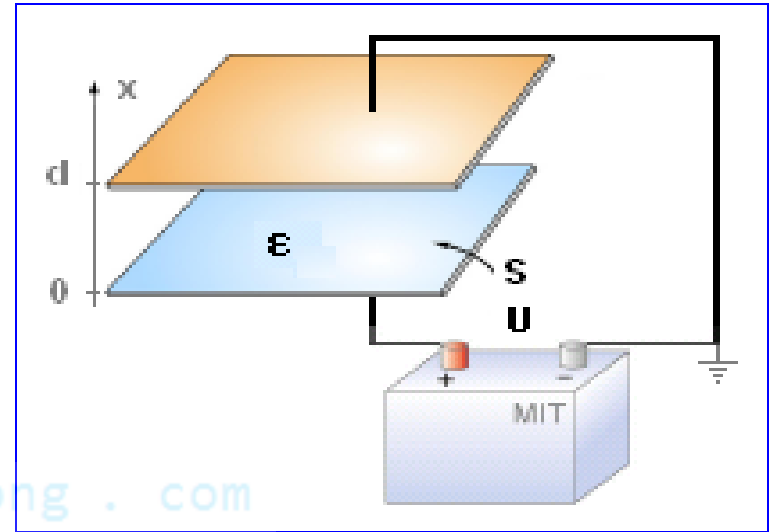
$$Q = D_x \cdot S$$

❖ Điện dung của tụ phẳng:

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right|$$

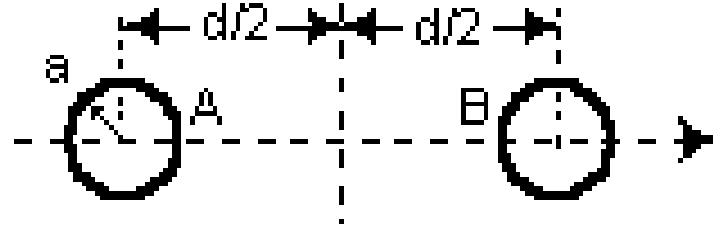


$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$



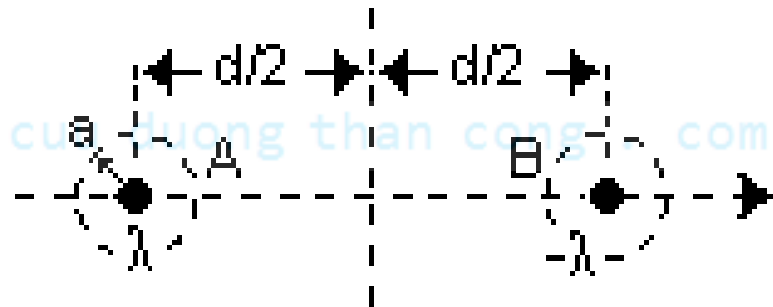
❖ VD 2.7.2: Tính điện dung đường dây

Đường dây song hành, bán kính dây dẫn là a , hiệu thế U , cách nhau d . Tìm điện dung đơn vị của đường dây (giả sử $d \gg a$) ?



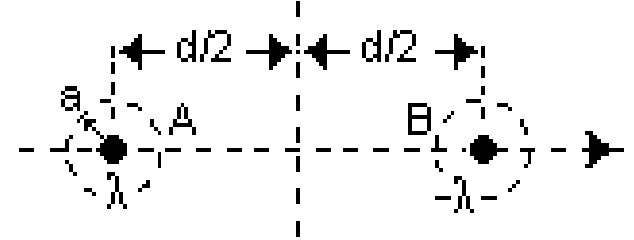
Giải

Tương đương 2 dây dẫn là 2 trục mang điện mật độ dài $\pm \lambda$ tại tâm dây dẫn.



❖ VD 2.7.2: Tính điện dung đường dây (tt)

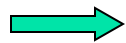
❖ Thế điện tại 1 điểm bên ngoài 2 dây dẫn:



$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r^-}{r^+}$$

$$\Rightarrow U = \varphi_A - \varphi_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left[\ln \frac{d-a}{a} - \ln \frac{a}{d-a} \right] = \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \ln \frac{d-a}{a}$$

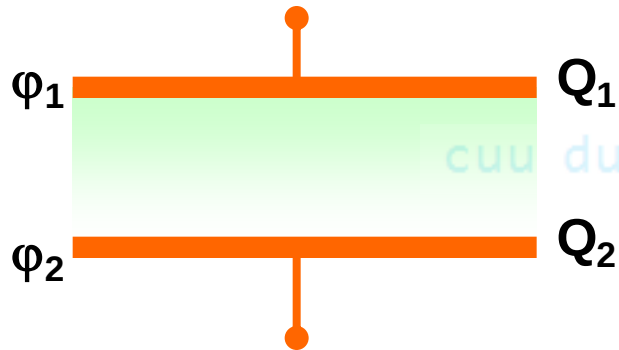
$$\text{Do } C_0 = \frac{\lambda}{U}$$



$$C_0 = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d-a}{a}}$$

c) Tính C dùng năng lượng trường điện:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \epsilon \cdot E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \frac{D^2}{\epsilon} dV \quad (J)$$



$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

→ Có thể tính W_e thông qua C hoặc ngược lại.

❖ VD 2.7.3: Tính C dùng W_e

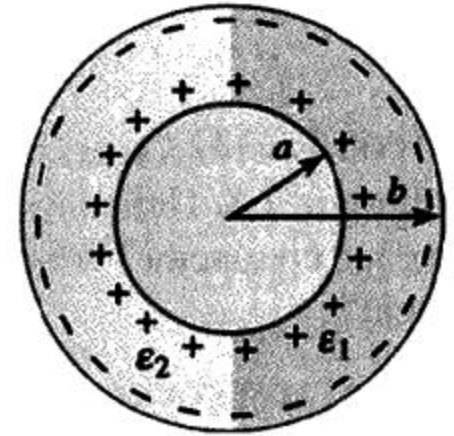
Tính C của tụ cầu gồm 2 lớp điện môi lý tưởng ?

Giải

❖ Đặt tụ dưới hiệu thế điện U ($\varphi_a = U$; $\varphi_b = 0$), dùng phương trình Laplace xác định thế điện và cường độ trường điện trong mỗi lớp điện môi:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{abU}{(b-a)r} - \frac{aU}{(b-a)}$$

$$\rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \frac{abU}{(b-a)r^2} \vec{a}_r$$

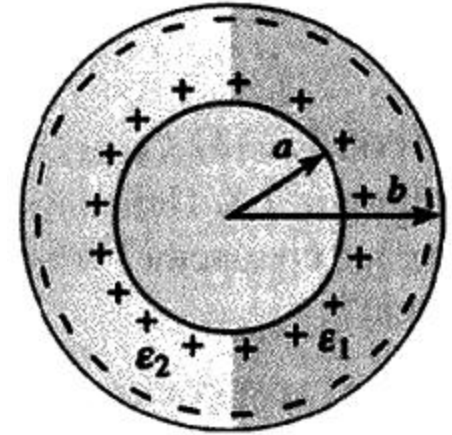


❖ VD 2.7.3: Tính C dùng W_e (tt)

Tính C của tụ cầu gồm 2 lớp điện môi lý tưởng ?

Giải

❖ Năng lượng trường điện của hệ:

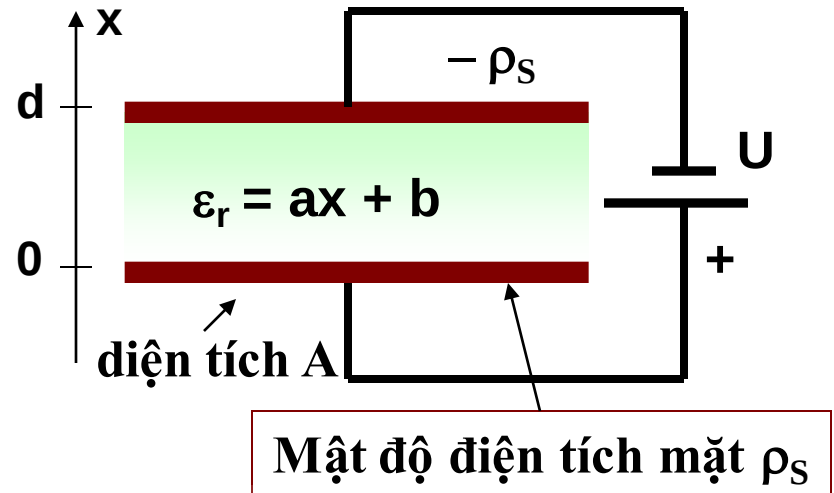


$$W_e = \frac{1}{2} \left[\int_{V_1} \epsilon_1 E_1^2 dV + \int_{V_2} \epsilon_2 E_2^2 dV \right]$$
$$= \frac{a^2 b^2 U^2}{2(b-a)^2} \left[\int_a^b \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\epsilon_1}{r^2} \sin \theta dr d\theta d\phi + \int_a^b \int_0^\pi \int_\pi^{2\pi} \frac{\epsilon_2}{r^2} \sin \theta dr d\theta d\phi \right]$$

$$W_e = \frac{abU^2}{2(b-a)} 2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) \longrightarrow C = \frac{2W_e}{U^2} = \frac{2\pi ab}{(b-a)} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

❖ VD 2.7.4: Tính C tụ không đồng nhất

Tụ phẳng, điện môi lý tưởng không đồng nhất hằng số điện môi $\epsilon_r = ax + b$ ($a, b = \text{const}$), nối vào nguồn DC hiệu thế U .



