

Môn học

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng

Khoa Điện – Điện Tử

Đại học Bách Khoa TP HCM

Email: hthoang@hcmut.edu.vn

Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 3

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU TUẦN HOÀN DÙNG CHUỖI FOURIER

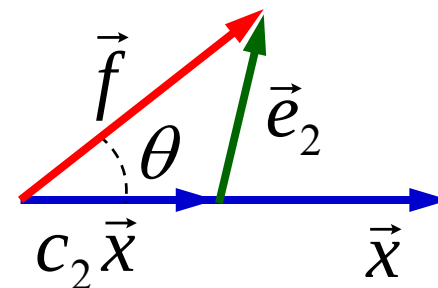
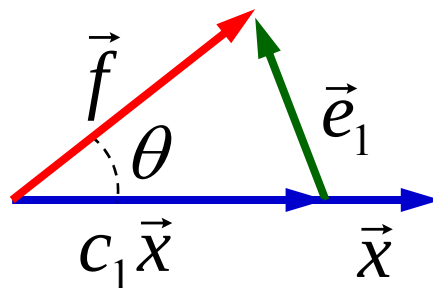
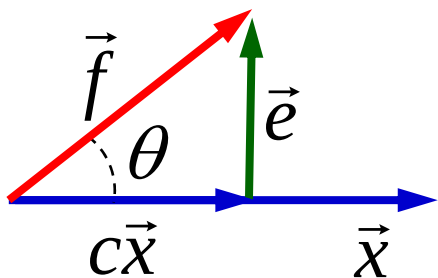


Nội dung chương 3

- ☐ Biểu diễn tín hiệu bằng tập tín hiệu trực giao
- ☐ Chuỗi Fourier lượng giác
- ☐ Chuỗi Fourier hàm mũ phức
- ☐ Đáp ứng của hệ thống LTIC với tín hiệu tuần hoàn

Biểu diễn tín hiệu bằng tập tín hiệu trực giao

Biểu diễn gần đúng vector



□ Biểu diễn vector $\vec{f}$ theo vector $\vec{x}$:

$$\vec{f} = c\vec{x} + \vec{e}$$

□ Khi $|\vec{e}| \rightarrow \min$: $\vec{f} \approx c\vec{x}$

Khi đó: $c = \frac{1}{|\vec{x}|^2} \vec{f} \cdot \vec{x}$ với $\vec{f} \cdot \vec{x} = |\vec{f}| \cdot |\vec{x}| \cos \theta$

□ Hai vector trực giao: $\vec{f} \cdot \vec{x} = 0$

Biểu diễn gần đúng tín hiệu

❑ Biểu diễn tín hiệu $f(t)$ theo tín hiệu $x(t)$ trong miền $t_1 \leq t \leq t_2$

$$f(t) \approx cx(t)$$

❑ Sai số xấp xỉ:
$$e(t) = \begin{cases} f(t) - cx(t) & \text{khi } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t \text{ khác} \end{cases}$$

❑ Sai số cực tiểu khi:
$$c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

tích vô hướng của 2 tín hiệu

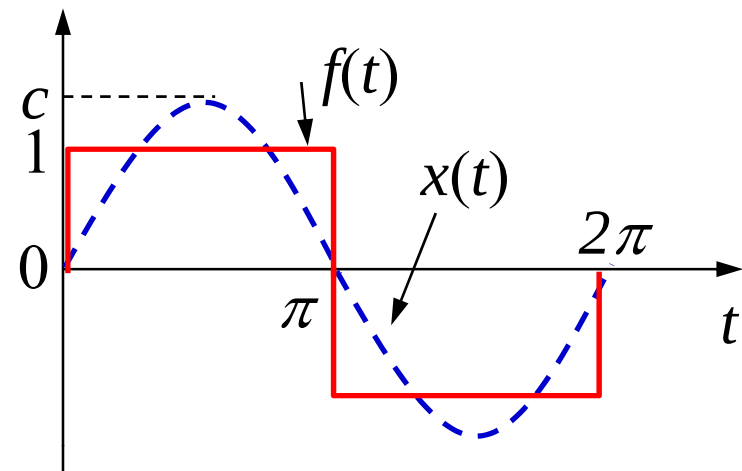
❑ Hai tín hiệu trực giao có tích vô hướng bằng 0:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt = 0$$

Ví dụ biểu diễn gần đúng tín hiệu

- Biểu diễn tín hiệu xung vuông $f(t)$
theo tín hiệu $x(t) = \sin t$
trong miền $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow f(t) \approx c \sin t$$



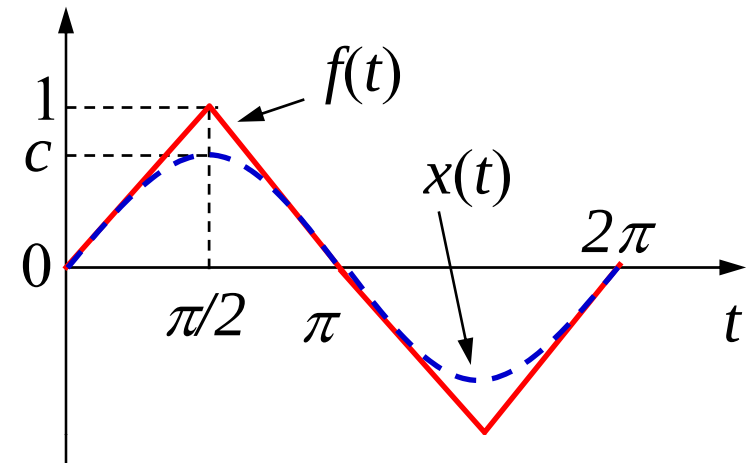
□ Ta có:
$$E_x = \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)x(t)dt = \int_0^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt = 4$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{E_x} \int_0^{2\pi} f(t)x(t)dt = \frac{4}{\pi}$$

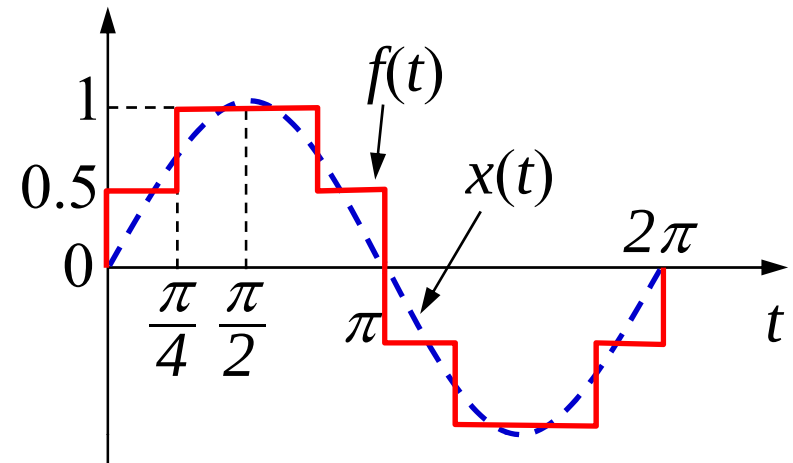
- Biểu diễn tín hiệu xung răng cưa $f(t)$ theo tín hiệu $x(t) = \sin t$ trong miền $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow f(t) \approx c \sin t$$



