

Môn học

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng

Khoa Điện – Điện Tử

Đại học Bách Khoa TP HCM

Email: hthoang@hcmut.edu.vn

Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 2

PHÂN TÍCH HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN LIÊN TỤC TRONG MIỀN THỜI GIAN

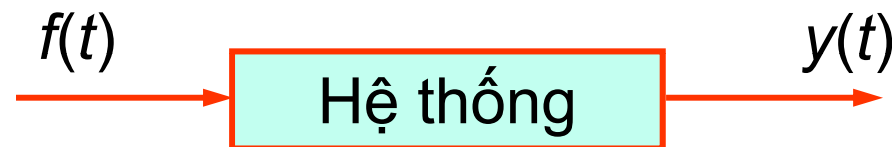


Nội dung chương 2

- ☐ Giới thiệu
- ☐ Đáp ứng với ngõ vào bằng 0
- ☐ Đáp ứng xung đơn vị
- ☐ Đáp ứng với ngõ vào bất kỳ
- ☐ Tính ổn định của hệ thống

GIỚI THIỆU

- ❑ Môn học tập trung khảo sát hệ thống tuyến tính bất biến liên tục (Linear Time Invariant Continuous system – LTIC)
- ❑ Quan hệ vào ra của hệ LTIC có thể mô tả bằng phương trình vi phân

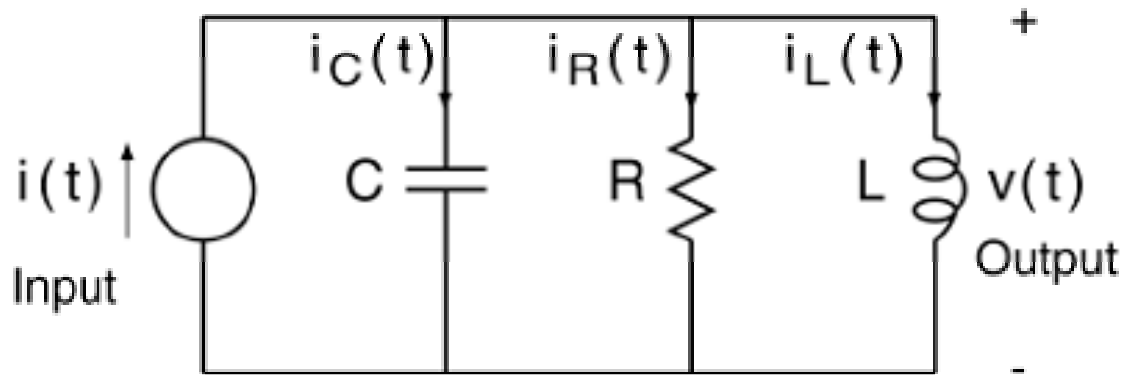


$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f$$

n : bậc của hệ thống, hệ thống hợp thức (proper) nếu $n \geq m$.
 a_i, b_i : thông số của hệ thống

Ví dụ hệ thống tuyến tính

□ Mạch RLC – Hệ thống điện



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{dv^2(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{di(t)}{dt}$$

Ví dụ hệ thống tuyến tính

□ Hệ thống giảm sóc – Hệ thống cơ

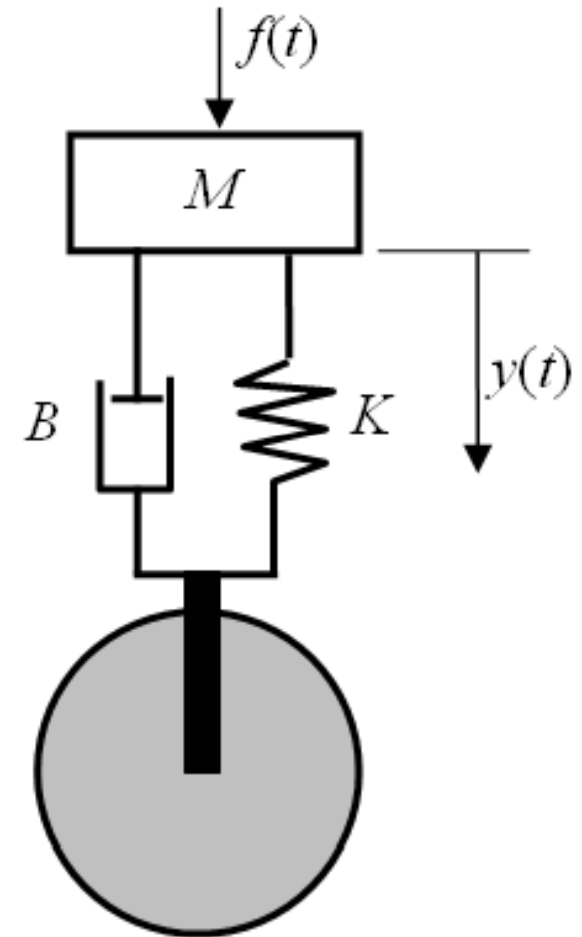
M: khối lượng tác động lên bánh xe,

B hệ số ma sát, K độ cứng lò xo

$f(t)$: lực do sóc: tín hiệu vào

$y(t)$: dịch chuyển của thân xe: tín hiệu ra

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$



Đáp ứng của hệ LTIC

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f$$

□ Ký hiệu D thay cho d/dt , phương trình trên được viết lại:

$$\underbrace{(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)}_{Q(D)} y = \underbrace{(b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)}_{P(D)} f$$

$$\Rightarrow Q(D)y = P(D)f$$

□ Đáp ứng của hệ LTIC gồm 2 thành phần:

- **Đáp ứng tự do:** là đáp ứng do năng lượng tích trữ bên trong hệ thống (điều kiện đầu) khi tín hiệu vào bằng 0.
- **Đáp ứng cưỡng bức:** là đáp ứng do tác nhân bên ngoài hệ thống (tín hiệu vào) khi điều kiện đầu bằng 0

ĐÁP ỨNG TỰ DO

❑ Đáp ứng tự do là đáp ứng khi tín hiệu vào bằng 0 (zero-input response).

❑ Xét hệ thống mô tả bởi PTVP:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)f$$
$$\Leftrightarrow Q(D)y = P(D)f$$

❑ Gọi $y_0(t)$ là đáp ứng tự do của hệ thống ($f(t)=0$), suy ra

$$Q(D)y_0(t) = 0$$

❑ $y_0(t)$ có dạng $Ce^{\lambda t}$

$$\Rightarrow Dy_0(t) = C\lambda e^{\lambda t}, D^2y_0(t) = C\lambda^2 e^{\lambda t}, \dots, D^ny_0(t) = C\lambda^n e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow C(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow CQ(\lambda)e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đặc trưng: } Q(\lambda) = 0$$

Đáp ứng tự do (tt)

□ Tùy theo nghiệm của phương trình đặc trưng, đáp ứng tự do của hệ thống có dạng như sau:

➤ Nếu $Q(\lambda)=0$ có n nghiệm đơn:

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t} + C_n e^{\lambda_n t}$$

➤ Nếu $Q(\lambda)=0$ có nghiệm bội (giả sử λ_1 là nghiệm bội r):

$$y_0(t) = (C_1 + C_2 t + \dots + C_r t^{r-1}) e^{\lambda_1 t} + C_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

➤ Nếu $Q(\lambda)=0$ có nghiệm phức (giả sử $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$):

$$y_0(t) = C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) + C_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

□ Các hằng số C_i , θ được xác định từ điều kiện đầu.

