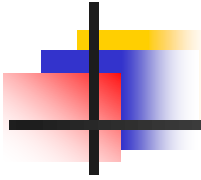


Chapter 3:

cuu duong than cong . com

Trường từ tính

cuu duong than cong . com



❖ Nội dung chương 3:

3.1 Luật Biot-Savart và xếp chồng.

3.2 Áp dụng luật Ampere tính trường từ tĩnh.

3.3 Thế từ vector.

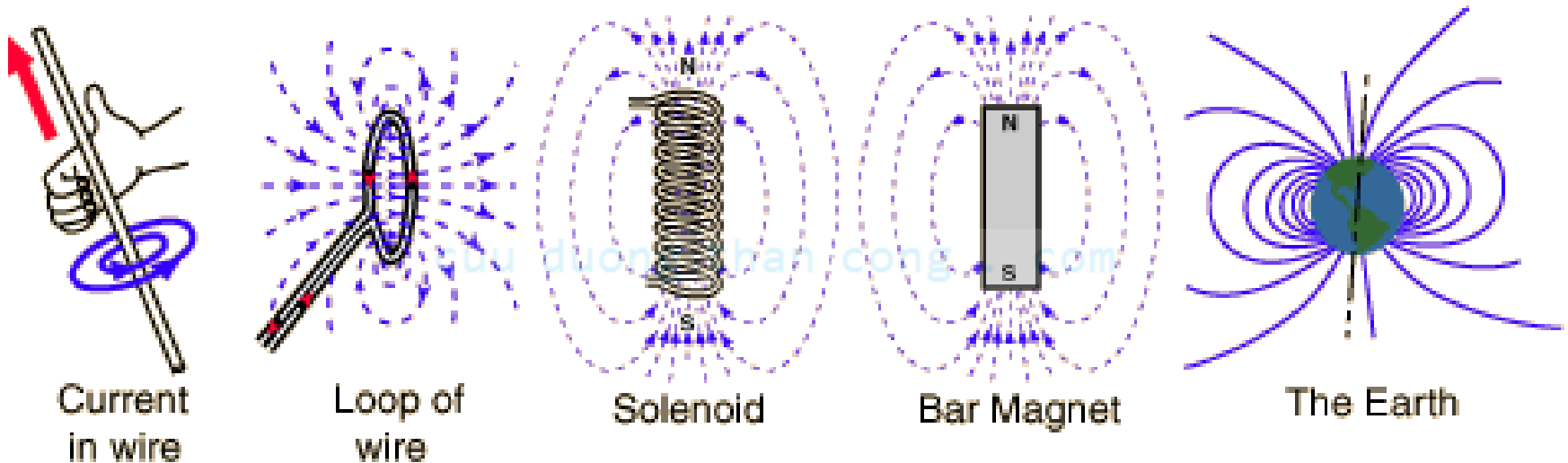
3.4 Năng lượng trường từ (W_m).

3.5 Tính toán điện cảm.



Giới thiệu trường từ tĩnh :

- **Nguồn : nam châm vĩnh cửu hay dây dẫn mang dòng DC.**



Magnetic Field Sources

cuu duong than cong . com

❖ Mô hình toán :

■ Phương trình:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \vec{J} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

■ Điều kiện biên:

$$\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = J_S \\ B_{1n} - B_{2n} = 0 \end{cases}$$

■ Phương trình liên hệ:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

3.1: Luật Biot-Savart và xếp chồng :

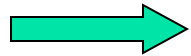
cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Luật Biot-Savart:

❖ Cảm ứng từ tạo ra tại P do yếu tố dòng dây xác định theo :

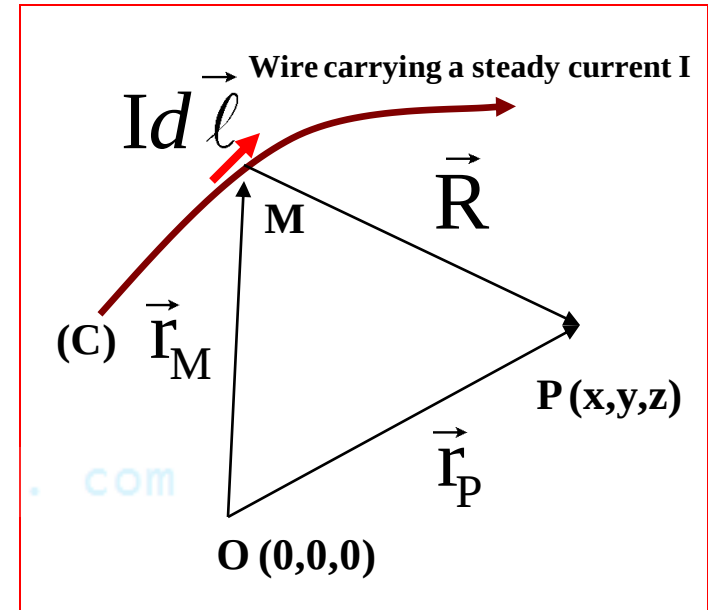
$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id \vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

(Luật Biot-Savart)

(Ta thấy $\vec{B}$ vuông góc với mặt phẳng chứa yếu tố dòng dây $d\vec{l}$ và vector khoảng cách $\vec{R}$)



❖ Phương pháp xếp chồng:

1. Chọn hệ tọa độ.

2. Viết ra yếu tố dòng :

$$I d\vec{l}$$

3. Xác định vectorkhoảng cách và biên độ của nó:

$$\vec{R} = \vec{r}_P - \vec{r}_M \longrightarrow R$$

4. Dùng luật Biot – Savart để tính trường từ .

❖ VD 3.1.1: Phương pháp xếp chồng

Tìm cảm ứng từ tại điểm $P(x_0, y_0, 0)$ do đoạn dây mang dòng I , chiều dài a , tạo ra ?

Giải

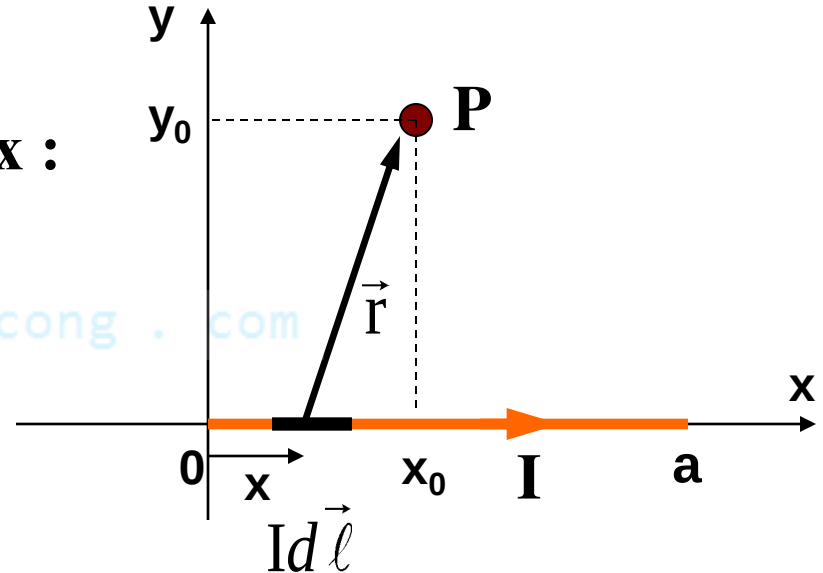
❖ Xét yếu tố dòng $(Id \vec{l})$ tại tọa độ x :

Có: $Id \vec{l} = Idx \cdot \vec{a}_x$

❖ Xác định vectơ khoảng cách:

$$\begin{cases} \vec{r} = (x_0 - x) \vec{a}_x + y_0 \vec{a}_y \\ r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2} \end{cases}$$

❖ Áp dụng Biot-Savart:
$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{d \vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^a \frac{y_0 dx}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}^3} \vec{a}_z$$



❖ Các tích phân thường gặp :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + a^2}^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 \pm a^2}^{\frac{3}{2}} dx = \pm \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}^{\frac{3}{2}} dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C$$

$$\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

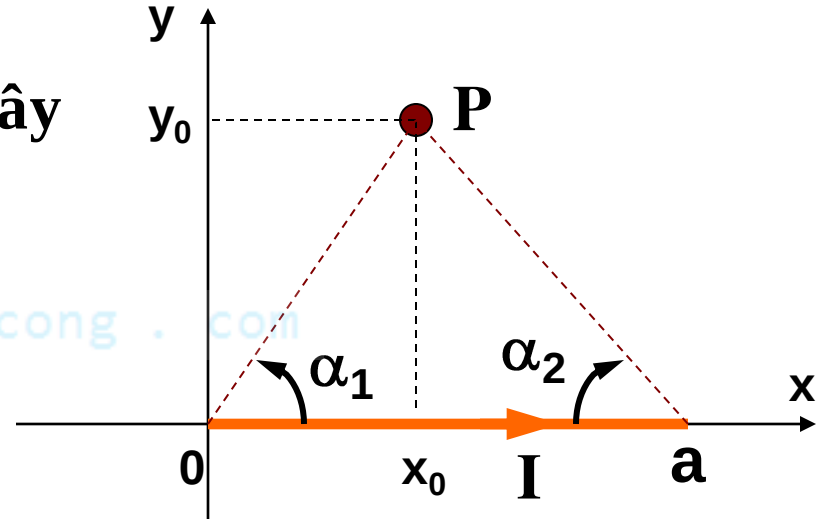
❖ VD 3.1.1: Phương pháp xếp chồng (tt)

Tìm cảm ứng từ tại $P(x_0, y_0, 0)$ do đoạn dây mang dòng I , chiều dài a , tạo ra ?

Giải

❖ Cảm ứng từ tạo ra do đoạn dây theo định luật Biot-Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y_0} \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \vec{a}_z = B \vec{a}_z$$



❖ Lưu ý:

a) Nếu $y_0 = 0$: $B = 0$

b) Chiều dòng so với điểm P là CW :

$$\vec{B} = -B \vec{a}_z$$

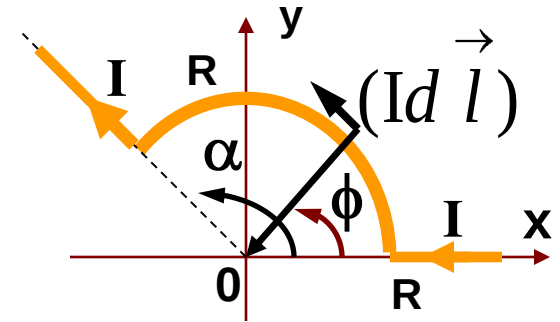
❖ VD 3.1.2: Xếp chồng ở hệ tọa độ trụ

Tìm cảm ứng từ tại điểm $O(0,0,0)$ do cung dây mang dòng I tạo ra ?