□ Biểu diễn tín hiệu $f(t)$ ở hình bên theo tín hiệu $x(t) = \sin t$ trong miền $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow f(t) \approx c \sin t$$



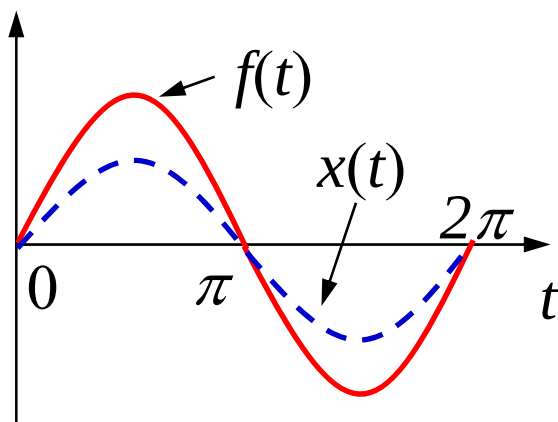
Hệ số tương quan giữa hai tín hiệu

□ Hệ số tương quan:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{E_f E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t).x(t)dt$$

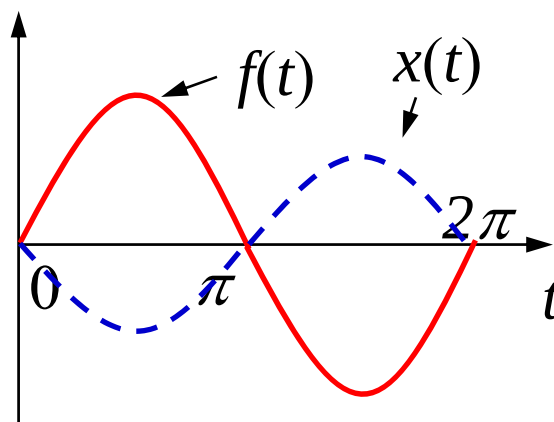
$$-1 \leq c_n \leq 1$$

□ Hệ số tương quan cho biết sự tương đồng giữa hai tín hiệu



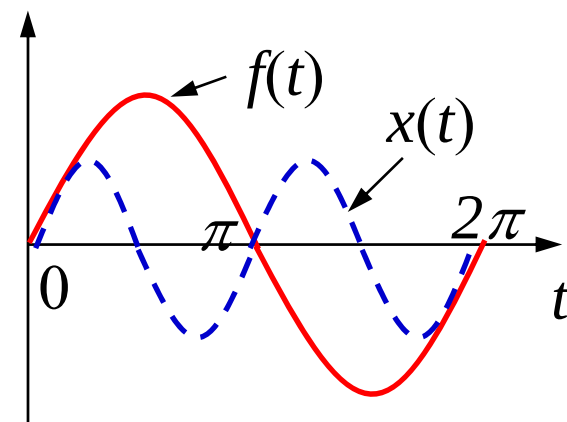
$$c_n = 1$$

Tương đồng



$$c_n = -1$$

Trái ngược



$$c_n = 0$$

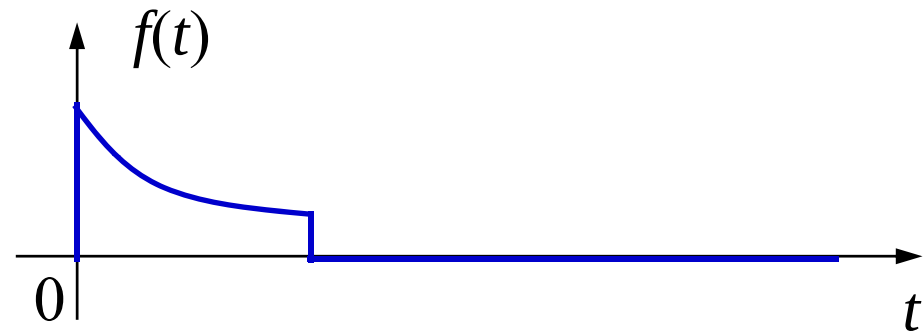
Không tương quan

Hàm tương quan giữa hai tín hiệu

❑ Hàm tương quan:

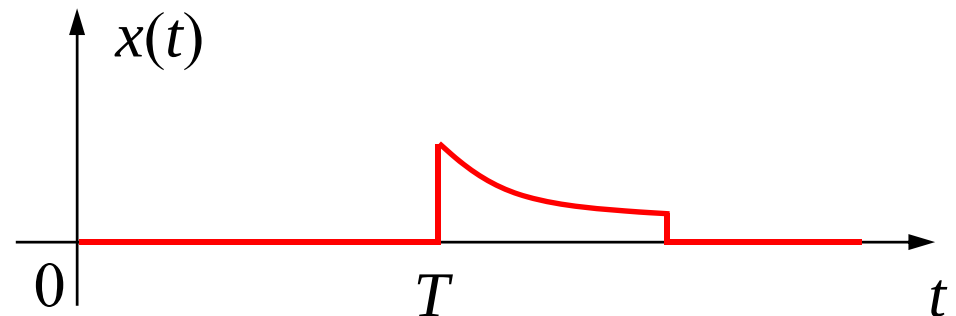
$$\psi_{fx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)x(\tau - t)d\tau$$

❑ Ví dụ: hàm tương quan giữa hai tín hiệu ở hình bên có giá trị lớn tại $t=T$.

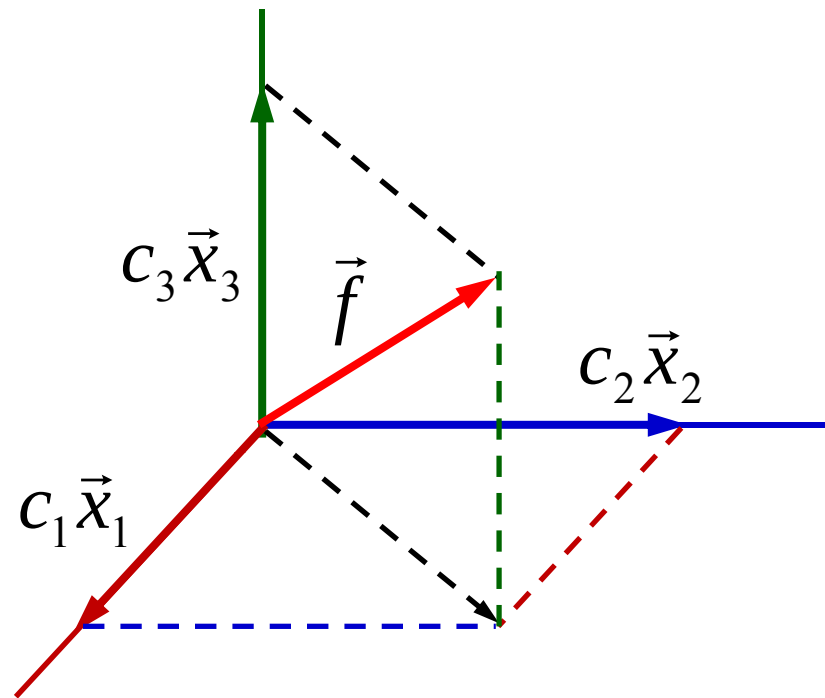


❑ Ứng dụng:

