

Môn học

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng

Khoa Điện – Điện Tử

Đại học Bách Khoa TP HCM

Email: hthoang@hcmut.edu.vn

Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 4

PHÂN TÍCH TÍN HIỆU LIÊN TỤC DÙNG BIẾN ĐỔI FOURIER



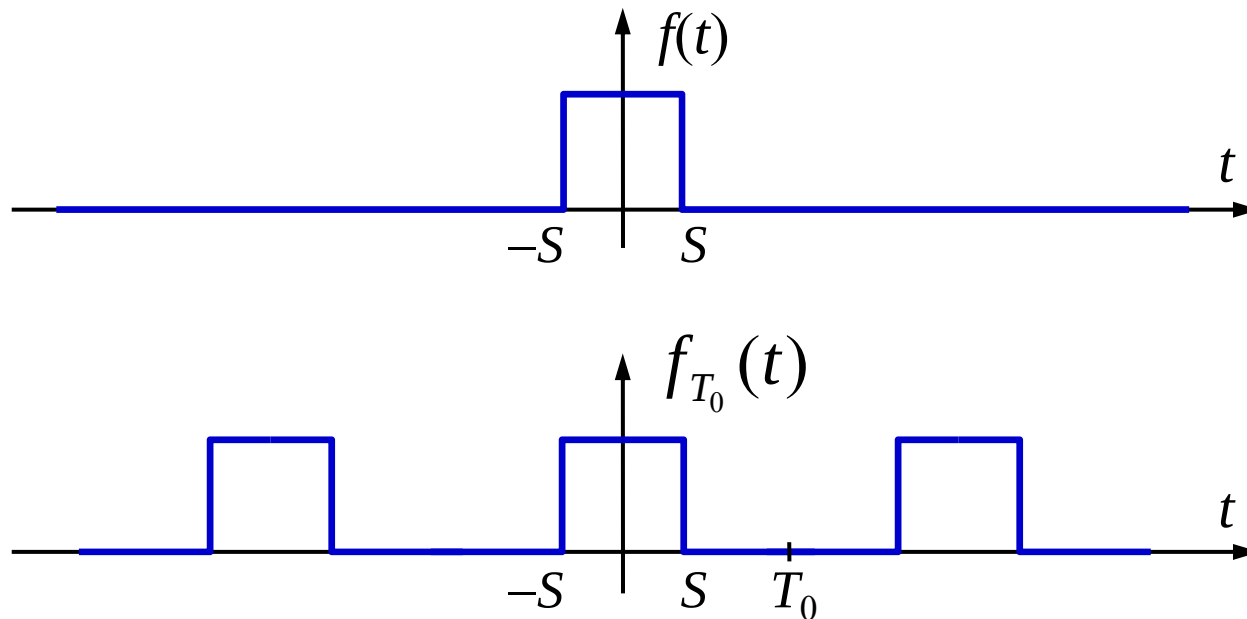
Nội dung chương 4

- ☐ Biểu diễn tín hiệu không tuần hoàn bằng tích phân Fourier
- ☐ Biến đổi Fourier của một số hàm thông dụng
- ☐ Các tính chất của biến đổi Fourier
- ☐ Năng lượng tín hiệu
- ☐ Truyền tín hiệu qua hệ thống LTIC
- ☐ Các bộ lọc lý tưởng và thực tế
- ☐ Ứng dụng trong viễn thông: điều chế AM

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU KHÔNG TUẦN HOÀN BẰNG TÍCH PHÂN FOURIER

Tín hiệu không tuần hoàn

- ❑ Xét tín hiệu không tuần hoàn $f(t)$ và tín hiệu $f_{T_0}(t)$ là tín hiệu tuần hoàn do sự lặp lại tín hiệu $f(t)$ với chu kỳ T_0 :

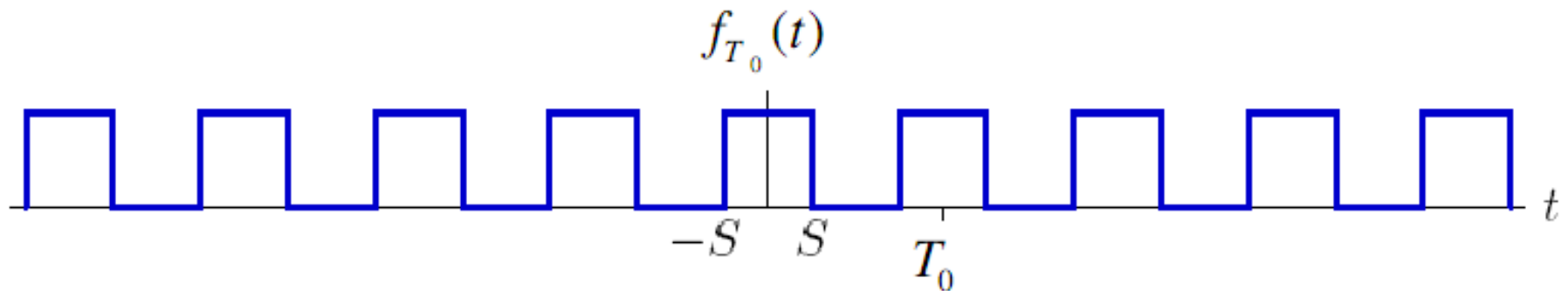


- ❑ Ta có quan hệ:
$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} f_{T_0}(t)$$

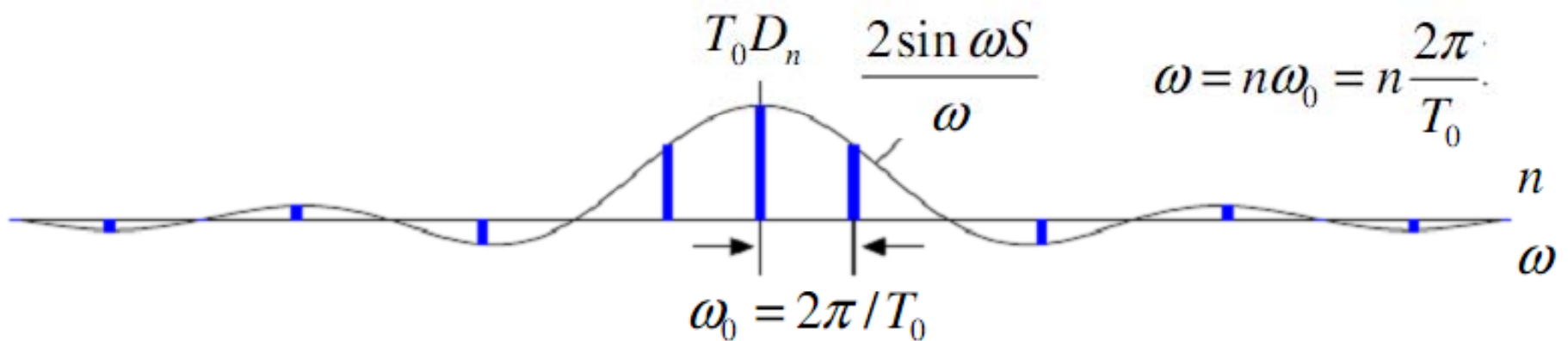
$\Rightarrow$ Tín hiệu không tuần hoàn có thể được xem như tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ vô hạn.

Chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn $f_{T_0}(t)$

□ Biểu diễn tín hiệu $f_{T_0}(t)$ dùng chuỗi Fourier:

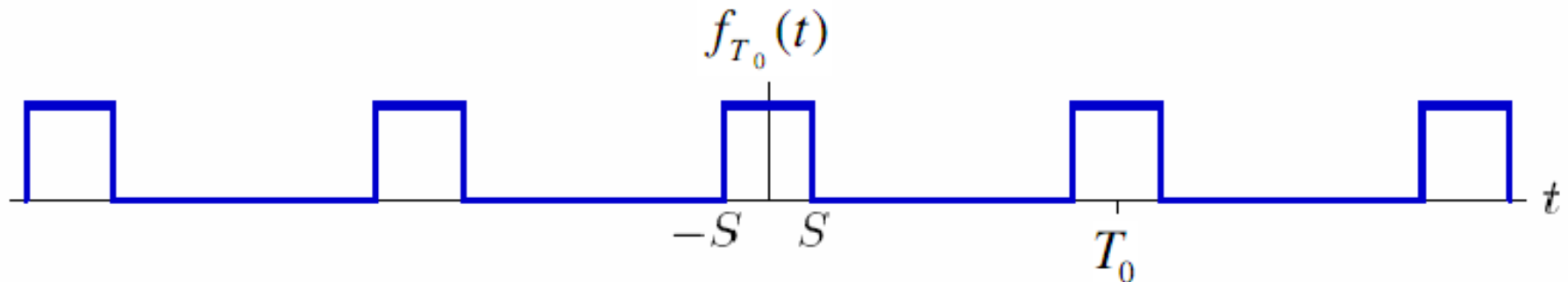


$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-S}^S e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{2}{T_0} \frac{\sin n\omega_0 S}{n\omega_0} = \frac{2}{T_0} \frac{\sin \omega S}{\omega}$$

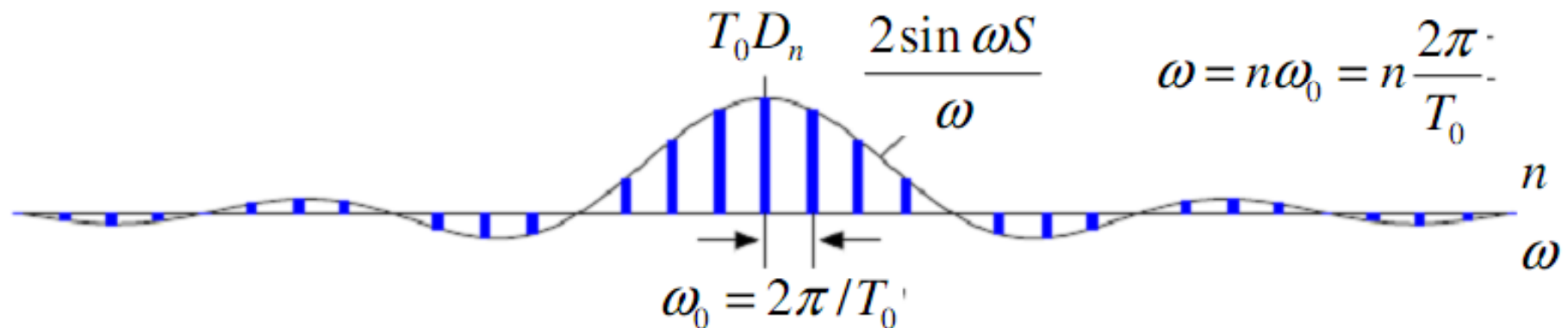


Chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn $f_{T_0}(t)$

- Chu kỳ T_0 càng tăng, khoảng cách giữa các hài càng giảm, số hài tăng lên

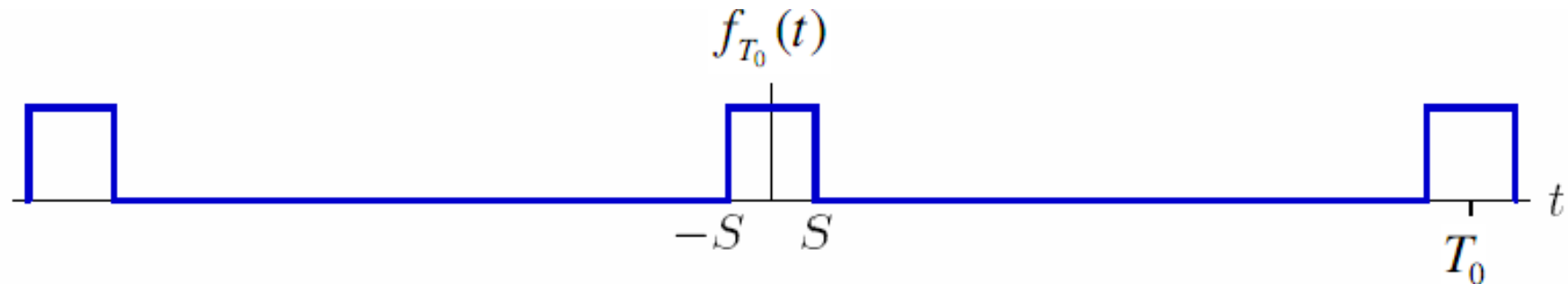


$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-S}^S e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{2}{T_0} \frac{\sin n\omega_0 S}{n\omega_0} = \frac{2}{T_0} \frac{\sin \omega S}{\omega}$$

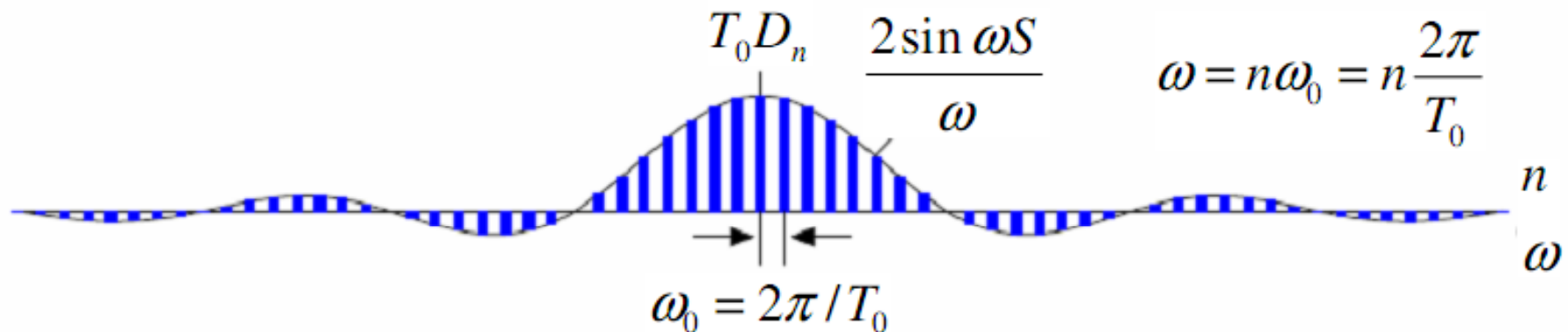


Chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn $f_{T_0}(t)$

□ Chu kỳ $T_0 \rightarrow \infty \Rightarrow$ chuỗi Fourier trở thành tích phân Fourier



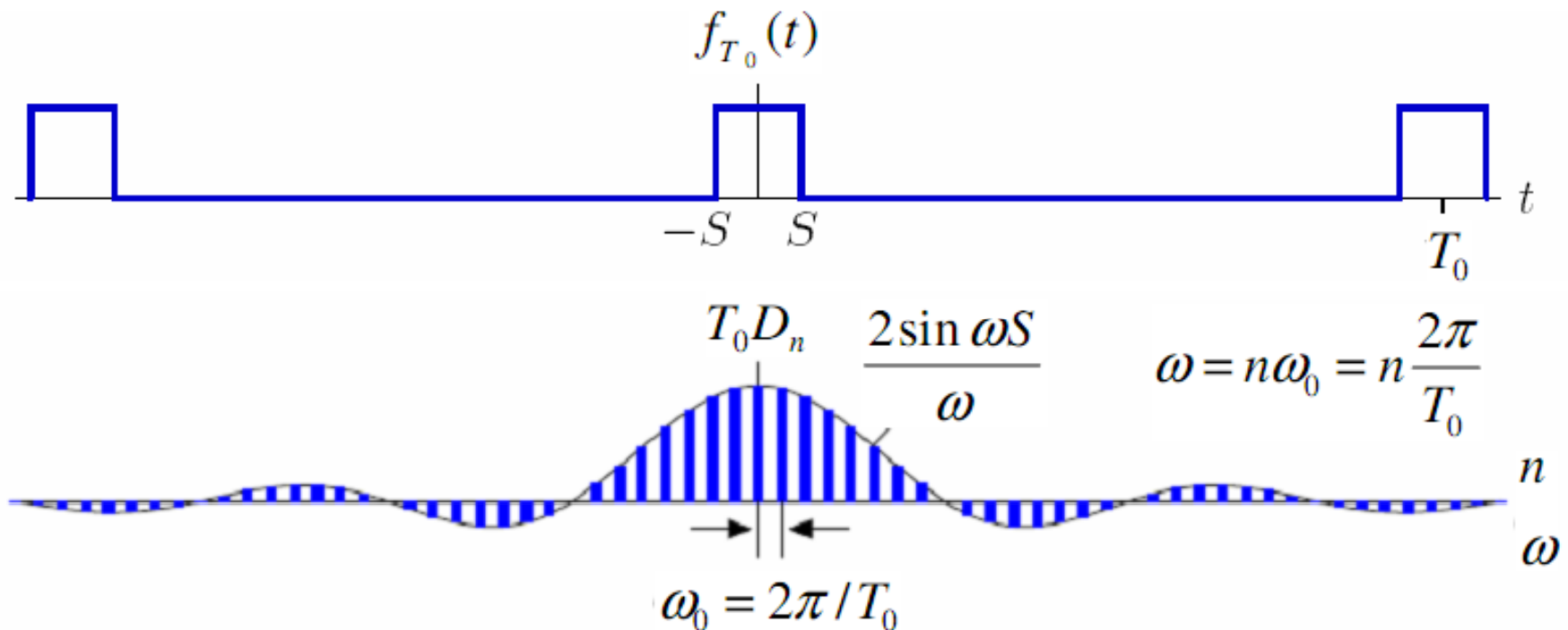
$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-S}^S e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{2}{T_0} \frac{\sin n\omega_0 S}{n\omega_0} = \frac{2}{T_0} \frac{\sin \omega S}{\omega}$$



