§7: Thế lưu

Bài giảng của TS. Nguyễn Quốc Ý
nguyenquocy@hcmut.edu.vn

Ngày 14 tháng 1 năm 2013

Nội dung cần nắm

- PT Navier-Stokes, Euler
- Hàm dòng, hàm thế và các tính chất
- Tính chất các dòng thế cơ bản và chồng nhập

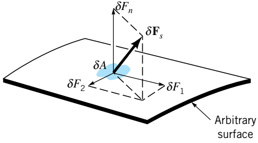
Bảo toàn động lượng thẳng

PT Navier-Stokes

$$\delta\vec{F} = \delta m\,\vec{a}$$

$$\delta\vec{F} = \begin{cases} \text{Lực mặt: } \delta\vec{F}_b \begin{cases} F_{bx} \\ F_{by} \\ F_{bz} \end{cases} = \delta m\,\vec{g} = \delta m \begin{cases} g_x \\ g_y \\ g_z \end{cases} \\ \text{Lực khối: } \delta\vec{F}_s = \begin{cases} \delta F_n \perp \text{bề mặt} \\ \delta F_{1,2} \parallel \text{bề mặt} \end{cases} \end{cases}$$

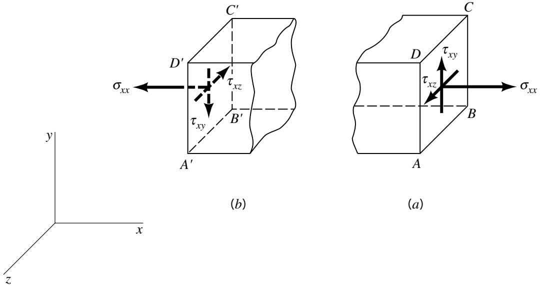
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$



Bảo toàn động lượng thẳng

PT Navier-Stokes

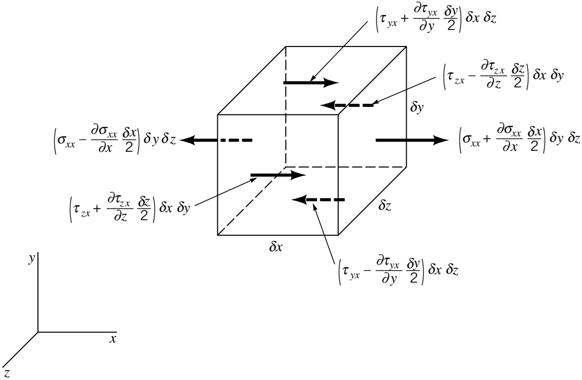
$$\sigma_n = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \quad \tau_{1,2} = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F_{1,2}}{\delta A}$$



$$\vec{\sigma}_x = \sigma_{xx}\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k}$$

Bảo toàn động lượng thẳng

PT Navier-Stokes



$$\delta F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\partial x\,\partial y\,\partial z$$

$$\delta m a_x = \delta F_{sx} + \delta m\, g_x \quad \text{với } \delta m = \rho \partial x\,\partial y\,\partial z$$

Bảo toàn động lượng thẳng

PT Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho\, g_x$$

Lưu chất Newton:

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

nên

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Bảo toàn động lượng thẳng
PT Navier-Stokes

Tương tự cho hai phương y, z:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_y + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Viết cách khác:

$$\boxed{\frac{D\overrightarrow{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla} p + \vec{g} + \nu\nabla^2\overrightarrow{V}}$$

PT Navier-Stokes

Bảo toàn động lượng thẳng

PT Euler

Bỏ qua tính nhớt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z$$

Viết cách khác:

$$\boxed{\frac{D\overrightarrow{V}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{V} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla} p + \vec{g}}$$

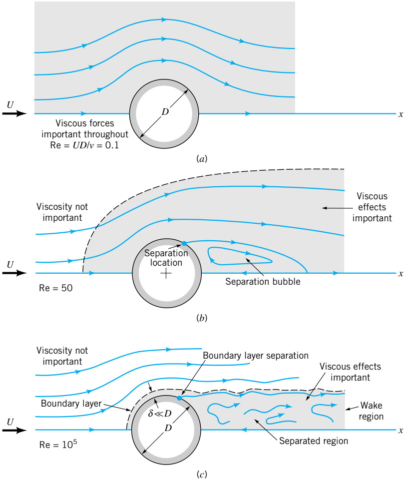
PT Euler

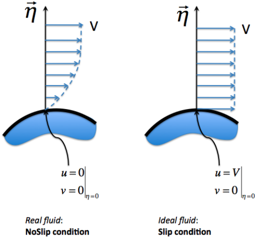
Bảo toàn động lượng thẳng

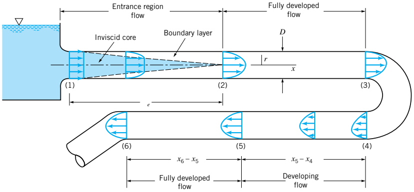
Bàn luận:

- Có bao nhiêu biến trong PT động lượng thẳng?
- Cần bao nhiêu PT để giải các biến đó, là các PT nào?
- Tại sao *hầu như* không thể tìm nghiệm tổng quát của PT Navier-Stokes hay Euler?
- Khi nào thì có thể bỏ qua tính nhớt?

Nội lưu- Ngoại lưu







Dòng 2D, không nén được

Hàm dòng

PT liên tục:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Tìm hàm *vô hướng* $\psi(x, y)$: $\psi(r, \phi)$:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

thay vào PT liên tục: OK!

Vậy, có thể mô tả 2 biến $u(x, y), v(x, y)$bằng 1 hàm $\psi(x, y)$

hàm vô hướng $\psi(x, y)$ được gọi là **hàm dòng**

Bàn luận: <u>có hàm dòng 3D?</u>

Dòng không quay

hàm thế vận tốc

Dòng không quay:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Tìm hàm vô hướng $\phi(x, y)$: $\phi(r, \theta)$:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

thay vào ĐK không quay $\omega_z = 0$: satisfied!

vậy có thể mô tả hai biến $u(x, y), v(x, y)$ bằng 1 hàm $\phi(x, y)$

$\phi(x, y)$ được gọi là **thế vận tốc**

Bàn luận: <u>có hàm thế vận tốc 3D?</u>

Thế lưu

không nén được + không quay

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ \omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Vậy ϕ và ψ đều thỏa PT Laplace

Dòng thế

chồng nhập

Như vậy, cho dòng thế 2D:

- có thể dùng ϕ hoặc ψ để miêu tả
- ϕ_1: thế vận tốc cho dòng thế 1

  ϕ_2: thế vận tốc cho dòng thế 2

  $\phi = \phi_1 + \phi_2$: thế vận tốc cho dòng thế 1 kết hợp dòng thế 2
- tương tự cho ψ

$\Rightarrow$ kết hợp (chồng nhập) nhiều dòng thế có $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$ và $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$:

$$\phi = \sum_i^n \phi_i \qquad \psi = \sum_i^n \psi_i$$

$$\overrightarrow{V} = \sum_i^n \overrightarrow{V}_i$$

$$\begin{cases} u = \sum_i^n u_i \\ v = \sum_i^n v_i \end{cases}$$

Như vậy, đã có u và v khi biết ϕ hoặc ψ,

Làm sao để tìm p?

$\Rightarrow$ **Dùng Pt Bernoulli cho dòng thế và ổn định:**:

Từ PT Euler cho dòng lý tưởng: $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \vec{V} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p$,

với $\left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \vec{V} = \dfrac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \dfrac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V})$ cho dòng thế.

Dòng ổn định $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$, vì vậy

$\dfrac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p \quad (*)$

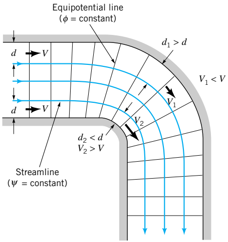
Lấy $(*) \cdot d\vec{s} \left[= dx\vec{i} + dy\vec{j}\right]$, $\nabla p \cdot d\vec{s} = dp$,

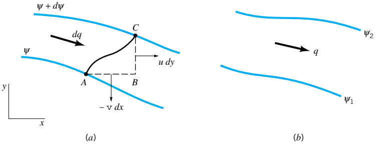
$\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{s} = \nabla(V^2) \cdot d\vec{s} = d(V^2)$

$\dfrac{dp}{\rho} + \dfrac{dV^2}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{p + \rho \dfrac{V^2}{2} = const.}$ cho bất kì $d\vec{s}$

Qua hệ giữa ϕ và ψ?