- Phát hiện đối tượng
- Đo khoảng cách



Biểu diễn vector trong không gian vector trực giao



$$\vec{f} \approx c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

$$c_i = \frac{\vec{f} \cdot \vec{x}_i}{\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i} = \frac{1}{|\vec{x}_i|^2} \cdot \vec{f} \cdot \vec{x}_i \quad i = 1, 2, 3$$

Không gian (tập) tín hiệu trực giao

□ $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ trực giao trong đoạn $[t_1, t_2]$ nếu

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t) x_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E_n & m = n \end{cases} \quad (\text{tín hiệu thực})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t) x_n^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E_n & m = n \end{cases} \quad (\text{tín hiệu phức})$$

□ Nếu $E_n = 1, \forall n$ thì $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ gọi là tập tín hiệu trực chuẩn

Biểu diễn tín hiệu bằng tập tín hiệu trực giao

$$f(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t)$$

❑ Sai số: $e(t) = f(t) - \sum_{n=1}^N c_n x_n(t)$

❑ Các hệ số c_n để sai số cực tiểu: $c_n = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) x_n^*(t) dt$

❑ Năng lượng của thành phần sai số: $E_e = E_f - \sum_{n=1}^N E_n c_n^2$

❑ Năng lượng của thành phần sai số $\rightarrow 0$ khi $N \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow$ Chuỗi Fourier: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t), \quad (t_1 < t < t_2)$

$x_n(t)$ gọi là các hàm cơ sở của chuỗi Fourier.

Chuỗi Fourier lượng giác

□ Xét tập tín hiệu:

$\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \dots, \cos(n\omega_0 t), \dots; \sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots, \sin(n\omega_0 t), \dots\}$

- n : số nguyên dương
- $n\omega_0$: thành phần tần số thứ n - hài thứ n
- $T_0 = 2\pi/\omega_0$: chu kỳ của hài cơ bản
- Trong khoảng thời gian: $t_1 < t < t_1 + T_0$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} dt = T_0$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2(n\omega_0 t) dt = T_0 / 2$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin^2(n\omega_0 t) dt = T_0 / 2$$

$\Rightarrow$ Tập tín hiệu lượng giác là tập cơ sở trực giao.

Chuỗi Fourier lượng giác

- Áp dụng công thức phân tích Fourier tổng quát trong trường hợp hàm cơ sở là hàm lượng giác, ta được:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$(t_1 < t < t_1 + T_0) \\ (\omega_0 = 2\pi / T_0)$$

Trong đó:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Chuỗi Fourier lượng giác dạng rút gọn

□ Kết hợp các thành phần cosine, rút gọn ta được:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad \begin{aligned} &(t_1 < t < t_1 + T_0) \\ &(\omega_0 = 2\pi / T_0) \end{aligned}$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

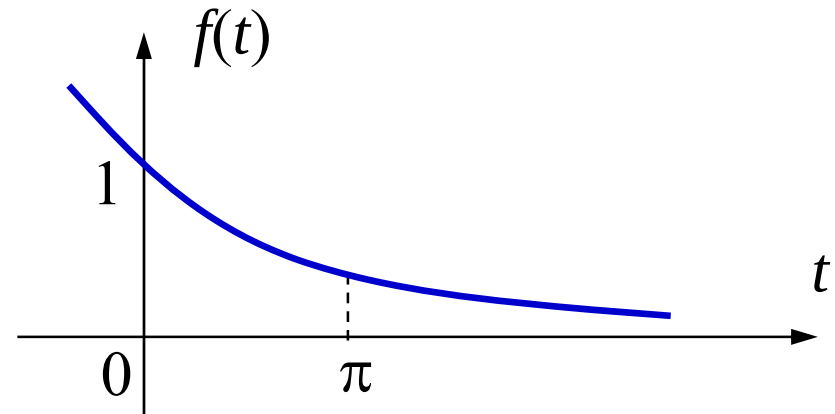
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Ví dụ phân tích tín hiệu thành chuỗi Fourier lượng giác

- Phân tích hàm $f(t)=e^{-t/2}$ trong khoảng $0 \leq t \leq \pi$ thành chuỗi Fourier



□ **Giải:**

- Tần số cơ bản: $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi / \pi = 2$

- Các hệ số Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} dt = -\frac{2}{\pi} e^{-t/2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-\pi/2}) = 0.504$$

Ví dụ phân tích tín hiệu thành chuỗi Fourier lượng giác (tt)

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos(2nt) dt$$

$$= \left[\frac{1}{\pi n} e^{-t/2} \sin(2nt) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin(2nt) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{4\pi n^2} e^{-t/2} \cos(2nt) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{8\pi n^2} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos(2nt) dt$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{0.252}{4n^2} - \frac{1}{16n^2} a_n$$

$$\Rightarrow a_n = 0.504 \left(\frac{2}{1 + 16n^2} \right)$$

Ví dụ phân tích tín hiệu thành chuỗi Fourier lượng giác (tt)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin(2nt) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi n} e^{-t/2} \cos(2nt) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos(2nt) dt$$

$$= \frac{0.252}{n} - \left[\frac{1}{4\pi n^2} e^{-t/2} \sin(2nt) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{8\pi n^2} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin(2nt) dt$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{0.252}{n} - \frac{1}{16n^2} b_n$$

$$\Rightarrow b_n = 0.504 \left(\frac{8n}{1 + 16n^2} \right)$$

❑ Chuỗi Fourier lượng giác:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow f(t) = 0.504 \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1 + 16n^2} (\cos(2nt) + 4n \sin(2nt)) \right], \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

❑ Chuỗi Fourier lượng giác rút gọn:

$$C_0 = a_0 = 0.504$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + 16n^2}}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = -\tan^{-1}(4n)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$\Rightarrow f(t) = 0.504 \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(2nt - \tan^{-1} 4n) \right], \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

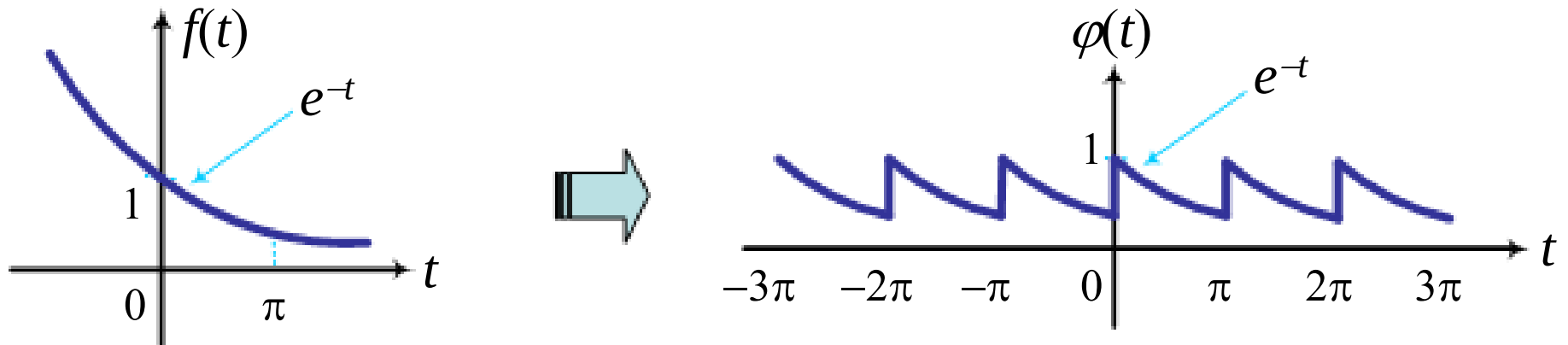
Tính tuần hoàn của chuỗi Fourier lượng giác