$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} [T_0 \cdot D_n] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega S}{\omega} = F(\omega)$$

Biểu diễn tín hiệu không tuần hoàn bằng tích phân Fourier

□ Chu kỳ $T_0 \rightarrow \infty \Rightarrow$ chuỗi Fourier trở thành tích phân Fourier



$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} [T_0 \cdot D_n] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega S}{\omega} = F(\omega)$$

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} [f_{T_0}(t)] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_0)}{T_0} e^{jn\omega_0 t} \right] \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

Phương trình phân tích
(Biến đổi Fourier thuận)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Phương trình tổng hợp
(Biến đổi Fourier ngược)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

❑ Điều kiện tồn tại tích phân Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (\text{Điều kiện Dirichlet})$$

❑ Ký hiệu: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

❑ $F(\omega)$: hàm mật độ phổ tín hiệu $f(t)$

□ Biểu thức tổng quát:
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

□ Nếu $f(t)$ là hàm chẵn:
$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

□ Nếu $f(t)$ là hàm lẻ:
$$F(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

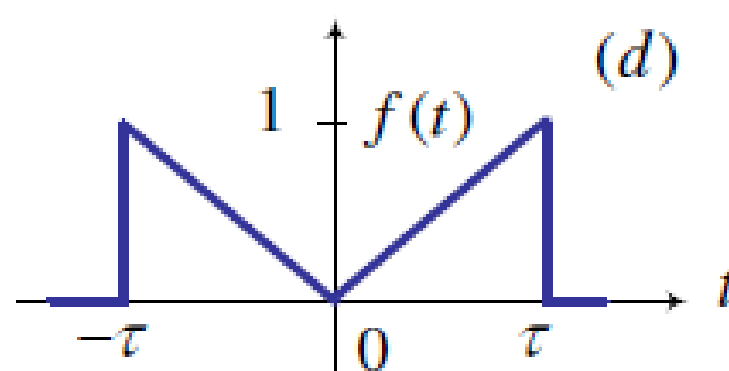
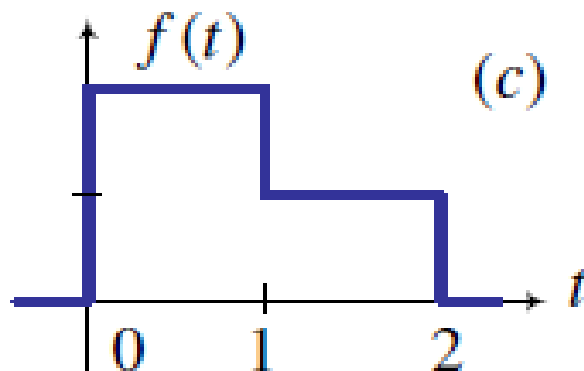
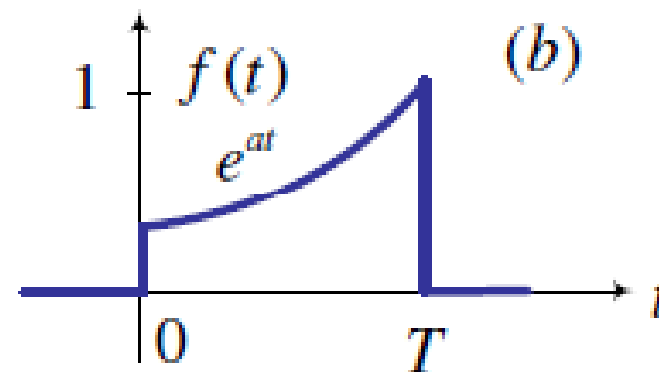
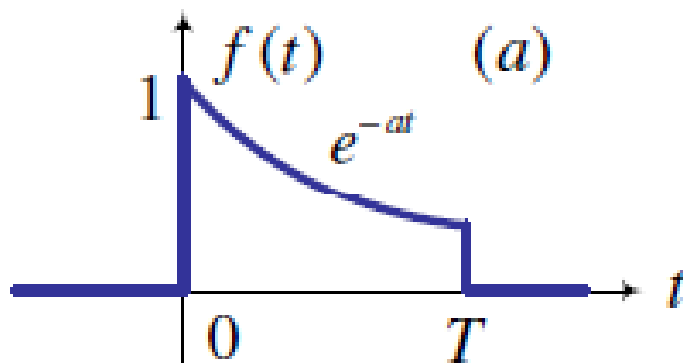
□ Biểu thức tổng quát:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

□ Nếu $F(\omega)$ là hàm chẵn:
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

□ Nếu $F(\omega)$ là hàm lẻ:
$$f(t) = 2j \int_0^{\infty} F(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

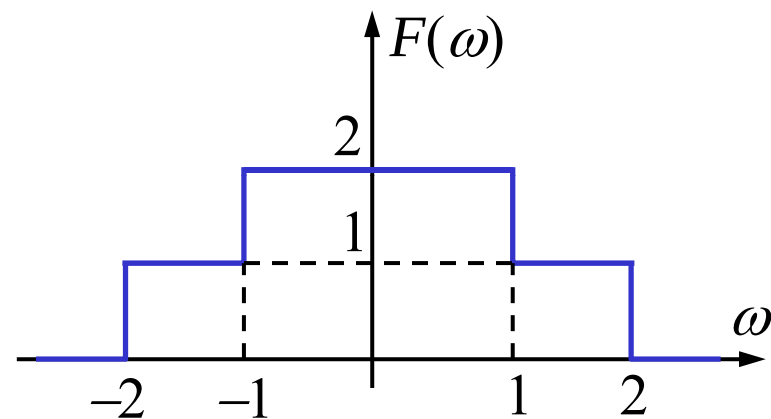
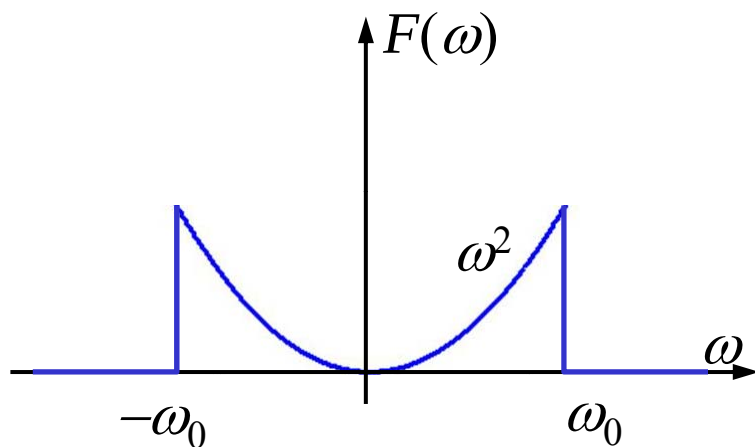
Ví dụ: Biến đổi Fourier thuận

- Áp dụng công thức biến đổi Fourier thuận, tìm biến đổi Fourier $F(\omega)$ của các hàm dưới đây:



Ví dụ: Biến đổi Fourier ngược

- ❑ Áp dụng công thức biến đổi Fourier ngược, tìm hàm $f(t)$ có biến đổi Fourier dưới đây:



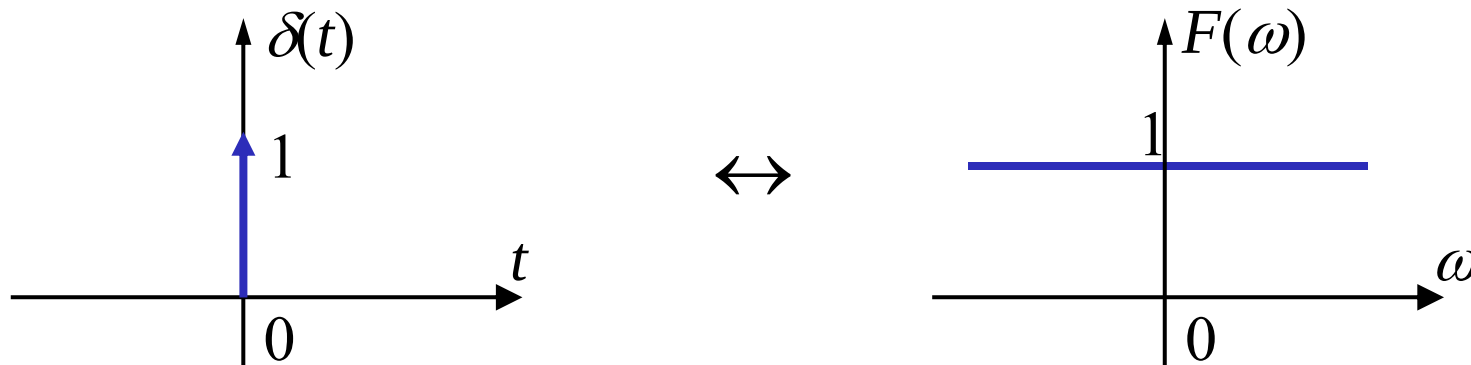
BIẾN ĐỔI FOURIER CỦA MỘT SỐ TÍN HIỆU THÔNG DỤNG

Biến đổi Fourier của hàm dirac

□ Hàm dirac: $f(t) = \delta(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$



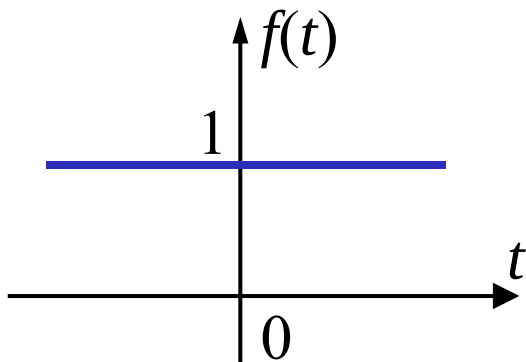
Biến đổi Fourier của hàm đơn vị

□ Hàm đơn vị: $f(t)=1$

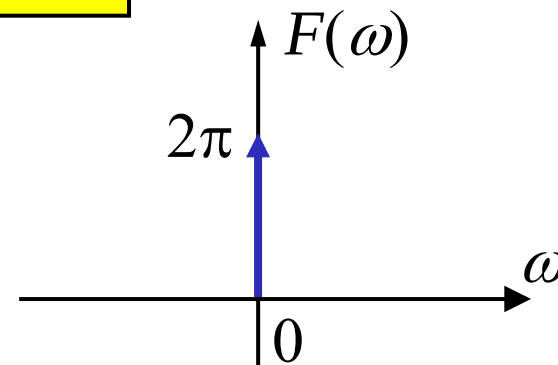
Xét: $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1\end{aligned}$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$



$\leftrightarrow$



Biến đổi Fourier của hàm mũ

□ Hàm mũ: $f(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$

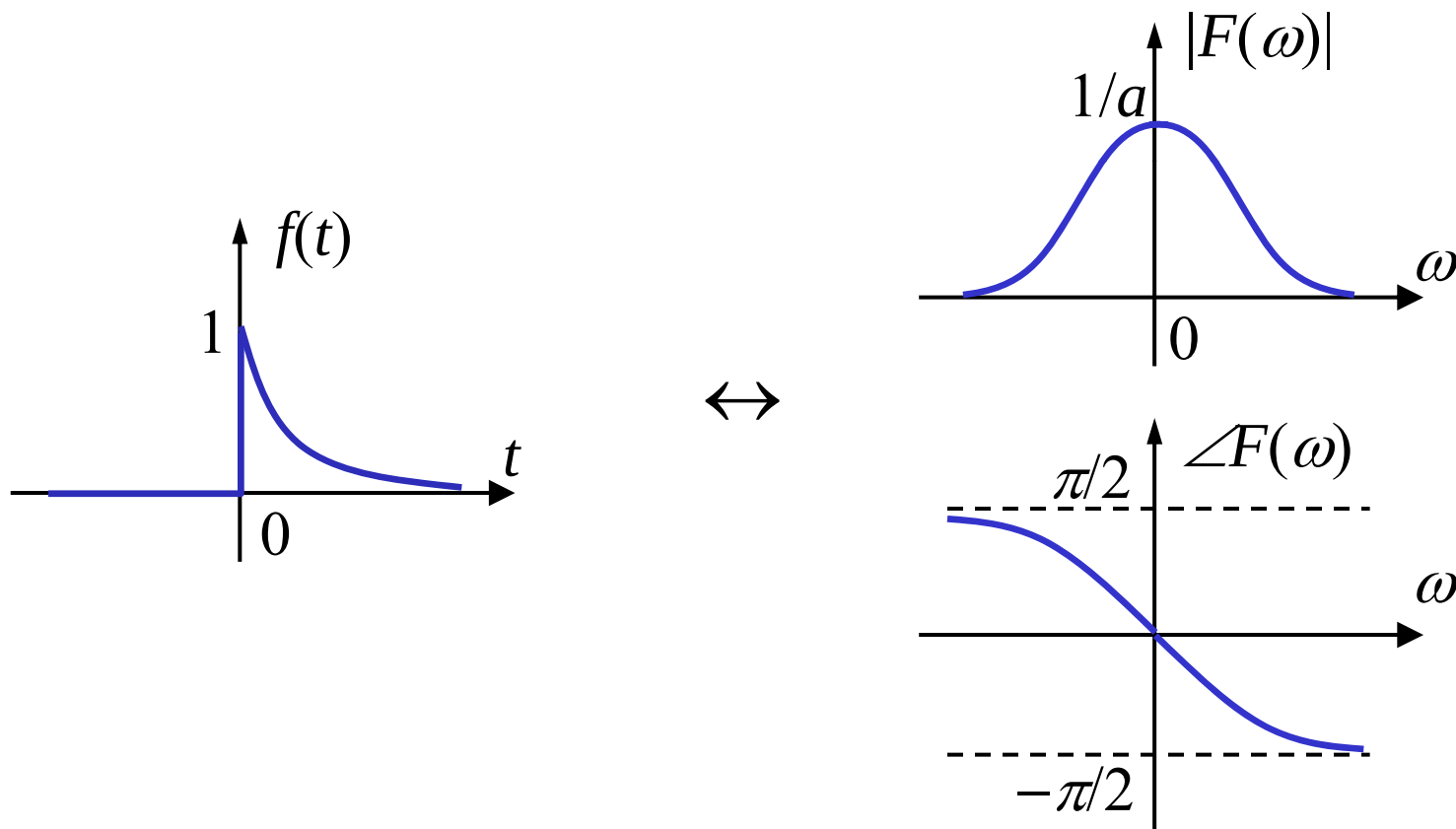
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = -\left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}, (a > 0)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \Leftrightarrow \begin{cases} |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \angle F(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{cases}$$