- a) Giả sử điện tích mặt trên cốt tụ tại $x = 0$ là ρ_s và trên cốt tụ tại $x = d$ là $-\rho_s$. Tính vector cảm ứng điện và cường độ trường điện trong điện môi ?
- b) Theo câu a), xác định hiệu thế điện U (theo ρ_s) và điện dung của tụ ?
- c) Theo câu a), xác định mật độ điện tích phân cực khối trong điện môi (theo ρ_s) ?

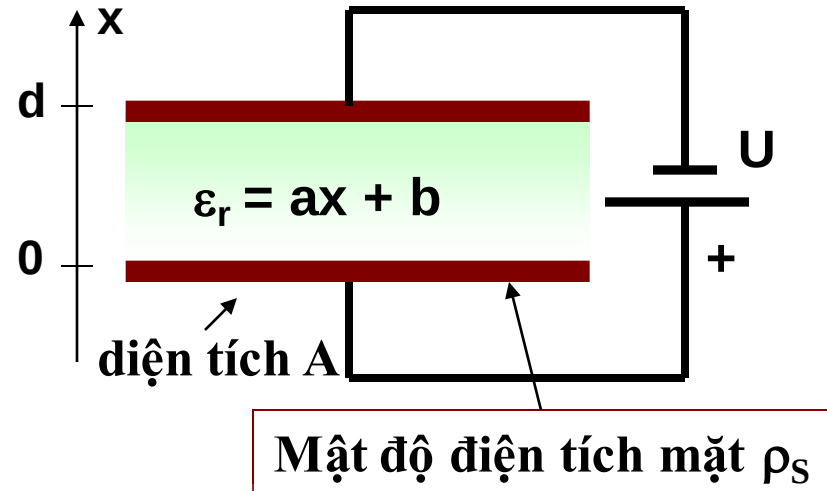
❖ VD 2.7.4: Tính C tụ không đồng nhất (tt)

Giải

a) Theo xếp chồng:

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \rho_S \vec{a}_x + \frac{1}{2} (-\rho_S) (-\vec{a}_x) = \rho_S \vec{a}_x$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \frac{1}{ax+b} \vec{a}_x$$



b) Theo định nghĩa hiệu thế điện:

$$U = \int_0^d E dx = \frac{\rho_S}{\epsilon_0} \int_0^d \frac{dx}{ax+b} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0 a} \ln(ax+b) \Big|_0^d = \frac{\rho_S}{\epsilon_0 a} \ln \left(1 + \frac{ad}{b} \right)$$

❖ Điện tích trên cốt tụ: $Q(x=0) = A \cdot \rho_S$.

❖ Điện dung của tụ: $C = \left| \frac{Q(x=0)}{U} \right| = \frac{\rho_S A}{\frac{\rho_S}{\epsilon_0 a} \ln \left(1 + \frac{ad}{b} \right)} = \frac{A \epsilon_0 a}{\ln \left(1 + \frac{ad}{b} \right)}$

❖ VD 2.7.4: Tính C tụ không đồng nhất (tt)

Giải

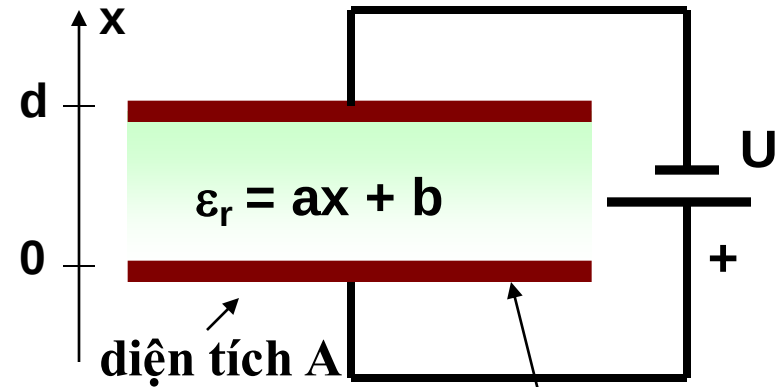
c) Vector phân cực điện :

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(ax + b - 1) \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} \frac{1}{ax+b} \vec{a}_x = \rho_S \frac{ax+b-1}{ax+b} \vec{a}_x$$

❖ Điện tích phân cực khối :

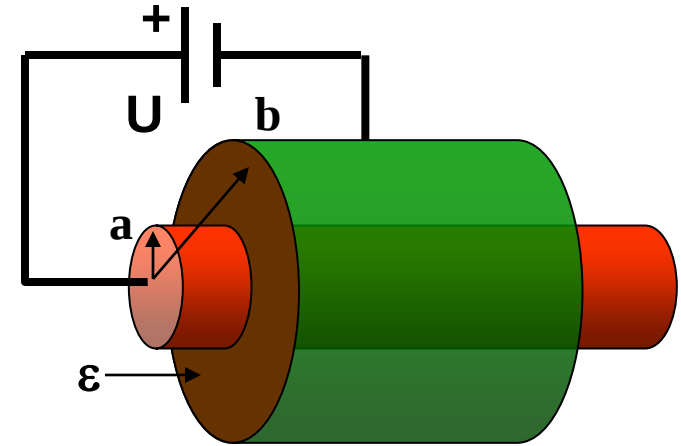
$$\rho_{PV} = -\text{div}\vec{P} = -\rho_S \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ax+b-1}{ax+b} \right) = -\frac{\rho_S a}{(ax+b)^2}$$



Mật độ điện tích mặt ρ_S

❖ VD 2.7.5: Tính C tụ không đồng nhất

Tụ trụ, bán kính trong $a = 1\text{cm}$, bán kính ngoài $b = 2,5\text{cm}$, điện môi lý tưởng không đồng nhất hằng số điện môi $\epsilon_r = (0,1 + r)/r$, nối vào nguồn DC hiệu thế U . Xác định:



- a) Cường độ trường điện và cảm ứng điện trong điện môi ?
- b) Điện tích trên cốt tụ trong và điện dung của tụ (bằng số) trên đơn vị dài ?

- a) Do tính đối xứng của bài toán, cảm ứng điện có dạng:

$$\vec{D} = D_r \vec{a}_r \quad (\text{hệ trụ}) \quad \text{Và: } \text{div} \vec{D} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) = 0$$

$$\longrightarrow D_r = \frac{A}{r} \quad (\text{Với } A = \text{const})$$

❖ VD 2.7.5: Tính C tụ không đồng nhất (tt)

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{A}{\epsilon_0} \frac{1}{0,1+r} \vec{a}_r$$

❖ Theo định nghĩa hiệu thế điện:

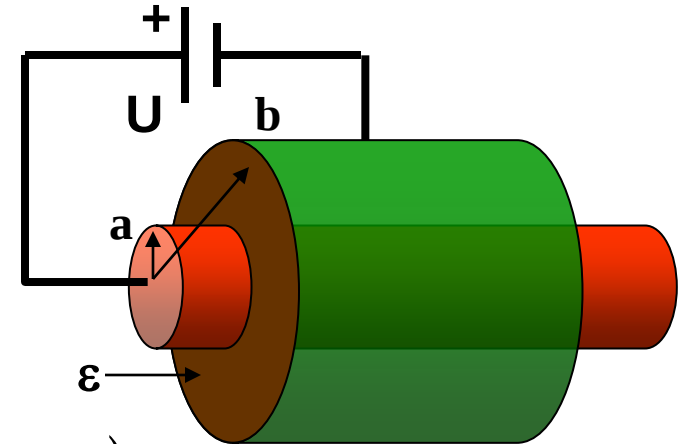
$$U = \frac{A}{\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{0,1+r} = \frac{A}{\epsilon_0} \ln(0,1+r) \Big|_a^b = \frac{A}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{0,1+b}{0,1+a}\right)$$

$$\rightarrow A = \epsilon_0 U / \ln\left(\frac{0,1+b}{0,1+a}\right)$$

Vậy:

$$\vec{D} = \frac{\epsilon_0 U}{\ln\left(\frac{0,1+b}{0,1+a}\right)} \frac{1}{r} \vec{a}_r$$

$$\vec{E} = \frac{U}{\ln\left(\frac{0,1+b}{0,1+a}\right)} \frac{1}{0,1+r} \vec{a}_r$$

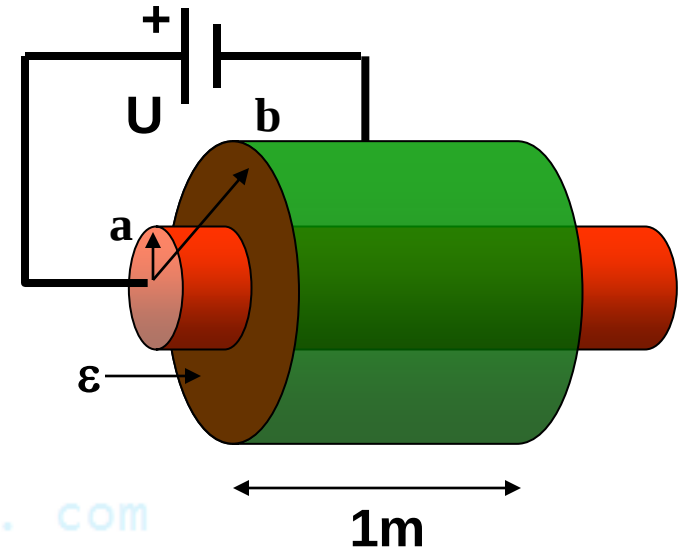


❖ VD 2.7.5: Tính C tụ không đồng nhất (tt)

b) Điện tích trên cốt tụ trong trên 1m:

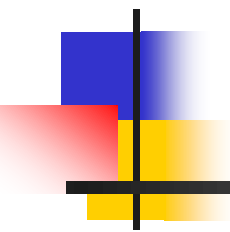
$$Q_{r=a} = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{\epsilon_0 U}{\ln\left(\frac{0,1+b}{0,1+a}\right)} \frac{1}{r} \cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow Q_{r=a} = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln\left(\frac{0,1+b}{0,1+a}\right)}$$