□ **Matlab:** `dsolve('PTVP','DK_dau_1','DK_dau_2',..., 'DK_dau_n')`

Ví dụ tính đáp ứng tự do

❑ Tìm $y_0(t)$: $(D^2 + 5D + 6)y(t) = Df(t)$

Với điều kiện đầu $y_0(0) = 0; y'(0) = -5$

❑ Giải:

❑ Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

$$\Rightarrow y_0(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

❑ Xác định các hằng số từ điều kiện đầu:

$$\begin{cases} y'_0(0) = -5 \\ y_0(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2C_1 - 3C_2 = -5 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -5 \\ C_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0(t) = -5e^{-2t} + 5e^{-3t}$$

Matlab: `>> dsolve('D2y+5*Dy+6*y=0','y(0)=0','Dy(0)=-5')`

□ Tính đáp ứng tự do $y_0(t)$ của các hệ thống sau:

a) $(D^2 + 4D + 4)y(t) = Df(t)$

Với điều kiện đầu $y_0(0) = 1; y'(0) = 0$

b) $(D^2 + 4D + 40)y(t) = (D + 2)f(t)$

Với điều kiện đầu $y_0(0) = 0; y'(0) = 16.78$

c) $(D^3 + 5D^2 + 7D + 3)y(t) = (D + 2)f(t)$

Với điều kiện đầu $y_0(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = -2;$

ĐÁP ỨNG XUNG ĐƠN VỊ

Đáp ứng xung đơn vị

□ Đáp ứng xung đơn vị là đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là xung dirac.

□ Xét hệ thống mô tả bởi PTVP (chú ý bậc 2 về bằng nhau)

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = (b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0)f$$

□ Đáp ứng xung đơn vị của hệ thống trên có dạng:

$$h(t) = b_n\delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

Trong đó $y_n(t)$ là đáp ứng tự do của hệ thống với các điều kiện đầu như sau:

$$y_n^{(n-1)}(0) = 1$$

$$y_n^{(n-2)}(0) = y_n^{(n-2)}(0) = \dots = y_n^{(1)}(0) = y_n(0) = 0$$

□ Chứng minh: Xem phụ lục 2.1 (Lathi, 1998)

Ví dụ tính đáp ứng xung đơn vị

❑ Ví dụ: Tìm đáp ứng xung đơn vị của hệ thống:

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

❑ Giải:

❑ Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$
 $\Rightarrow y_n(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

❑ Xác định các hằng số từ điều kiện đầu:

$$\begin{cases} y'_n(0) = 1 \\ y_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 - 2C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

❑ Đáp ứng xung:

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) = D[e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

Bài tập tính đáp ứng xung đơn vị

□ Tìm đáp ứng xung đơn vị của các hệ thống:

(a) $(D^2 + 4D + 4)y(t) = (D + 3)f(t)$

(b) $(D^3 + 3D^2 + 16D + 12)y(t) = (D^2 + D + 1)f(t)$

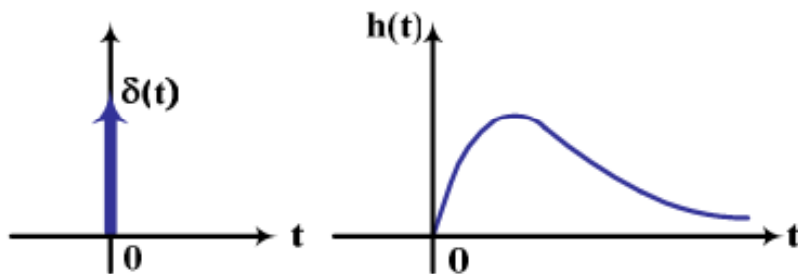
(c) $(D^2 + 2D + 5)y(t) = 2f(t)$

ĐÁP ỨNG VỚI NGỖ VÀO BẤT KỲ

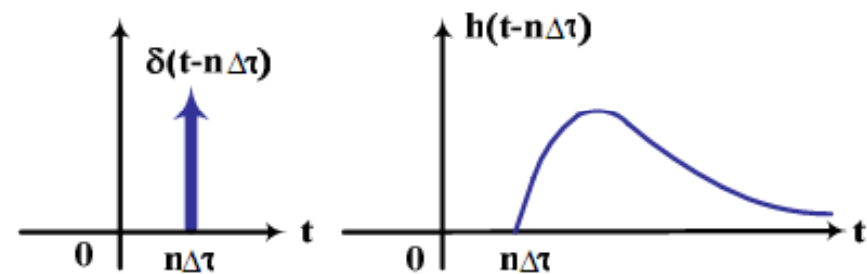
Đáp ứng với ngõ vào bất kỳ

- Đáp ứng với ngõ vào bất kỳ $f(t)$ được tính dựa vào đáp ứng xung với tín hiệu vào $\delta(t)$:

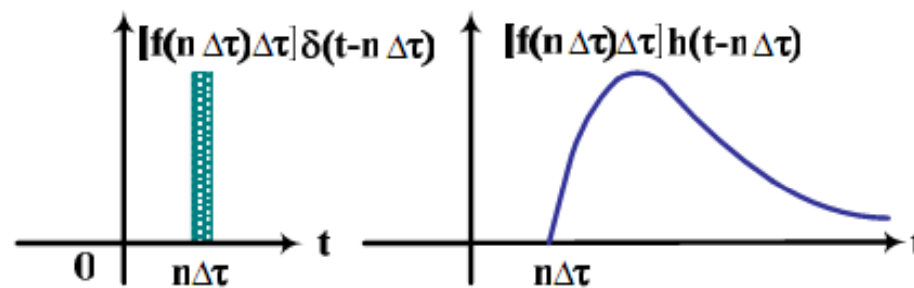
$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$



$$\delta(t - n\Delta\tau) \rightarrow h(t - n\Delta\tau)$$

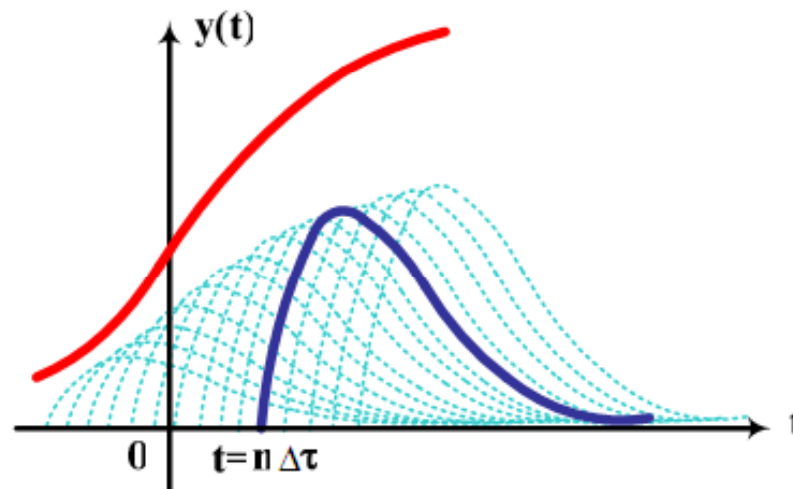
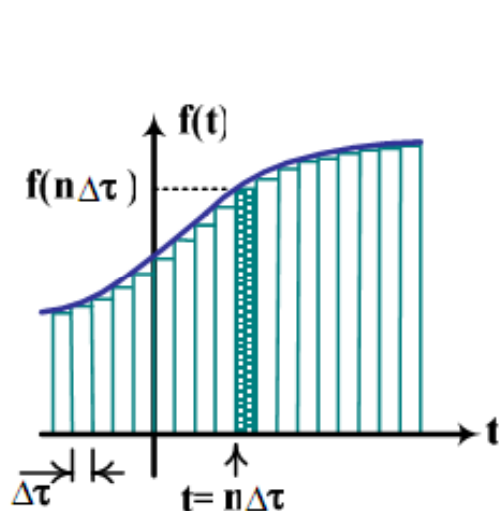


$$[f(n\Delta\tau)\Delta\tau]\delta(t - n\Delta\tau) \rightarrow [f(n\Delta\tau)\Delta\tau]h(t - n\Delta\tau)$$