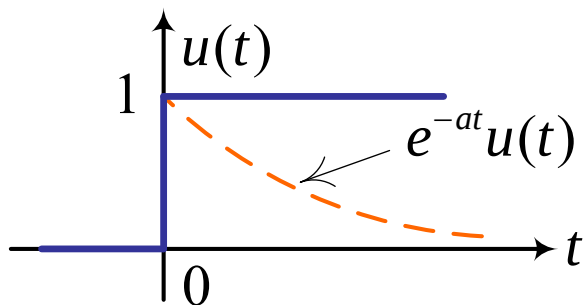
Biến đổi Fourier của hàm mũ (tt)

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}, (a > 0)$$



Biến đổi Fourier của hàm nấc đơn vị

□ Hàm nấc đơn vị: $f(t) = u(t)$



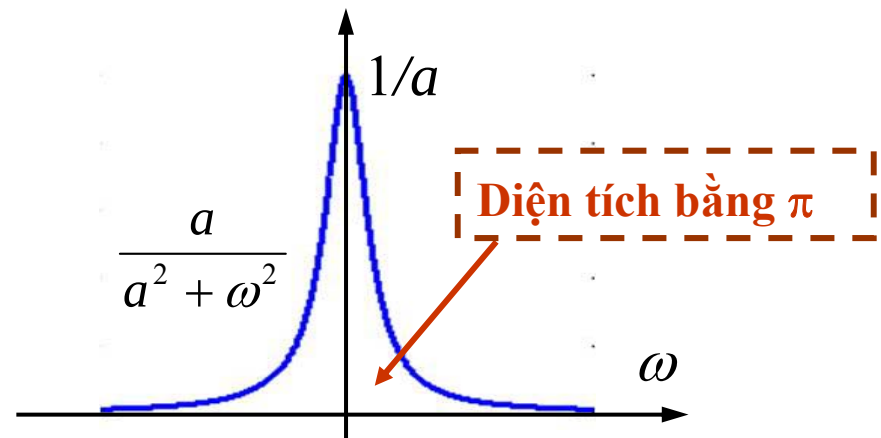
$$u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} \right]$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{j\omega}$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

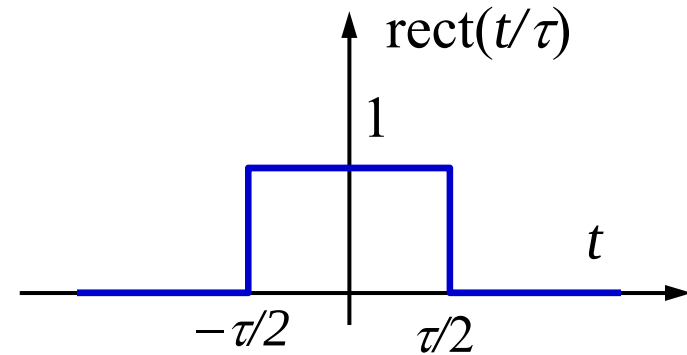
$$\Rightarrow \boxed{u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + 1/j\omega}$$



Biến đổi Fourier của xung cổng đơn vị

□ Xung cổng đơn vị:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 0 & (|t| > \tau/2) \\ 1 & (|t| \leq \tau/2) \end{cases}$$

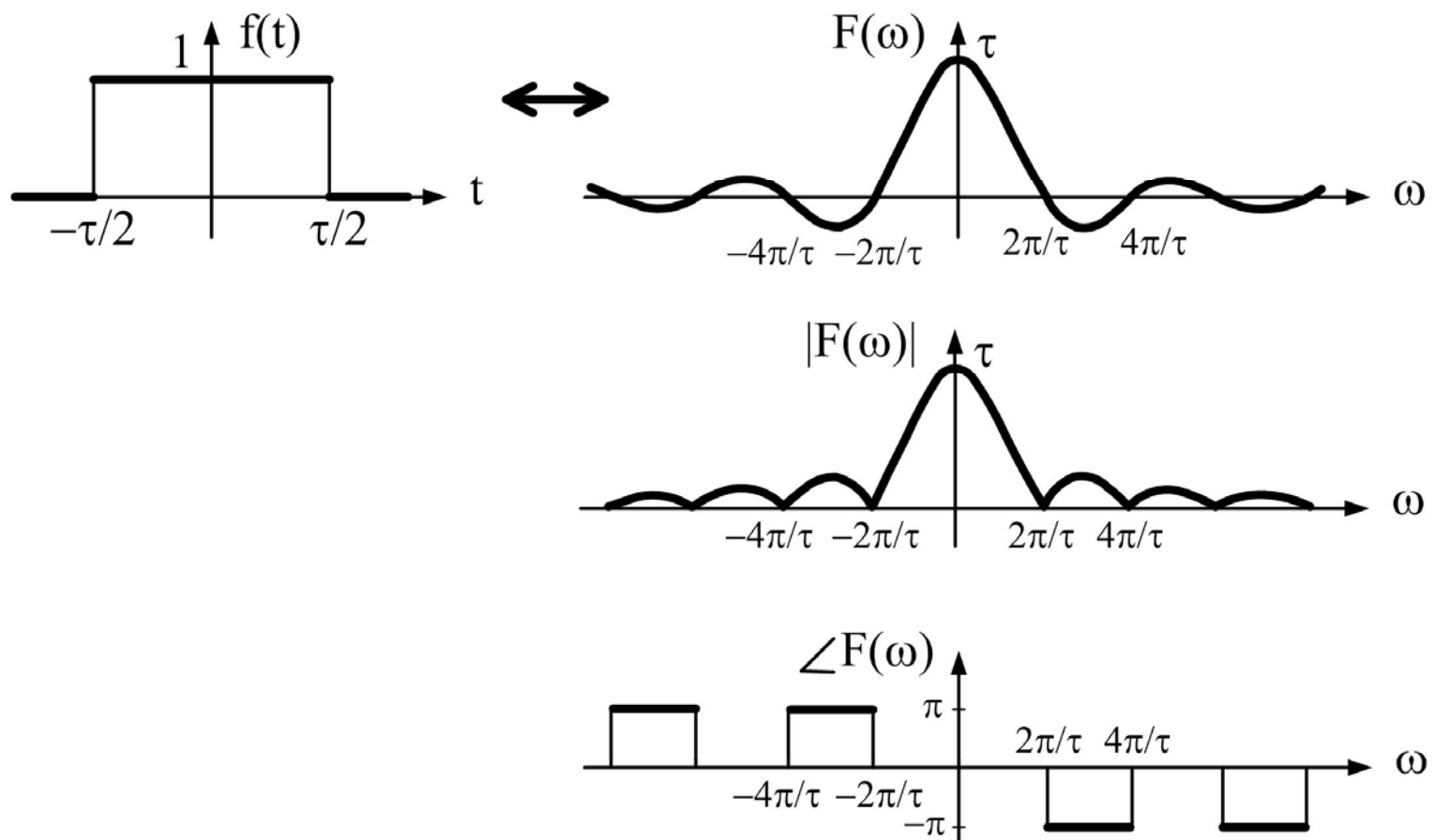


$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} = \frac{j2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{j\omega} = \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

Biến đổi Fourier của xung cổng đơn vị (tt)

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



❑ Hàm dirac:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

❑ Hàm đơn vị:

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

❑ Hàm nấc đơn vị:

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

❑ Hàm mũ:

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad (a > 0)$$

❑ Xung cổng đơn vị:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

❑ Xung tam giác đơn vị:

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

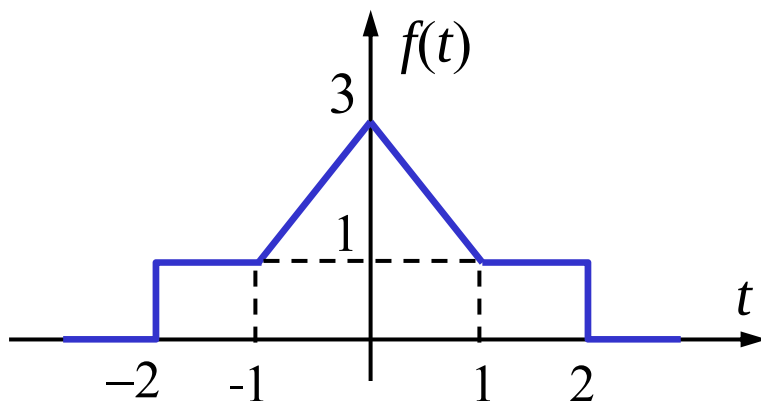
Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Tính tuyến tính:

$$\begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

□ Ví dụ: tính $F(\omega)$?



$$f(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) + 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = 4\text{sinc}(2\omega) + 2\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

□ Tính chất dời trong miền thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

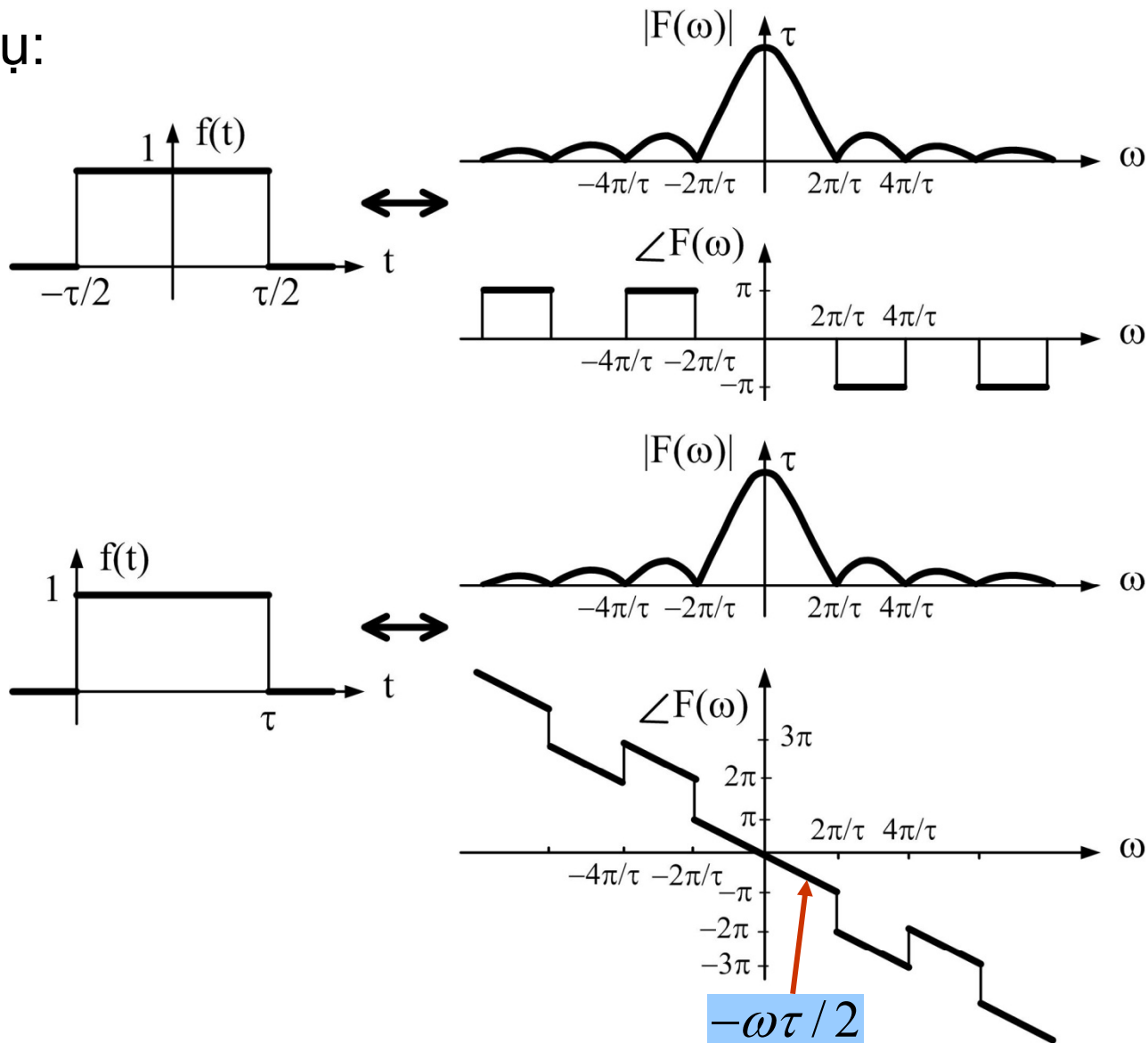
$$\begin{aligned} f_1(t) = f(t - t_0) &\leftrightarrow F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau = F(\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}}$$

$\Rightarrow$ Dời tín hiệu trong miền thời gian không làm ảnh hưởng đến biên độ của biến đổi Fourier mà chỉ làm pha dịch chuyển một lượng $-\omega t_0$

Các tính chất của biến đổi Fourier

Ví dụ:



Các tính chất của biến đổi Fourier

❑ Dịch chuyển trong miền tần số (điều chế):

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f_1(t) = f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F_1(\omega) = ?$$

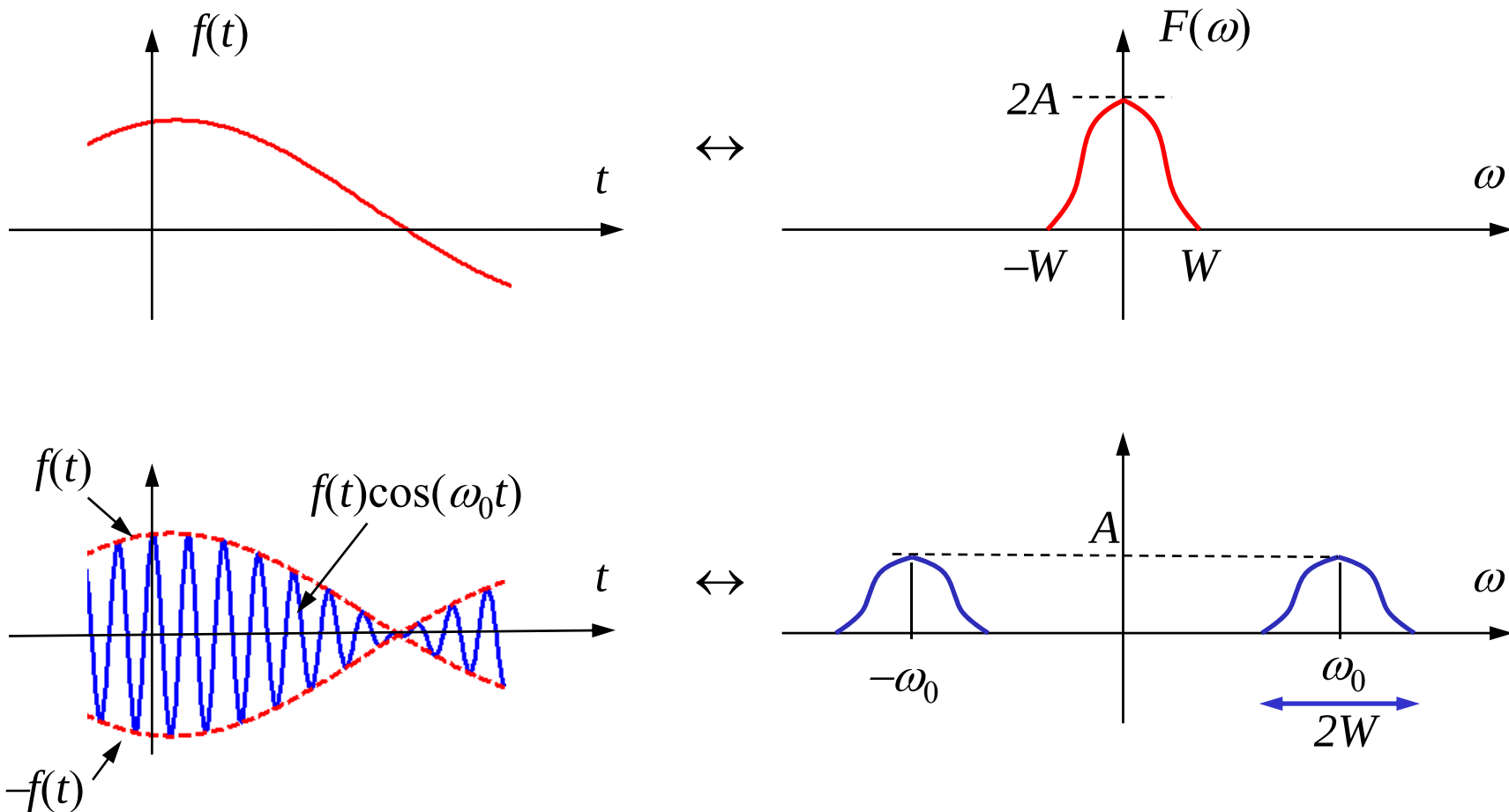
$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) \\ f(t) \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j} F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} F(\omega + \omega_0) \end{cases}$$