❖ Điện dung trên đơn vị dài:

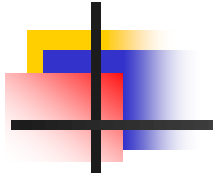
$$C_0 = \left| \frac{Q_{r=a}}{U} \right| = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{0,1+b}{0,1+a}\right)} = \frac{2\pi \cdot 8,842 \cdot 10^{-12}}{\ln\left(\frac{0,125}{0,11}\right)} = 434,6 \text{ pF}$$



2.8 Phương pháp ảnh điện

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

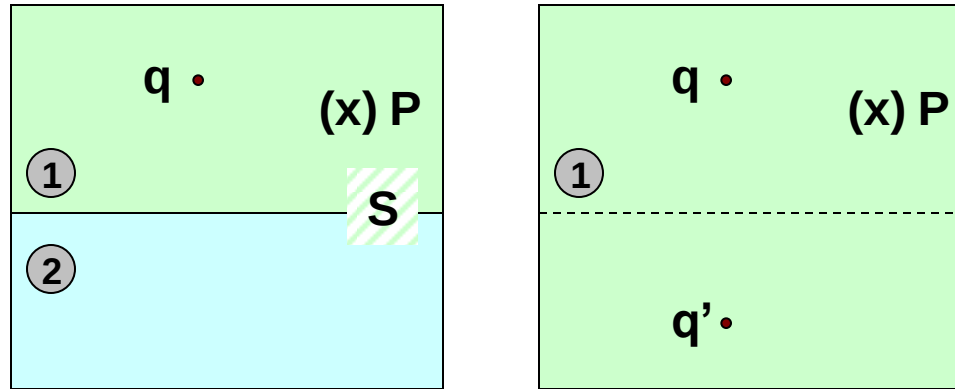


a) Nguyên tắc:

- Khi đặt vật mang điện gần các môi trường điện môi hay vật dẫn: theo tính chất của trường điện tĩnh sẽ có sự xuất hiện điện tích cảm ứng và điện tích liên kết.
- Sự có mặt của điện tích cảm ứng và liên kết: sẽ làm thay đổi phân bố trường điện ban đầu.
- Việc xác định các loại điện tích này tương đối phức tạp, và dùng luật Gauss để tính trường điện vô cùng khó khăn vì chúng thường phân bố không đều.
- PP ảnh điện là PP tốt nhất để xác định trường điện mà không cần quan tâm đến việc xác định qui luật các loại điện tích phân bố này.
- PP ảnh điện ứng dụng rộng rãi trong lý thuyết đường dây và lý thuyết anten.

b) Qui trình phương pháp ảnh điện:

Xét bài toán:



cuu duong than cong . com

b₁) Thay môi trường 2 bằng 1 để đồng nhất hóa môi trường.

b₂) Đưa điện tích ảnh (q') vào môi trường 2 để duy trì điều kiện biên của bài toán.

cuu duong than cong . com

❖ **Định lý duy nhất nghiệm:** nghiệm không thay đổi trong 2 mô hình vì điều kiện biên và phân bố điện tích không đổi ở môi trường cần tính trường điện.

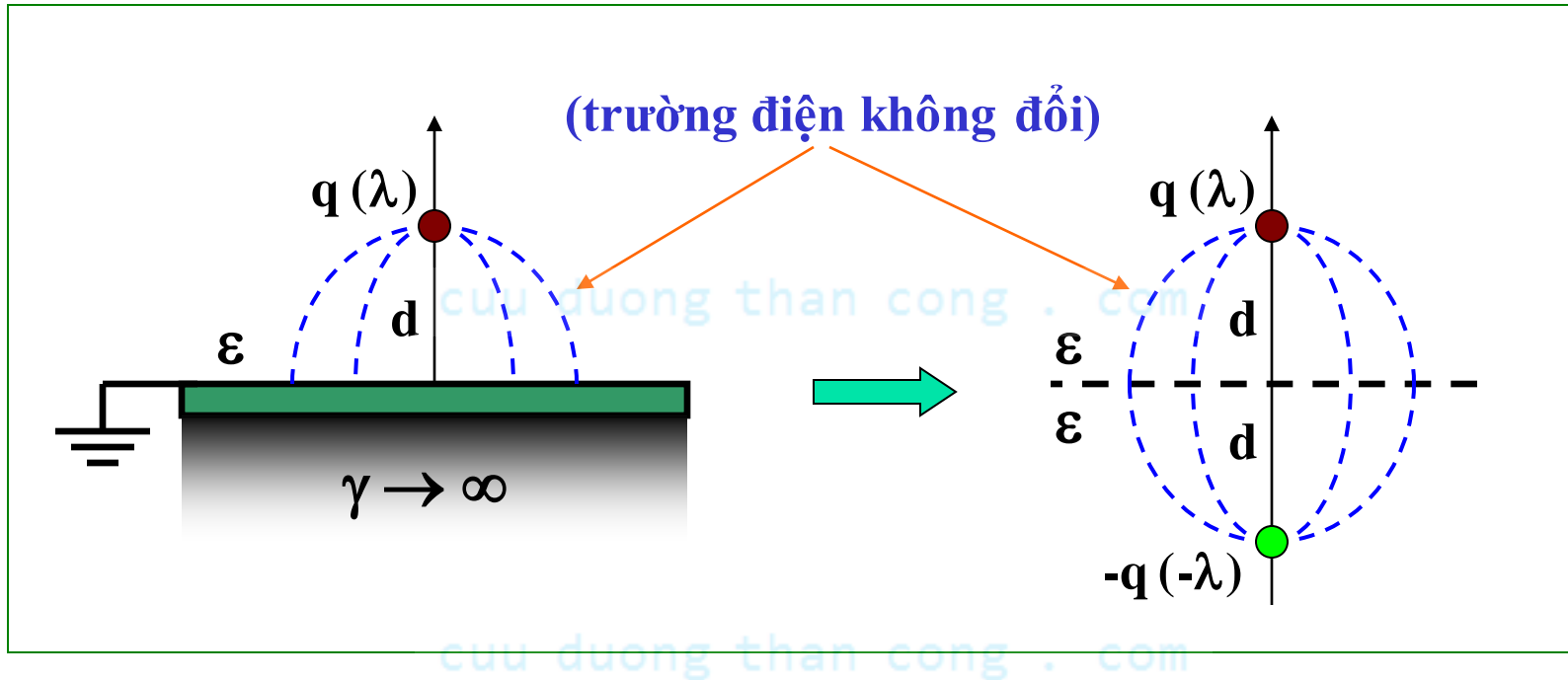
c) Các trường hợp cơ bản của phương pháp ảnh điện:

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

❖ TH1: Phân cách phẳng đmôi – vdẫn:

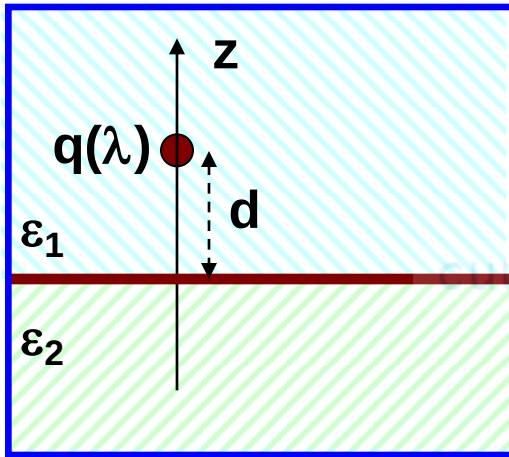
- Bài toán: Điện tích q hay trục mang điện λ trước mặt dẫn rộng vô hạn nối đất.



- Ảnh điện: Điện tích $-q$ hay trục mang điện $-\lambda$ đối xứng qua bề mặt vật dẫn.

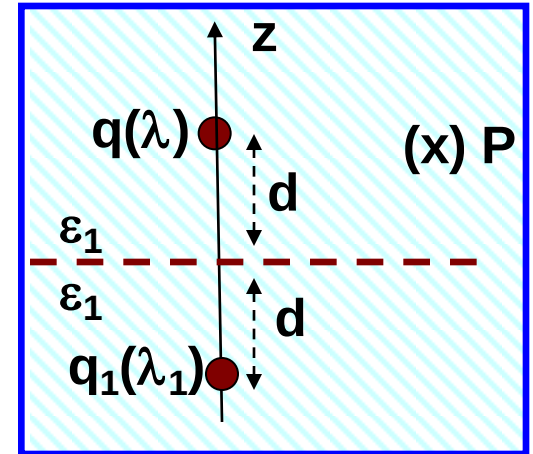
❖ TH2: Phân cách phẳng đmôi - đmôi

■ Điện tích q hay trục λ :