Giải

❖ Xét yếu tố dòng $(Id \vec{l})$ tại tọa độ Φ :

$$\text{Có: } Id \vec{l} = I \cdot R d\phi \cdot \vec{a}_\phi$$



❖ Xác định vector khoảng cách:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = -R \vec{a}_r \\ r = R \end{array} \right.$$

❖ Áp dụng Biot-Savart:
$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{d \vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^\alpha \frac{R^2 d\phi}{R^3} \vec{a}_z$$

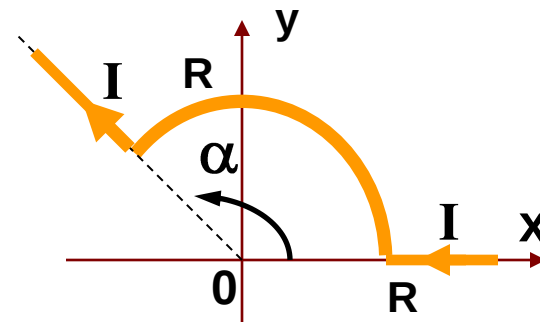
❖ VD 3.1.2: Xếp chồng ở hệ tọa độ trụ (tt)

Tìm cảm ứng từ tại điểm $O(0,0,0)$ do cung dây mang dòng I tạo ra ?

Giải

❖ Cảm ứng từ tại O theo luật Biot-Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \alpha \vec{a}_z$$



❖ Lưu ý: Chiều cảm ứng từ trùng chiều $+z$ do chiều dòng điện là CCW.

cuu duong than cong . com

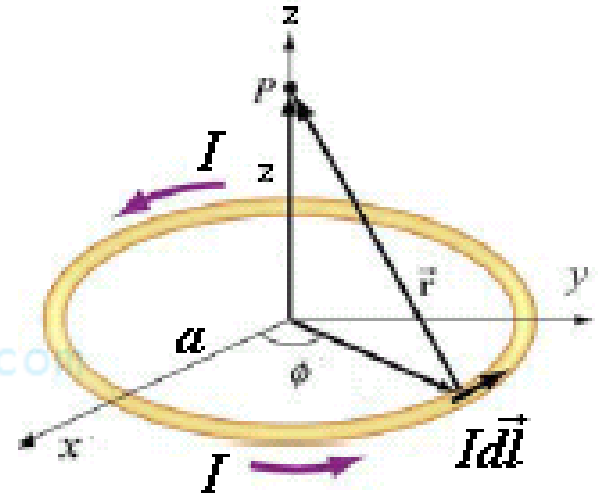
❖ VD 3.1.3: Cảm ứng từ của vòng dây

Tìm cảm ứng từ tại điểm $P(0,0,z)$ do vòng dây tròn bán kính a , mang dòng điện I tạo ra ?

Giải

❖ Xét yếu tố dòng $(Id\vec{l})$ tại tọa độ Φ :

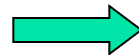
Có:
$$\begin{cases} d\vec{l} = a d\phi \cdot \vec{a}_\phi \\ \vec{r} = -a \vec{a}_r + z \vec{a}_z \\ r = \sqrt{z^2 + a^2} \end{cases}$$



❖ Áp dụng:
$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Do: $d\vec{l} \times \vec{r} = a \cdot z \cdot d\phi \cdot \vec{a}_r + a^2 d\phi \vec{a}_z \rightarrow$ Chỉ tồn tại B_z

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\phi}{r^3} = \frac{\mu I}{2r^3} \cdot a^2$$



$$\vec{B} = \frac{\mu I a^2}{2\sqrt{z^2 + a^2}^3} \vec{a}_z$$

❖ VD 3.1.4: Cảm ứng từ của đoạn dây

Tính cảm ứng từ tại $P(0,0,z)$ theo phương z ?

Giải

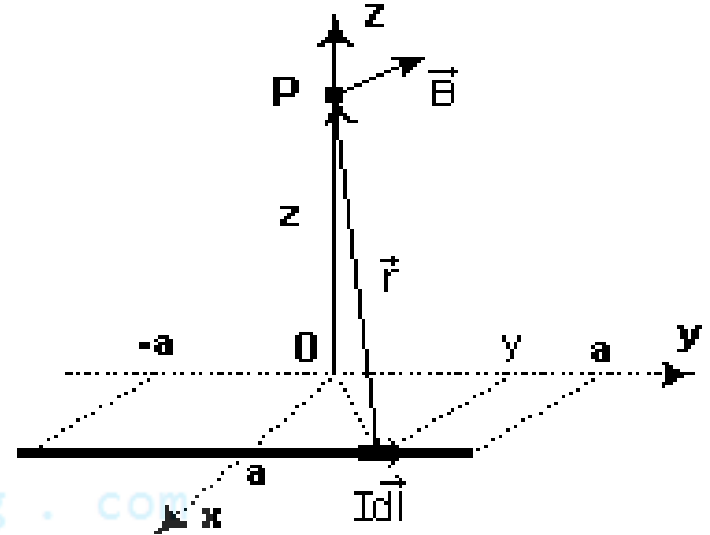
❖ Xét dòng $(Id \vec{l})$ tại tọa độ (a,y) :

Có:
$$\begin{cases} d\vec{l} = dy \cdot \vec{a}_y \\ \vec{r} = -a \vec{a}_x - y \vec{a}_y + z \vec{a}_z \\ r = \sqrt{z^2 + a^2 + y^2} \end{cases}$$

❖ Áp dụng:
$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Do: $d\vec{l} \times \vec{r} = zdy \vec{a}_x + a dy \vec{a}_z \rightarrow B_z$ được xác định như sau :

$$B_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{ady}{\sqrt{(z^2 + a^2 + y^2)^3}} = \frac{\mu I a}{4\pi} \frac{1}{(z^2 + a^2)} \frac{2a}{\sqrt{(z^2 + 2a^2)}}$$



3.2 Áp dụng luật Ampere tính trường từ tĩnh

❖ Luật Biot-Savart: tích phân vector . → **khó**

❖ Luật Ampere: phân bố dòng đối xứng .

→ **Dễ và thông dụng**

a) Các phân bố dòng đối xứng:

i. Dây dẫn mang dòng dài vô hạn: $\vec{J} = J \cdot \vec{a}_z$

Biot-Savart $\rightarrow \vec{H} = H \cdot \vec{a}_\phi$ & $H = \text{const}$ trên đường tròn

$\rightarrow$ Đường Ampere là hình tròn

ii. Mặt mang dòng rộng vô hạn: $\vec{J}_s = J_s \cdot \vec{a}_y$

Dùng luật Biot-Savart:

$\rightarrow \vec{H} \parallel$ Mặt mang dòng và $H = \text{const}$ bên ngoài mặt

$\rightarrow$ Đường Ampere là hình chữ nhật

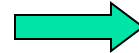
b) Áp dụng luật Ampere:

1. Xác định tính đối xứng của bài toán và dạng: $\vec{H}$ & $\vec{B}$.

2. Chọn đường Amper thích hợp : $\vec{H} (\parallel \text{ or } \perp) d\vec{l}$
Và phải đi qua điểm cần tính trường từ.

3. Dùng luật Amper, suy ra biên độ vector trường từ.

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I^* \Rightarrow H.L = I^*$$



$$H = \frac{I^*}{L}$$

4. Viết lại dạng vector đặc trưng cho trường từ.



Lưu ý:

- Với lõi trụ mang dòng, đường Amper là đường tròn, cường độ trường từ xác định theo :

$$H = \frac{I^*}{2\pi r}$$

→ Chỉ cần tìm I^* .

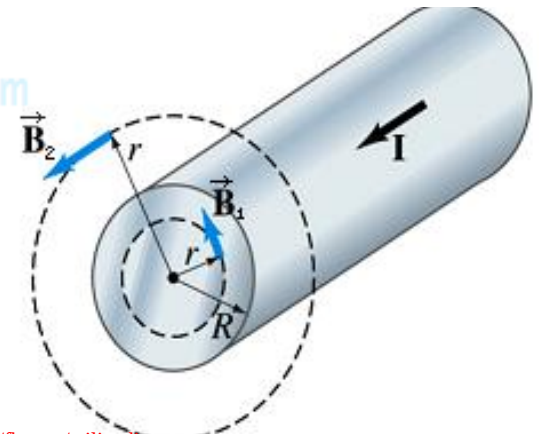
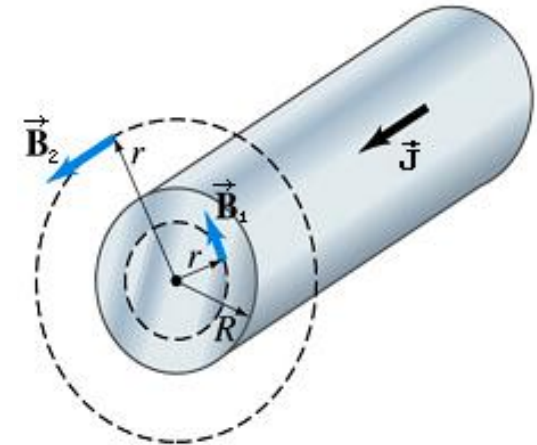
- Khi lõi mang dòng có mật độ dòng J là hàm theo tọa độ : $J = J(r)$, phần dòng bên trong đường Amper xác định theo:

$$I^* = \int_0^r \int_0^{2\pi} J(r)[rdrd\phi]$$

- Lõi bán kính R mang dòng I phân bố đều: mật độ dòng trong lõi: $J = I/(\pi R^2)$.