Các tính chất của biến đổi Fourier

- Ví dụ ứng dụng tính chất dịch chuyển trong miền tần số:
Điều chế AM (Amplitude Modulation)



□ Tính đối ngẫu

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow 2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$$

★ Ví dụ: $\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Rightarrow \text{sinc}(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Tính chất co/giãn trong miền thời gian

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

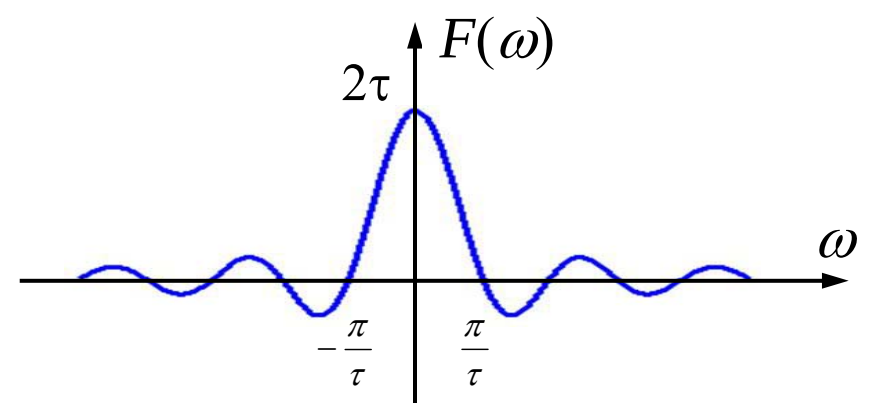
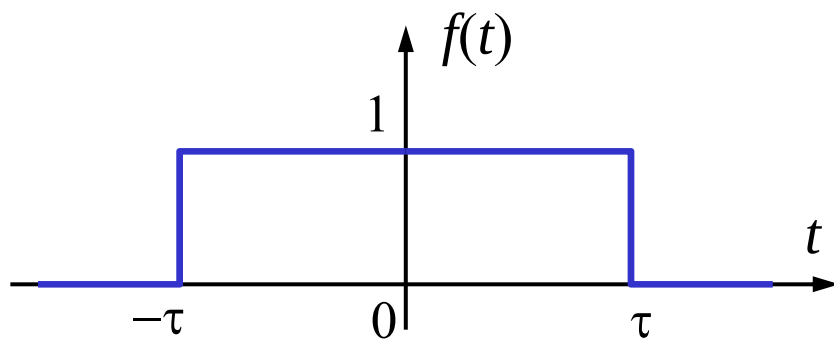
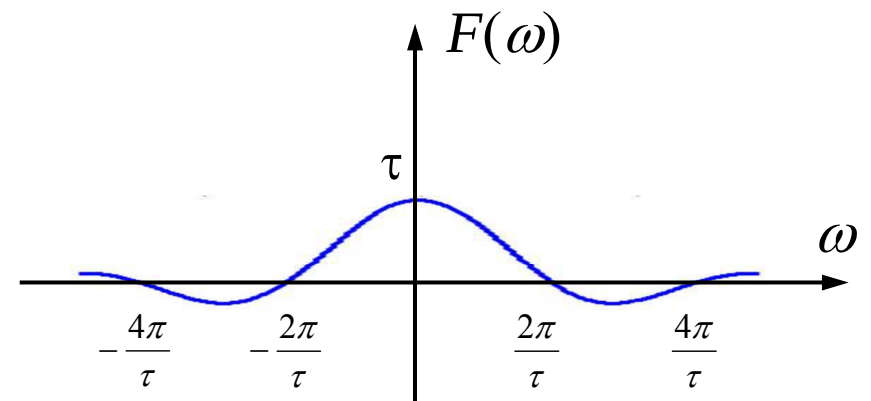
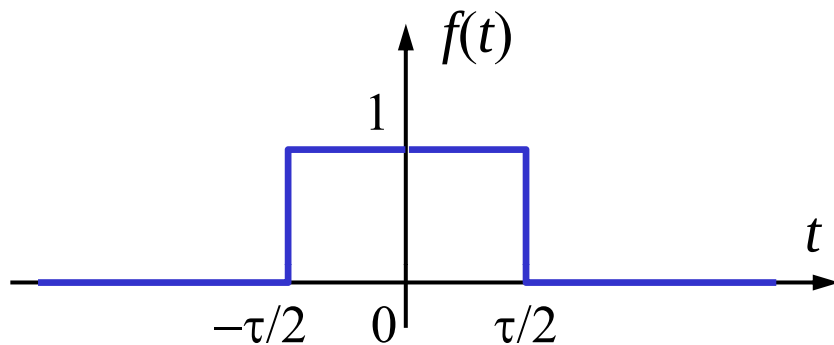
$$\Rightarrow f_1(t) = f(at) \leftrightarrow F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 : F_1(\omega) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ a < 0 : F_1(\omega) = \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

Các tính chất của biến đổi Fourier

★ Ví dụ tính co giãn trong miền thời gian:



Các tính chất của biến đổi Fourier

□ Tính đảo thời gian/tần số

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$a = -1$$

$$\Rightarrow f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

Ví dụ:

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \Rightarrow e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a - j\omega}$$

$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Các tính chất của biến đổi Fourier

❑ Tích chập trong miền thời gian:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega); f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow f(t) = f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) * f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)}$$

Ví dụ: $\text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{4}\right)$

$$\Rightarrow \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) * \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) = \frac{T}{2} \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{T}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow \frac{T}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

□ Tích chập trong miền tần số:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega); f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) F_2(\omega - \tau) d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega - \tau) e^{j\omega t} d\omega \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) e^{j\tau t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x) e^{jxt} dx \right] d\tau \\ &= f_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) e^{j\tau t} d\tau = 2\pi f_1(t) f_2(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\pi f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega)}$$

□ Đạo hàm trong miền thời gian:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

□ Đạo hàm trong miền tần số:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtf(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$\Rightarrow t^n f(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

□ Tích phân trong miền thời gian

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$$

$$f(t) * u(t) \leftrightarrow F(\omega)[\pi\delta(\omega)+1/j\omega] = \pi F(0)\delta(\omega)+F(\omega)/j\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

□ Tính tuyến tính:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

□ Dịch chuyển trong miền thời gian:

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

□ Dịch chuyển trong miền tần số (điều chế):

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

□ Đối ngẫu thời gian – tần số:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \Rightarrow F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

Tóm tắt tính chất biến đổi Fourier

❑ Tính tỉ lệ (co/giãn thời gian/tần số):

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

❑ Đảo thời gian/tần số:

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega)$$

❑ Tích chập trong miền thời gian:

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

❑ Tích chập trong miền tần số:

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

❑ Đạo hàm trong miền thời gian:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

❑ Đạo hàm trong miền tần số:

$$t^n f(t) \longleftrightarrow (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

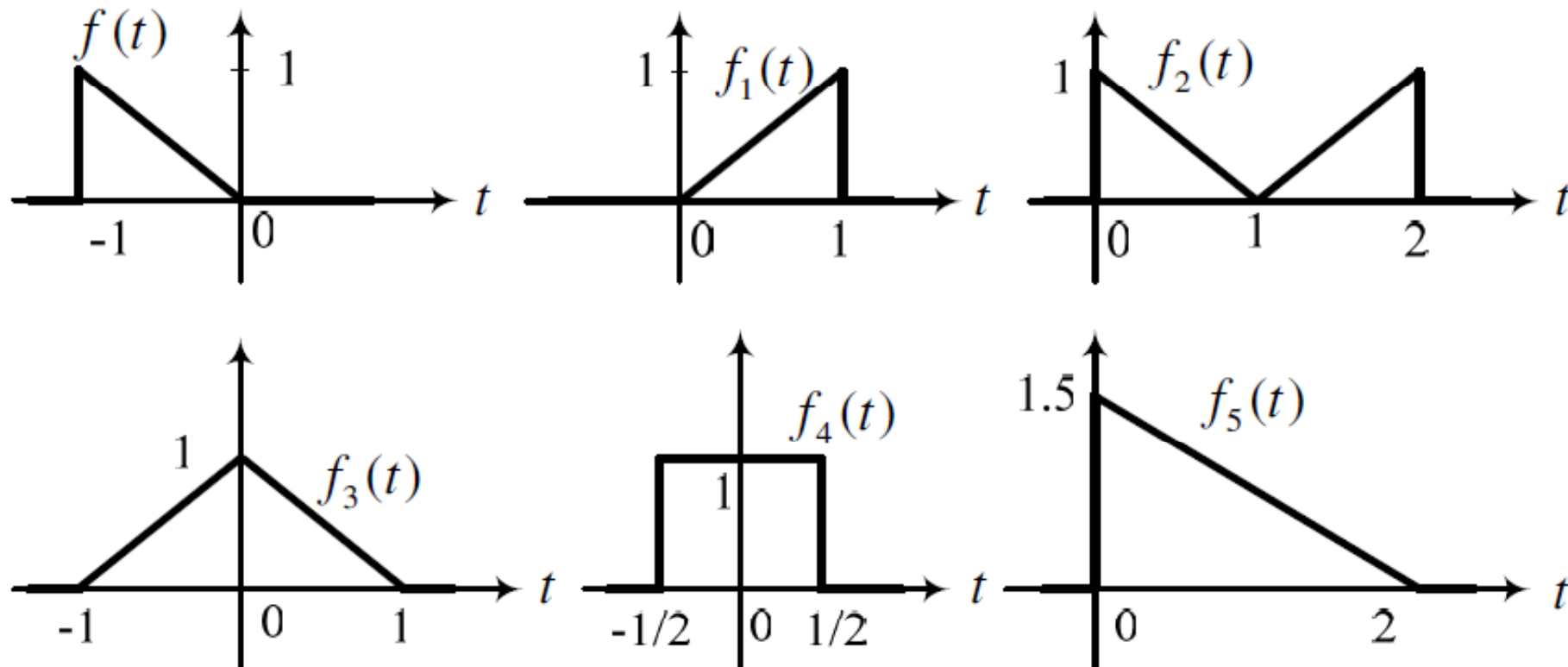
❑ Tích phân trong miền thời gian:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

Bài tập áp dụng tính chất biến đổi Fourier

□ Cho $f(t)$ có phổ Fourier là $F(\omega) = \frac{1}{\omega^2} (e^{j\omega} - j\omega e^{j\omega} - 1)$

Hãy xác định phổ của các tín hiệu $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, $f_5(t)$



NĂNG LƯỢNG TÍN HIỆU

Định lý Parseval

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

năng lượng

mật độ phổ năng lượng

□ Chứng minh:

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

- ❑ Nếu tín hiệu thực: mật độ phổ năng lượng là hàm chẵn nên

$$E_f = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

- ❑ Năng lượng trong khoảng tần số $\omega_1 \rightarrow \omega_2$

$$E_f = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Thí dụ tính năng lượng tín hiệu

❑ Tính năng lượng của tín hiệu: $f(t) = \text{sinc}(t)$

❑ Giải:

❑ Dùng định nghĩa: $E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt$

❑ Dùng định lý Parseval:

$$\text{Ta có: } \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \leftrightarrow 2\text{sinc}(\omega) \Rightarrow \text{sinc}(t) \leftrightarrow \pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 \text{rect}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 1 d\omega$$

$$E_f = \pi$$

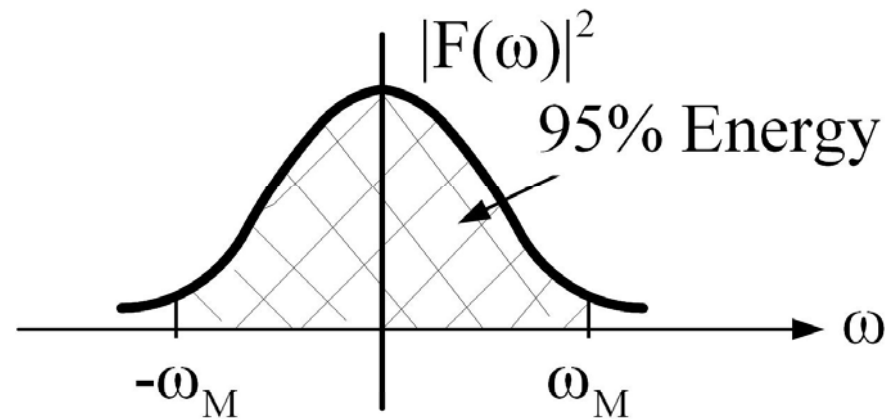
Bài tập tính năng lượng tín hiệu

□ Tính năng lượng của tín hiệu $f(t) = e^{-2t}u(t)$

—

Băng thông tín hiệu

- ❑ Băng thông tín hiệu là miền tần số từ $0 \rightarrow B$ (Hz) chiếm 95% năng lượng tín hiệu.



□ Ví dụ: $f(t) = e^{-at}u(t) \Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)}$

$$E_f = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{0.95}{2a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_M} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{a\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_M}{a} \right)$$

$$\Rightarrow \omega_M = 12.706a (\text{rad / sec})$$

$$\Rightarrow B = 2.02a (\text{Hz})$$

Bài tập tính băng thông tín hiệu

□ Cho tín hiệu: $f(t) = \frac{2a}{t^2 + a^2}$

Tính băng thông B chứa 99% năng lượng của tín hiệu

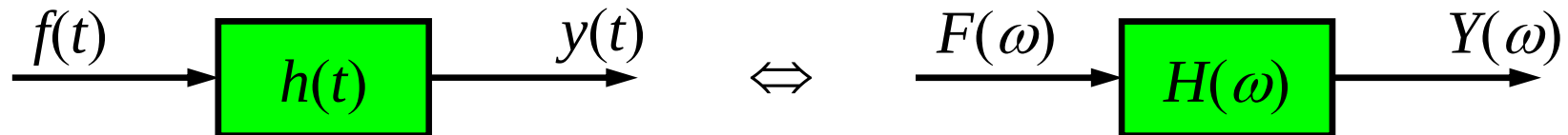
□ Gợi ý: $e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$ (Bảng biến đổi Fourier)

$\frac{2a}{t^2 + a^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|}$ (Tính chất đối ngẫu)

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI DÙNG BIẾN ĐỔI FOURIER

Biểu diễn hệ thống trong miền tần số

❑ Xét hệ thống LTI với đáp ứng xung là $h(t)$:



❑ Ta có: $y(t) = f(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(\omega) = F(\omega).H(\omega)$

❑ Với: $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$ (Đáp ứng tần số của hệ thống)

❑ Đáp ứng trong miền thời gian:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{Y(\omega)\}$$

Xác định đáp ứng tần số từ PTVP

❑ Xét hệ thống LTI nhân quả ổn định mô tả bởi PTVP:

$$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

$$\Leftrightarrow (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0)y = (b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_0)f$$