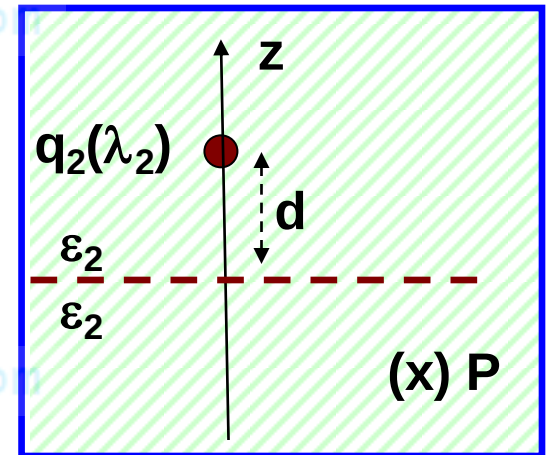
P ở môi trường 1

$$q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$



$$q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

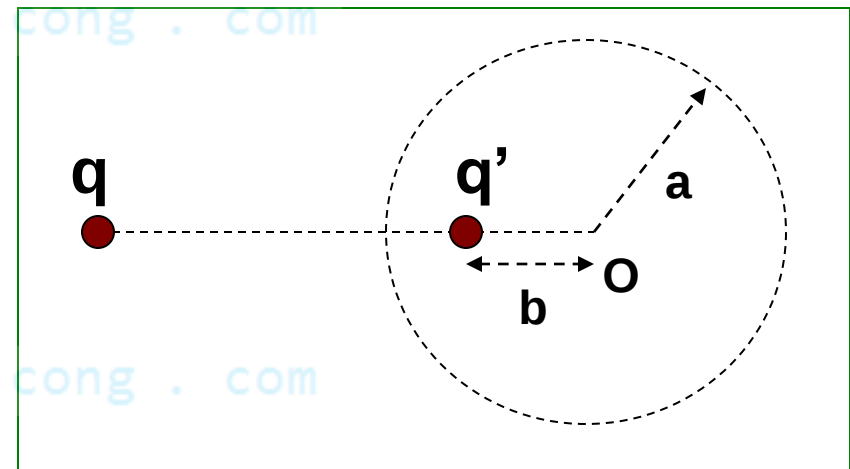
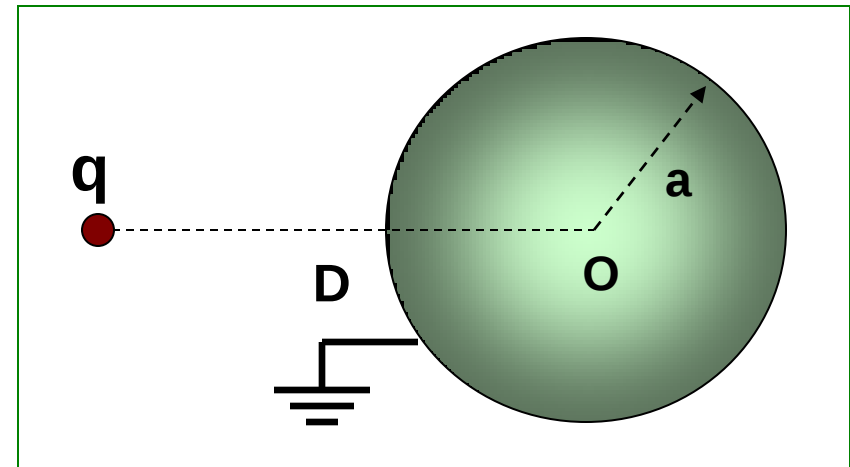
P ở môi trường 2



❖ TH3: Phân cách cầu đmôi – vật dẫn

- Điện tích q đặt trước quả cầu dẫn (bán kính a) nối đất.
- Bỏ quả cầu dẫn, và thêm vào điện tích q' thỏa:

$$b = \frac{a^2}{D} \quad q' = -q \frac{a}{D}$$



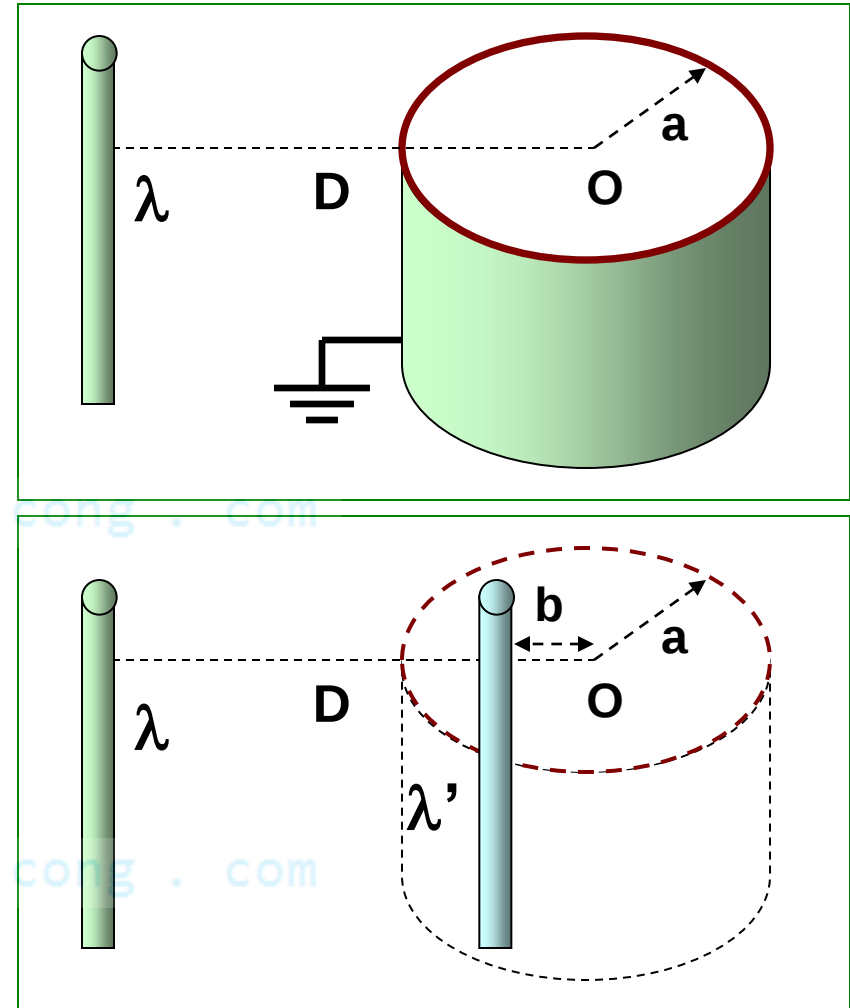
- Nếu quả cầu không nối đất -> thêm điện tích ảnh $q_1 = -q'$ tại tâm O thỏa điều kiện biên thế điện trên bề mặt quả cầu.

❖ TH4: Phân cách trụ đồng – vật dẫn

- Trụ mang điện λ đặt trước trụ dẫn (bán kính a) nối đất.
- Bỏ trụ dẫn, và thêm vào trụ mang điện λ' thỏa:

$$b = \frac{a^2}{D}$$

$$\lambda' = -\lambda$$



❖ VD 2.8.1: Dùng phương pháp ảnh điện

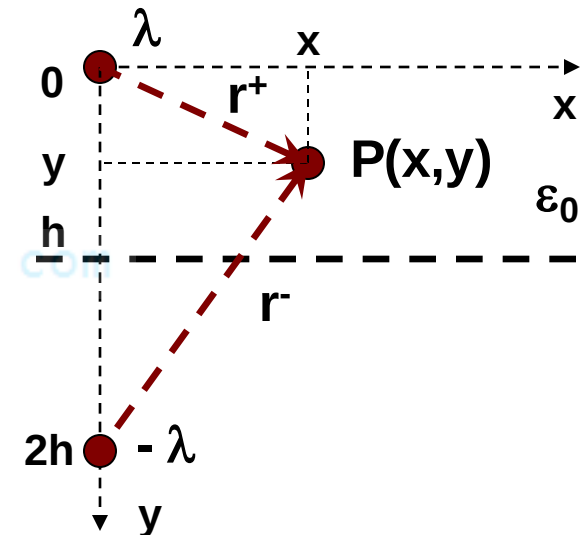
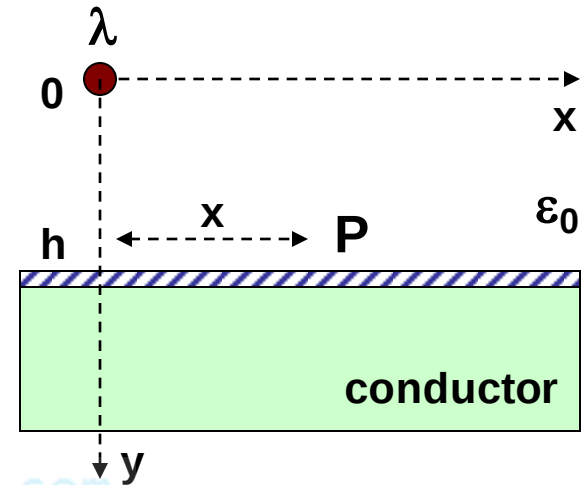
Dây dẫn dài vô hạn, mang điện với mật độ dài $\rho_\ell = \lambda$, cách mặt dẫn phẳng nối đất một khoảng là h , tìm mật độ điện tích mặt ρ_s tại điểm $P(x, h)$?