Và phần dòng bên trong đường Amper xác định:

$$I^* = J.(\pi r^2)$$



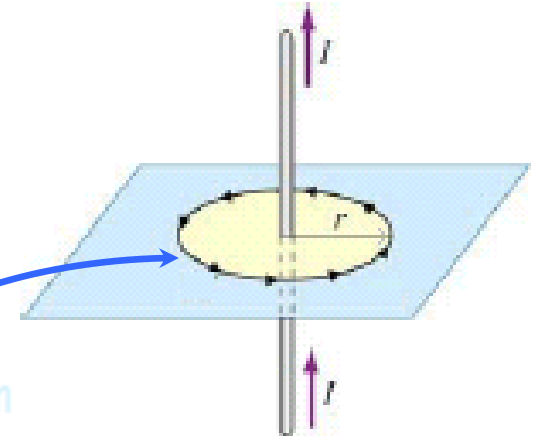
❖ VD 3.2.1: PP dùng luật Ampere

Tìm trường từ bên ngoài dây dẫn mang dòng I ?

Giải

❖ Ta thấy bài toán đối xứng trụ: $\vec{H} = H \cdot \vec{a}_\phi$

❖ Chọn đường Amper là đường tròn, bán kính r , tâm tại dây dẫn.



❖ Áp dụng luật Amper : $H = \frac{I^*}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi r}$

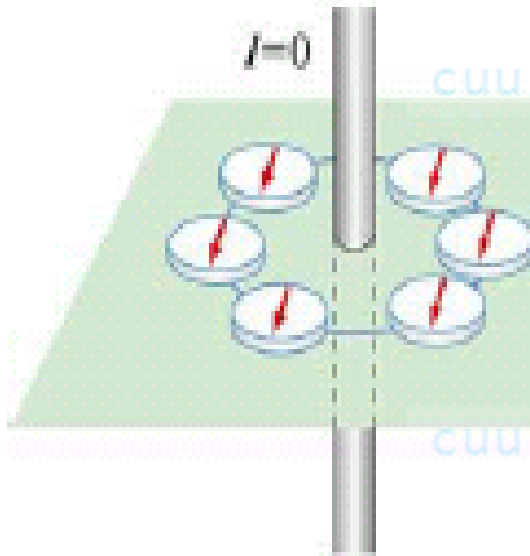
❖ Vector cường độ trường từ:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\phi$$

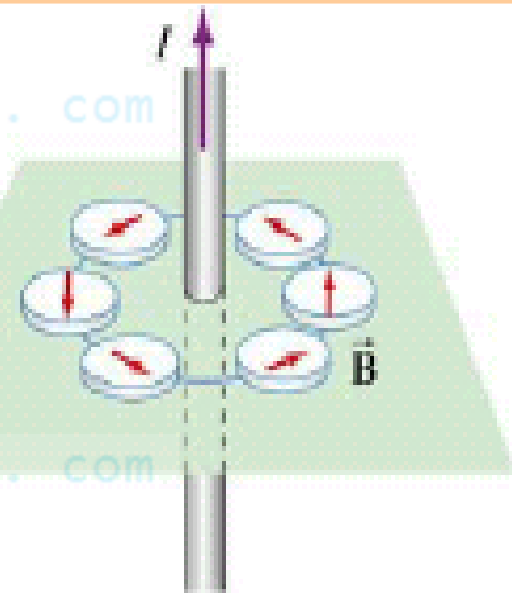
❖ VD 3.2.1: Thí nghiệm kiểm chứng

❖ Đặt các kim la bàn trên mặt phẳng vuông góc dây dẫn.

a) Trước khi có dòng điện:

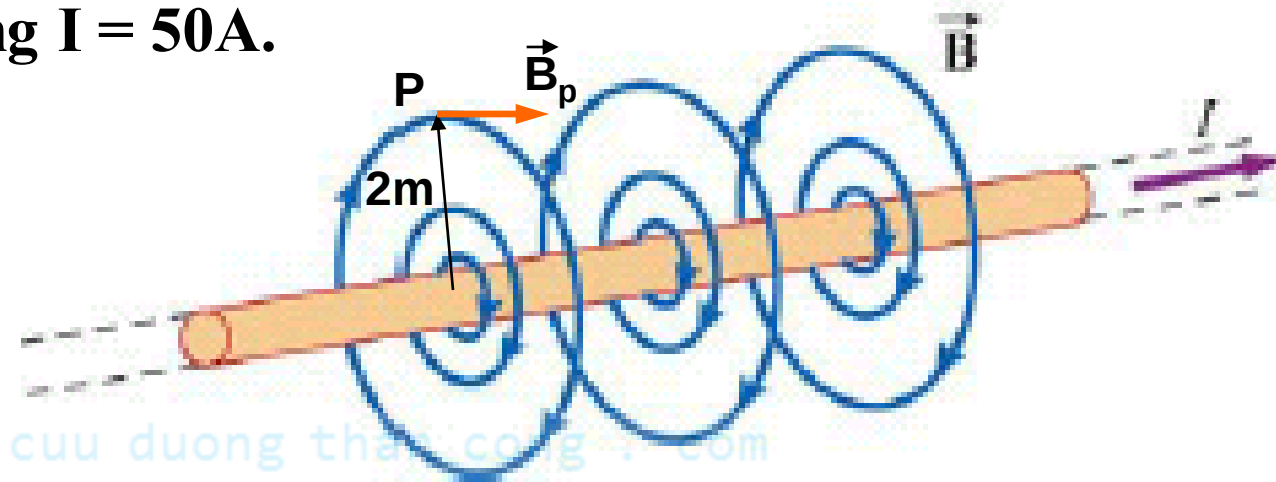


b) Sau khi có dòng điện:



❖ VD 3.2.1: Minh họa bằng số

Dây dẫn mang dòng $I = 50\text{A}$.



- ❖ Tại P (cách trục dây dẫn 2m).
- ❖ Vector cảm ứng từ tiếp xúc đường tròn.

❖ Và độ lớn:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi \cdot 2} = 5 \text{ (}\mu\text{T)}$$

❖ VD 3.2.2: PP dùng luật Ampere

Cho lõi trụ đặc, bkính R , mang dòng I , tìm cảm ứng từ bên trong và bên ngoài lõi biết $\mu = \mu_0$?

Giải

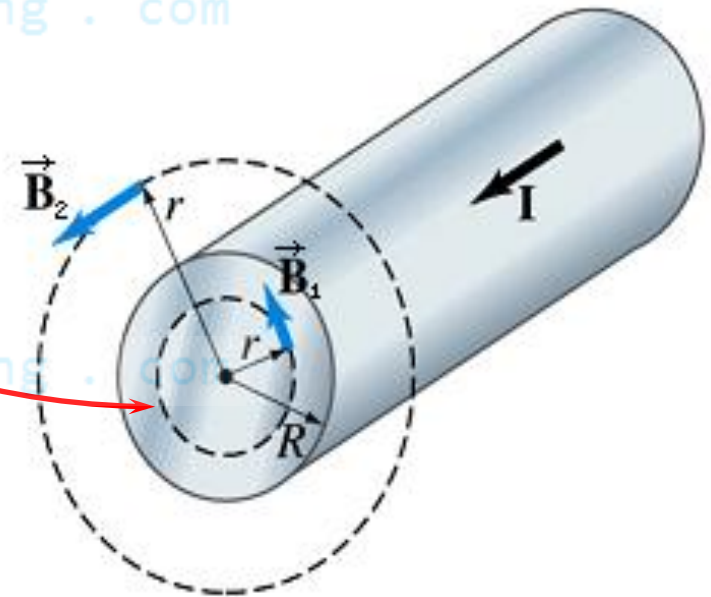
- ❖ Ta thấy bài toán đối xứng trụ: $\vec{B} = B \cdot \vec{a}_\phi$
- ❖ Đường Amper là đường tròn, bkính r , và: $B \cdot 2\pi r = \mu I^*$.

1. Xét miền $r < R$ (trong lõi):

▪ Đường Amper:

▪ Áp dụng luật Ampere:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1^*}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I \cdot r}{2\pi R^2}$$



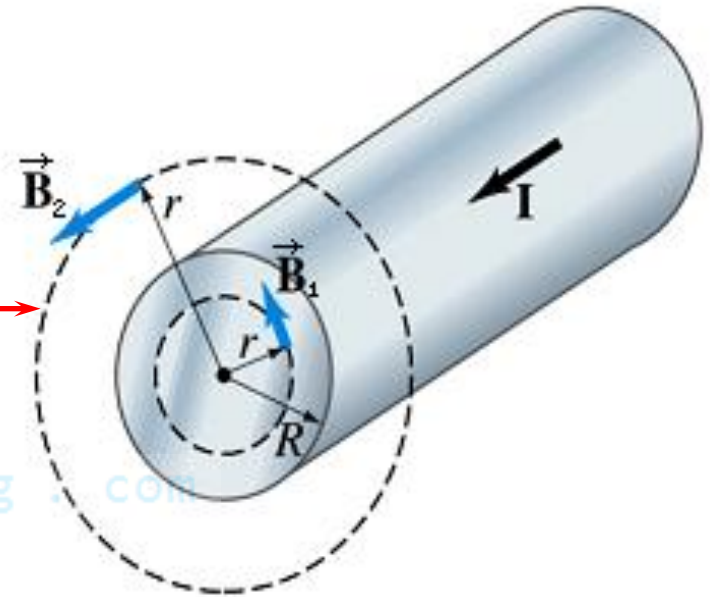
❖ VD 3.2.2: PP dùng luật Ampere (tt)

2. Xét miền $r > R$ (ngoài lõi) :

▪ Đường Amper :

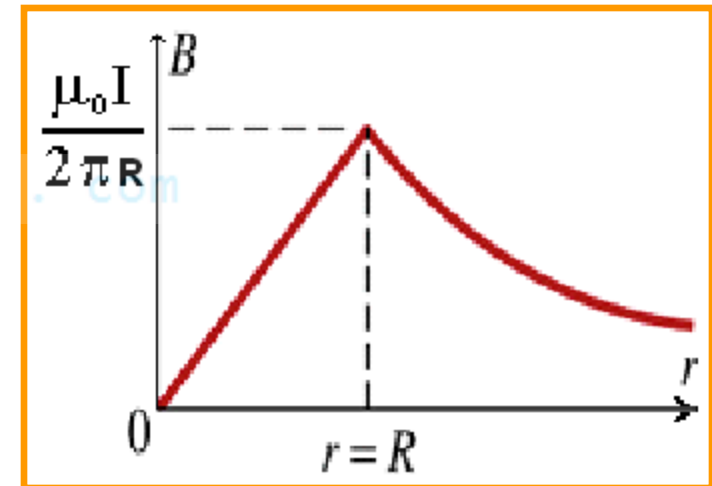
▪ Áp dụng luật Ampere:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2^*}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