❑ Biến đổi Fourier hai vế PTVP, để ý tính chất đạo hàm trong miền thời gian:

$$D^k y(t) \leftrightarrow (j\omega)^k Y(\omega)$$

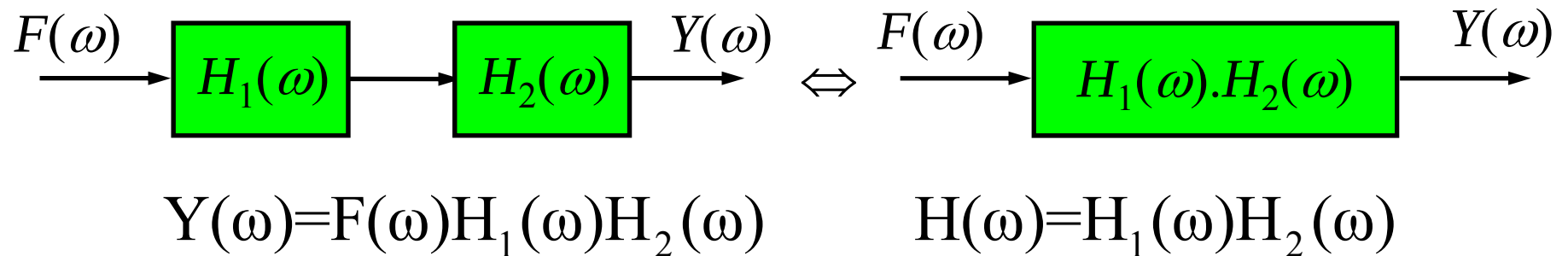
$$D^k f(t) \leftrightarrow (j\omega)^k F(\omega)$$

Ta được: $Q(j\omega)Y(\omega) = P(j\omega)F(\omega)$

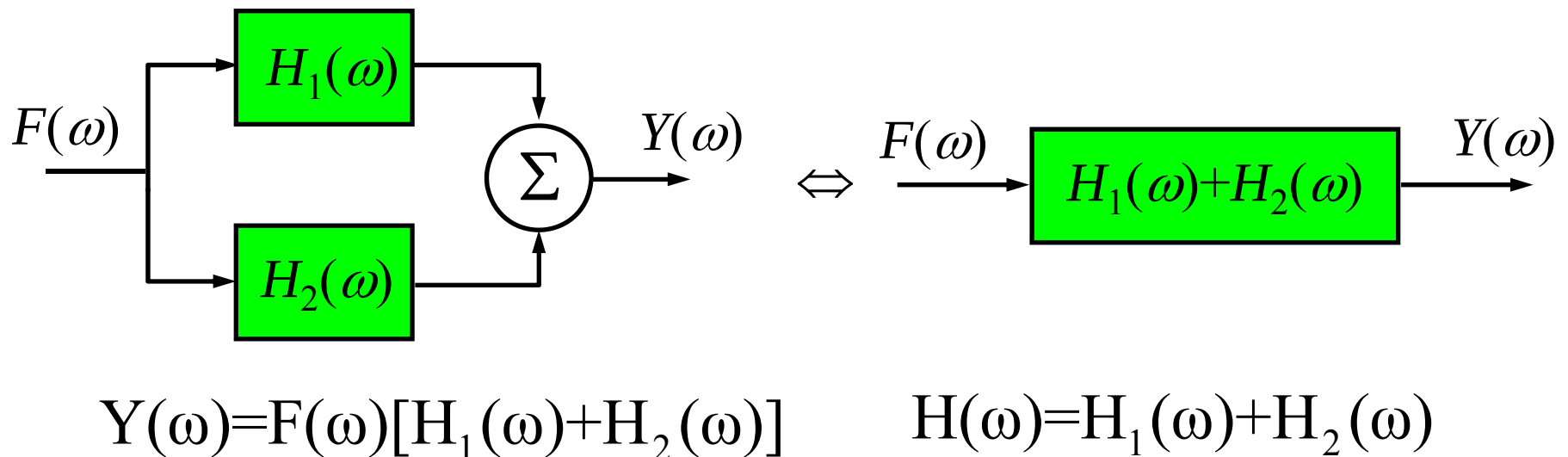
Suy ra:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

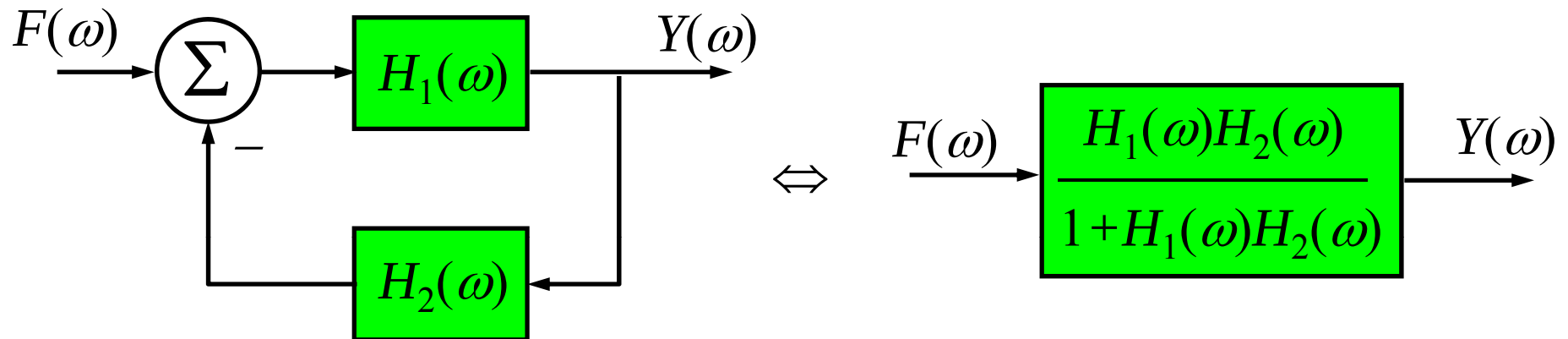
❑ Hệ thống nối tiếp:



❑ Hệ thống ghép song song:



❑ Hệ thống ghép hồi tiếp:



$$Y(\omega) = F(\omega) \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)} \Rightarrow H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}$$

Tính đáp ứng dùng biến đổi Fourier – Ví dụ 1

□ Cho hệ thống có đáp ứng tần số: $H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$

Tính đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào là $f(t) = e^{-t}u(t)$

□ **Giải:**

□ Ta có: $F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$

$$\Rightarrow Y(\omega) = F(\omega).H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 3} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

Tính đáp ứng dùng biến đổi Fourier – Ví dụ 2

□ Cho hệ thống mô tả bởi PTVP: $(D^2 + 3D + 2)(t) = f(t)$

Tính đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là: $f(t) = e^{-t}u(t)$

□ **Giải:**

$$H(\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{1}{(D+1)(D+2)} \Big|_{D=j\omega} = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = F(\omega)H(\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)^2(j\omega+2)}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = -\frac{1}{(j\omega+1)} + \frac{1}{(j\omega+1)^2} + \frac{1}{(j\omega+2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = (-e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

Bài tập tính đáp ứng của hệ thống

□ Cho hệ thống mô tả bởi PTVP:

$$(D^2 + 6D + 5)y(t) = 2(D + 2)f(t)$$

Tính đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là $f(t) = e^{-t}u(t)$

□ Ta có: $Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = |F(\omega)| |H(\omega)| \\ \angle Y(\omega) = \angle F(\omega) + \angle H(\omega) \end{cases}$$

□ Hệ thống với hàm truyền $H(\omega)$ đã biến đổi biên độ và pha của tín hiệu vào để được tín hiệu ra.

□ Hệ thống trong thực tế có thể là:

- ❖ Bộ lọc
- ❖ Kênh truyền

Kênh truyền không gây méo và kênh truyền gây méo

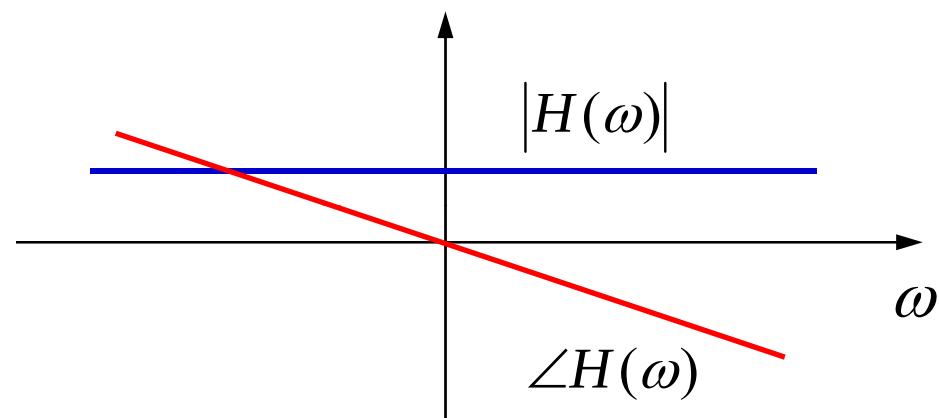
- ❑ Kênh truyền không gây méo: tín hiệu ra **tỉ lệ** với tín hiệu vào và **chậm hơn** tín hiệu vào khoảng thời gian t_d với mọi tần số

$$y(t) = kf(t - t_d)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = kF(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = ke^{-j\omega t_d}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = k \\ \angle H(\omega) = -\omega t_d \end{cases}$$



Kênh truyền không gây méo

- ❑ Kênh truyền gây méo:

❖ Méo biên độ: $|H(\omega)| \neq \text{const}$

❖ Méo pha: $\angle H(\omega) \neq -\omega t_d$

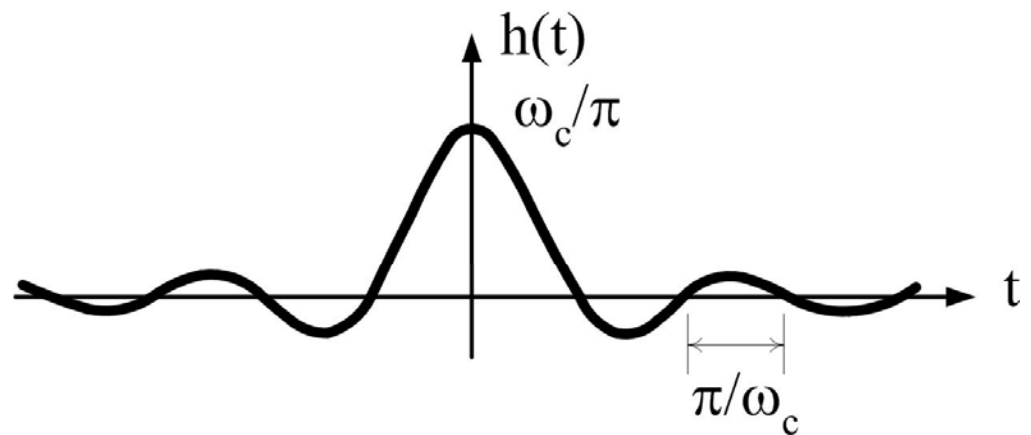
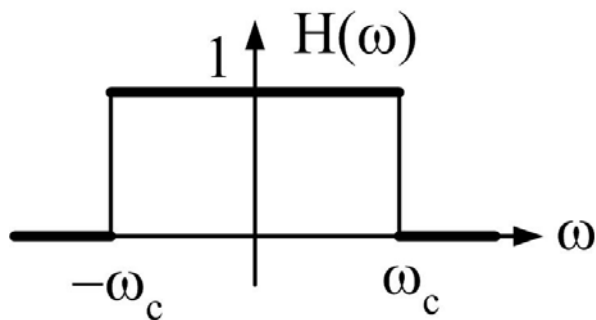
BỘ LỘC TẦN SỐ



Phân loại bộ lọc

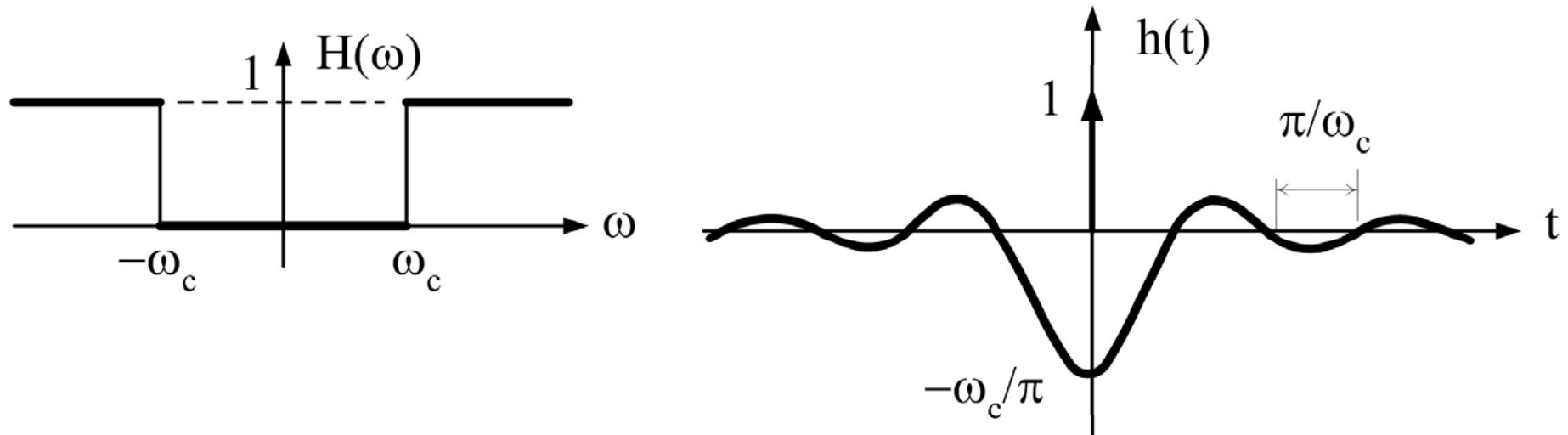
- ☐ Bộ lọc thông thấp (Low Pass Filter – LPF)
- ☐ Bộ lọc thông cao (High Pass Filter – HPF)
- ☐ Bộ lọc thông dải (Band Pass Filter – BPF)
- ☐ Bộ lọc chắn dải (Band Stop Filter – BSF)

□ Bộ lọc thông thấp lý tưởng:



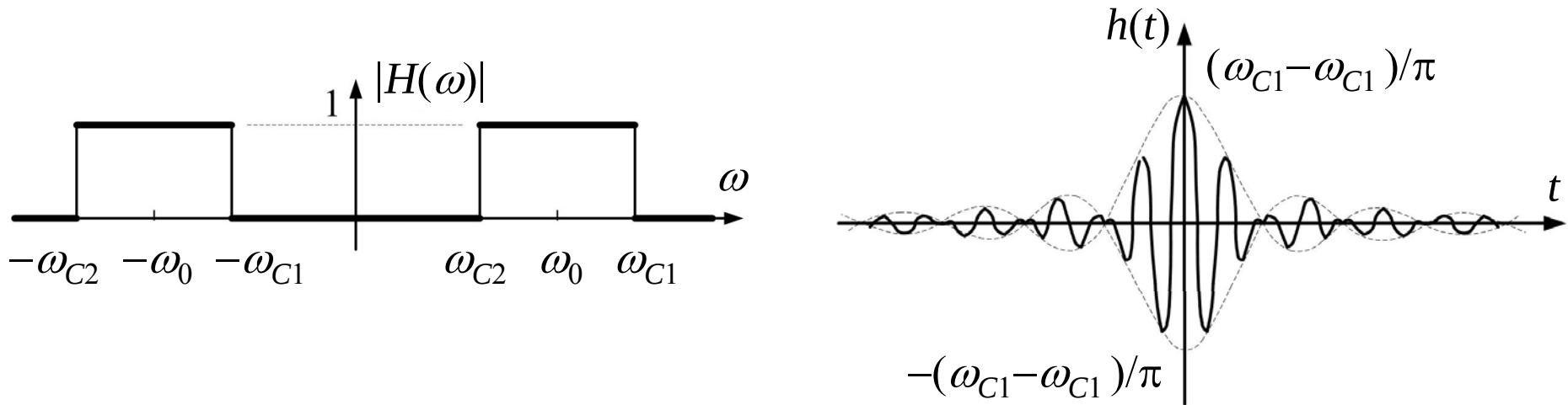
$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \Rightarrow h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t)$$

□ Bộ lọc thông cao lý tưởng:



$$H(\omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \Rightarrow h(t) = \delta(t) - \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t)$$

□ Bộ lọc thông dải lý tưởng:



$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_{C2} - \omega_{C1}}\right)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{\omega_{C2} - \omega_{C1}}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_{C2} - \omega_{C1}}{2} t\right) \cos(\omega_0 t)$$

- ❑ Các bộ lọc lý tưởng đều là hệ thống không nhân quả nên không thể thực hiện được trên thực tế.
- ❑ Bộ lọc thực tế phải là hệ thống nhân quả và được thực hiện theo các phương án sau:
 - Thực hiện bằng hệ thống liên tục (bộ lọc tương tự), đáp ứng tần số thay đổi liên tục tiến gần tới đáp ứng lý tưởng (sẽ trình bày chi tiết hơn trong chương 6 về thiết kế bộ lọc tương tự)
 - Thực hiện bằng hệ thống rời rạc (bộ lọc số - sẽ học trong môn xử lý TH số), sử dụng đáp ứng xung $h(t)$ của bộ lọc lý tưởng cắt bỏ phần đuôi của $h(t)$ và trễ đi phù hợp để $h(t)$ mới là nhân quả.