□ Xét hàm: $\varphi(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

□ Ta có:
$$\begin{aligned}\varphi(t + T_0) &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos[n\omega_0(t + T_0) + \theta_n] \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos[n\omega_0 t + n\omega_0 T_0 + \theta_n] \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos[n\omega_0 t + n2\pi + \theta_n] \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos[n\omega_0 t + \theta_n] \quad , \forall t\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(t)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ là T_0

Tính tuần hoàn của chuỗi Fourier lượng giác



□ Nhận xét:

- Chuỗi Fourier là tín hiệu tuần hoàn
 - trong miền $[t_1, t_1 + T_0]$: $\varphi(t) = f(t)$
 - ngoài miền $[t_1, t_1 + T_0]$: $\varphi(t) \neq f(t)$
- Do chuỗi Fourier là tín hiệu tuần hoàn nên có thể dùng chuỗi Fourier để biểu diễn tín hiệu tuần hoàn.

Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu tuần hoàn

Phương trình
tổng hợp

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Phương trình
phân tích

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

□ Nếu $f(t)$ là hàm lẻ

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

□ Nếu $f(t)$ là hàm chẵn

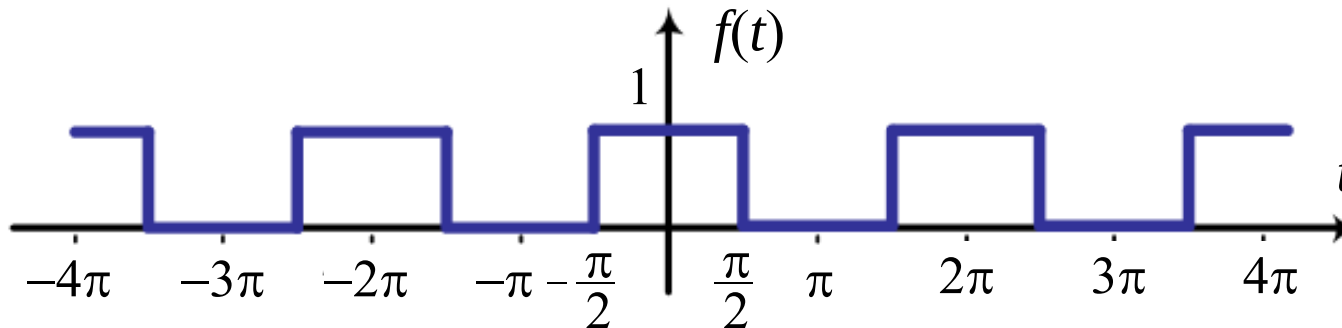
$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = 0$$

Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 1

□ Phân tích tín hiệu ở hình dưới đây thành chuỗi Fourier



□ **Giải:**

□ Tần số cơ bản: $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi / 2\pi = 1$

□ Các hệ số Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot dt = \frac{1}{\pi} t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 1

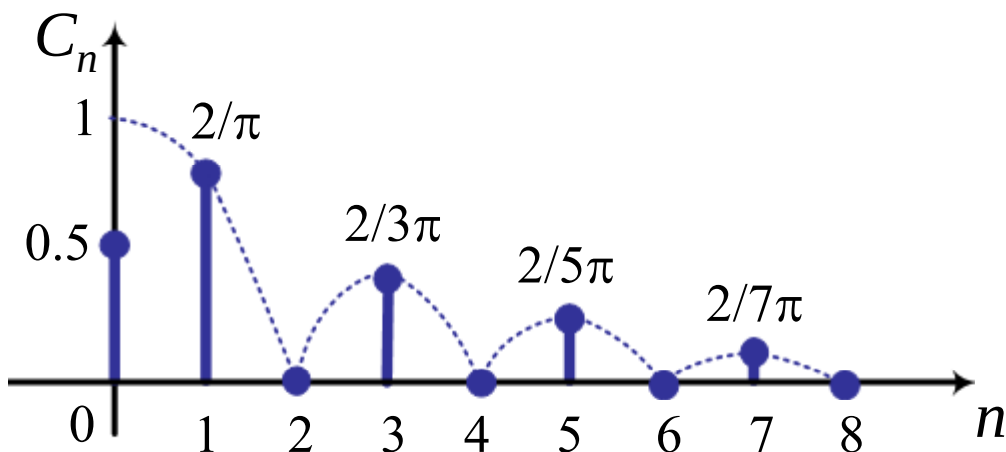
$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nt) dt = \frac{1}{n\pi} \sin nt \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ \frac{2}{n\pi} & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{2}{n\pi} & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

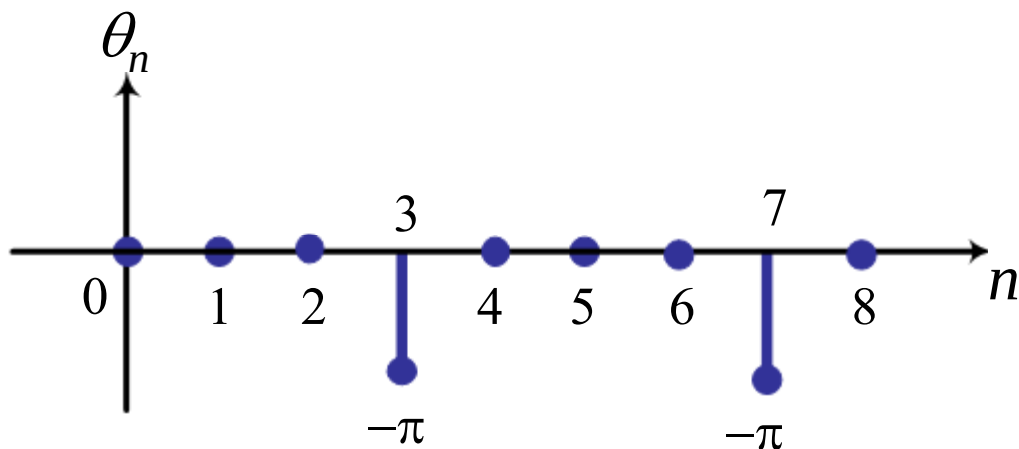
$$b_n = 0 \quad (\text{Do } f(t) \text{ là hàm chẵn})$$

$$\Rightarrow C_n = \begin{cases} 0.5 & n = 0 \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2}{\pi n} & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad \theta_n = \begin{cases} 0 & n \neq 3, 7, 11, 15, \dots \\ -\pi & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 1