❖ Vậy:

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & \text{for } r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{for } r \geq R \end{cases}$$

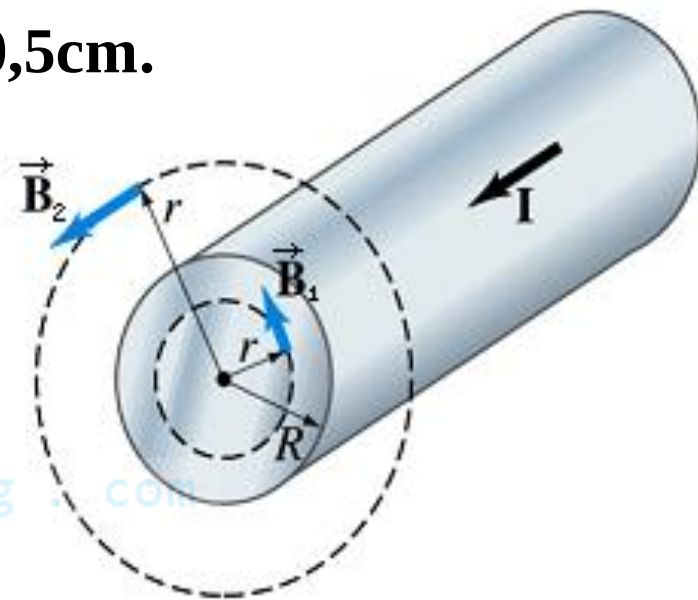


❖ VD 3.2.2: Minh họa bằng số

Lõi mang dòng $I = 100\text{A}$, bán kính $R = 0,5\text{cm}$.

- Mật độ dòng trong lõi:

$$J = \frac{100}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = \frac{4 \cdot 10^6}{\pi} (\text{A/m}^2)$$



- a) Cảm ứng từ trong lõi:

$$B_1 = \frac{\mu_0 (J \cdot \pi r^2)}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^6}{2\pi} r = 0,8r \text{ (T)}$$

- b) Cảm ứng từ ngoài lõi :

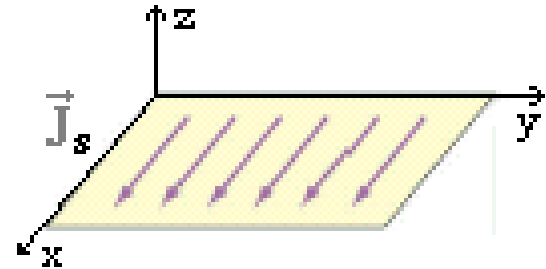
$$B_2 = \frac{\mu_0 (I)}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2\pi r} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{r} \text{ (T)}$$

❖ VD 3.2.3: PP dùng luật Ampere

Tìm trường từ bên ngoài mặt mang dòng với mật độ mặt:

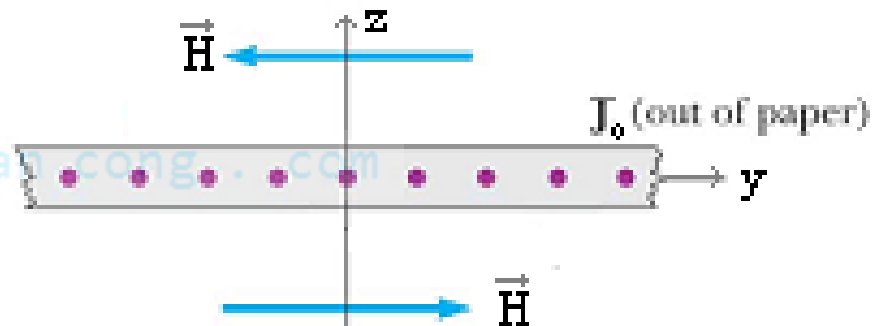
$$\vec{J}_s = J_0 \vec{a}_x \text{ [A/m]}$$

Giải



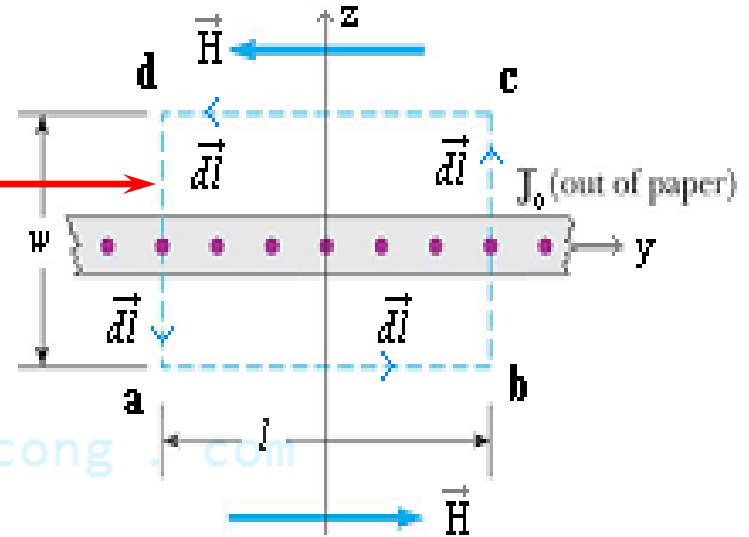
❖ Bằng xếp chồng ta CM được bên ngoài mặt mang dòng:

$$\begin{cases} H = \text{const} \\ \vec{H} // \text{mp}(xOy) \end{cases}$$



❖ VD 3.2.3: PP dùng luật Ampere (tt)

❖ Đường Amper là hình chữ nhật abcd :



$$\oint_{abcd} \vec{H} d\vec{l} = I^* \Rightarrow H.l + Hl = J_0.l$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} J_0$$

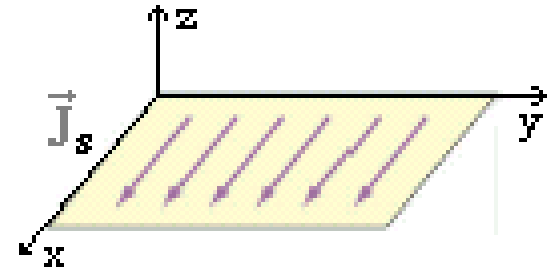
cuu duong than cong . com

❖ VD 3.2.3: PP dùng luật Ampere (tt)

Tìm trường từ bên ngoài mặt mang dòng với mật độ mặt :

$$\vec{J}_s = J_0 \vec{a}_x \text{ [A/m]}$$

Giải



❖ Tổng quát dưới dạng vector:

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \left[\vec{J}_s \times \vec{a}_n \right]$$

$\vec{a}_n$ = Vector pháp tuyến, hướng vào miền chứa điểm khảo sát .

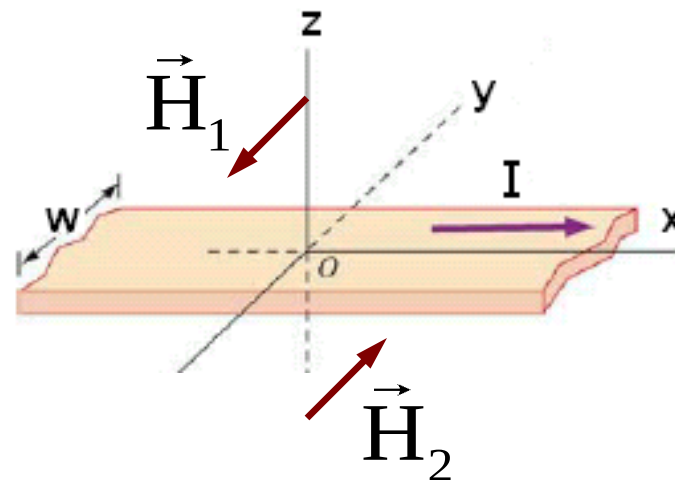
❖ VD 3.2.3: Minh họa bằng số

Dây dẫn phẳng, rộng $w = 3\text{m}$, mang dòng $I = 60\text{A}$. Tìm trường từ bên ngoài mặt mang dòng ?

Giải

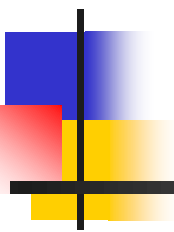
❖ Mật độ dòng mặt:

$$\vec{J}_s = \frac{I}{w} \vec{a}_x = 20 \vec{a}_x \text{ [A/m]}$$



❖ Miền $z > 0$: $\vec{a}_n = \vec{a}_z \Rightarrow \vec{H}_1 = 10 \vec{a}_x \times \vec{a}_z = -10 \vec{a}_y \text{ (A/m)}$

❖ Miền $z < 0$: $\vec{a}_n = -\vec{a}_z \Rightarrow \vec{H}_2 = -10 \vec{a}_x \times \vec{a}_z = 10 \vec{a}_y \text{ (A/m)}$

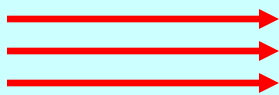


3.3 Thế từ vector:

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Thế từ vô hướng φ_m :


$$\vec{J} \quad \text{rot}\vec{H}_1 = \vec{J}$$

$$\text{rot}\vec{H}_2 = 0$$

❖ Ở miền không có dòng: $\text{rot}\vec{H} = 0$

Trường từ có tính thế: $\vec{H} = -\text{grad}\varphi_m$

(φ_m : thế từ vô hướng [A])

❖ Ở miền có dòng: $\text{rot}\vec{H} = \vec{J}$

Trường từ có tính xoáy, giải dùng thế vector có tính tổng quát hơn .

b) Thế từ vector $\vec{A}$:

❖ Định nghĩa: $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{(IV)} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0 & \text{(gtvt)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$

❖ Thế vector có tính đa trị, dùng điều kiện phụ để đơn giản hóa phương trình: $\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$

❖ Đơn vị của thế vector : $[\text{Wb/m}]$ hay $[\text{T.m}]$

c) Phương trình Poisson của thế từ vector:

❖ Giả sử môi trường đẳng hướng, TT, đồng nhất: $\mu = \text{const}$:

Có: $\vec{J} = \text{rot } \vec{H}$ (1)

→ $\mu \vec{J} = \text{rot } \vec{B} = \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

cuu duong than cong . com

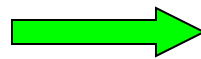
→ $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$ (*phương trình Poisson của trường từ tĩnh*)

cuu duong than cong . com

d) Nghiệm Pt Poisson của trường từ tĩnh :

❖ Đ/v dòng khối:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} dV$$

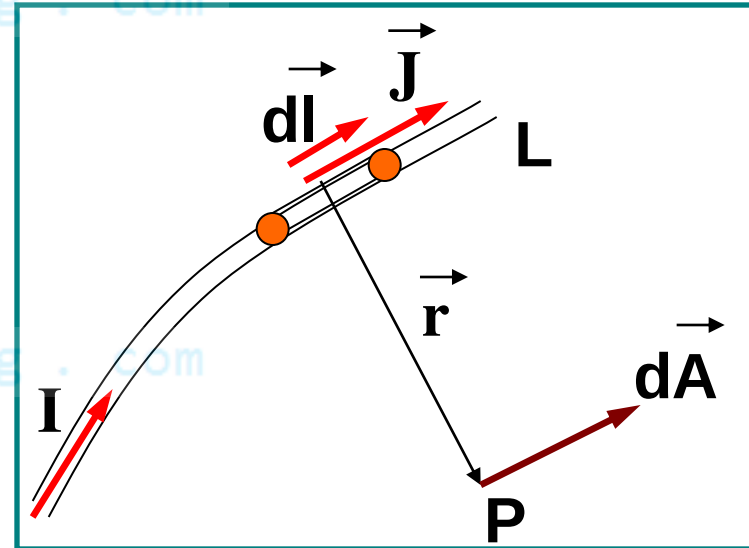


N.xét 1: Nguồn gốc trường từ là yếu tố dòng.