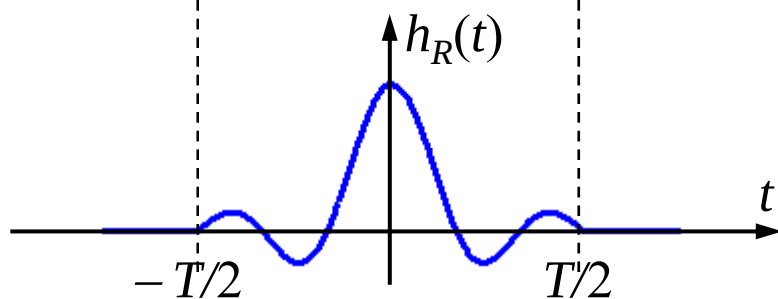
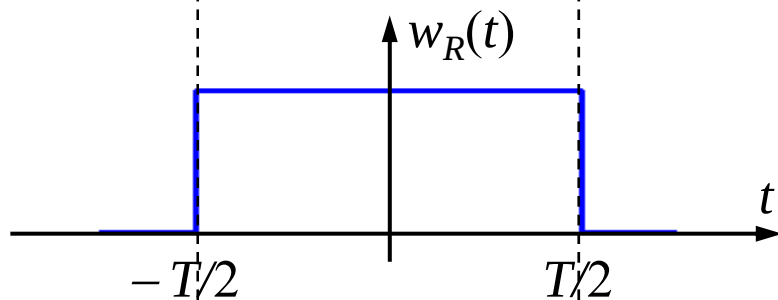
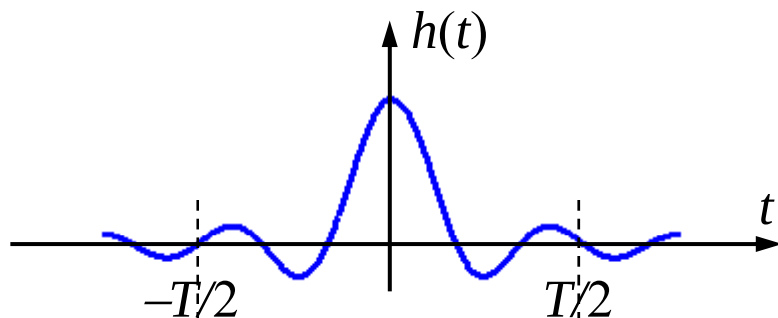
Thực hiện bộ lọc thực tế dùng hàm cửa sổ

❑ Nhân đáp ứng xung $h(t)$ của bộ lọc lý tưởng với hàm cửa sổ $w(t)$ có độ rộng hữu hạn, sau đó làm trễ một khoảng thời gian bằng $1/2$ độ rộng của hàm cửa sổ sẽ được bộ lọc nhân quả.

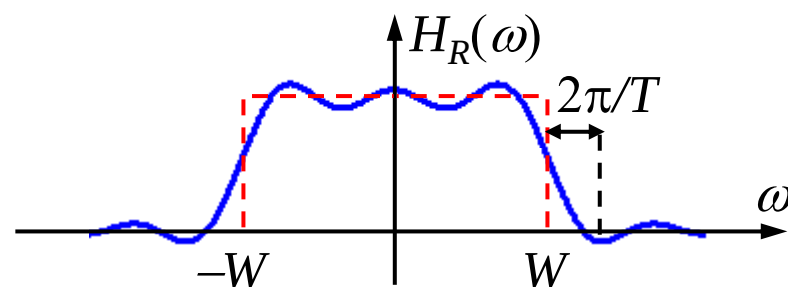
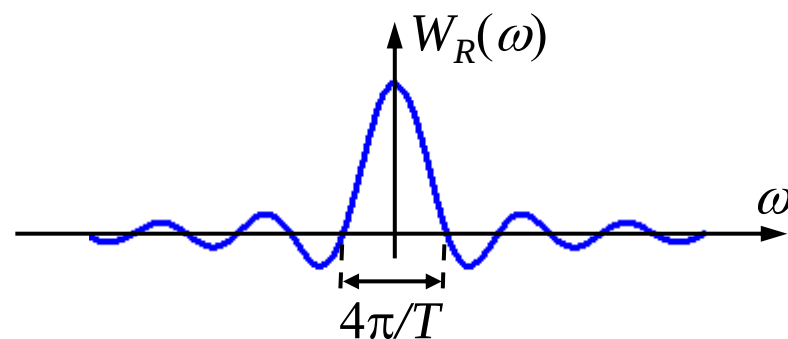
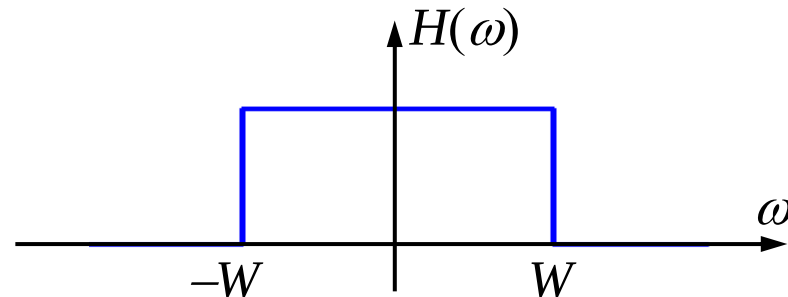
❖ Trong miền thời gian: $h_w(t) = h(t)w(t)$

❖ Trong miền tần số: $H_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\omega) * W(\omega)$

Thực hiện bộ lọc dùng hàm cửa sổ xung cổng

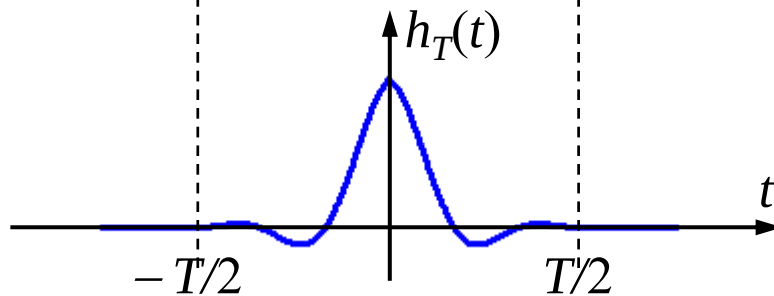
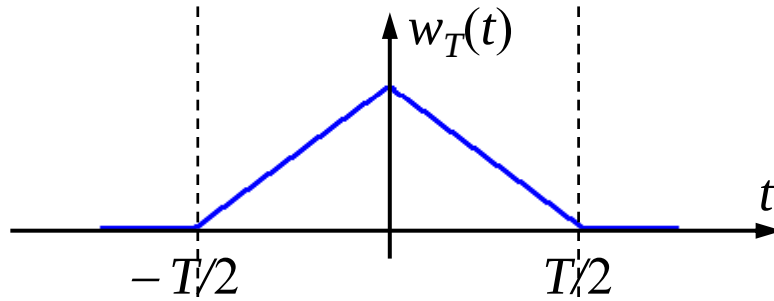
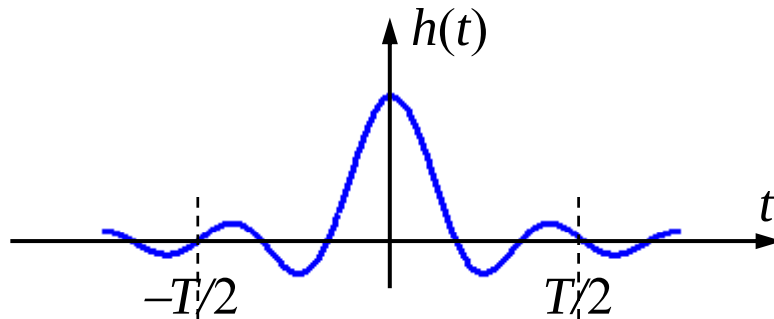


$$h_R(t) = h(t)w_R(t)$$

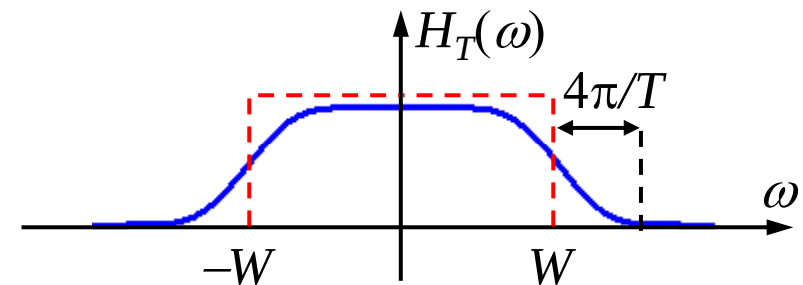
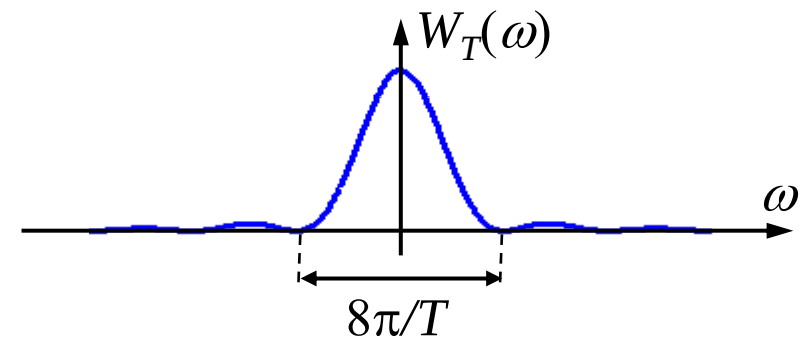
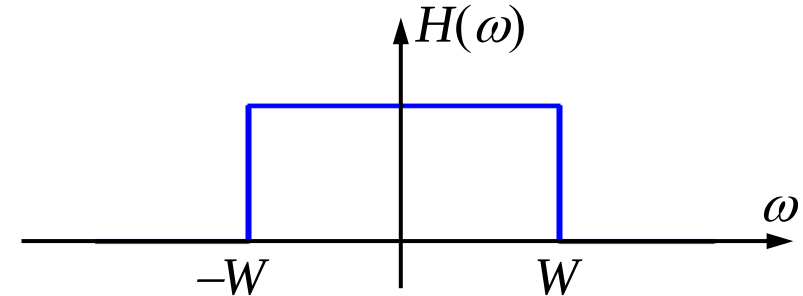


$$H_R(\omega) = H(\omega) * W_R(\omega)$$

Thực hiện bộ lọc dùng hàm cửa sổ tam giác



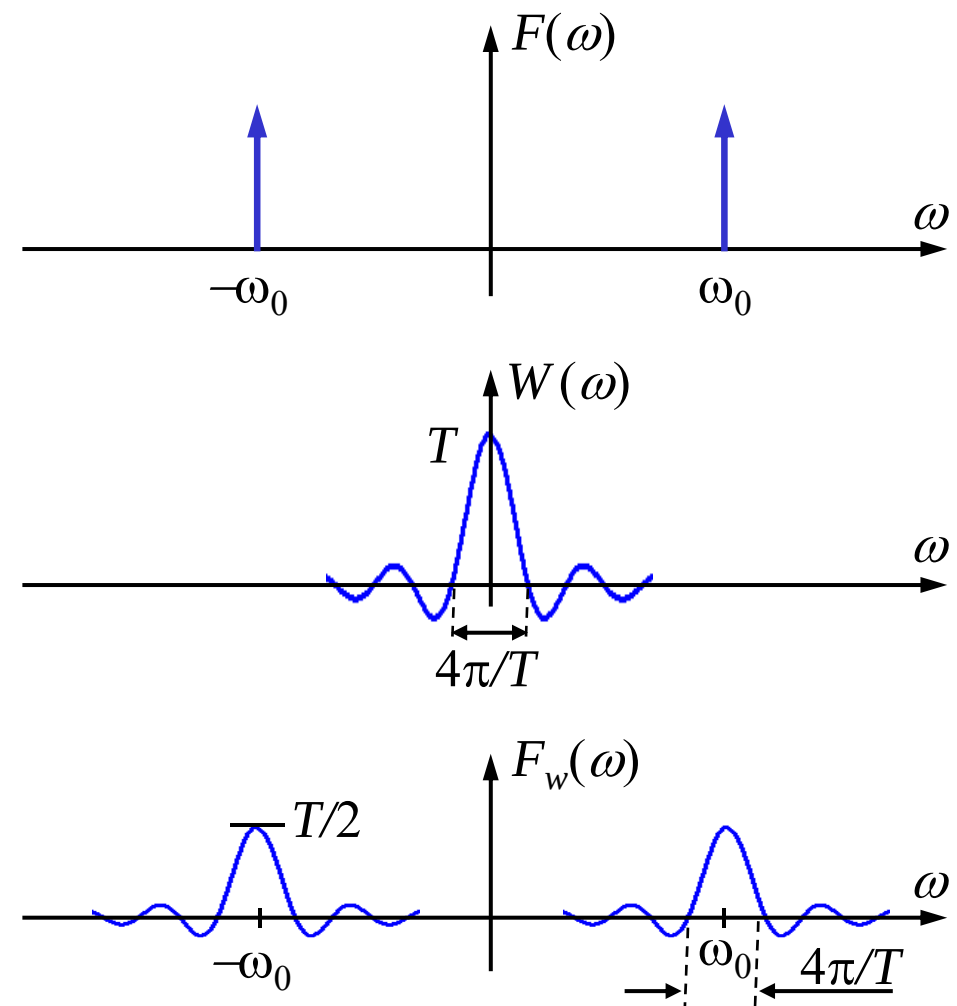
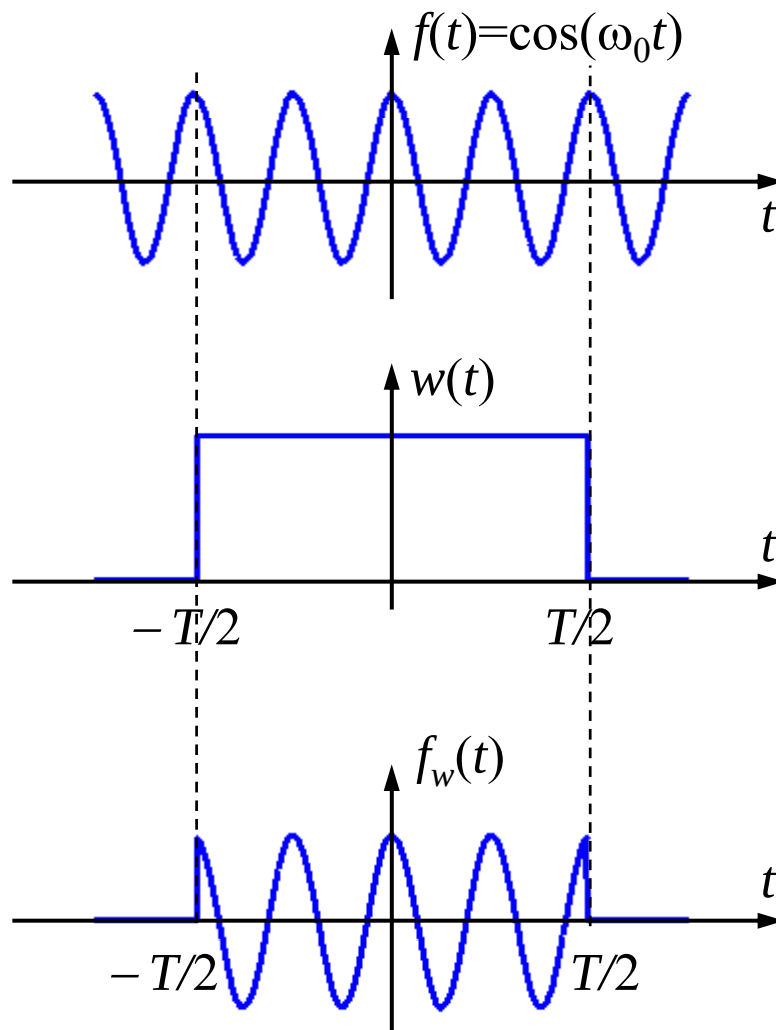
$$h_T(t) = h(t)w_T(t)$$