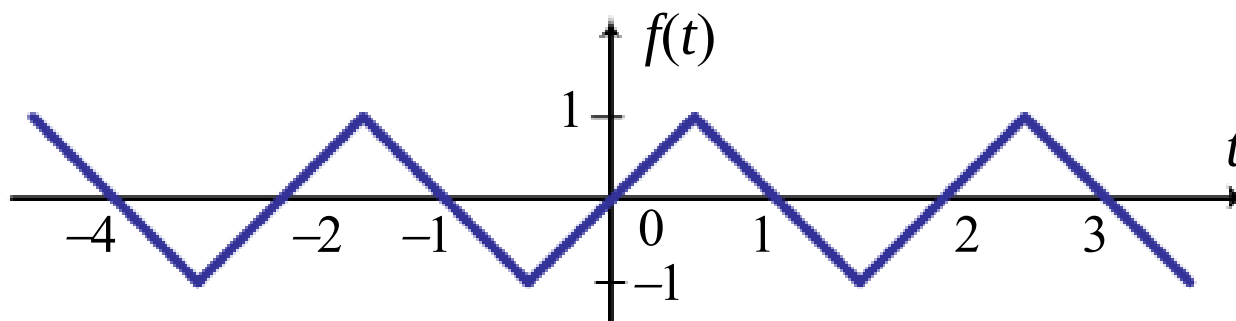
$$C_n = \begin{cases} 0.5 & n = 0 \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2}{\pi n} & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$



$$\theta_n = \begin{cases} 0 & n \neq 3, 7, 11, 15, \dots \\ -\pi & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 2

□ Phân tích tín hiệu ở hình dưới đây thành chuỗi Fourier



□ **Giải:**

□ Tần số cơ bản: $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi / 2 = \pi$

□ Các hệ số Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \quad (\text{do } f(t) \text{ là hàm lẻ, tích phân cận đối xứng})$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(t) \cos(n\pi t) dt$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \quad (\text{do } f(t) \text{ là lẻ})$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt = 2 \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t) dt$$

$$= 2 \int_0^{1/2} 2t \sin(n\pi t) dt + 2 \int_{1/2}^1 (2 - 2t) \sin(n\pi t) dt$$

$$= \frac{4}{n\pi} \left[-t \cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t) \right]_{t=0}^{1/2}$$

$$+ \frac{4}{n\pi} \left[-\cos(n\pi t) + t \cos(n\pi t) - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t) \right]_{t=1/2}^1$$

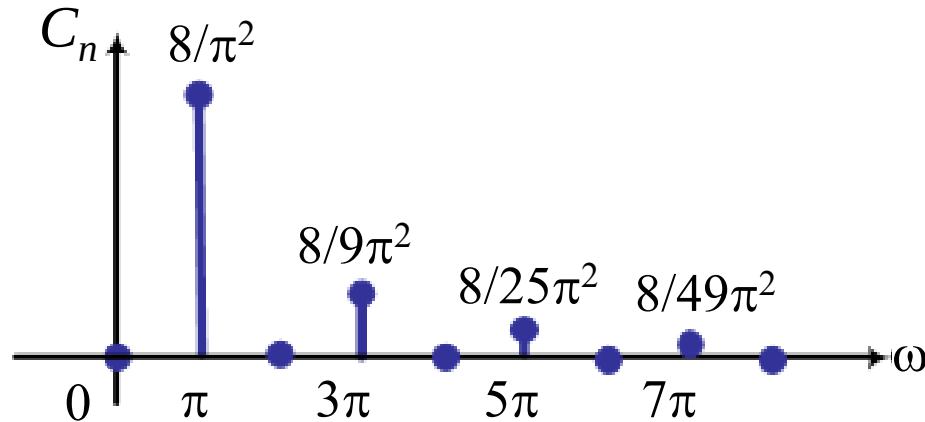
Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 2 (tt)

$$\Rightarrow b_n = -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

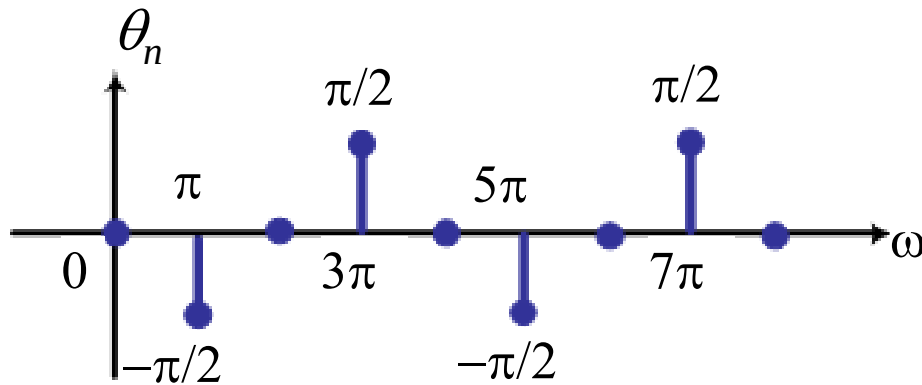
$$\Rightarrow b_n = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ \frac{8}{n^2\pi^2} & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_n = \begin{cases} 0 & n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ \frac{8}{\pi^2 n^2} & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad \theta_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ \pi/2 & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\pi/2 & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 2 (tt)

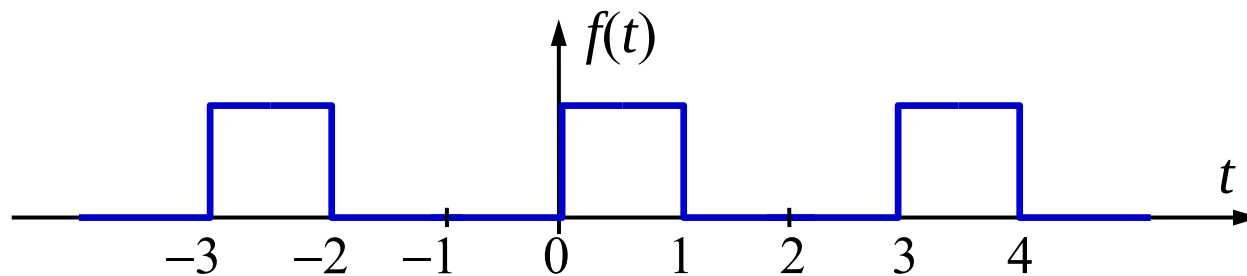


$$C_n = \begin{cases} 0 & n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ \frac{8}{\pi^2 n^2} & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$



$$\theta_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ \pi / 2 & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\pi / 2 & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

□ Phân tích tín hiệu ở hình dưới đây thành chuỗi Fourier





Lời giải



Lời giải

Chuỗi Fourier hàm mũ phức

Chuỗi Fourier hàm mũ phức của tín hiệu tuần hoàn

❑ Tập tín hiệu hàm mũ phức trực giao:

$$\{e^{jn\omega_0 t}\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \omega_0 = 2\pi / T_0$$

T_0 là chu kỳ của tín hiệu tuần hoàn.