❖ Đ/v dòng dây:

$$\vec{J} dV = JS d\vec{l} = Id\vec{l}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l}}{r}$$



➡ N.xét 2: Thế vector cùng phương ,
chiều với yếu tố dòng dây .

e) Điều kiện biên của thế vector $\vec{A}$:

e₁) Điều kiện liên tục:

Do là nghiệm ptrình Poisson, thế vector phải thỏa điều kiện liên tục. Trên biên S của hai môi trường ta có:

$$A_1(S) = A_2(S)$$

cuu duong than cong . com

e₂) Điều kiện biên của trường từ:

Do định nghĩa từ : $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$

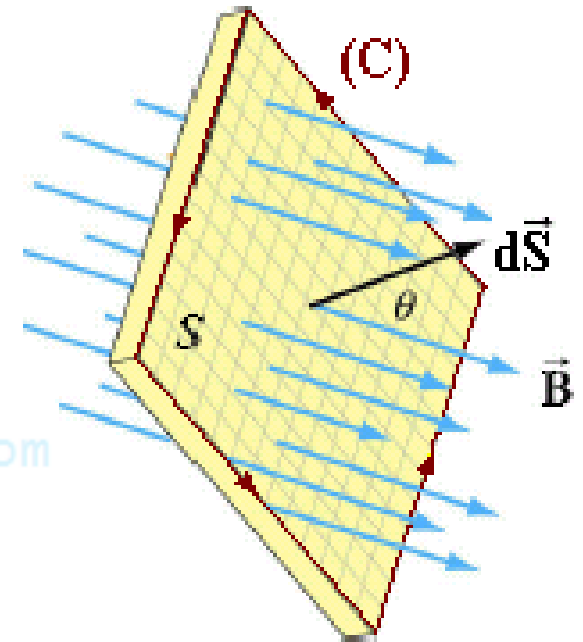
Nên thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến của $\text{rot} \vec{A}$ cũng phải thỏa các điều kiện biên của trường từ.

f) Từ thông tính theo thế vector $\vec{A}$:

❖ Có:
$$\Phi_m = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}$$

❖ Dựa vào định lý Stokes :

$$\Phi_m = \oint_C \vec{A} d\vec{l}$$



g) Xác định thế vector $\vec{A}$

- i. Giải trực tiếp thế vector từ phương trình Poisson. Dùng ĐKB xác định các hằng số tích phân.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (\text{phương trình Poisson của trường từ tĩnh})$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ii. Sự tương tự giữa $\vec{A}$ và φ :

❖ Nếu: $\vec{J} = J(x,y)\vec{a}_z$ Thì : $\vec{A} = A(x,y)\vec{a}_z = A.\vec{a}_z$

Và có sự tương tự giữa:

Trường từ tĩnh (có $J_s = 0$)	Trường điện tĩnh (có $\rho_s = 0$)
$A, \vec{B}, I, J, \frac{1}{\mu}, \dots \longleftrightarrow \varphi, \vec{E}, \rho_\ell, \rho_v, \epsilon, \dots$	
$\Delta A = -\mu J$; $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$	$\Delta \varphi = -\rho_v / \epsilon$; $\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$
$A = -\int B.dr + C$	$\varphi = -\int E.dr + C$
$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I$	$\oint_{S_0} \vec{D} d\vec{S} = \rho_\ell$

❖ Quy trình xác định A tương tự ϕ :

Trường điện tĩnh

Trục điện

Mặt Gauss

$\vec{E}$

$$\phi = - \int E dr + C, \dots$$

Trường từ tĩnh

Trục dòng

Đường Amper

$\vec{B}$

$$A = - \int B dr + C, \dots$$

❖ VD 3.3.1: Tính thế vector $\vec{A}$

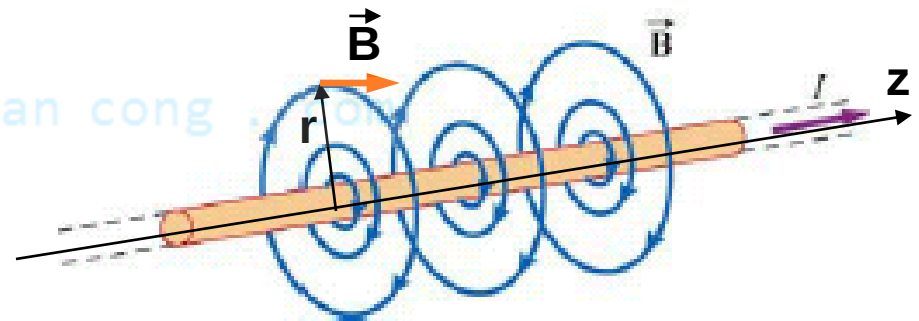
Dây dẫn dài vô hạn mang dòng I , trong môi trường không khí. Xác định: (a) Vector cảm ứng từ bên ngoài dây dẫn ? (b) Thế vector bên ngoài dây dẫn ? (c) Tình từ thông gói qua khung dây hình chữ nhật đặt song song dây dẫn ?

Giải

a) Xác định cảm ứng từ :

❖ Bài toán đối xứng trụ.
Chọn hệ tọa độ trụ.

❖ Đường Ampere là đường tròn, bán kính r . Theo phương pháp đường Ampere, ta có:



$$B_{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_{\phi}$$

❖ VD 3.3.1: Tính thế vector $\vec{A}$ (tt)

b) Xác định thế vector : theo sự tương tự giữa trường từ và điện:

$$A = - \int B_{\phi} dr + C' = - \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr + C' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{C}{r} \quad \boxed{\vec{A} = A \vec{a}_z}$$

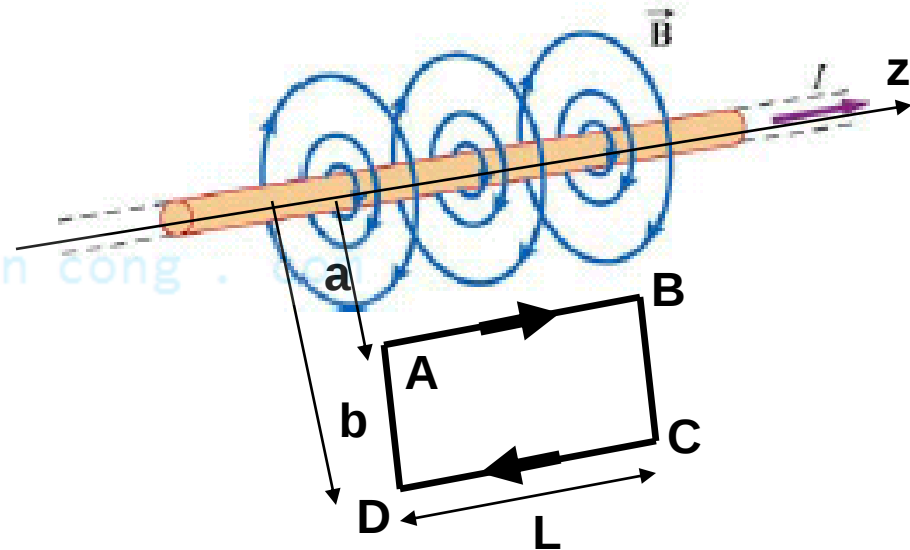
c) Xác định từ thông gởi qua khung dây ABCD:

$$\Phi_m = \oint_{ABCD} \vec{A} d\vec{\ell} = A_{r=a} \cdot L + 0 - A_{r=b} \cdot L + 0$$

$$A_{r=a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{C}{a}$$

$$; A_{r=b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{C}{b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}$$



❖ Các công thức xác định A tương tự φ :

a. Trục mang dòng I :

$$A = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{C}{r}$$

a. Trục mang điện λ :

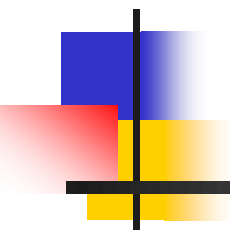
$$\varphi = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln \frac{C}{r}$$

b. Hai trục mang dòng $\pm I$:

$$A = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r^-}{r^+}$$

b. Hai trục mang điện $\pm \lambda$:

$$\varphi = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r^-}{r^+}$$



3.4 Năng lượng trường từ (W_m)

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

a) Tính theo các đại lượng đặc trưng :

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \frac{B^2}{\mu} dV$$

(V_∞ : không gian tồn tại trường từ)

cuuduongthancong.com

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 \text{ (J/m}^3\text{)} = \text{Mật độ NL trường từ}$$

cuuduongthancong.com

b) Tính theo $\vec{A}$ và $\vec{J}$:

❖ Từ : $W_m = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{H} \cdot (\text{rot } \vec{A}) dV$

❖ Có: $\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} = \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} = \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \vec{J}$

→ $W_m = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{A} \cdot \vec{J} dV + \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \vec{A} \times \vec{H} \cdot d\vec{S}$