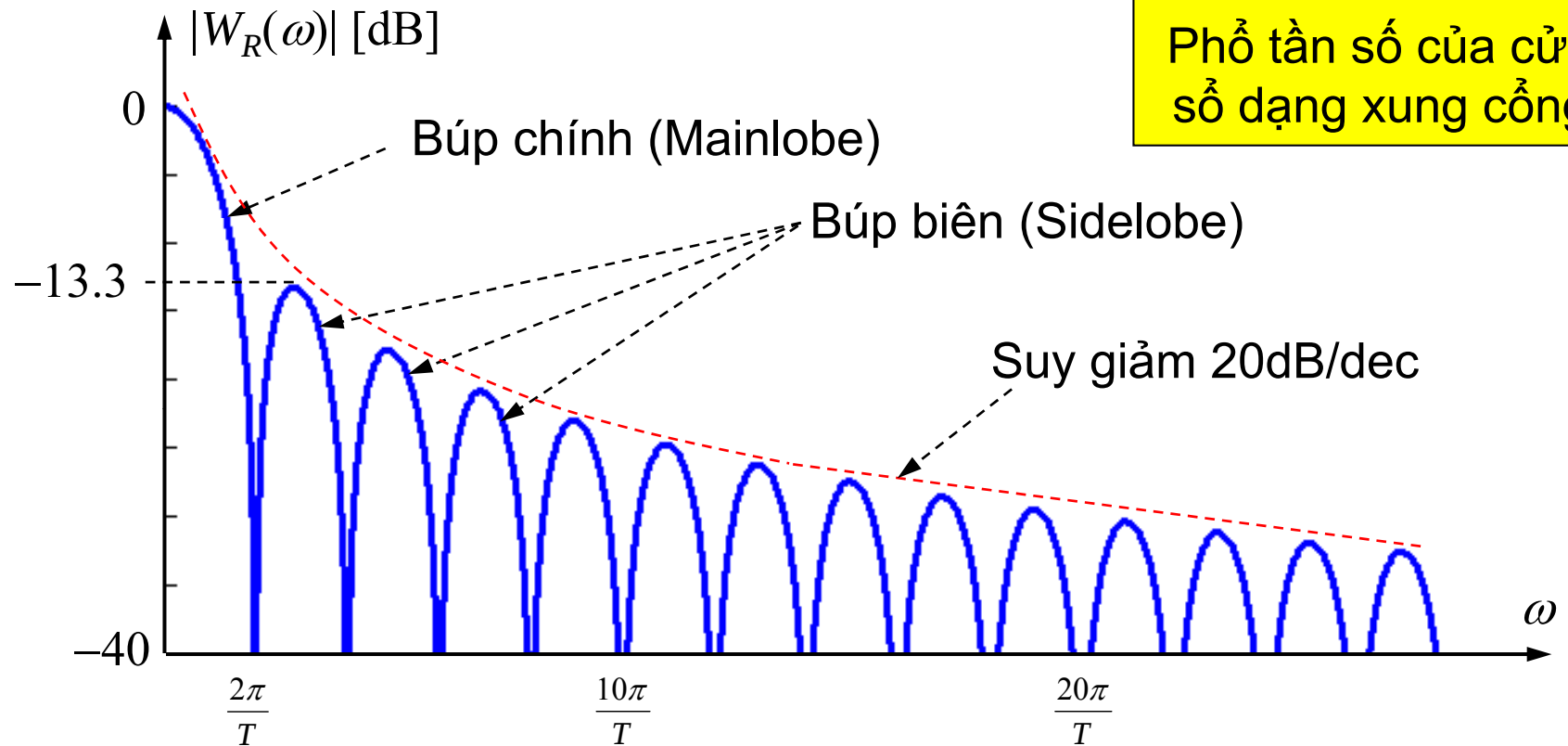
$$H_T(\omega) = H(\omega) * W_T(\omega)$$

Ảnh hưởng khi dùng hàm cửa sổ

❑ Hiện tượng trải phổ (spectral spreading) và rò phổ (leakage)



Ảnh hưởng khi dùng hàm cửa sổ (tt)



- ❑ Cần chọn hàm cửa sổ phù hợp để giảm thiểu hiện tượng trải phổ và rò phổ.
 - ❖ Cửa sổ càng rộng thì trải phổ càng hẹp
 - ❖ Cửa sổ càng trơn thì rò phổ càng thấp

Các hàm cửa sổ thường dùng

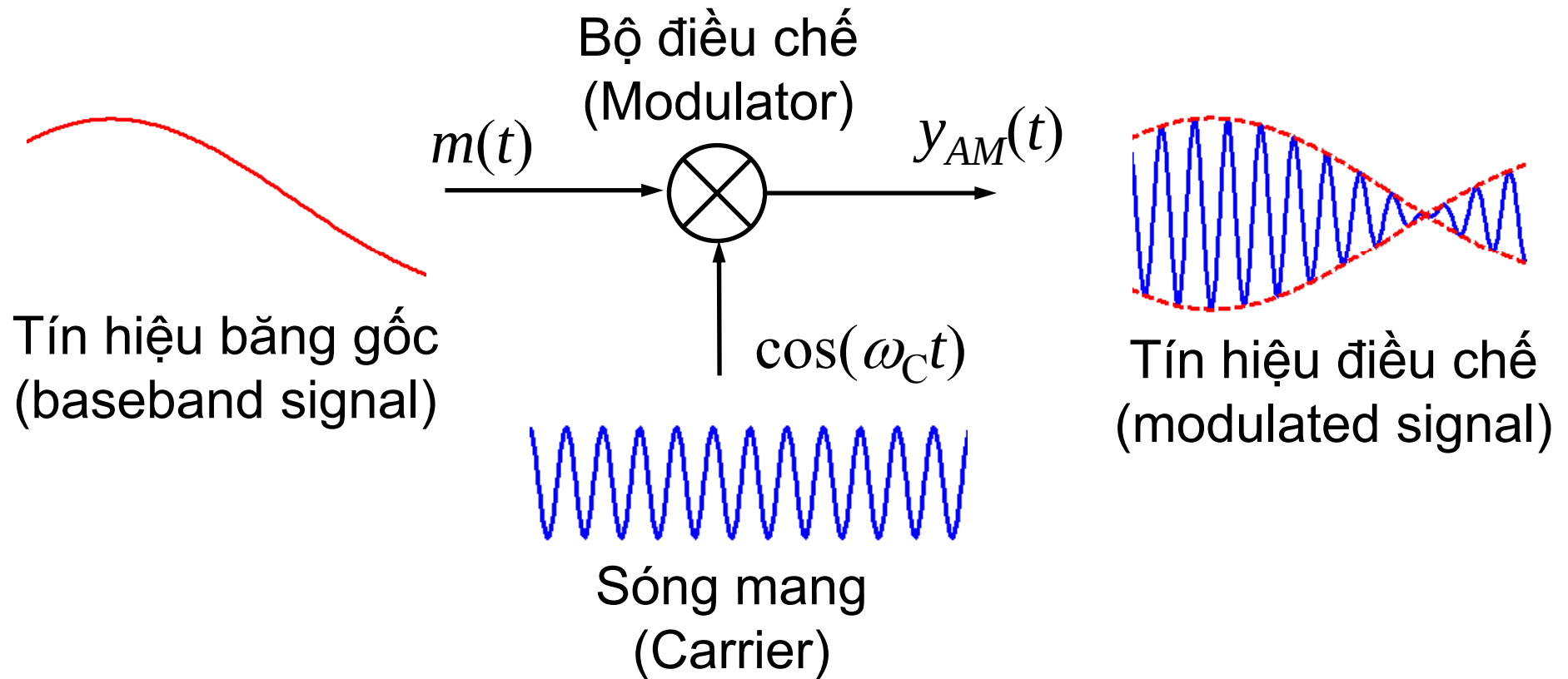
Window $w(t)$	Mainlobe Width	Rolloff Rate dB/oct	Peak Sidelobe Level dB
1. Rectangular: $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$4\pi/T$	-6	-13.3
2. Bartlett: $\Delta\left(\frac{t}{T}\right)$	$8\pi/T$	-12	-26.5
3. Hanning: $0.5[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)]$	$8\pi/T$	-18	-31.5
4. Hamming: $0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$	$8\pi/T$	-6	-42.7
5. Blackman: $0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)$	$12\pi/T$	-18	-58.1
6. Kaiser: $\frac{I_0[\alpha\sqrt{1-4\left(\frac{t}{T}\right)^2}]}{I_0(\alpha)}; 1 \leq \alpha \leq 10$	$11.2\pi/T$	-6	-59.9 ($\alpha = 8.168$)

ỨNG DỤNG ĐIỀU CHẾ TÍN HIỆU

- ❑ Điều chế: dịch phổ tần số của tín hiệu tin tức lên tần số cao
- ❑ Mục đích:
 - ❖ Thỏa mãn nguyên lý bức xạ điện từ khi truyền vô tuyến
 - ❖ Ghép kênh theo tần số
- ❑ Thành phần trong tín hiệu điều chế:
 - ❖ Tín hiệu sóng mang
 - ❖ Tín hiệu băng gốc
- ❑ Các phương pháp điều chế
 - ❖ Điều chế biên độ: (Amplitude Modulation – AM)
 - ❖ Điều chế góc:
 - Điều chế tần số (Frequency Modulation – FM)
 - Điều chế pha (Phase Modulation – PM)

Điều chế hai biên triệt sóng mang (AM DSB-SC)

- Điều chế AM DSB-SC: $y_{AM}(t) = m(t) \cos(\omega_C t)$
(Double Sideband – Suppressed Carrier Modulation)
- Điều kiện: $\omega_C > 2\pi B$ (B: băng thông tín hiệu tin tức)

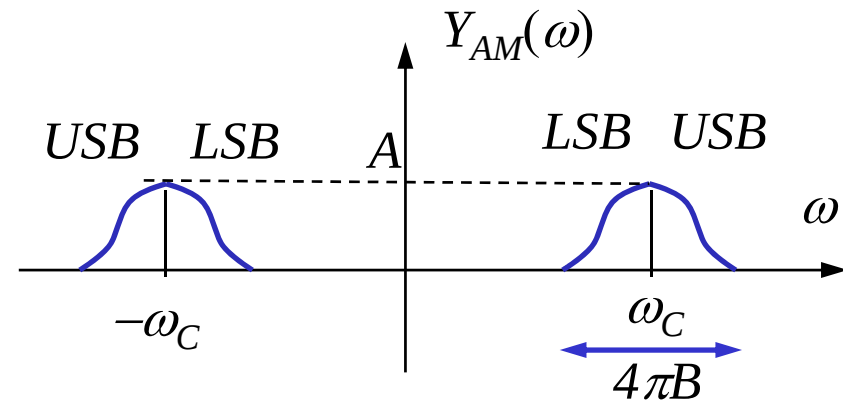
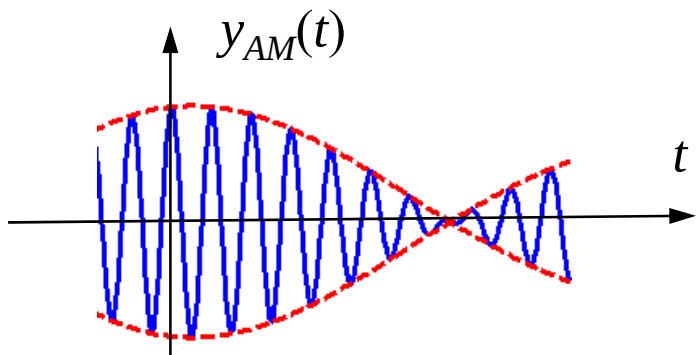
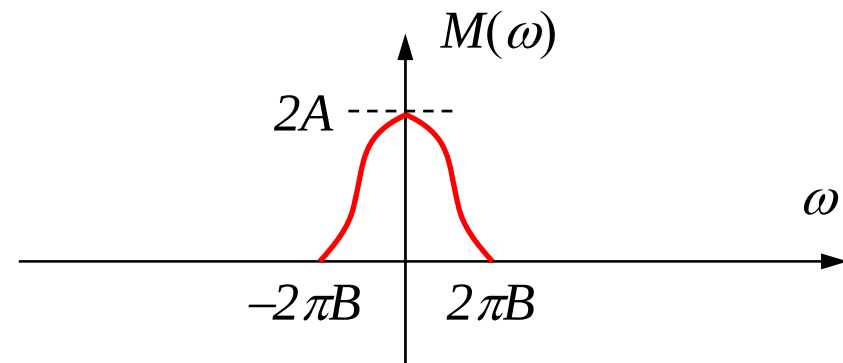
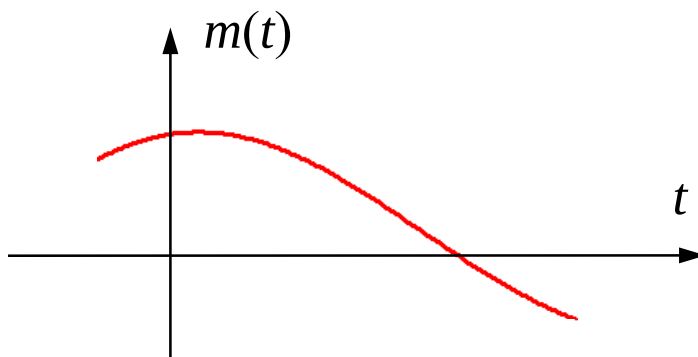


Phổ tín hiệu điều chế AM DSB-SC

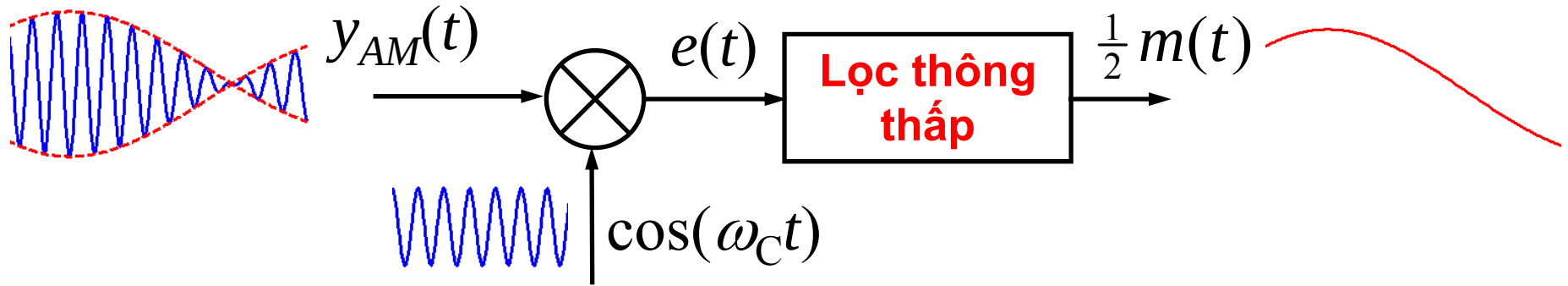
Tín hiệu trong miền thời gian

Tín hiệu trong miền tần số

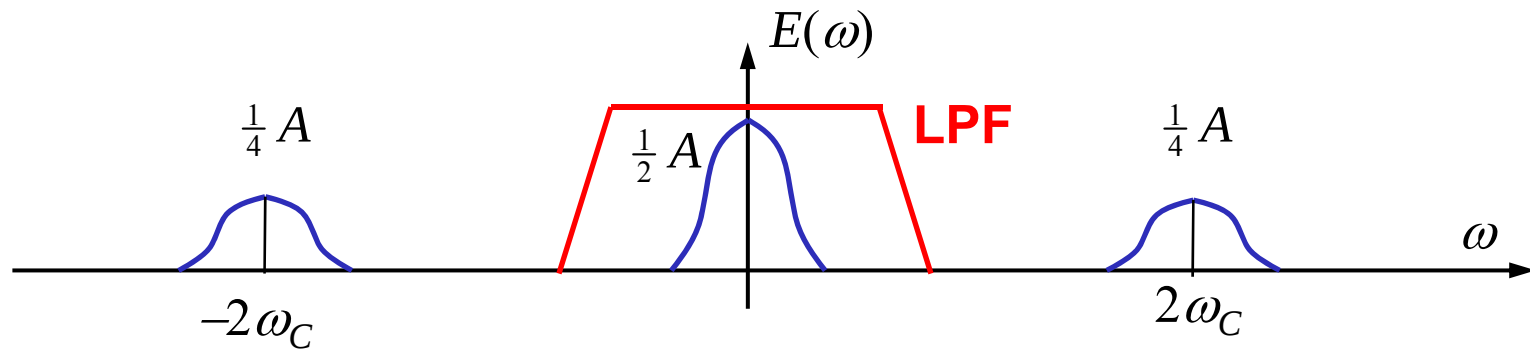
$$y_{AM}(t) = m(t) \cos(\omega_C t) \leftrightarrow Y_{AM}(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega + \omega_C) + M(\omega - \omega_C)]$$