- Đường với $\psi = const.$ là đường dòng (cho dòng ổn định).
- Đường với $\phi = const.$ là các đường Đẳng Thế.
- Đường với ϕ= const. $\perp$ với các đường ψ=const.





$$dq = udy - vdx = \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx = d\psi$$

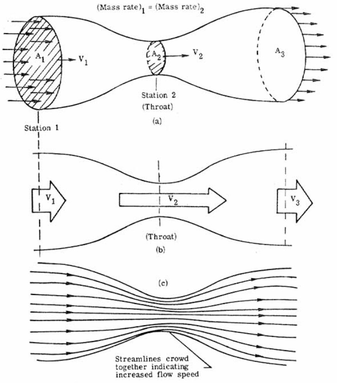
$$q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

Do đó,

- Nơi nào đường dòng dày hơn $\Rightarrow$ vận tốc lớn hơn

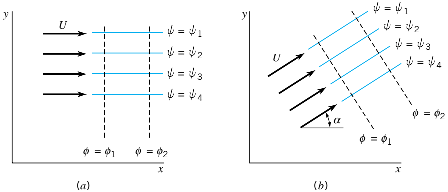
  const. $= \Delta\psi = q =$ vận tốc $\times$ khoảng cách

  vận tốc tăng, khoảng cách giảm



Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

dòng đều



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

vậy, $\phi = Ux + C$ or

$$\boxed{\phi = Ux}$$

và

$$\boxed{\psi = Uy}$$

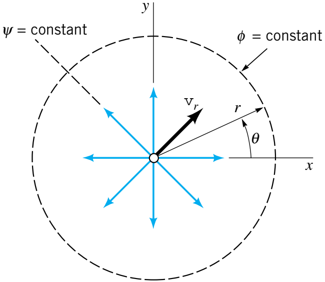
Dòng đều với phương α so với trục x: $\boxed{\phi = U(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}$

và

$$\boxed{\psi = U(y \cos \alpha - x \sin \alpha)}$$

Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

điểm nguồn- điểm giếng



$$(2\pi r)u_r = q, \text{ hoặc, } u_r = \frac{q}{2\pi r}$$

và, $u_\theta = 0$ vậy,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q}{2\pi r} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\theta y} = 0$$

rồi

$$\boxed{\phi = \frac{q}{2\pi r} \ln r}$$

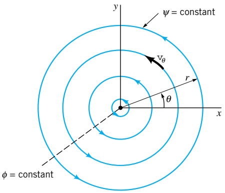
và,

$$\boxed{\psi = \frac{q}{2\pi r}\theta}$$

- $q > 0$ cho điểm nguồn
- $q < 0$ cho điểm giếng

Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

xoáy tự do



Xoáy tự do:

- $u_r = 0$
- $u_\theta \neq 0$
- $u_\theta \downarrow$ khi $r \uparrow$, ví dụ, $u_\theta = \dfrac{K}{r}$

Lưu số của xoáy tự do:

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta$$

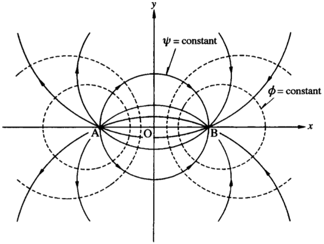
$$= 2\pi r \; u_\theta, \text{ or}$$

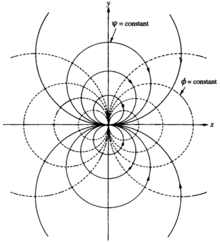
$$\Rightarrow u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Vậy, $\boxed{\phi = \dfrac{\Gamma}{2\pi\theta}}$, và $\boxed{\psi = \dfrac{\Gamma}{2\pi} \ln r}$

Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

lưỡng cực





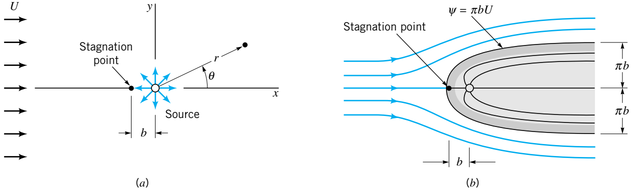
- một điểm nguồn ở A
- một điểm giếng ở B

  Lấy $AB = 2\epsilon \to 0$ và $q \to \infty$ để $\epsilon . q = q_0 = const$.

bằng cách này, một Lưỡng Cực được định nghĩa: $\boxed{\phi = \dfrac{q_0 \cos\theta}{r}}$ và $\boxed{\psi = -\dfrac{q_0 \sin\theta}{r}}$

Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

dòng đều + nguồn= dòng qua 'nửa vật rắn'