❑ Chuỗi Fourier hàm mũ phức của tín hiệu tuần hoàn:

Phương trình
tổng hợp

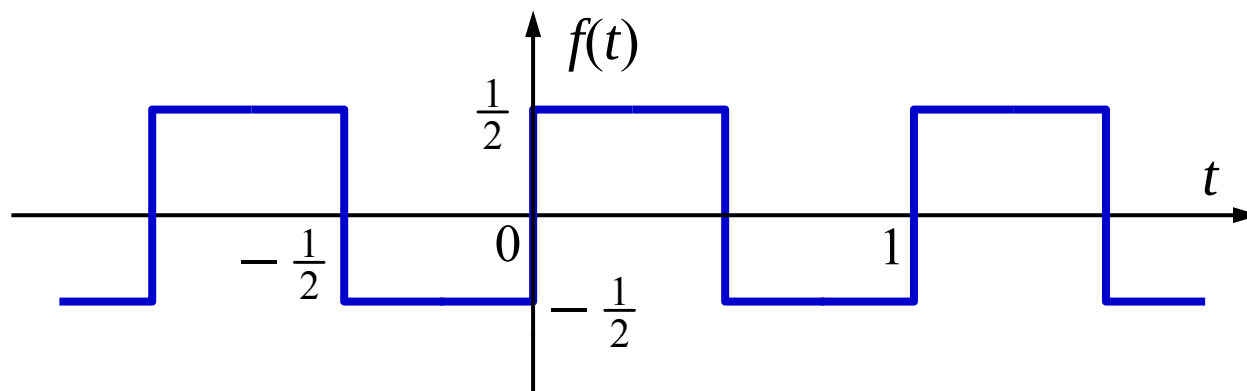
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Phương trình
phân tích

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Chuỗi Fourier hàm mũ phức của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 1

□ Phân tích tín hiệu dưới đây thành chuỗi Fourier hàm mũ phức:



□ **Giải:**

□ Tần số cơ bản: $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 2\pi / 1 = 2\pi$

□ Các hệ số Fourier hàm mũ phức:

$$D_0 = \frac{1}{1} \int_{-1/2}^{1/2} f(t) dt = 0 \quad (\text{do } f(t) \text{ là hàm lẻ})$$

Chuỗi Fourier hàm mũ phức của tín hiệu tuần hoàn – Ví dụ 1

$$D_n = \frac{1}{1} \int_{-1/2}^{1/2} f(t) e^{-jn2\pi t} dt = -\frac{1}{2} \int_{-1/2}^0 e^{-jn2\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-jn2\pi t} dt \quad (n \neq 0)$$

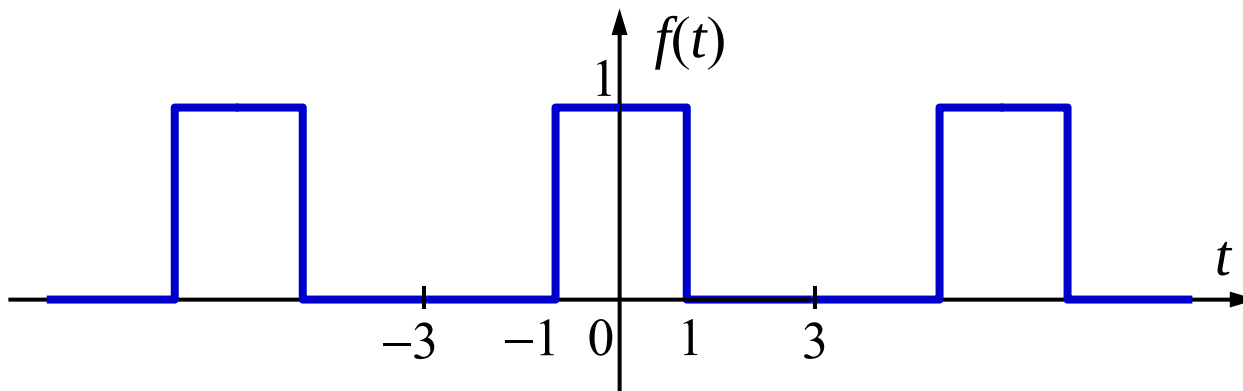
$$= \frac{1}{j4n\pi} e^{-jn2\pi t} \Big|_{-1/2}^0 - \frac{1}{j4n\pi} e^{-jn2\pi t} \Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{j4n\pi} (2 - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}) = \frac{1}{j4n\pi} (2 - 2 \cos n\pi)$$

$$\Rightarrow D_n = \begin{cases} 0 & (n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \\ \frac{1}{jn\pi} & (n = \pm 1, \pm 3, \dots) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ lẻ}}}^{+\infty} \frac{1}{jn\pi} e^{j2n\pi t}$$

□ Phân tích tín hiệu dưới đây thành chuỗi Fourier hàm mũ phức:





Bài tập

Liên hệ giữa chuỗi Fourier hàm mũ phức và chuỗi Fourier lượng giác

□ Chuỗi Fourier hàm mũ phức:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = D_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (D_n e^{jn\omega_0 t} + D_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

□ Chuỗi Fourier lượng giác:

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{2} [e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}] \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} e^{jn\omega_0 t} + \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n} e^{-jn\omega_0 t} \right) \end{aligned}$$

Liên hệ giữa chuỗi Fourier hàm mũ phức và chuỗi Fourier lượng giác (tt)

□ Suy ra liên hệ giữa các hệ số Fourier:

$$\begin{cases} D_0 = C_0 \\ D_n = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \\ D_{-n} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n} \end{cases}$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$

⇒ Chuỗi Fourier hàm lượng giác và chuỗi Fourier hàm mũ phức là tương đương nhau.

❑ Chuỗi Fourier biểu diễn tín hiệu tuần hoàn thành tổng các thành phần tần số. Phân bố giá trị của các thành phần trên thang tần số gọi là phổ tần số (thường gọi là phổ).

❑ Phổ biên độ:

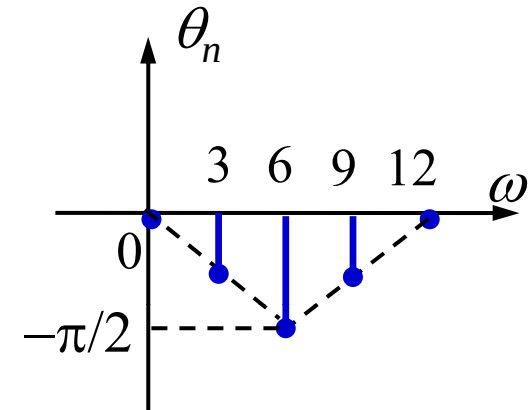
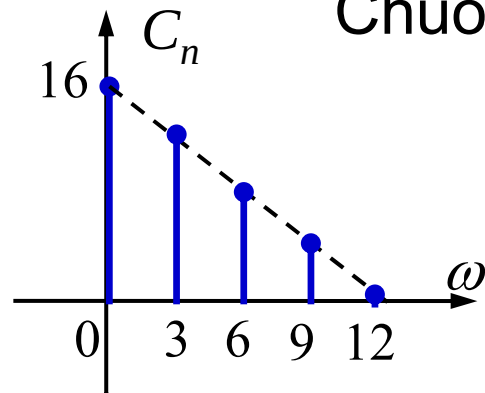
$$D_0 = C_0; |D_n| = |D_{-n}| = \frac{C_n}{2} \quad (\text{hàm chẵn})$$