Giải

❖ Bài toán ảnh điện:

❖ Thế điện ở miền $y < h$ dùng công thức:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln r^- - \ln r^+ \right]$$

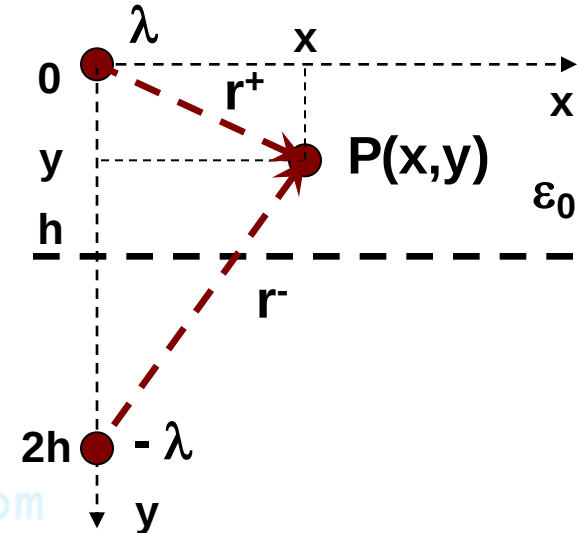


❖ VD 2.8.1 : Dùng PP ảnh điện (tt)

Do: $\vec{r}^- = (x)\vec{a}_x + (y-2h)\vec{a}_y$

$$\vec{r}^+ = (x)\vec{a}_x + (y)\vec{a}_y$$

→
$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \sqrt{x^2 + (y-2h)^2} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right]$$



❖ Trường điện ở miền $y < h$ dùng công thức:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{a}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{a}_y$$

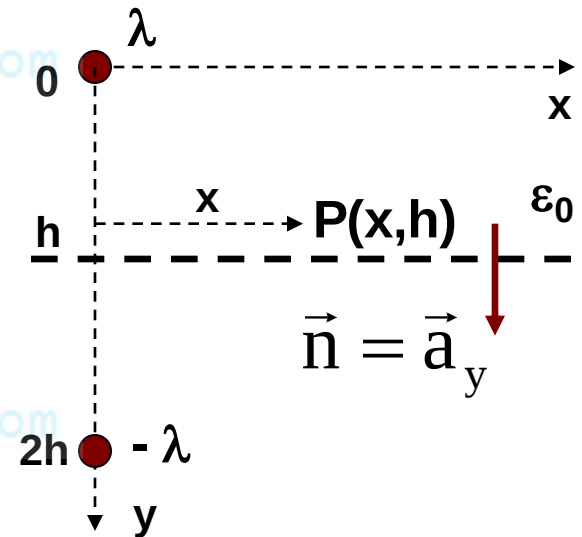
❖ VD 2.8.1 : Dùng PP ảnh điện (tt)

❖ Điện tích mặt tại P :

$$\rho_S = \vec{a}_y [0 - \varepsilon_0 \vec{E}]_{y=h} = -\varepsilon_0 E_y \Big|_{y=h} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(y=h)}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{y-2h}{x^2 + (y-2h)^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=h}$$

$$\Rightarrow \rho_S = \left[-\frac{\lambda h}{\pi(x^2 + y^2)} \right]$$



❖ VD 2.8.2: PP ảnh điện tìm C

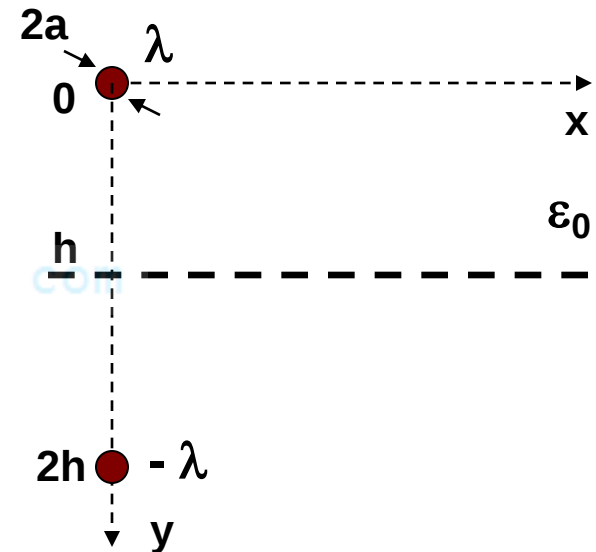
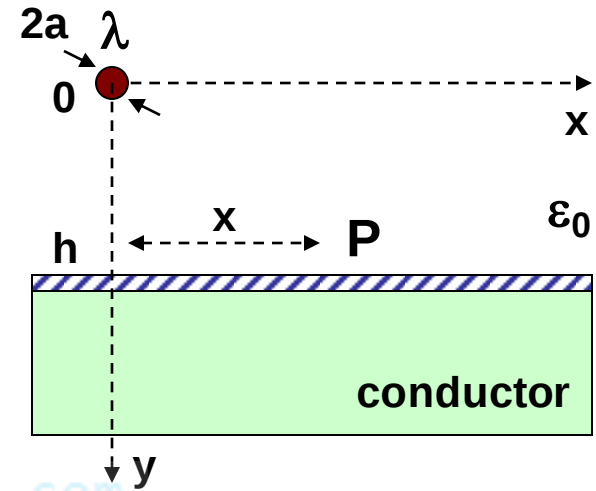
Dây dẫn dài vô hạn, bán kính a , mang điện với mật độ dài $\rho_l = \lambda$, cách mặt dẫn phẳng nối đất một khoảng là h ($h \gg a$), tìm điện dung C_0 trên đơn vị dài đường dây ?

Giải

❖ Bài toán ảnh điện:

❖ Điện dung đơn vị của hệ 2 dây dẫn đã xác định ở VD 2.7.2 là :

$$C_0(\pm\lambda) = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h-a}{a}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{a}}$$



❖ VD 2.8.2: PP ảnh điện tìm C (tt)

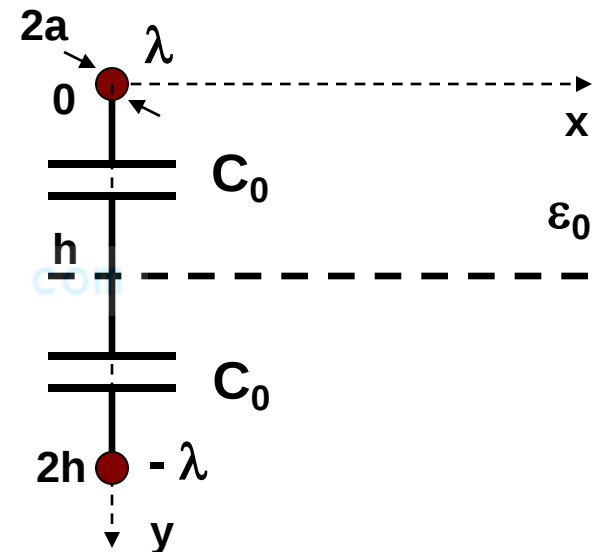
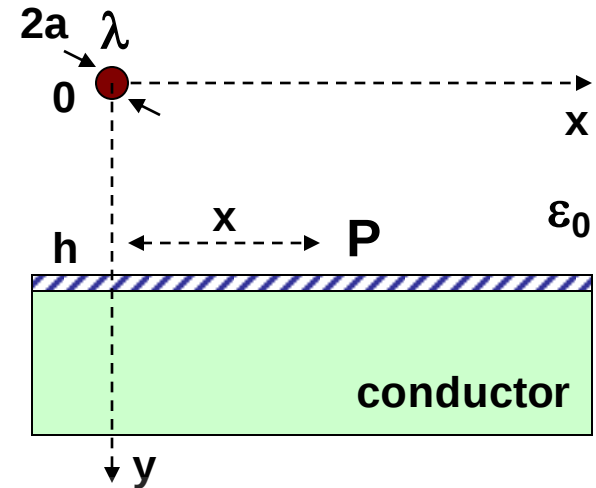
Dây dẫn dài vô hạn, bán kính a , mang điện với mật độ dài $\rho_l = \lambda$, cách mặt dẫn phẳng nối đất một khoảng là h ($h \gg a$), tìm điện dung C_0 trên đơn vị dài đường dây ?

Giải

❖ Ta suy ra điện dung C_0 :

$$C_0 = 2C_0(\pm\lambda)$$

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{a}}$$





2.9 Dòng điện không đổi :

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Trường điện tĩnh ở môi trường dẫn:

❖ Phân loại môi trường: dựa vào độ dẫn điện σ [S/m].

❖ Môi trường dẫn: $\sigma \neq 0$.



$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \text{ [A/m}^2\text{]} \neq 0$$

❖ Các đại lượng đặc trưng của trường điện tĩnh trong môi trường dẫn: $\vec{E}$, $\vec{D}$, φ and $\vec{J}$.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \text{ [A/m}^2\text{]}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi \text{ [V/m]}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \text{ [C/m}^2\text{]}$$



Phương trình mô tả & ĐKB:

Từ hệ phương trình Maxwell: $\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$; $\vec{J}_{1n} - \vec{J}_{2n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$

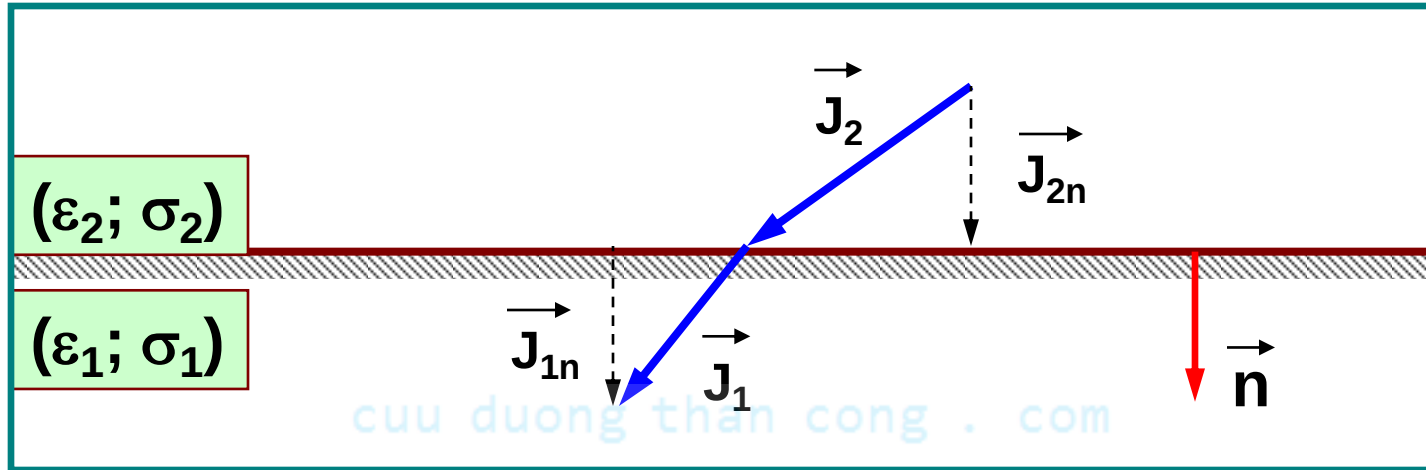
→ Trường điện tĩnh: $\text{div} \vec{J} = 0$; $\vec{J}_{1n} - \vec{J}_{2n} = 0$