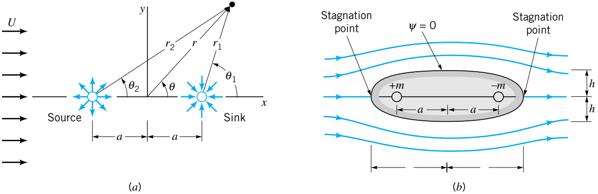
@ điểm dừng:

$$\psi = \psi_{uniform\ flow} + \psi_{source\ @\ origin}$$
$$= U\ r\sin\theta + \frac{q}{2\pi}\theta$$
$$\phi = \phi_{uniform\ flow} + \phi_{source\ @\ origin}$$
$$= U\ r\cos\theta + \frac{q}{2\pi}\ln r$$

$$u_r\big|_{source} = U$$
$$\frac{q}{2\pi b} = U$$
$$\boxed{b = \frac{q}{2\pi U}}$$

Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

dòng đều + nguồn + giếng= dòng qua 'vật rắn'



$$\psi = \psi_{uniform\ flow} + \psi_{source\ @\ (-a,0)} + \psi_{sink\ @\ (a,0)}$$

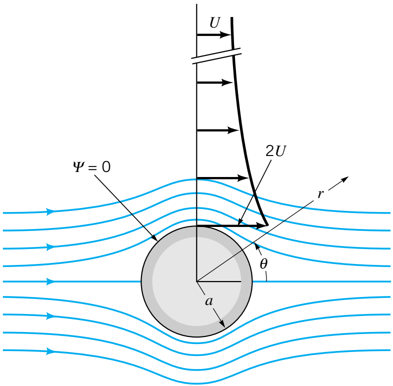
@ điểm dừng bên trái $u_r|_{source} = U + u_r|_{sink}$

@ điểm dừng bên phải $u_r|_{sink} = U + u_r|_{source}$

- $\psi = 0$ trên bề mặt vật thể (tìm được bằng phương pháp trial-error)

Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

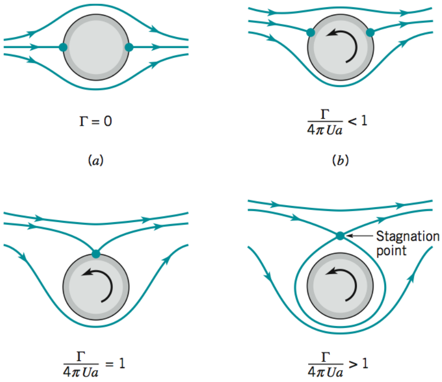
dòng đều + lưỡng cực= dòng qua trụ tròn tĩnh



- Cố thể Rankine:
  $a \to 0$, nguồn + giếng → lưỡng cực, *oval* → trụ!
- $a^2 = \dfrac{q_0}{U}$
- trên bề mặt trụ:
  $u_{\theta s} = -2U \sin\theta$, và,
  $p = p_\infty + \dfrac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\sin^2\theta)$
  (Hãy tự chứng minh các công thức đó!)

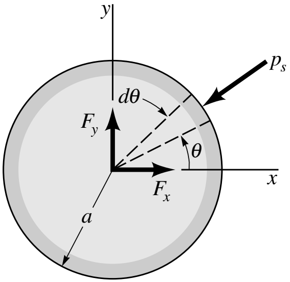
Một số dòng thế cơ bản và chồng nhập

dòng qua trụ tròn + xoáy tự do= dòng qua trụ tròn quay đều



- Thành phần vận tốc tiếp tuyến bề mặt: $u_{\theta s} = -2U\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi a}$ (U=0, $\Gamma = 2\pi a\, u_\theta = 2\pi a^2\omega$)
- ở điểm dừng: $u_\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = \dfrac{\Gamma}{4\pi U a}$
- xem xét 4 trường hợp của $\dfrac{\Gamma}{4\pi U a}$ như trên hình!

Lực tác dụng lên bề mặt trụ tròn



$$F_x = -\int_0^{2\pi} p_s \cos\theta \, a \, d\theta$$

$$F_y = -\int_0^{2\pi} p_s \sin\theta \, a \, d\theta$$

- trụ tĩnh

$$F_x = 0 \quad F_y = 0$$

- trụ quay đều

$$F_{\|\text{dòng}} = 0 \quad F_{\perp\text{dòng}} \neq 0$$

$$\boxed{F_{\perp\text{dòng}} = -\rho \Gamma U_o \quad (N/m)}$$

CT Kutta-Joukowski, hiện tượng Magnus

Bàn luận: tại sao $F_{\perp\text{dòng}} \neq 0$?