❑ Phổ pha:

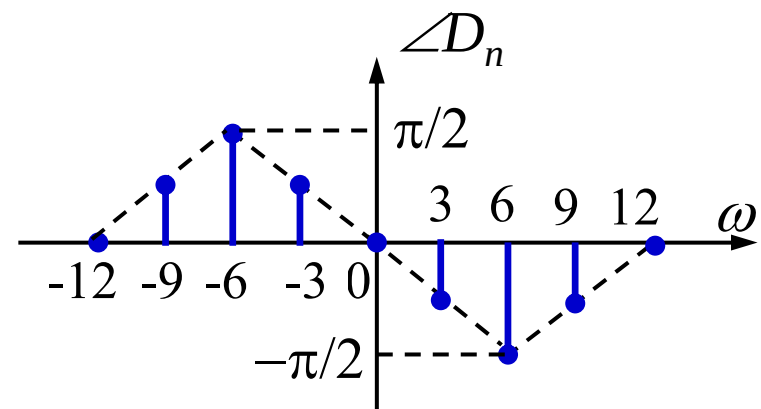
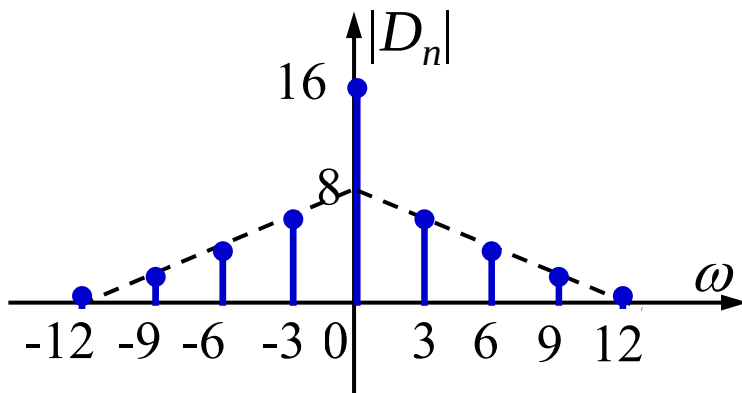
$$\angle D_n = \theta_n; \angle D_{-n} = -\theta_n \quad (\text{hàm lẻ})$$

Biểu đồ phổ Fourier

Chuỗi Fourier lượng giác



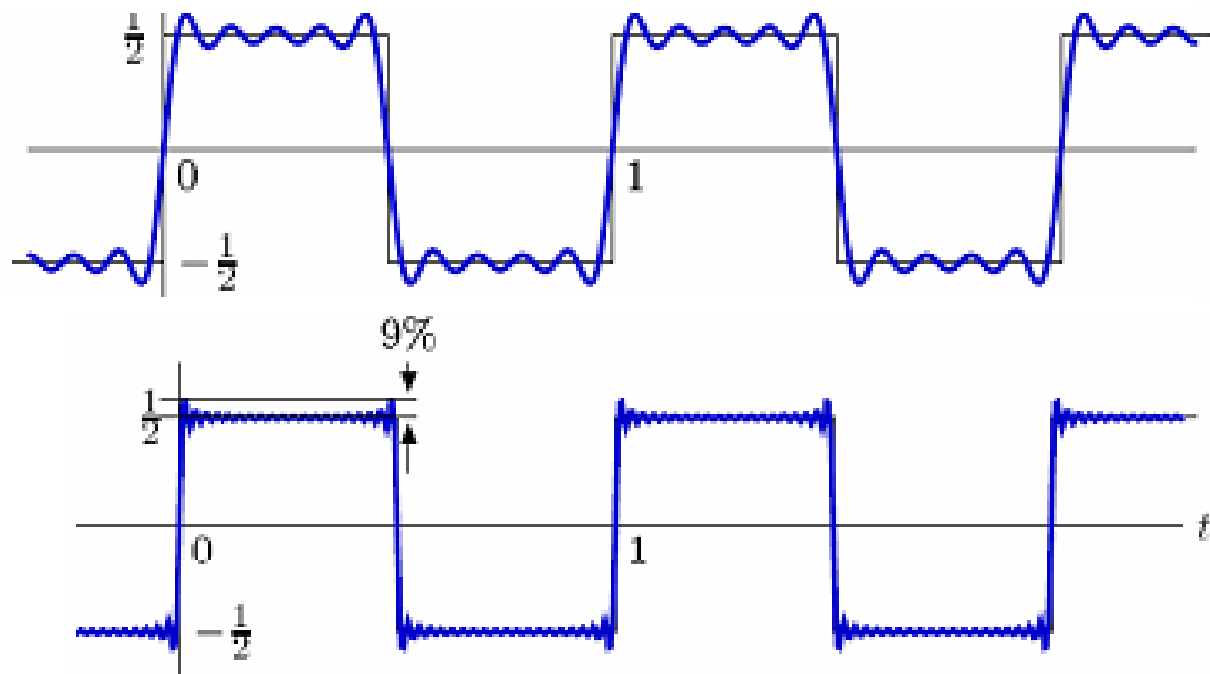
Chuỗi Fourier hàm mũ phức



Điều kiện tồn tại chuỗi Fourier

❑ Điều kiện Dirichlet: $\int_{T_0} |f(t)| dt < \infty \Rightarrow$ tồn tại chuỗi Fourier.

❑ **Lưu ý:** khi $n \rightarrow \infty$ thì năng lượng chuỗi Fourier bằng năng lượng của tín hiệu, tuy nhiên chuỗi Fourier không bằng $f(t)$ tại những điểm hàm $f(t)$ gián đoạn (hiện tượng Gibbs)



Các tính chất của chuỗi Fourier

□ Tính tuyến tính:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(t) \leftrightarrow D_{1n} \\ f_2(t) \leftrightarrow D_{2n} \end{array} \right\} \Rightarrow f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \leftrightarrow D_n = k_1 D_{1n} + k_2 D_{2n}$$

□ Phép dịch thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} D_n$$

□ Phép đảo thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f(-t) \leftrightarrow D_{-n}$$

□ Phép tỷ lệ thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f(at) \leftrightarrow D_n; f(at) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jna\omega_0 t}$$

Các tính chất của chuỗi Fourier (tt)

❑ Nhân 2 tín hiệu:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(t) \leftrightarrow D_{1n} \\ f_2(t) \leftrightarrow D_{2n} \end{array} \right\} \Rightarrow f(t) = f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow D_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{1k} D_{2(n-k)}$$

❑ Liên hiệp phức:

$$f(t) \leftrightarrow D_n \Rightarrow f^*(t) \leftrightarrow D_{-n}^*$$

❑ Định lý Parseval :

$$P_f = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Đáp ứng của hệ thống LTIC với tín hiệu tuần hoàn