❖ Mà: $\left\{ \begin{array}{l} \oint_{S_\infty} \vec{A} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\oint_S \vec{A} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} \right) = 0 \\ \int_{V_\infty} \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \int_{V_J} \vec{A} \cdot \vec{J} dV \end{array} \right.$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_J} \vec{A} \cdot \vec{J} dV$$

(V_J : miền có dòng)

c) NL trường từ của hệ N dòng dây:

❖ Cho hệ n dòng điện dây: $I_1 \dots I_n$; $\Phi_1 \dots \Phi_n$:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_J} \vec{A} \cdot \vec{J} \cdot dV = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{V_k} \vec{A} \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} \vec{A} I_k d\vec{l}$$

$$\rightarrow W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \oint_{C_k} \vec{A} d\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k$$

❖ Vậy :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k$$

❖ Các trường hợp đặc biệt:

i. **n = 1** : Một vòng dây mang dòng

▪ Ta có:

$$W_m = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} L I^2$$

ii. **n = 2** : Hai vòng dây mang dòng

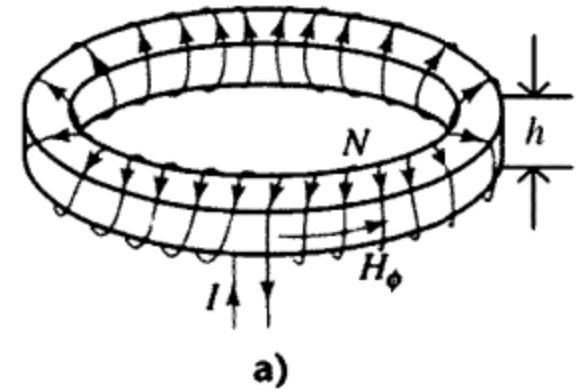
▪ Ta có:
$$W_m = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Phi_2 = \frac{1}{2} I_1 (L_1 I_1 + M I_2) + \frac{1}{2} I_2 (M I_1 + L_2 I_2)$$

→
$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

▪ Đây là công thức xác định NLTT trong phần tử hồ cảm.

❖ VD 3.4.1: Tính năng lượng trường từ

Cuộn dây hình xuyến (toroid) N vòng, tiết diện hình chữ nhật, bán kính trong là a , ngoài là b , cao là h (hình a). Xác định: (a) cường độ trường từ trong lõi khi có dòng I chạy qua toroid ? (b) Năng lượng trường từ tích lũy trong lõi có $\mu = \text{const}$?



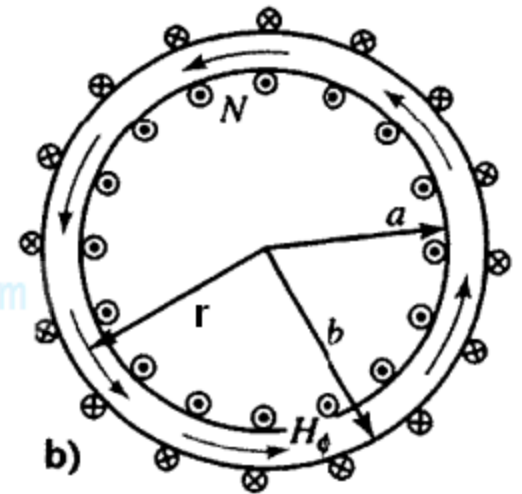
Giải

❖ Bài toán đối xứng trụ. Chọn hệ tọa độ trụ.

❖ Đường Ampere là đường tròn, bán kính r .

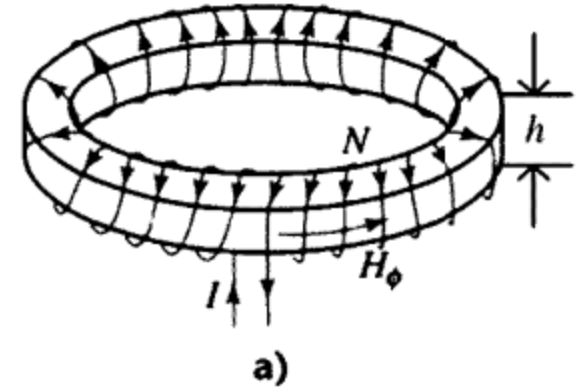
❖ Tổng dòng bên trong : NI (hình b). Ta có:

$$H_\phi = \frac{NI}{2\pi r}$$



❖ VD 3.4.1: Tính năng lượng trường từ (tt)

Cuộn dây hình xuyến (toroid) N vòng, tiết diện hình chữ nhật, bán kính trong là a , ngoài là b , cao là h (hình a). Xác định: (a) cường độ trường từ trong lõi khi có dòng I chạy qua toroid ? (b) Năng lượng trường từ tích lũy trong lõi có $\mu = \text{const}$?



Giải

❖ Năng lượng trường từ:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV = \frac{\mu}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{N^2 I^2}{4\pi^2 r^2} (r dr d\phi dz)$$

$$\rightarrow W_m = \frac{\mu N^2 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} h$$



3.5 Tính toán điện cảm:

cuu duong than cong . com

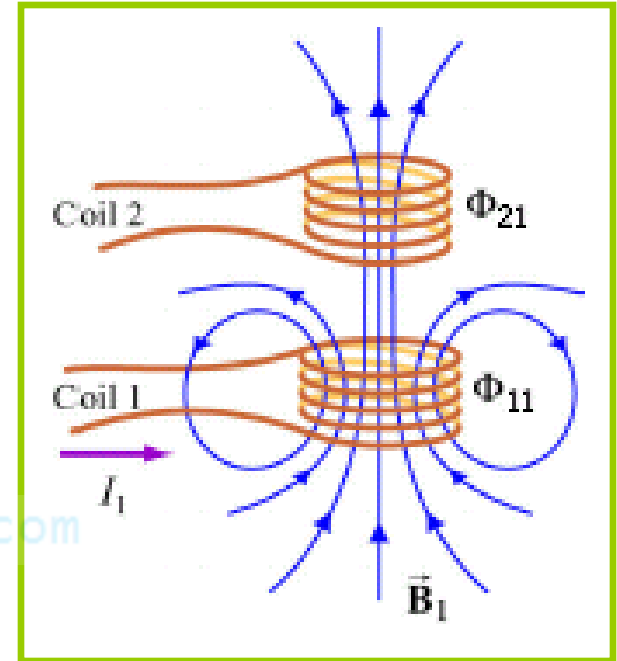
cuu duong than cong . com

a) Điện cảm bản thân và hồ cảm:

❖ Xét 2 vòng dây, dòng I_1 chạy qua vòng dây 1 .

▪ Gọi Φ_{11} : từ thông gởi qua vòng dây 1 do dòng I_1 tạo ra .

▪ Gọi Φ_{21} : từ thông gởi qua vòng dây 2 do dòng I_1 tạo ra .



❖ Định nghĩa điện cảm (self inductance) :

$$L_1 = \Phi_{11} / I_1 \text{ (H)}$$

❖ Định nghĩa hồ cảm (mutual inductance) :

$$M = \Phi_{21} / I_1 \text{ (H)}$$

b) Thuật toán chung tính L hay M :

- i.** Chọn hệ tọa độ.
- ii.** Giả sử dòng điện I chạy qua hệ .
- iii.** Tìm $\vec{B}$ (hay $\vec{A}$) do dòng I tạo ra .

cuu duong than cong . com

- iv.** Tìm từ thông móc vòng Φ_m :

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_C \vec{A} d\vec{\ell}$$

cuu duong than cong . com

- v.** Nếu là cuộn dây N vòng thì từ thông móc vòng $\Psi_m = N.\Phi_m$.
- vi.** Xác định $L = \Psi_m/I$.

c) P² dùng năng lượng trường từ :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV = \frac{\mu}{2} \int_V H^2 dV \quad \rightarrow \quad L = \frac{2W_m}{I^2}$$

$$W_m = W_{mtr} + W_{mng} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{mtr}: \text{năng lượng TT trong miền có dòng.} \\ W_{mng}: \text{năng lượng TT ngoài miền có dòng.} \end{array} \right.$$

1. Điện cảm trong :

$$L_{tr} = \frac{2W_{mtr}}{I^2}$$

2. Điện cảm ngoài:

$$L_{ng} = \frac{2W_{mng}}{I^2}$$

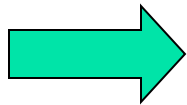


Tính Ltr theo từ thông móc vòng:

- Từ thông móc vòng qua phần tiết diện mang dòng S do chỉ phần dòng điện trong miền có dòng tạo ra:

$$\Phi_{\text{mtr}} = \int_S \frac{I}{I_{\text{total}}} B dS$$

cuu duong than cong . com



$$L_{\text{tr}} = \frac{\Phi_{\text{mtr}}}{I_{\text{total}}}$$

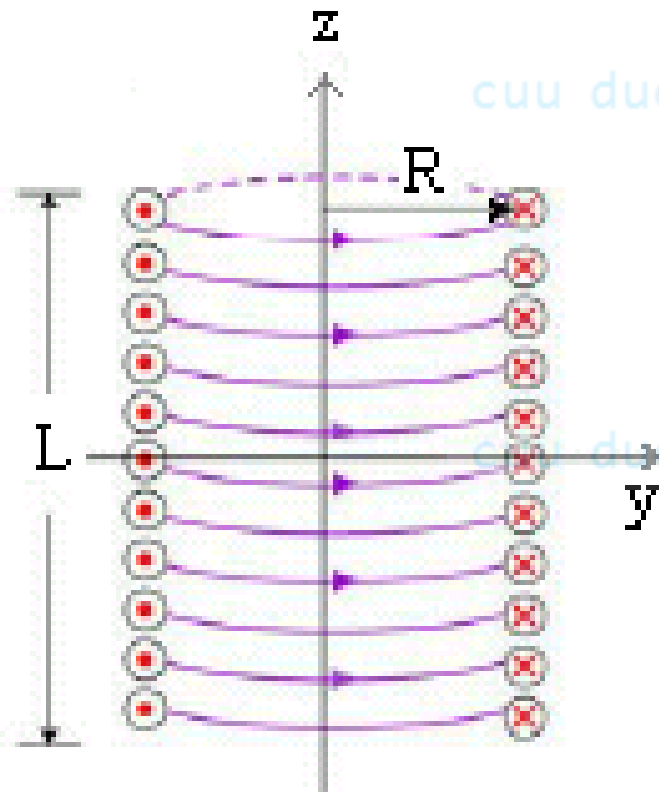
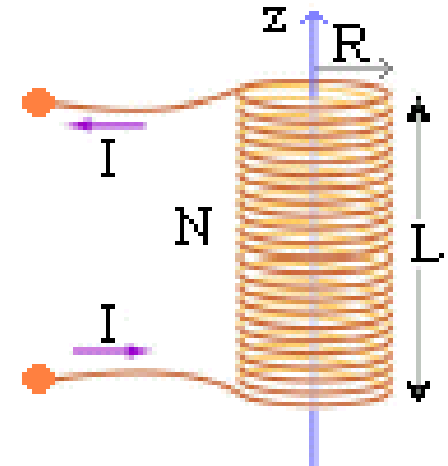
cuu duong than cong . com

d) Các ví dụ tính điện cảm & hồ cảm:

VD3.5.1: Tính điện cảm riêng L_0 của solenoid không khí, dài L , tiết diện A (hình tròn bán kính R), gồm N vòng dây ?