Như vậy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{D} = \rho_v \\ \text{div } \vec{J} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{1t} - E_{2t} = 0 \\ D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \\ J_{1n} - J_{2n} = 0 \end{array} \right.$$

Và : $\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$

b) ĐKB đối với vector mật độ dòng $\vec{J}$:



$$J_{1n} - J_{2n} = 0$$

$$\vec{a}_n (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0$$

$$(\vec{J}_{1n} - \vec{J}_{2n}) = 0$$

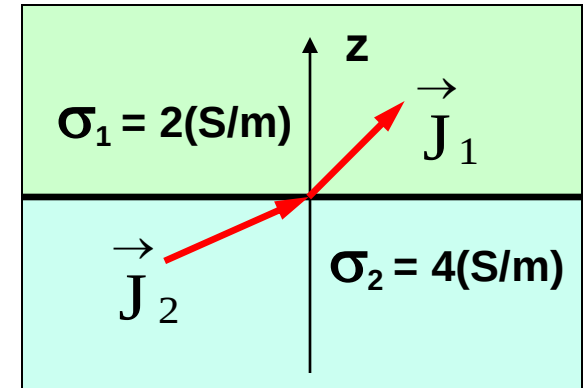


Dùng để xác định thành phần pháp tuyến của trường điện trong môi trường dẫn.

❖ VD 2.9.1: ĐKB đối với vector $\vec{J}$

Mặt $z = 0$ là biên 2 môi trường dẫn.

Tìm $\vec{J}_2$ biết $\vec{J}_1 = [5\vec{a}_x - 10\vec{a}_z] \text{ A/m}^2$



❖ Vector đơn vị ptuyến: $\vec{n} = \vec{a}_z$

❖ Các thành phần của $\vec{J}_1$: $\vec{J}_{1n} = (\vec{J}_{1n} \cdot \vec{n})\vec{n} = -10\vec{a}_z$

$$\vec{J}_{1t} = \vec{J}_{1n} - \vec{J}_{1n} = 5\vec{a}_x$$

❖ Các thành phần của $\vec{J}_2$: $\vec{J}_{2n} = \vec{J}_{1n} = -10\vec{a}_z$

$$\vec{J}_{2t} = \sigma_2 \vec{E}_{2t} = \sigma_2 \vec{E}_{1t} = \frac{\sigma_2 \vec{J}_{1t}}{\sigma_1} = 10\vec{a}_x$$

$$\vec{J}_2 = \vec{J}_{2n} + \vec{J}_{2t} = 10\vec{a}_x - 10\vec{a}_z \text{ [A/m}^2\text{]}$$

c) Tính trường điện ở môi trường dẫn:

c₁) Xác định thế điện φ trong môi trường dẫn:

$$\text{div} \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div}[\sigma(\text{grad} \varphi)] = 0$$

Khi $\sigma = \text{const}$:

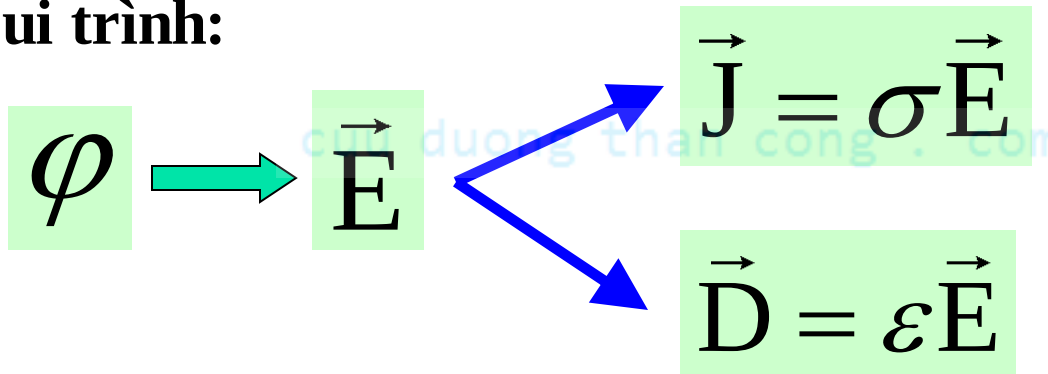
$$\Delta \varphi = 0$$

Cách giải

Khi $\sigma \neq \text{const}$:

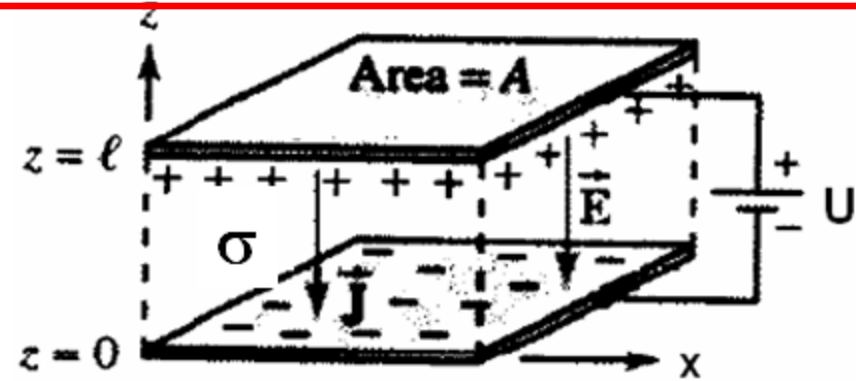
$$\text{div}[\sigma(\text{grad} \varphi)] = 0$$

❖ Qui trình:



❖ VD 2.9.2: Trường điện ở mt dẫn

Tụ phẳng, diện tích cốt tụ là A , đặt cách nhau ℓ , điện môi thực có độ dẫn điện $\sigma = \text{const}$, nối vào hiệu thế $U = \text{const}$. Tìm phân bố thế điện trong điện môi? Suy ra vector $\vec{E}$ & $\vec{J}$?



Giải

❖ Hệ Đề các, đặt hiệu thế U và ta nhận thấy : $\varphi = \varphi(z)$.

❖ Thế điện $\varphi = \varphi(z)$ là nghiệm ptrình Laplace.

$$\Rightarrow \varphi = Az + B$$

❖ ĐKB : $\varphi(\ell) = U$ & $\varphi(0) = 0$.



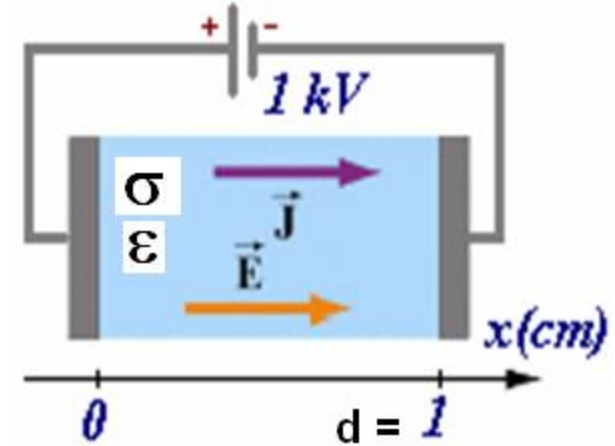
$$\varphi = \frac{U}{\ell} z$$



$$\vec{E} \quad \& \quad \vec{J}$$

❖ VD 2.9.3: Trường điện ở mt dẫn

Tụ phẳng điện môi thực $\epsilon = (5-3x)\epsilon_0$, $\sigma = 10^{-10}$ S/cm đặt dưới hiệu thế $U = 1$ KV, khoảng cách giữa 2 cốt tụ là 1 cm. Xác định mật độ dòng trong điện môi, vector cảm ứng điện và phân cực điện, suy ra mật độ khối tự do và liên kết?



Giải

❖ Nghiệm phương trình Laplace:

$$\varphi = -\frac{U}{d}x + U$$



$$\vec{E} = \frac{U}{d}\vec{a}_x$$



$$\vec{J} = \frac{\sigma U}{d}\vec{a}_x$$

$$\vec{D} = \frac{\epsilon_0 U}{d}(5-3x)\vec{a}_x$$

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_0 U}{d}(4-3x)\vec{a}_x$$

❖ Và áp dụng: $\rho_V = \text{div } \vec{D}$; $\rho_{pV} = -\text{div } \vec{P}$

c₂) Tích phân trực tiếp trường $\vec{J}$:

i. Dựa vào phương trình $\text{div}\vec{J} = 0$ và tính đối xứng:

→ Biểu thức của $\vec{J}$ (và các hằng số tích phân).