Nhắc lại: Đáp ứng của HT với tín hiệu hàm mũ phức

- ❑ Xét tín hiệu vào là hàm mũ phức $f(t) = e^{st}$ và điều kiện đầu bằng 0, đáp ứng của hệ thống là:

$$y(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- ❑ Đặt: $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ (hàm truyền của hệ thống)

$$\Rightarrow y(t) = H(s) e^{st}$$

- ❑ Nếu hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:

$$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

Thì hàm truyền của hệ thống là: $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

Đáp ứng của hệ LTIC với tín hiệu tuần hoàn

❑ Tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành chuỗi Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\omega_0 = 2\pi / T_0)$$

❑ Đáp ứng của thành phần hàm mũ $e^{jn\omega_0 t}$ là $H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$

❑ Áp dụng tính xếp chồng, đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $f(t)$ là:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$\Rightarrow y(t)$ tuần hoàn cùng chu kỳ với tín hiệu vào

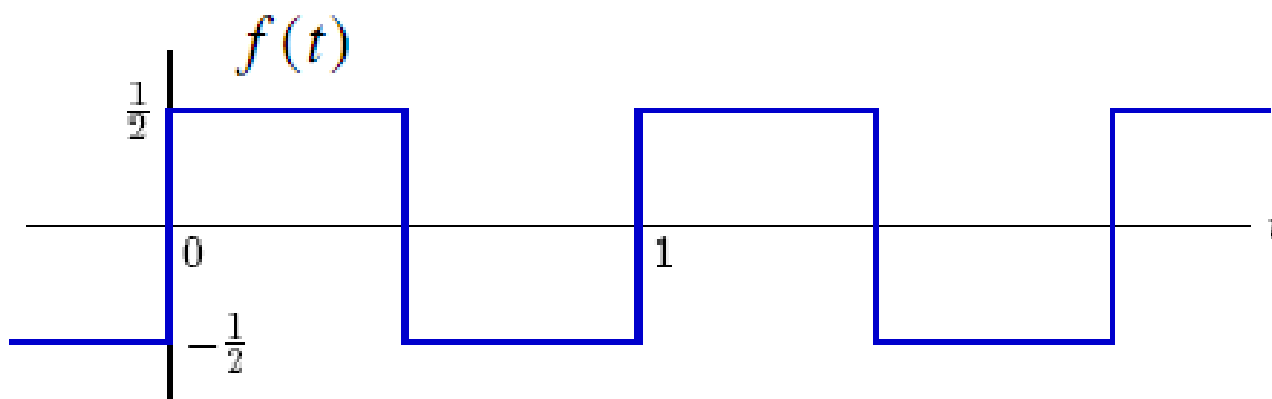
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

- ❑ Đáp ứng của hệ LTIC gồm các thành phần cùng tần số với tín hiệu vào (không xuất hiện thành phần tần số mới)
 - ❑ Mỗi thành phần tần số $n\omega_0$ được:
 - Khuếch đại biên độ: hệ số khuếch đại $|H(jn\omega_0)|$
 - Dời pha: độ lệch pha $\angle H(jn\omega_0)$
- ⇒ Hệ LTIC có thể xem là bộ lọc (Filter)

□ Cho hệ thống có hàm truyền:

$$H(s) = \frac{10}{s + 10}$$

□ Tính đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là:



□ Giải:

➤ Ta có: $T_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$

➤ Chuỗi Fourier hàm mũ của tín hiệu vào: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = -\frac{1}{2} \int_{-1/2}^0 e^{-jn2\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-jn2\pi t} dt$$

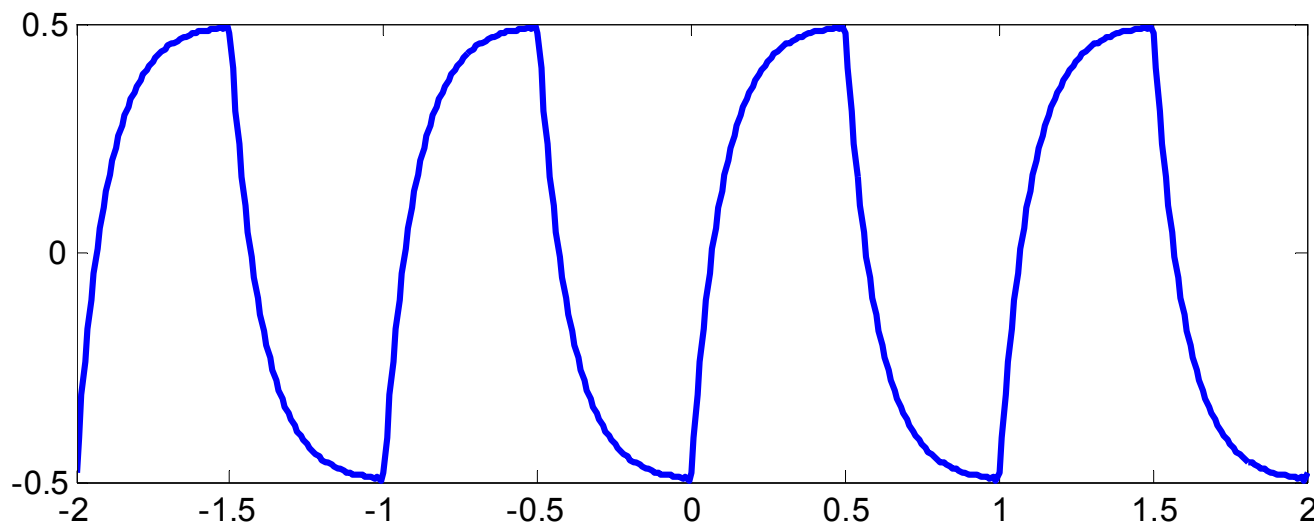
$$= \left. \frac{e^{-jn2\pi t}}{jn4\pi} \right|_{-1/2}^0 - \left. \frac{e^{-jn2\pi t}}{jn4\pi} \right|_0^{1/2} = \frac{1}{jn4\pi} (1 - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi} + 1)$$

$$D_n = \frac{1}{jn4\pi} (2 - 2 \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ \frac{1}{jn\pi} & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

➤ Đáp ứng của hệ thống: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ n=2k+1}}^{\infty} \frac{1}{jn\pi} \frac{10}{jn2\pi + 10} e^{jn2\pi t}$$

➤ Đồ thị đáp ứng của hệ thống:



Một số công thức tích phân thường gặp

$$\int x \sin(ax) dx = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2}$$

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{x \sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2}$$

$$\int x^2 \sin(ax) dx = -\frac{x^2 \cos(ax)}{a} + \frac{2x \sin(ax)}{a^2} + \frac{2 \cos(ax)}{a^3}$$

$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{x^2 \sin(ax)}{a} + \frac{2x \cos(ax)}{a^2} - \frac{2 \sin(ax)}{a^3}$$

Một số công thức tích phân thường gặp

$$\int x e^{ax} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2x e^{ax}}{a^2} + \frac{2e^{ax}}{a^3}$$

$$\int \cos(ax) e^{bx} dx = \frac{b \cos(ax) e^{bx} + a \sin(ax) e^{bx}}{a^2 + b^2}$$

$$\int \sin(ax) e^{bx} dx = \frac{b \sin(ax) e^{bx} - a \cos(ax) e^{bx}}{a^2 + b^2}$$