Giải

❖ Mặt cắt dọc solenoid: 2 mặt mang dòng.



❖ Trường từ chỉ tồn tại bên trong solenoid :

$$B = \mu_0 H = \mu_0 J_s = \mu_0 \frac{NI}{L}$$

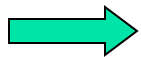
❖ VD 3.5.1: Tính điện cảm của solenoid (tt)

❖ Từ thông gởi qua N vòng của solenoid :

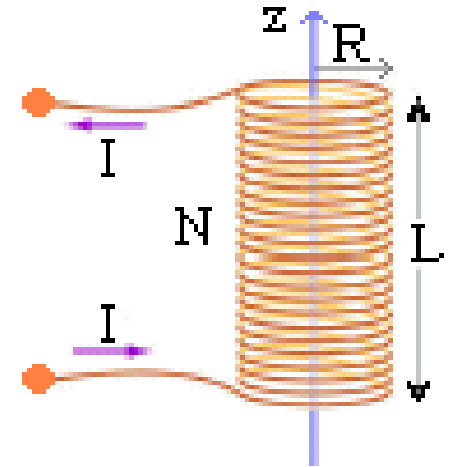
$$\psi = N\Phi = N.B.A \quad ; \quad (A = \pi R^2)$$

❖ Điện cảm của solenoid :

$$L_0 = \frac{\psi}{I}$$



$$L_0 = \mu_0 \frac{N^2 A}{L}$$

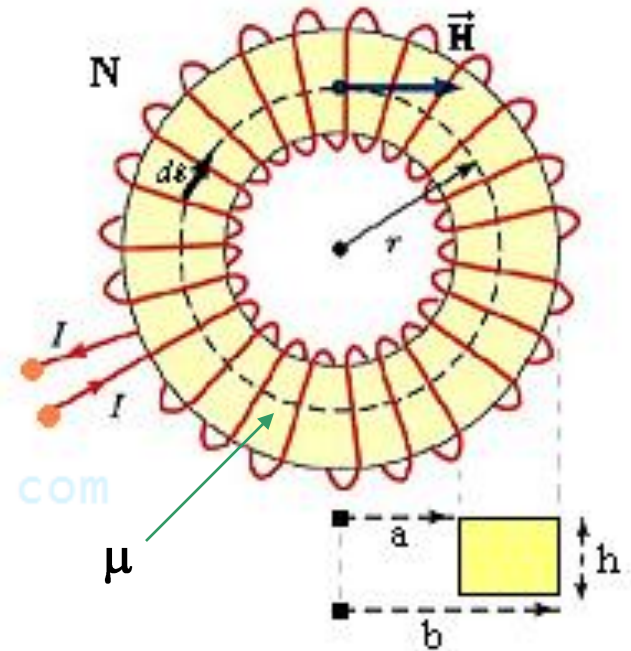
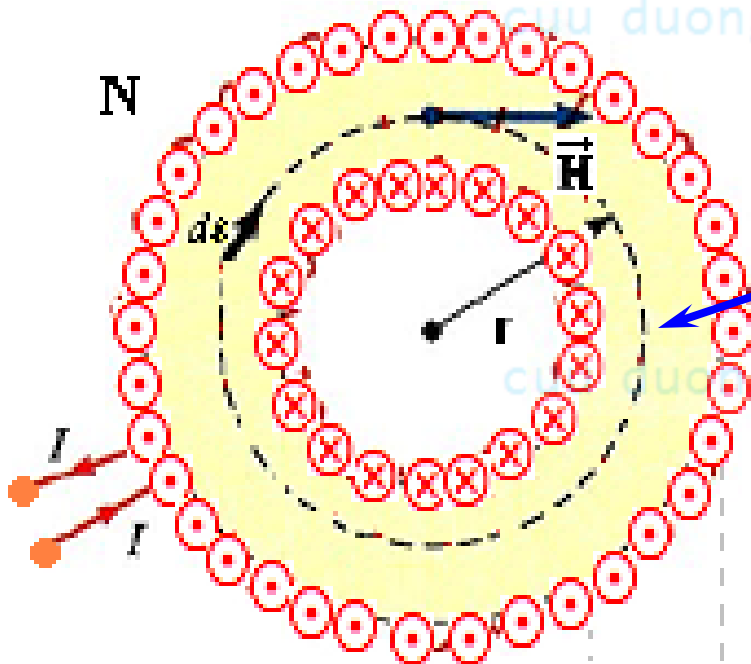


❖ VD 3.5.2: Tính điện cảm của toroid.

Tính điện cảm riêng L_0 của toroid ?

Giải

❖ Mặt cắt ngang toroid:



❖ Đường Amper:

❖ Trường từ chỉ tồn tại trong toroid , và :

$$B \cdot 2\pi r = \mu NI$$

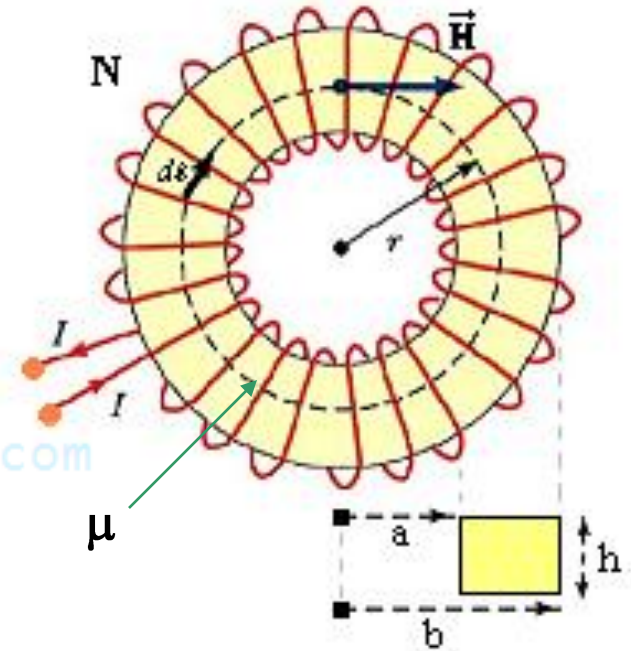
❖ VD 3.5.2: Tính điện cảm của toroid (tt)

❖ Từ thông gởi qua N vòng dây toroid :

$$\psi = N\Phi = N \int_S B dS = \frac{\mu N^2 I}{2\pi} \int_a^b \int_0^h \frac{dr \cdot dz}{r}$$

$$\Rightarrow \psi = N\Phi = \frac{\mu N^2 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot h$$

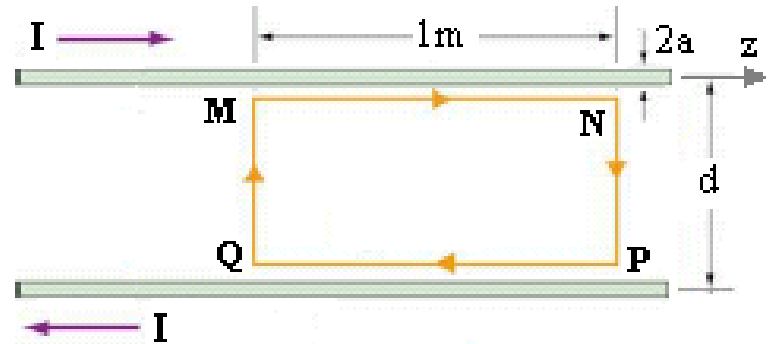
$$\Rightarrow L_0 = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



❖ VD 3.5.3: Tính điện cảm của đường dây song hành ?

Điện cảm đơn vị L_0 của đường dây song hành ?

Giải



❖ Định nghĩa: $L_0 = \Phi_0 / I$

❖ Có: $\Phi_0 = \oint_{MNPQ} \vec{A} d\vec{l} = A^+ - A^-$, với:
$$\begin{cases} A^+ = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a} \\ A^- = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{a}{d-a} \end{cases}$$

→ $\Phi_0 = \frac{\mu I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$

→
$$L_0 = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

❖ VD 3.5.4: Tính điện cảm của cáp

Điện cảm đơn vị L_0 của cáp đồng trục ?