Đáp ứng với ngõ vào bất kỳ (tt)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta\tau)\delta(t-n\Delta\tau)\Delta\tau \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta\tau)h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$$



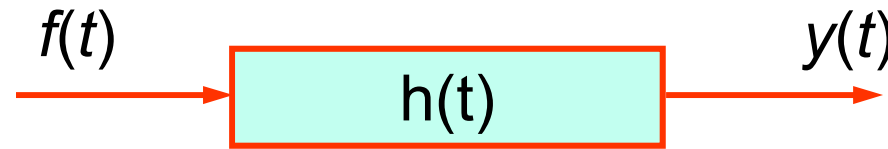
$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta\tau)\delta(t-n\Delta\tau)\Delta\tau \rightarrow \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta\tau)h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = f(t) * h(t)$$

Tích chập

Tích chập (Convolution)



- ❑ Có thể mô tả hệ thống tuyến tính bằng đáp ứng xung $h(t)$.
- ❑ Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào bất kỳ $f(t)$ là tích chập giữa tín hiệu vào $f(t)$ và đáp ứng xung $h(t)$.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- ❑ Nếu hệ thống nhân quả: $h(t)=0$ với $t<0$:

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- ❑ Nếu tín hiệu vào cũng nhân quả: $f(t)=0$ với $t<0$:

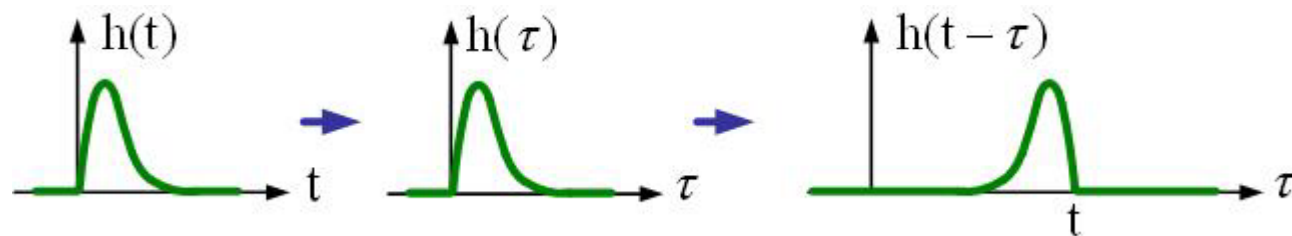
$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Cách tính tích chập

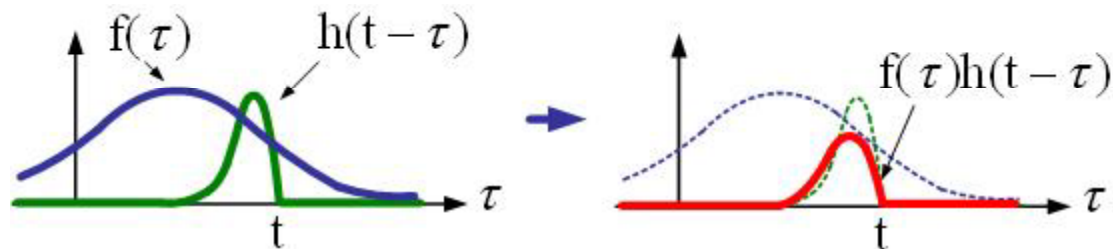
❑ Tính tích chập: $f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$

➤ Xác định $h(t-\tau)$ theo biến τ bằng cách:

- lấy đối xứng hàm h
- dời phải (trái) một khoảng t nếu $t > 0$ (nếu $t < 0$)



➤ Nhân $f(\tau)$ với $h(t-\tau)$



➤ Lấy tích phân trên toàn thang τ

Tính tích chập – Ví dụ 1

□ Tính tích chập sau đây: $e^{-at}u(t) * u(t)$

$$\begin{aligned} e^{-at}u(t) * u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau} u(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{e^{-a\tau}}{a} \Big|_{\tau=0}^t \end{aligned}$$

$$e^{-at}u(t) * u(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

□ Tính tích chập sau đây:

$$(a) e^{-at}u(t) * e^{-bt}u(t)$$

$$(d) tu(t) * u(t)$$

$$(b) u(t) * u(t)$$

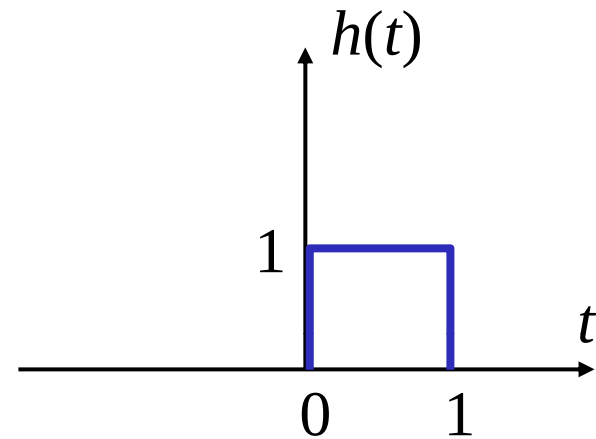
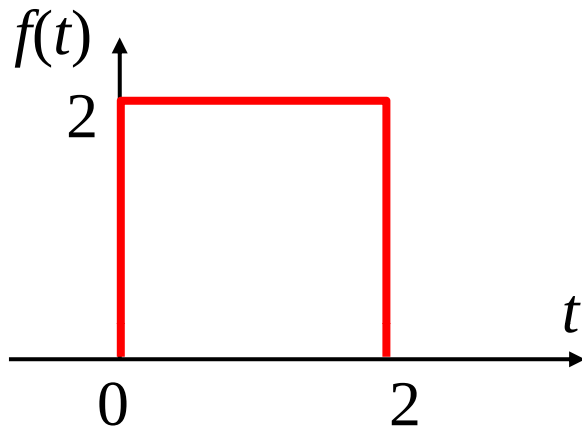
$$(e) (\sin t)u(t) * u(t)$$

$$(c) e^{-at}u(t) * e^{-at}u(t)$$

$$(f) (\cos t)u(t) * u(t)$$

Tính tích chập – Ví dụ 2

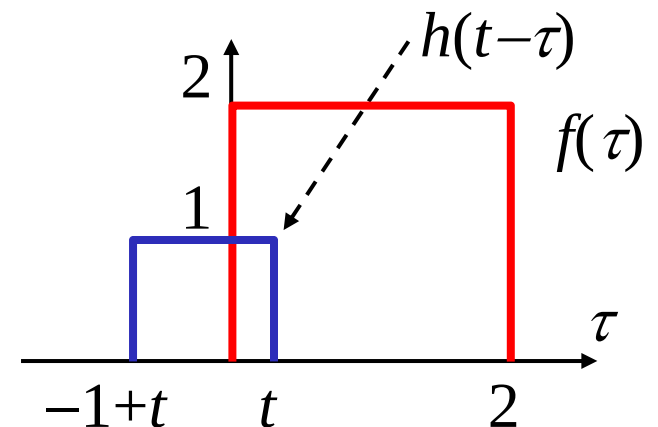
❑ Tính tích chập $f(t) * h(t)$ của hai hàm sau:



❑ Thay t bằng τ vào hai hàm $f(t)$ và $h(t)$

❑ Xoay và dịch hàm $h(\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

❑ Vẽ hai hàm lên cùng 1 đồ thị

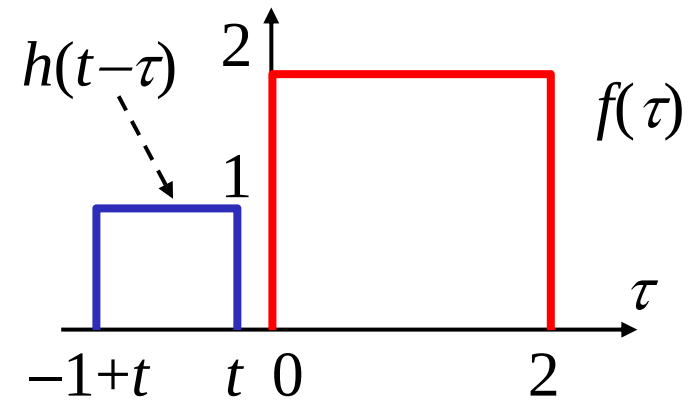


Tính tích chập – Ví dụ 1

❑ Xét các giá trị của t :

❑ Khi $t < 0$:

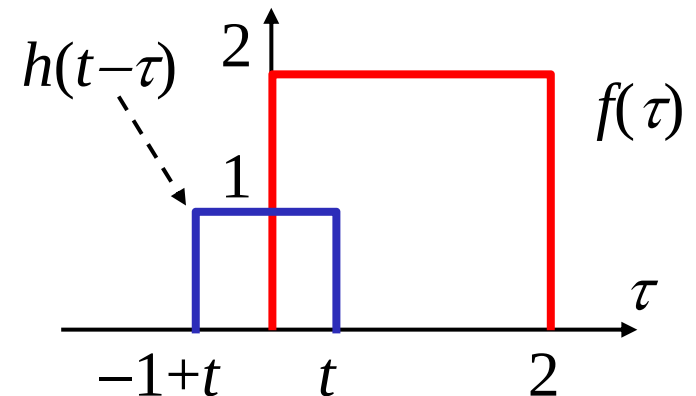
- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ không chồng nhau
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ bằng 0



❑ Khi $0 \leq t \leq 1$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ chồng nhau 1 phần
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ là:

$$\int_0^t 2d\tau = (2\tau)\Big|_0^t = 2t$$

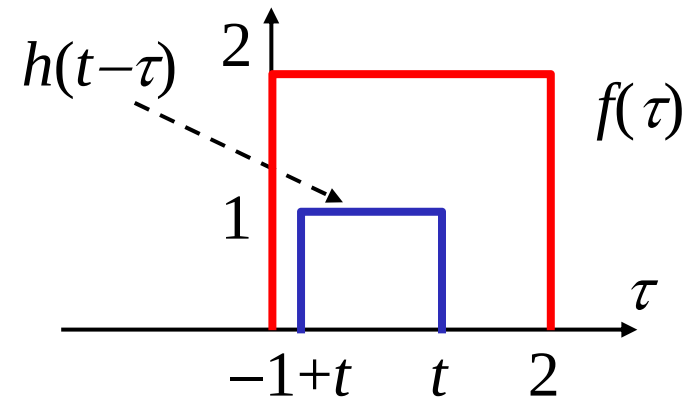


Tính tích chập – Ví dụ 1

□ Khi $1 \leq t < 2$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ chồng nhau hoàn toàn
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ là:

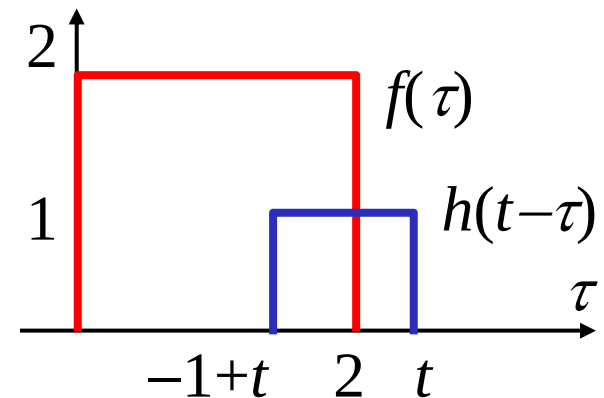
$$\int_{-1+t}^t 2d\tau = (2\tau) \Big|_{-1+t}^t = 2$$



□ Khi $2 \leq t < 3$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ chồng nhau 1 phần
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ là:

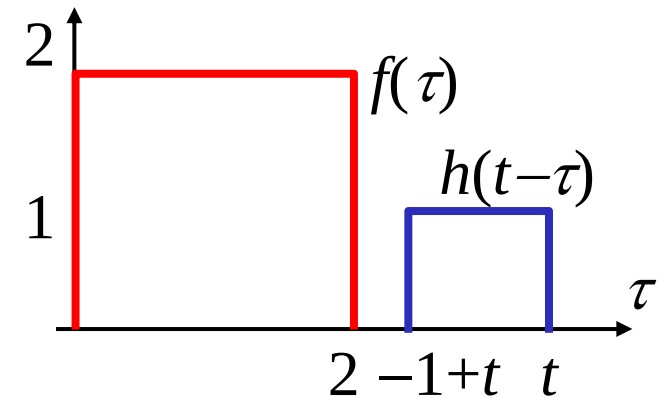
$$\int_{-1+t}^2 2d\tau = (2\tau) \Big|_{-1+t}^2 = 4 - 2(-1+t) = 2 - 2t$$



Tính tích chập – Ví dụ 2

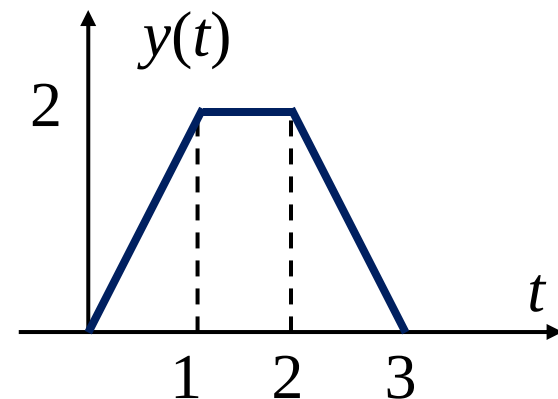
□ Khi $t \geq 3$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ không chồng nhau
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ bằng 0



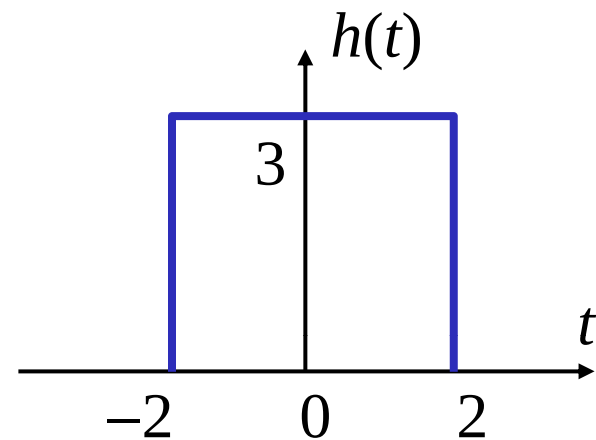
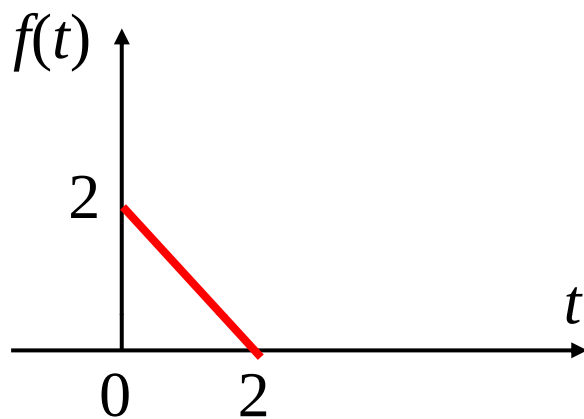
□ Kết quả: tích chập gồm 5 khoảng:

$$y(t) = f(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2t & (0 \leq t < 1) \\ 2 & (1 \leq t < 2) \\ 2 - 2t & (2 \leq t < 3) \\ 0 & (t \geq 3) \end{cases}$$