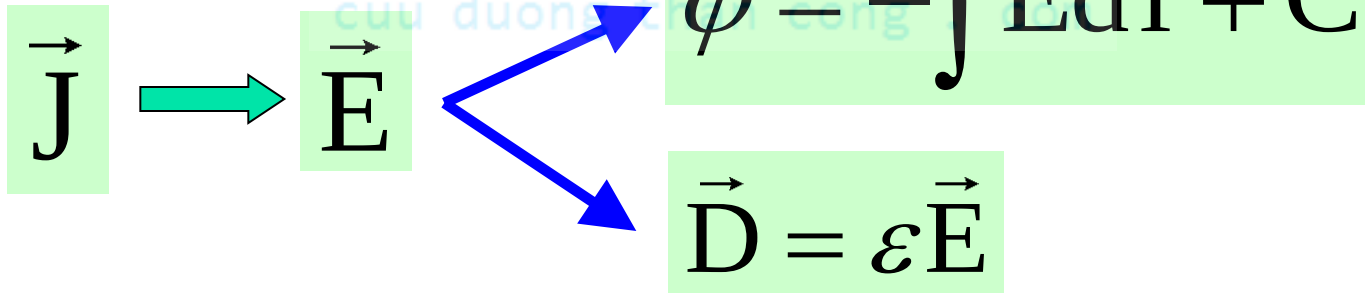
ii. Vector c.độ trường điện:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

(Nếu σ phụ thuộc tọa độ thì thể ngay ở bước này)

iii. Áp dụng : $U_{ab} = \int_{a \rightarrow b} \vec{E} d\vec{l}$ suy ra các hằng số tích phân .

❖ Qui trình:





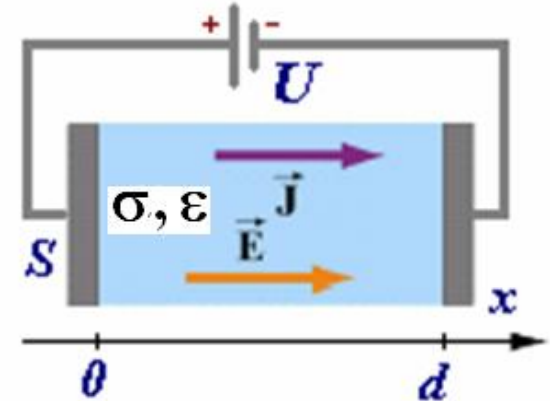
Sự tương tự giữa $\vec{D}$ và $\vec{J}$:

Môi trường $\rho_v = 0$	Môi trường dẫn
$\vec{E}, \varphi, \varepsilon, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \dots$	$\vec{E}, \varphi, \sigma, \vec{J} = \sigma \vec{E}, \dots$
$\text{rot } \vec{E} = 0 ; \vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$	$\text{rot } \vec{E} = 0 ; \vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$
$\text{div } \vec{D} = 0$	$\text{div } \vec{J} = 0$
$E_{1t} - E_{2t} = 0; D_{1n} - D_{2n} = 0$	$E_{1t} - E_{2t} = 0; J_{1n} - J_{2n} = 0$

❖ Chỉ cần thay vị trí của $\vec{D}$ bằng $\vec{J}$ trong phương pháp trước.

❖ VD 2.9.4: Sự tương tự giữa $\vec{D}$ và $\vec{J}$

Tụ phẳng, diện tích cốt tụ là S , đặt cách nhau d , điện môi thực có độ dẫn điện $\sigma = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, nối vào hiệu thế $U = \text{const}$. Tìm vector mật độ dòng trong tụ ? Suy ra dòng qua tụ ?



cuu duoc Giải than cong . com

❖ Do $\vec{J} = J_x \cdot \vec{a}_x$ và $\text{div}(\vec{J}) = 0$.

Triển khai div trong hệ Cartesian :

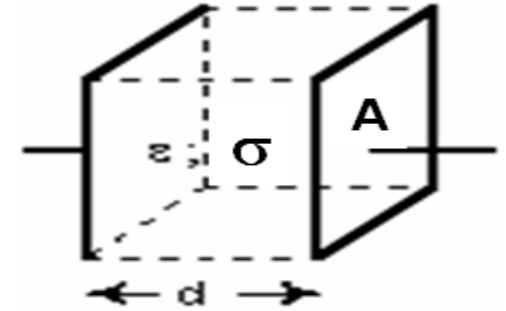
$$J_x = A = \text{const.} \dots$$

➡ Dòng điện qua tụ:

$$I = \frac{U\sigma S}{d}$$

❖ VD 2.9.5: Sự tương tự giữa σ và ε

Tụ phẳng, diện tích cốt tụ là A , đặt cách nhau d , điện môi thực có độ dẫn điện $\sigma = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$. Tìm điện trở của tụ điện phẳng ?



Giải

❖ Kết quả bài toán TĐ tĩnh:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

❖ Sự tương tự :

$$\varepsilon \Leftrightarrow \sigma ; \quad C \Leftrightarrow G$$

❖ Điện dẫn của tụ:

$$G = \frac{\sigma S}{d}$$

❖ Điện trở của tụ:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{d}{\sigma S}$$

d) Định luật Joule:

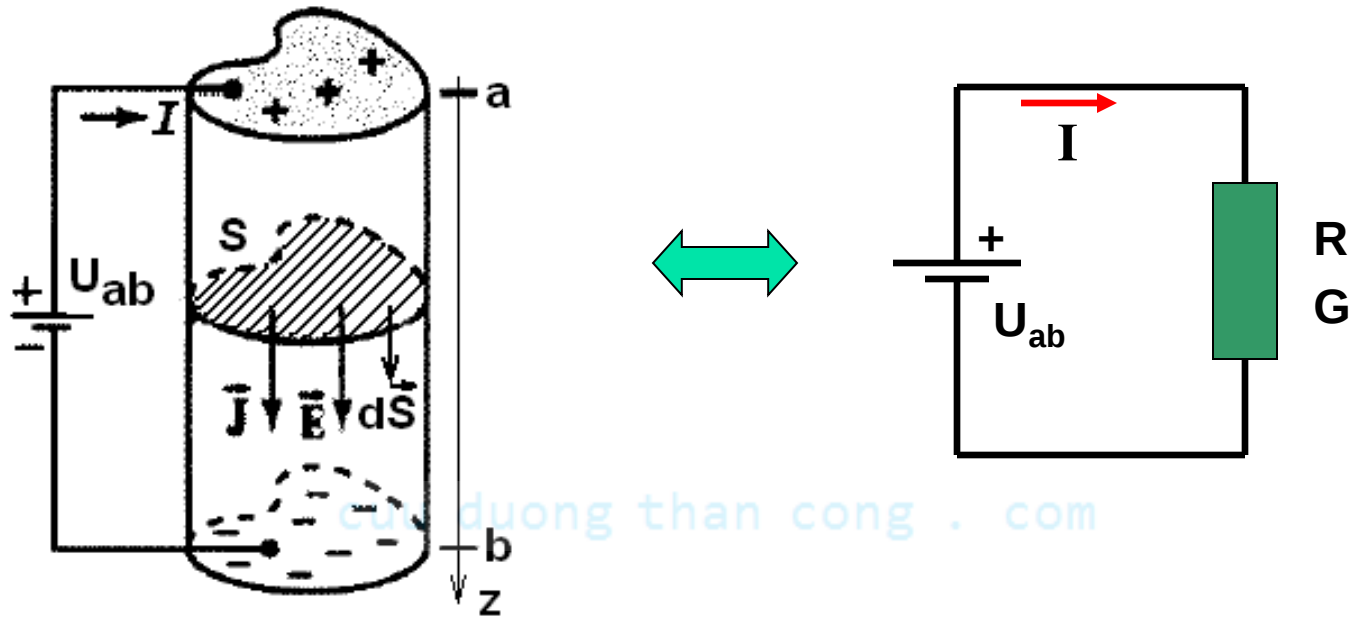
❖ Vector mật độ dòng $\rightarrow$ Công suất tiêu tán dạng nhiệt.

❖ Mật độ công suất tiêu tán: $p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = J^2 / \sigma \text{ [W/m}^3\text{]}$

❖ Công suất tiêu tán trong thể tích V :

$$P = \int_V p \cdot dV = \int_V \sigma E^2 \cdot dV \text{ [W]}$$

e) Điện trở và tính giá trị điện trở :



Giá trị điện trở:
$$R = \frac{U_{ab}}{I} \quad (\Omega)$$

Giá trị điện dẫn:
$$G = \frac{1}{R} = \text{conductance} [\text{S or } \mathfrak{U}]$$



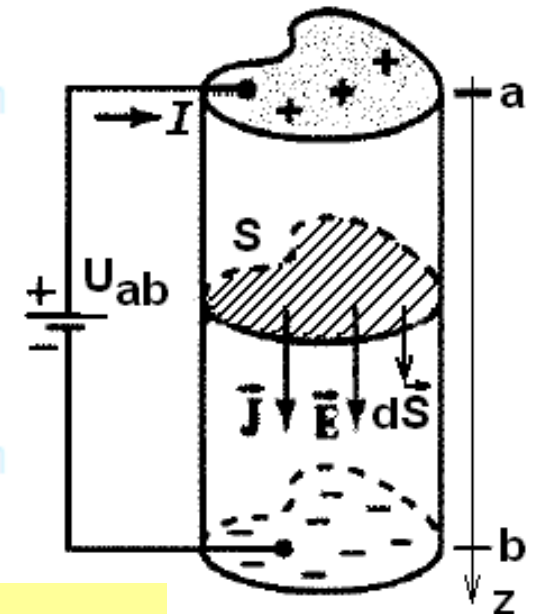
Tính giá trị điện trở :

- i. Chọn hệ tọa độ.
- ii. Giả sử U_{ab} = hiệu thế điện đặt lên môi trường dẫn .
- iii. Xác định vector mật độ dòng trong môi trường dẫn .
- iv. Xác định dòng qua môi trường dẫn:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (d\vec{S} \text{ hướng theo chiều giảm thế})$$

v. Tính: $R = \frac{U_{ab}}{I} \quad (\Omega)$

❖ Có thể tính qua công suất: $R = \frac{U_{ab}^2}{P} = \frac{P}{I^2} \quad (\Omega)$

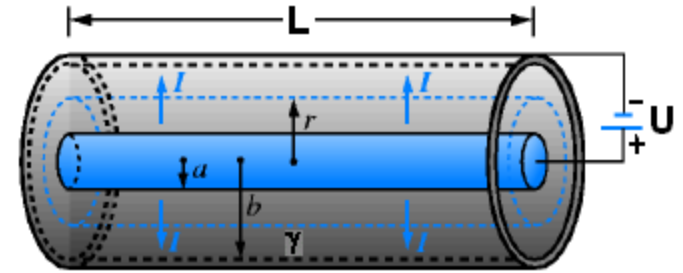


❖ VD 2.9.6: Tính giá trị điện trở của cáp

Tìm điện trở trên đơn vị dài của cáp đồng trục, cách điện là điện môi thực có $\sigma, \epsilon = \text{const}$.