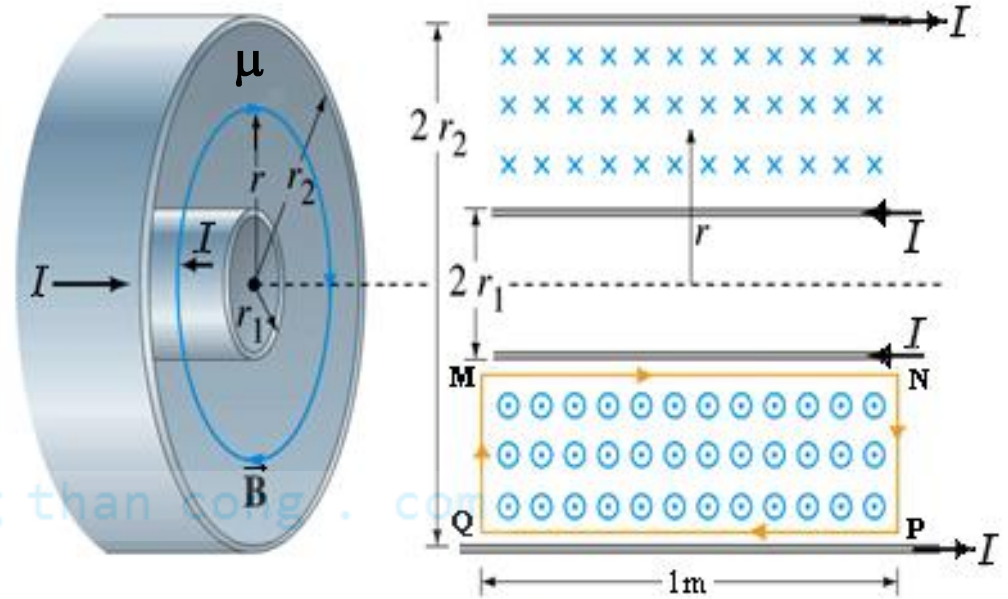
Giải

❖ Dùng: $L_0 = \Phi_0 / I$

$$\Phi_0 = \oint_{MNPQ} \vec{A} d\vec{l}$$

$$\Phi_0 = A_{r=r_1} - A_{r=r_2}$$

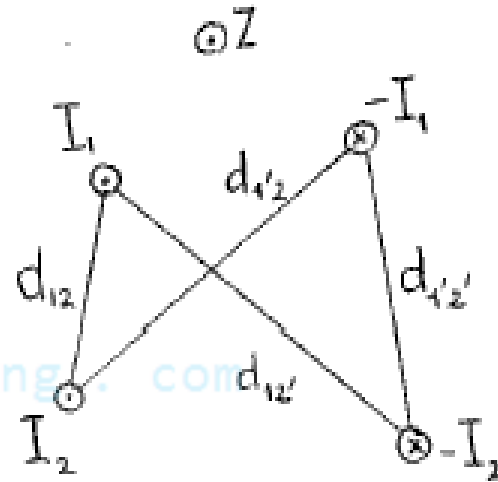
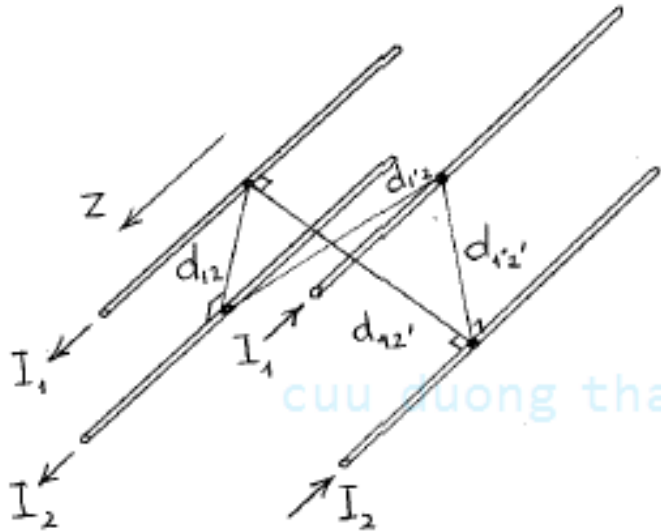
❖ Mà:
$$\begin{cases} A_{r=r_1} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{C}{r_1} \\ A_{r=r_2} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{C}{r_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Phi_0 = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



$$L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

❖ VD 3.5.5: Tính hồ cảm hệ đường dây

Hồ cảm đơn vị của 2 hệ trục mang dòng song song ?



$$\vec{A} = A \vec{i}_z \Rightarrow M_0 = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \quad ; \quad \Phi_{12} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 d\vec{l} = A_2^+ - A_2^-$$

$$\begin{cases} A_2^+ = \frac{\mu I_2}{2\pi} \ln \frac{d_{12'}}{d_{12}} \\ A_2^- = \frac{\mu I_2}{2\pi} \ln \frac{d_{12'}}{d_{12}} \end{cases} \Rightarrow \Phi_{12} = \frac{\mu I_2}{2\pi} \ln \frac{d_{12}' d_{12}}{d_{12} d_{12}'} \Rightarrow M = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{d_{12}' d_{12}}{d_{12} d_{12}'}$$

❖ VD 3.5.6: Tính điện cảm dùng MATLAB

Dây dẫn bán kính $a = 1$ mm uốn thành vòng dây tròn bán kính 10 cm. Bỏ qua điện cảm trong của dây dẫn, viết chương trình MATLAB tính điện cảm của vòng dây này.

```
% Inductance inside a conductive loop
% This modifies ML0302 to calculate inductance
% of a conductive loop. It does this by
% calculating the mag field at discrete,
% points along a pie wedge then calculates flux
% through each portion of the wedge. Then it
% multiplies by the number of wedges in the 'pie'.
% Variables:
% I      current(A) in +phi direction on ring
% a      ring radius (m)
% b      wire radius (m)
% Ndeg   number of increments for phi
% f      angle of phi in radians
% df     differential change in phi
% dL     differential length vector on the ring
% dLmag  magnitude of dL
% dLuv   unit vector in direction of dL
% [xL,yL,0] location of source point
% Ntest  number of test points
```

```
% Rsuv   unit vector from O to source point
% R      vector from the source to test point
% Ruv    unit vector for R
% Rmag   magnitude of R
% dH     differential contribution to H
% dHmag  magnitude of dH
% radius radial distance from origin
% Hz     total magnetic field at test point
% Bz     total mag flux density at test point
% flux   flux through each differential
segment
clc      %clears the command window
clear   %clears variables
```

❖ VD 3.5.6: Tính điện cảm dùng MATLAB

% Initialize Variables

```
a=0.1;  
b=1e-3;  
l=1;  
Ndeg=180;  
Ntest=60;  
uo=pi*4e-7;  
df=360/Ndeg;  
dLmag=(df*pi/180)*a;  
dr=(a-b)/Ntest;
```

Now run the program:

Inductance = 5.5410e-007

or

L = 550 nH

% Calculate flux thru each segment of pie wedge

```
for j=1:Ntest  
    x=(j-0.5)*dr;  
    for i=(df/2):df:360  
        f=i*pi/180;  
        xL=a*cos(f);  
        yL=a*sin(f);  
        Rsuv=[xL yL 0]/a;  
        dLuv=cross([0 0 1],Rsuv);  
        dL=dLmag*dLuv;  
        R=[x-xL -yL 0];  
        Rmag=magvector(R);  
        Ruv=R/Rmag;  
        dH=l*cross(dL,Ruv)/(4*pi*Rmag^2);  
        dHmag(i)=magvector(dH);  
    end  
    Hz(j)=sum(dHmag);  
    Bz(j)=uo*Hz(j);  
    dSz(j)=x*df*(pi/180)*dr;  
    flux(j)=Bz(j)*dSz(j);  
end  
fluxwedge=sum(flux);  
Inductance=Ndeg*fluxwedge
```

❖ VD 3.5.7: Tính trường từ tĩnh

Lõi trụ đặc, dài vô hạn, bán kính là a , mang dòng với mật độ:

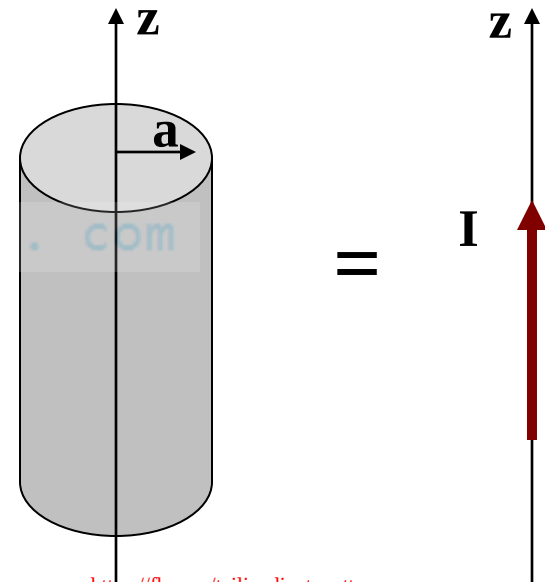
$$\vec{J} = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \vec{a}_z$$

Lõi có độ thấm từ $\mu = \text{const}$. Bên ngoài là không khí. Xác định:
(a) Tổng dòng trên lõi ? (b) Cường độ trường từ trong lõi ? (c) Năng lượng trường từ tích lũy bên trong lõi trên đơn vị dài ?
Suy ra điện cảm trong của lõi trên đơn vị dài ?

Giải

a) Tổng dòng trên lõi: chọn hệ trụ.

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) [r dr d\phi] = \frac{J_0 \pi a^2}{2}$$



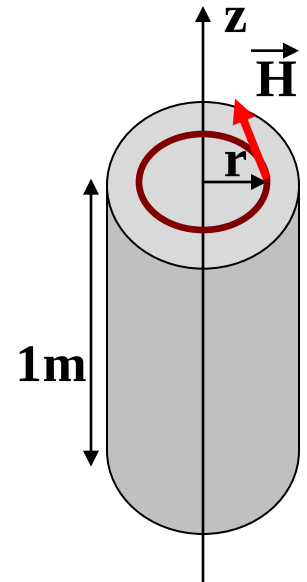
❖ VD 3.5.7: Tính trường từ tĩnh (tt)

b) Xác định cường độ trường từ:

❖ Bài toán đối xứng trụ. Đường Ampere là đường tròn, bán kính r . Theo phương pháp đường Ampere, ta có tổng dòng bên trong :

$$I^* = \int_0^r \int_0^{2\pi} J_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) [r dr d\phi] = J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2}\right) 2\pi$$

$$\rightarrow H_\phi = \frac{I^*}{2\pi r} = J_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4a^2}\right)$$



c) Xác định năng lượng trường từ trên 1m dài:

$$W_{\text{mtr}} = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu J_0^2 \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4a^2} + \frac{r^6}{16a^4} \right] (r dr d\phi dz)$$

❖ VD 3.5.7: Tính trường từ tĩnh (tt)

$$W_{\text{mtr}} = \frac{\pi}{2} \mu J_0^2 \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^6}{24a^2} + \frac{a^8}{128a^4} \right) = \frac{\pi}{2} \mu J_0^2 \frac{83a^4}{384}$$

❖ Điện cảm trong:

$$L_{\text{tr}} = \frac{2W_{\text{mtr}}}{I^2} = 2 \frac{\pi}{2} \mu J_0^2 \frac{83a^4}{384} \frac{4}{J_0^2 \pi^2 a^4}$$

→ $L_{\text{tr}} = \frac{83\mu}{96\pi}$