Tính tích chập – Ví dụ 3

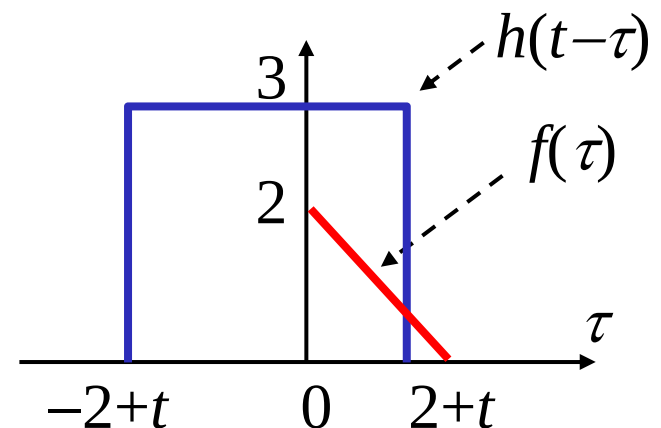
□ Tính tích chập $f(t) * h(t)$ của hai hàm sau:



□ Thay t bằng τ vào hai hàm $f(t)$ và $h(t)$

□ Xoay và dịch hàm $h(\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

□ Vẽ hai hàm lên cùng 1 đồ thị

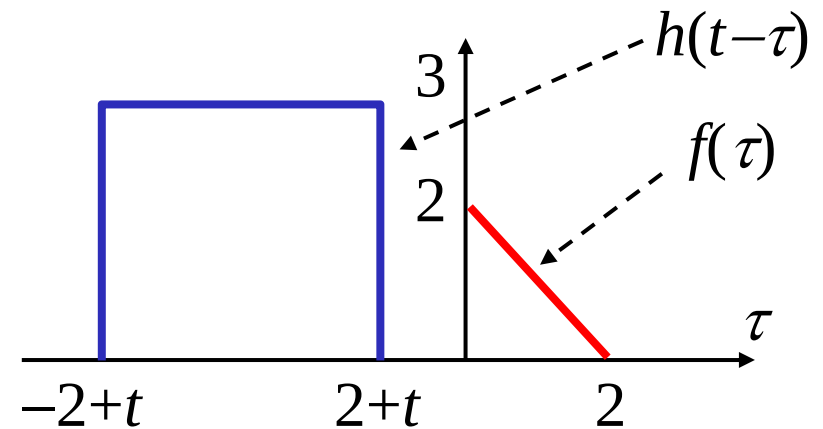


Tính tích chập – Ví dụ 3

□ Xét các giá trị của t :

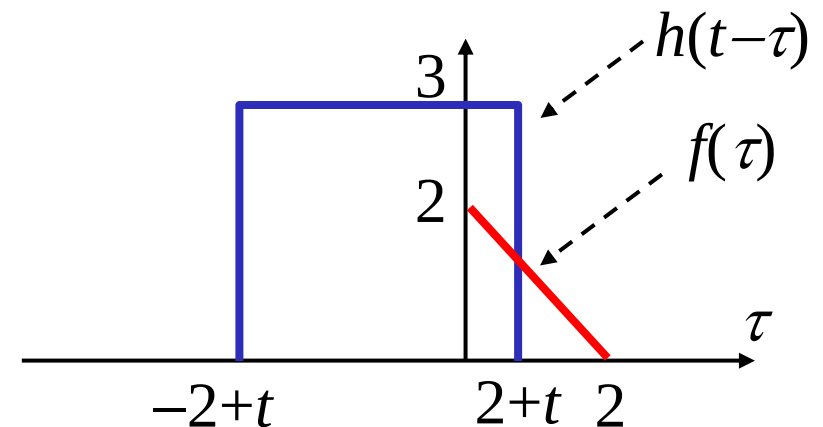
□ Khi $t < -2$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ không chồng nhau
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ bằng 0



□ Khi $-2 \leq t \leq 0$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ chồng nhau 1 phần
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ là:



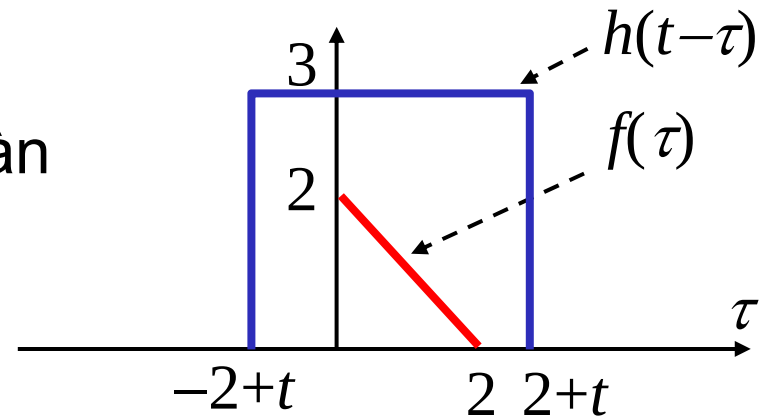
$$\int_0^{2+t} 3(-\tau + 2) d\tau = 3 \left(-\frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right) \Big|_0^{2+t} = -\frac{3(2+t)^2}{2} + 6(2+t) = -\frac{3t^2}{2} + 6$$

Tính tích chập – Ví dụ 3

□ Khi $0 \leq t < 2$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ chồng nhau hoàn toàn
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ là:

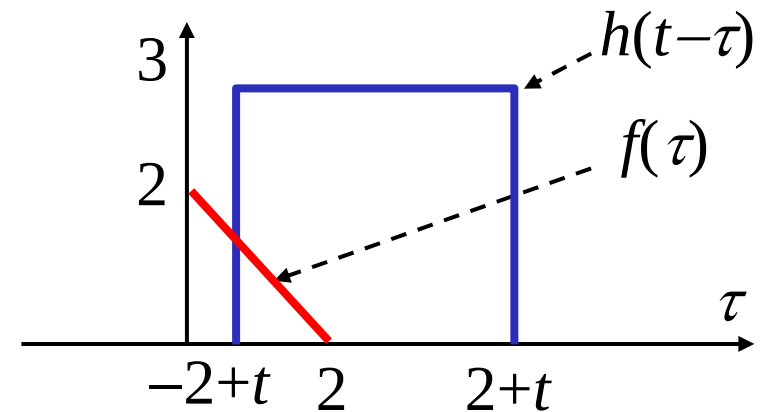
$$\int_0^2 3(-\tau + 2)d\tau = 3 \left(-\frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right) \Big|_0^2 = 6$$



□ Khi $2 \leq t < 4$:

- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ chồng nhau 1 phần
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ là:

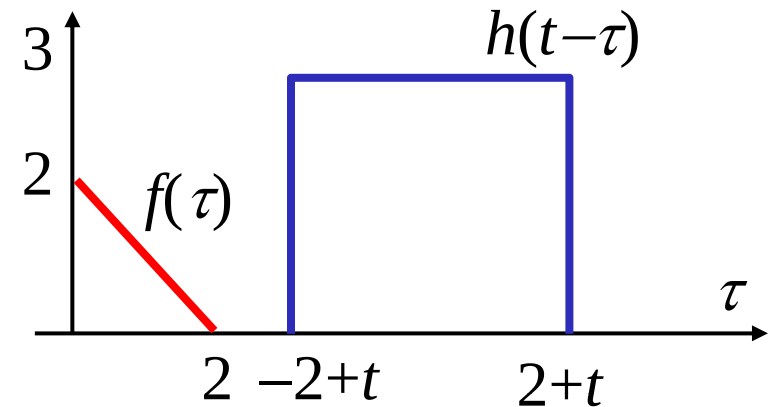
$$\int_{-2+t}^2 3(-\tau + 2)d\tau = 3 \left(-\frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right) \Big|_{-2+t}^2 = \frac{3t^2}{2} - 12t + 24$$