Giải

❖ Đặt lõi và vỏ cáp dưới hiệu thế U .



Thế điện $\varphi = \varphi(r)$ là nghiệm p trình Laplace: $\varphi = A \ln r + B$

$$\rightarrow \varphi = \frac{U}{\ln(b/a)} [-\ln r + \ln b] \quad \rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{a}_r = \frac{U}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \vec{a}_r$$

$$\rightarrow \vec{J} = \frac{\sigma U}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \vec{a}_r \quad \rightarrow I = \frac{\sigma U}{\ln(b/a)} \frac{1}{r} \cdot 2\pi r \quad (\text{do } L = 1m)$$

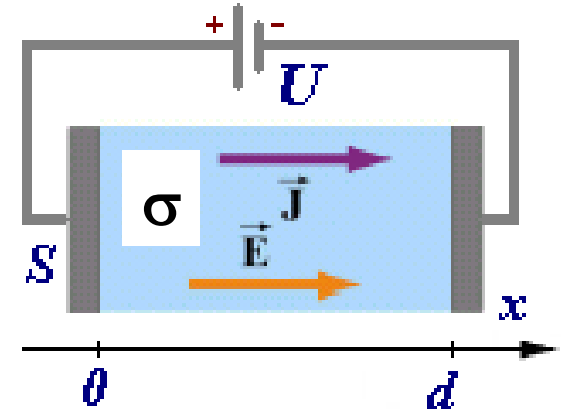
→ Điện trở đơn vị của cáp:

$$R_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma}$$

❖ VD 2.9.7: Tính điện trở của tụ phẳng

Tụ phẳng, điện môi thực, tìm :

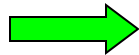
- a) Vector $\vec{J}, \vec{E}$ trong điện môi thực ?
- b) Điện trở cách điện của tụ R_{cd} ?
- c) Công suất tổn hao nhiệt trong điện môi?



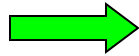
Giải

- a) Nghiệm ptrình Laplace:

$$\varphi = -\frac{U}{d}x + U$$



$$\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{a}_x$$



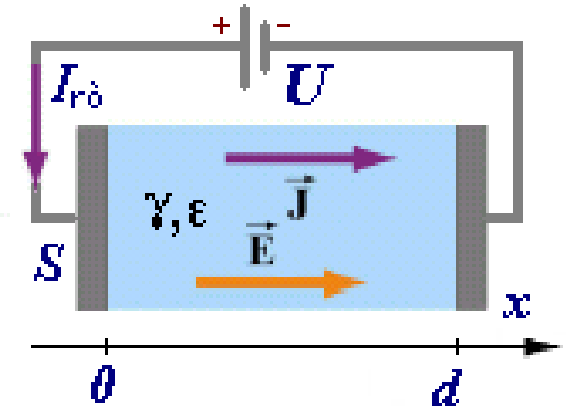
$$\vec{J} = \frac{U \cdot \gamma}{d} \vec{a}_x$$

❖ VD 2.9.7: Tính điện trở của tụ phẳng (tt)

b) Có: $I_{r0} = \int_S \vec{J} d\vec{S} = J_x \cdot S = \frac{U\sigma S}{d}$



$$R_{cd} = \frac{U}{I_{ro}} = \frac{d}{\sigma S}$$



c) Công suất tổn hao nhiệt: $P_J = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \sigma E^2 dV$

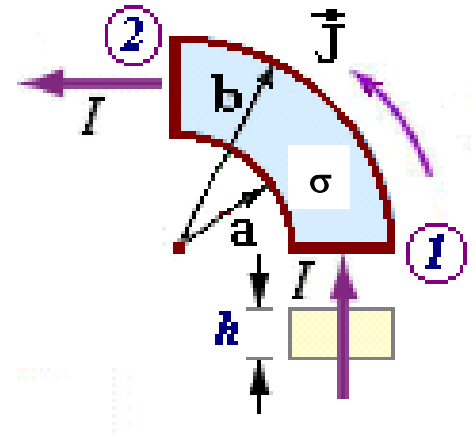


$$P_J = \frac{\sigma U^2}{d^2} \int_V dV = \frac{\sigma U^2 S}{d}$$

❖ Nhận xét: $P_J = \frac{U^2}{R_{cd}}$

❖ VD 2.9.8: Tính điện trở thanh dẫn

Tìm điện trở giữa hai điểm 1-2, biết $\frac{1}{4}$ vành khuyên vật dẫn có $\sigma = 3,3 \cdot 10^7$ (S/m); $a = 5$ (cm); $b = 10$ (cm); bề dày $h = 2$ (mm); dòng điện $I = 200$ (A). Tìm mật độ dòng (và $J_{\max}$), R_{ab} và công suất tổn hao?



Giải

❖ Do tính đối xứng: $\vec{J} = J_\phi \vec{a}_\phi$ & $\text{div } \vec{J} = 0$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (J_\phi) \right] = 0 \rightarrow J_\phi = \text{const}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{J_\phi}{\sigma} \vec{a}_\phi$$

❖ VD 2.9.8: Tính điện trở thành dẫn (tt)

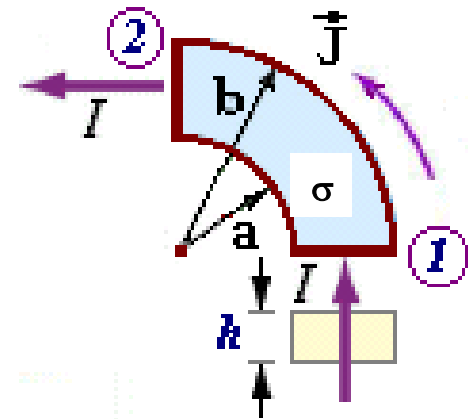
❖ **Có:** $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_0^{\pi/2} \frac{J_\phi}{\sigma} r d\phi = \frac{J_\phi \cdot r}{\sigma} \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad J_\phi = \frac{2\sigma U_{12}}{\pi \cdot r}$

$\rightarrow I = \int_S J_\phi \cdot dr \cdot dz = \frac{2\sigma U_{12}}{\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^h dz = \frac{2\sigma U_{12} h}{\pi} \ln \frac{b}{a}$

cuu duong than cong . com

$\rightarrow J_\phi = \frac{I}{r \cdot h \cdot \ln(b/a)}$

$\rightarrow J_{\phi(\max)} = \frac{I}{a \cdot h \cdot \ln(b/a)}$



❖ **Mặt khác:**

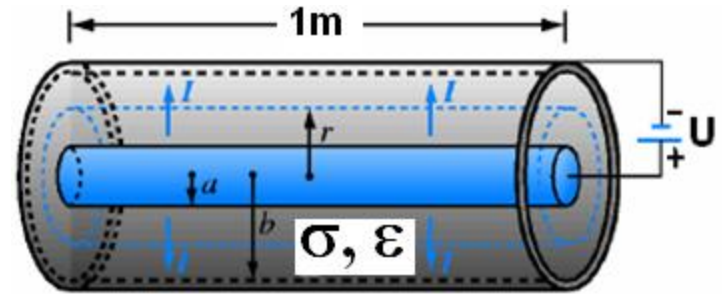
cuu duong than cong . com

$$R_{12} = U_{12} / I = \frac{\pi}{2\sigma h \ln(b/a)}$$

$$P_J = R_{12} I^2$$

❖ VD 2.9.9: Tính điện trở cách điện

Tụ điện trụ, điện môi thực có độ dẫn điện $\sigma = k_0/r^2$ ($k_0 = \text{const}$), $\epsilon = \text{const}$, nối vào nguồn DC có $U = \text{const}$.



- a) Xác định vector cường độ trường điện trong điện môi ?
- b) Điện trở cách điện trên đơn vị chiều dài cáp ?

Giải

a) Do tính đối xứng: $\vec{J} = J_r \vec{a}_r$ (hệ trụ)

❖ Theo pt trình trường điện tĩnh miền có dòng: $\text{div} \vec{J} = 0$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (r J_r) \right] = 0 \rightarrow J_r = \frac{A}{r} \rightarrow \vec{E} = \frac{J_r}{\sigma} \vec{a}_r = \frac{A r}{k_0} \vec{a}_r$$

❖ VD 2.9.9: Tính điện trở cách điện (tt)

❖ Theo định nghĩa hiệu thế điện: $U = \int_a^b \frac{Ar}{k_0} dr = \frac{A}{2k_0} (b^2 - a^2)$

$$\rightarrow A = \frac{2k_0 U}{b^2 - a^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{2Ur}{b^2 - a^2} \vec{a}_r \rightarrow \vec{J} = \frac{2k_0 U}{b^2 - a^2} \frac{1}{r} \vec{a}_r$$

b) Dòng rò qua tiết diện cách điện trên đơn vị chiều dài cáp :

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{1m} \frac{2k_0 U}{b^2 - a^2} \frac{1}{r} (r d\phi dz) = \frac{2k_0 U}{b^2 - a^2} 2\pi$$

$$\rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{b^2 - a^2}{4\pi k_0}$$