Tính tích chập – Ví dụ 3

□ Khi $t \geq 4$:

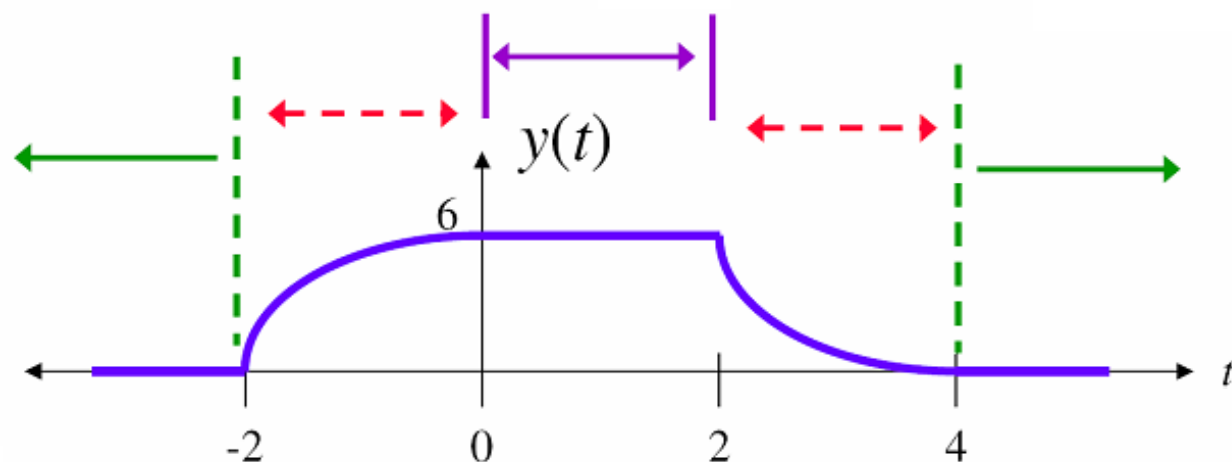
- $f(\tau)$ và $h(t-\tau)$ không chồng nhau
- Diện tích nằm dưới $f(\tau)h(t-\tau)$ bằng 0



Tính tích chập – Ví dụ 3

- Kết quả của tích chập (gồm 5 khoảng)

$$y(t) = f(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & \text{với } t < -2 \\ -\frac{3}{2}t^2 + 6 & \text{với } -2 \leq t < 0 \\ 6 & \text{với } 0 \leq t < 2 \\ \frac{3}{2}t^2 - 12t + 24 & \text{với } 2 \leq t < 4 \\ 0 & \text{với } t \geq 4 \end{cases}$$





Bài tập

☐ Tính tích chập của các hàm sau đây:



Bài tập

☐ Tính tích chập của các hàm sau đây:

Tính chất của tích chập (tt)

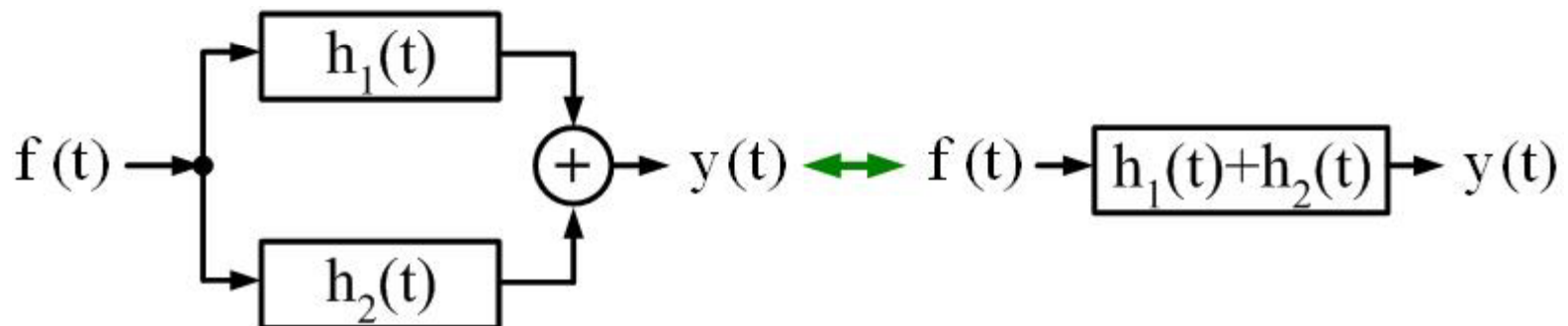
□ Tính giao hoán:

$$f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$$



□ Tính phân phối:

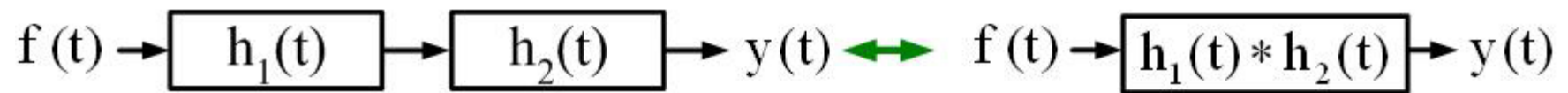
$$f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$



Tính chất của tích chập

□ Tính kết hợp:

$$[f(t) * h_1(t)] * h_2(t) = f(t)[h_1(t) * h_2(t)]$$



□ Tính bất biến:

Nếu $f(t) * h(t) = y(t)$

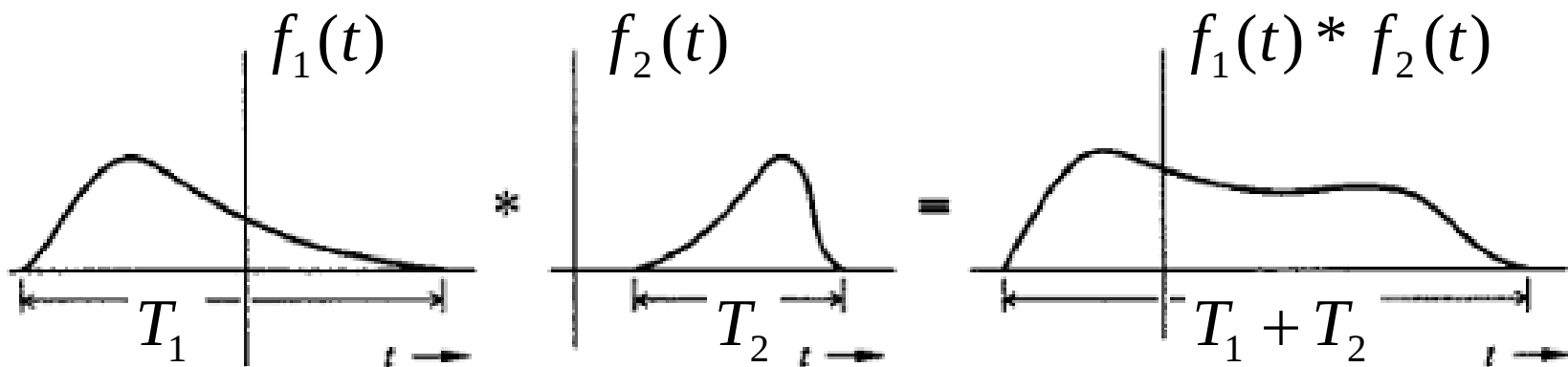
thì $f(t - T) * h(t) = y(t - T)$

Tính chất của tích chập (tt)

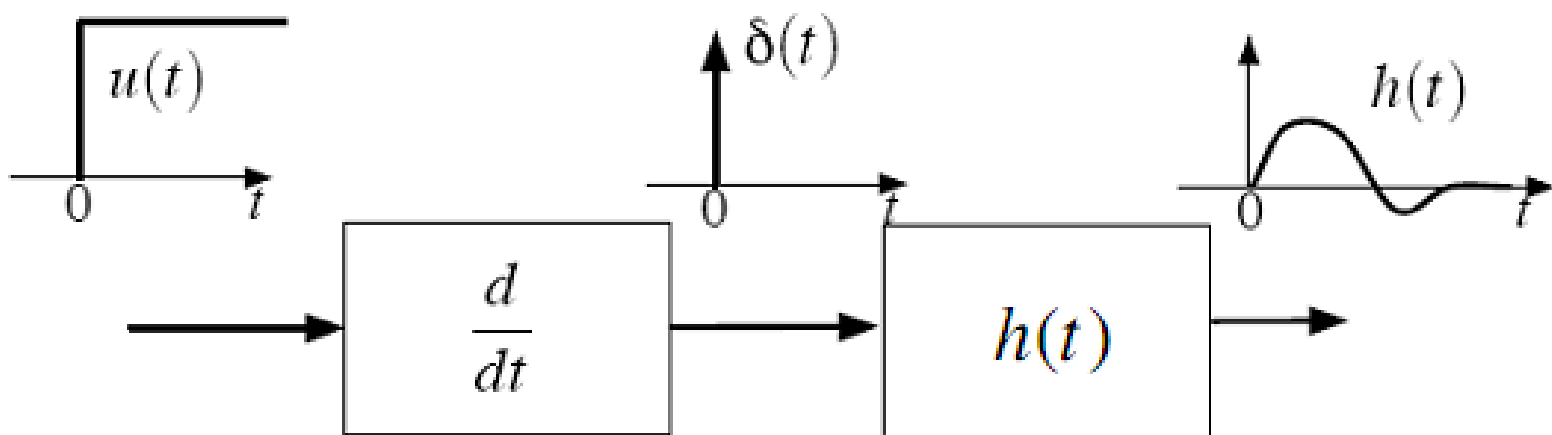
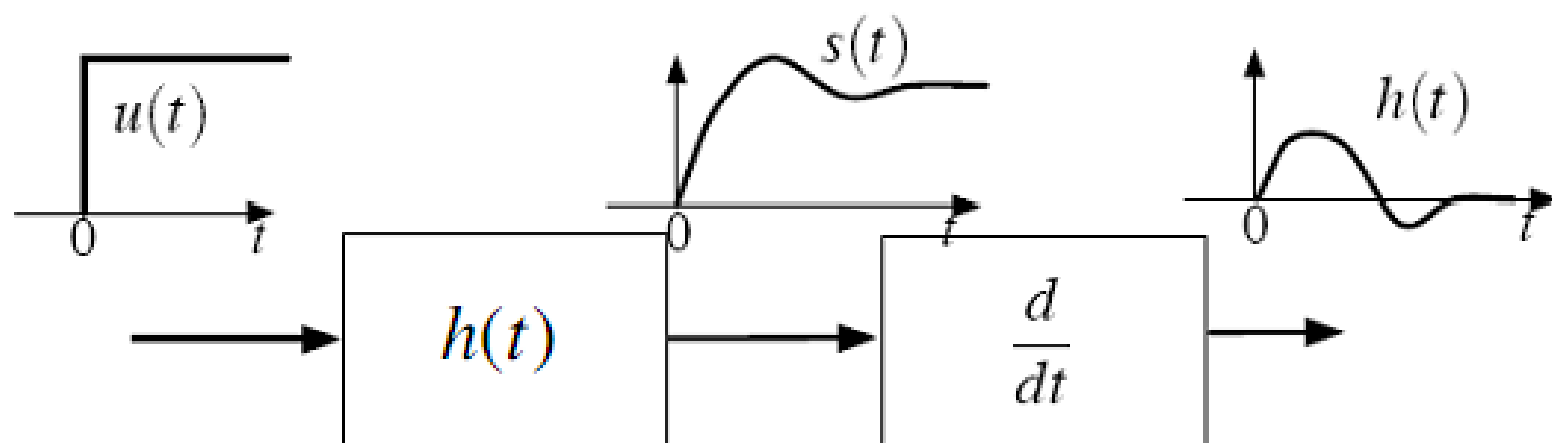
❑ Tích chập với xung dirac:

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

❑ Tính chất độ rộng:



Cách đo đáp ứng xung của hệ thống



Đáp ứng chung của hệ thống khi tín hiệu vào bất kỳ

- Đáp ứng chung của hệ thống bằng tổng của hai thành phần:
 - đáp ứng với ngõ vào bằng 0 (zero-input response)
 - đáp ứng với trạng thái đầu bằng 0 (zero-state response)

$$y(t) = y_0(t) + f(t) * h(t)$$

Trong đó:

- $f(t)$ là tín hiệu vào
- $y_0(t)$ là đáp ứng với ngõ vào bằng 0
- $h(t)$ là đáp ứng xung của hệ thống

Ví dụ tính đáp ứng của HT khi tín hiệu vào bất kỳ

- Cho hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

$$(D^2 + 4D + 3)y(t) = 2f(t)$$

- Biết điều kiện đầu là: $y(0) = 1; y'(0) = 3$

- Tính đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là:

$$(a) \quad f(t) = u(t)$$

$$(b) \quad f(t) = e^{-3t}u(t)$$

□ Giải:

- Đáp ứng tự do:

$$\text{PTĐT: } \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow y_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

$$\text{ĐK đầu: } \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 3C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow y_0(t) = 3e^{-t} - 2e^{-3t}$$

□ Đáp ứng xung:

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

Trong đó: $y_n(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$

$$\text{với: } \begin{cases} y'_n(0) = 1 \\ y_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1.5 \\ C_2 = -0.5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_n(t) = 1.5e^{-t} - 0.5e^{-3t}$$

$$\Rightarrow h(t) = [2y_n(t)]u(t) = (3e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

Ví dụ tính đáp ứng của HT khi tín hiệu vào bất kỳ (tt)

□ Đáp ứng cưỡng bức:

(a) Khi tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị $f(t) = u(t)$

$$\begin{aligned}
 y_f(t) &= h(t) * f(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_0^t (3e^{-\tau} - e^{-3\tau}) u(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \left(-3e^{-\tau} + \frac{e^{-3\tau}}{3} \right) \Big|_{\tau=0}^t \\
 \Rightarrow y_f(t) &= \frac{8}{3} - 3e^{-t} + \frac{e^{-3t}}{3}
 \end{aligned}$$

Đáp ứng tổng của hệ thống:

$$y(t) = y_0(t) + y_f(t) = \left(3e^{-t} - 2e^{-3t} + \frac{8}{3} - 3e^{-t} + \frac{e^{-3t}}{3} \right) u(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = (8 - 5e^{-3t}) / 3 \cdot u(t)$$



Ví dụ tính đáp ứng của HT khi tín hiệu vào bất kỳ (tt)

□ Đáp ứng cưỡng bức:

(b) Khi tín hiệu vào là $f(t) = e^{-3t}u(t)$

SV tự làm

□ Tính đáp ứng của các hệ thống sau đây:

$$(a) (D^2 + 3D)y(t) = (2D + 1)f(t)$$

Điều kiện đầu: $y(0) = -1; y'(0) = 0$

Tín hiệu vào: $f(t) = \sin(4t)u(t)$

$$(b) (D^2 + 2D + 5)y(t) = f(t)$$

Điều kiện đầu: $y(0) = -2; y'(0) = 1$

Tín hiệu vào: $f(t) = 2(u(t) - u(t - 4))$

Đáp ứng với tín hiệu hàm mũ phức

- ★ Xét tín hiệu vào là hàm mũ phức $f(t) = e^{st}$ và điều kiện đầu bằng 0, đáp ứng của hệ thống là:

$$y(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- ★ Đặt: $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$

$$\Rightarrow y(t) = H(s) e^{st}$$

- ★ Với một giá trị cụ thể của s , $H(s)$ là hằng số

$\Rightarrow$ Khi tín hiệu vào là hàm mũ, tín hiệu ra tỉ lệ với tín hiệu vào.

- ★ $H(s)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống.

Hàm truyền của hệ tuyến tính bất biến

- ★ Định nghĩa hàm truyền: Hàm truyền của một hệ thống là tỉ số giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào khi tín hiệu vào là hàm mũ e^{st}

$$H(s) = \frac{\text{output signal}}{\text{input signal}} \Big|_{\text{input}=e^{st}}$$

- ★ Nếu hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

$$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

Thì có thể chứng minh được hàm truyền của hệ thống là:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- ★ Gợi ý chứng minh: thay $f(t) = e^{st}$ và $y(t) = H(s)e^{st}$ vào phương trình vi phân.

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

- ❑ Hệ thống là ổn định nếu hệ thống có thể trở tự về trạng thái cân bằng từ trạng thái đầu khác 0.
- ❑ Nhắc lại đáp ứng với tín hiệu vào bằng 0:

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

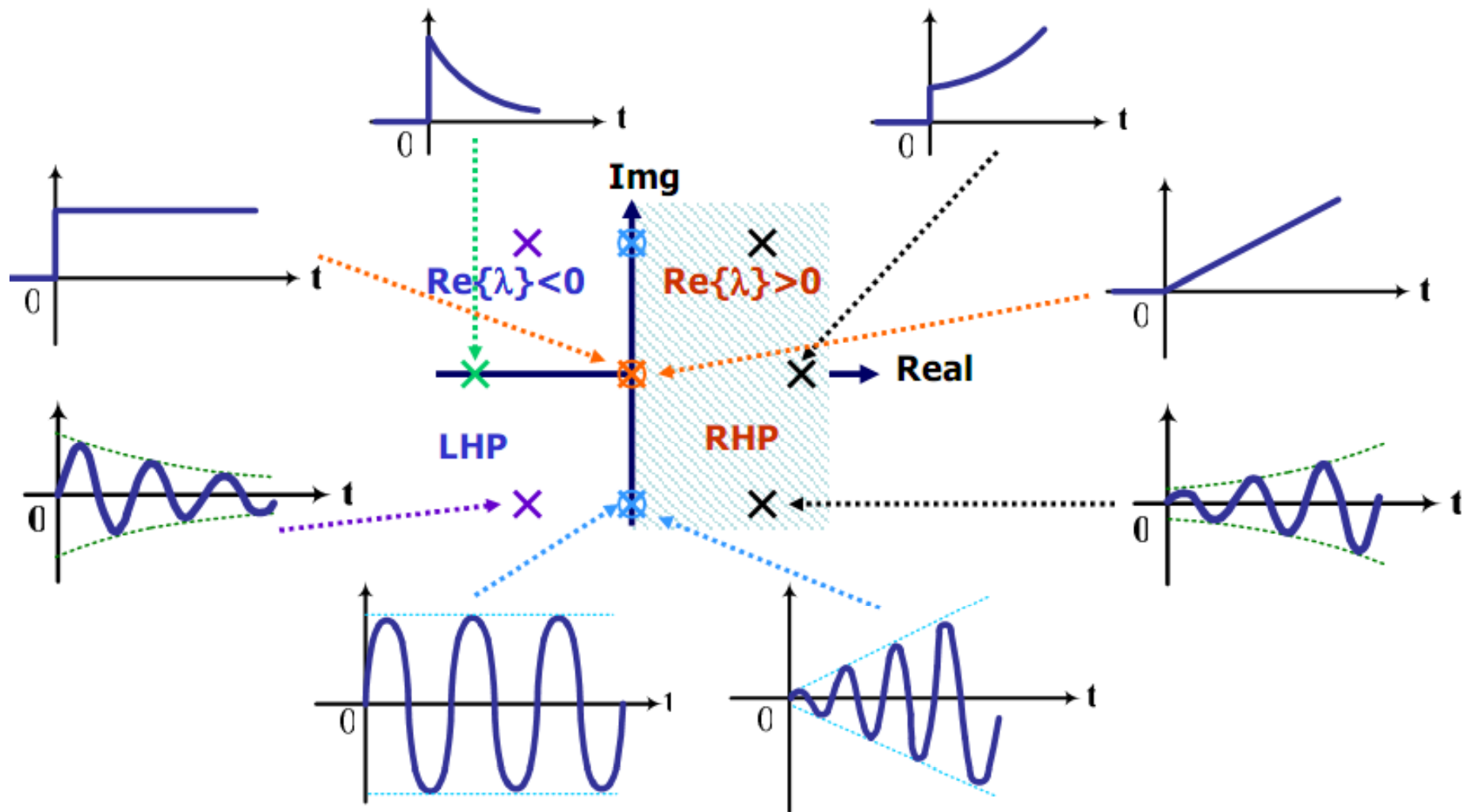
⇒ Hệ thống là ổn định nếu và chỉ nếu mọi chế độ đặc trưng $\rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$.

Điều kiện ổn định của hệ thống LTIC

- ❑ Hệ LTIC là tiệm cận ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các nghiệm đặc trưng nằm bên trái mặt phẳng phức (LHP)
- ❑ Hệ LTIC là không ổn định nếu và chỉ nếu có các điều kiện sau:
 - (i) Có ít nhất một nghiệm đặc trưng nằm bên phải mặt phẳng phức (RHP)
 - (ii) có nghiệm đặc trưng lặp trên trục ảo.
- ❑ Hệ LTIC ở biên ổn định nếu và chỉ nếu, không có nghiệm đặc trưng nằm bên phải mặt phẳng phức (RHP), và có một số nghiệm đơn trên trục ảo.

Liên hệ giữa đáp ứng và vị trí cực của hệ thống

□ Tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào “nghiệm” của PTĐT



Ví dụ đánh giá tính ổn định của hệ thống

★ Đánh giá tính ổn định của các hệ thống mô tả bởi các phương trình vi phân dưới đây:

$$(a) \quad D(D + 2)y(t) = 3f(t)$$

$$(b) \quad (D + 1)(D + 2)y(t) = (2D + 3)f(t)$$

$$(c) \quad (D^2 + 1)(D^2 + 9)y(t) = (D^2 + 2D + 4)f(t)$$

$$(d) \quad (D + 1)(D^2 - 4D + 9)y(t) = (D + 7)f(t)$$

Đánh giá tính ổn định dựa vào đáp ứng xung

- Xét đáp ứng của HT LTIC với tín hiệu vào $f(t)$

$$y(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \Rightarrow |y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |f(t - \tau)| d\tau$$

- Nếu $f(t)$ bị chặn:

$$|f(t - \tau)| < K_1 < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq K_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

- Nếu hệ thống ổn định:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < K_2 < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq K_1 K_2 < \infty \Rightarrow \boxed{\text{BIBO}}$$

❑ **Kết luận:** Hệ LTIC ổn định nếu $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$ hữu hạn