Giải điều chế DSB-SC: tách sóng đồng bộ



Yêu cầu: sóng mang ở bộ điều chế và bộ giải điều chế phải đồng bộ



$$e(t) = y_{AM}(t) \cos(\omega_C t) = [m(t) \cos(\omega_C t)] \cos(\omega_C t)$$

$$= \frac{1}{2} [m(t) - m(t) \cos(2\omega_C t)]$$

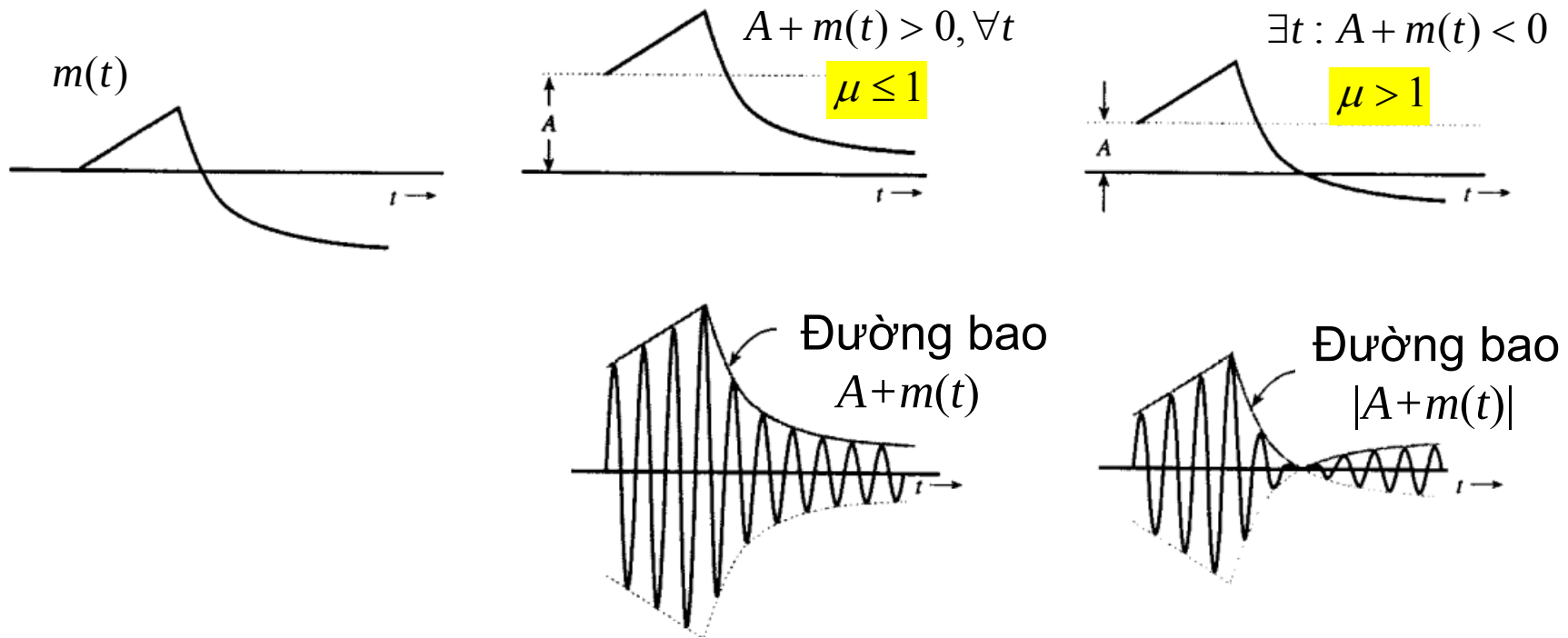
$$E(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega) + \frac{1}{4} [M(\omega + 2\omega_C) + M(\omega - 2\omega_C)]$$

Điều chế AM

- Truyền tín hiệu sóng mang cùng với tín hiệu điều chế:

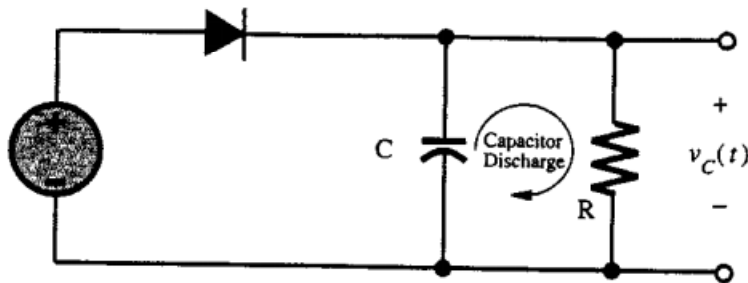
$$y_{AM}(t) = A \cos(\omega_c t) + m(t) \cos(\omega_c t) = [A + m(t)] \cos(\omega_c t)$$

- Hệ số điều chế $\mu = \frac{m_p}{A}$ (m_p là giá trị đỉnh của $m(t)$)

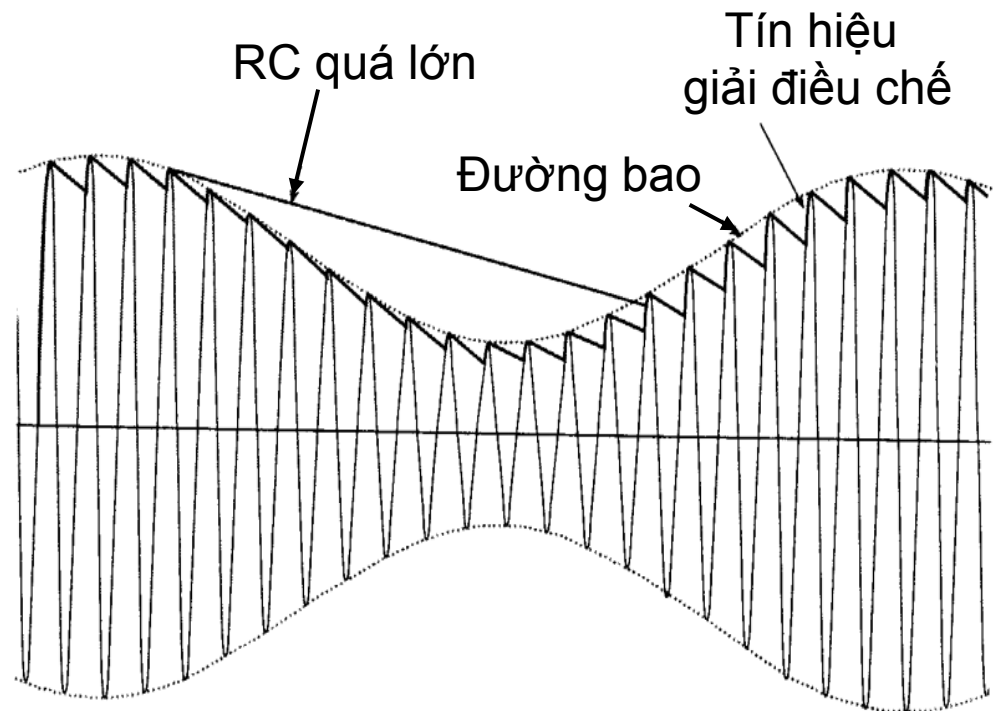


Giải điều chế AM

- ❑ Về nguyên tắc, có thể sử dụng phương pháp giải điều chế đồng bộ, tuy nhiên thực tế khó thực hiện.
- ❑ Nếu $\mu \leq 1$: tách sóng đường bao $\Rightarrow$ đơn giản, dễ thực hiện



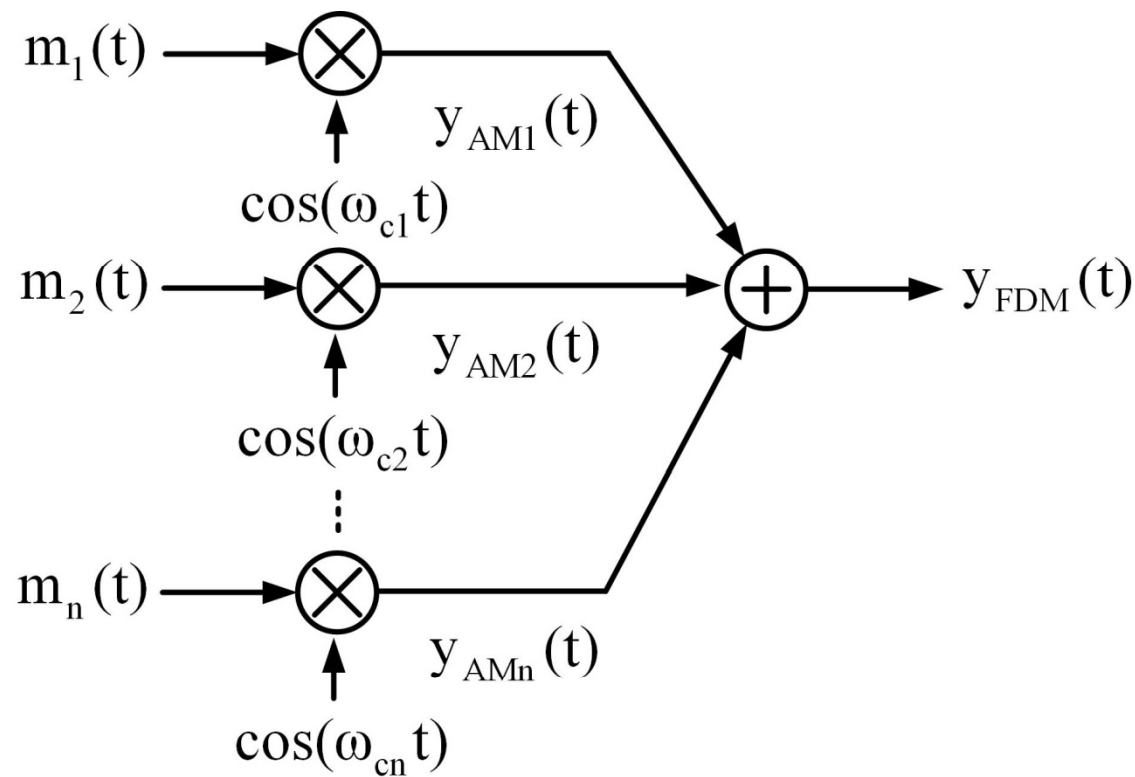
Bộ giải điều chế AM



Tín hiệu giải điều chế AM

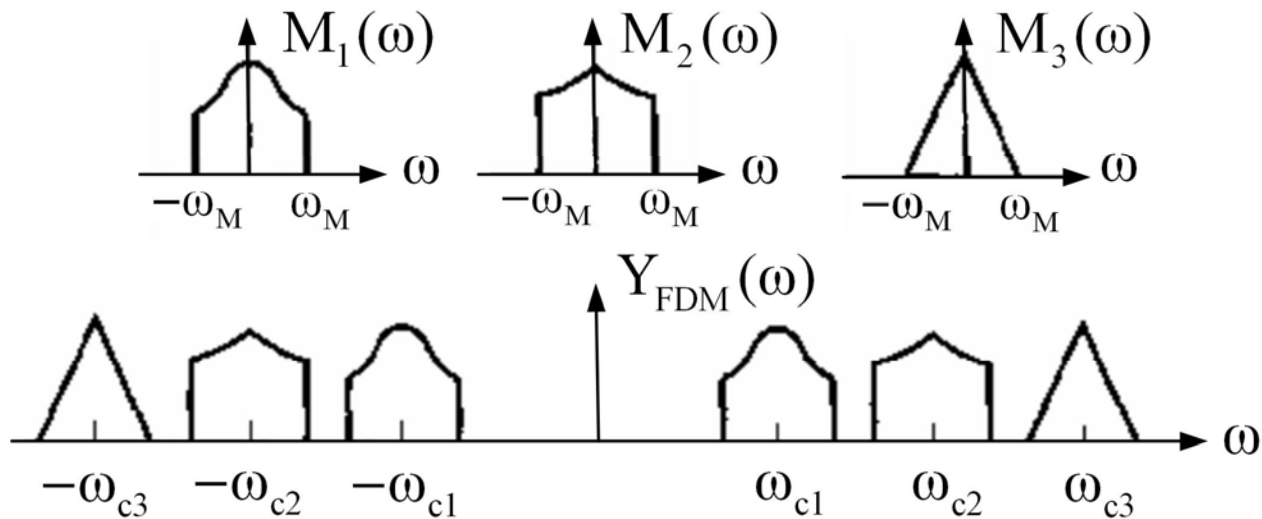
Ghép kênh / phân kênh theo tần số

- ❑ Ghép kênh: điều chế các tín hiệu mang tin (các kênh) với tần số sóng mang khác nhau, các tín hiệu điều chế này có thể ghép chung vào một kênh truyền. Phương pháp này được gọi là ghép kênh theo tần số (Frequency-Division Multiplexing - FDM)

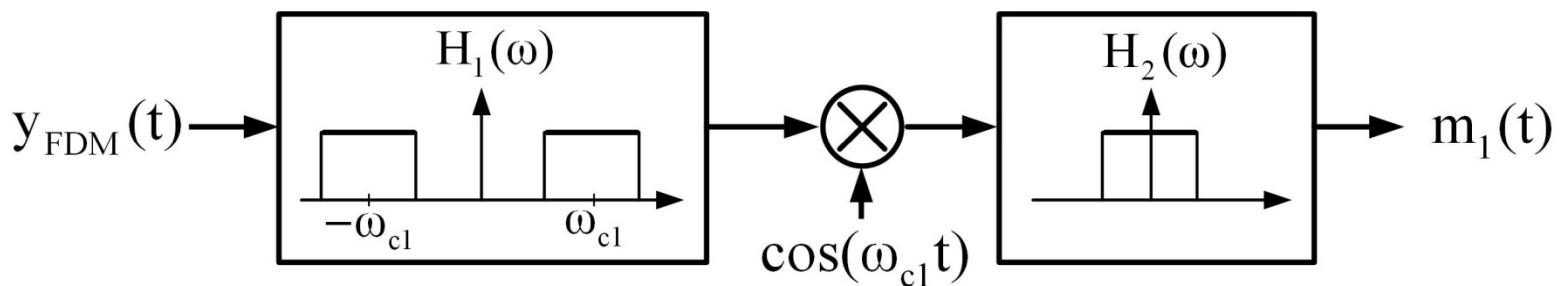


Ghép kênh / phân kênh theo tần số

❑ Phổ của tín hiệu FDM:

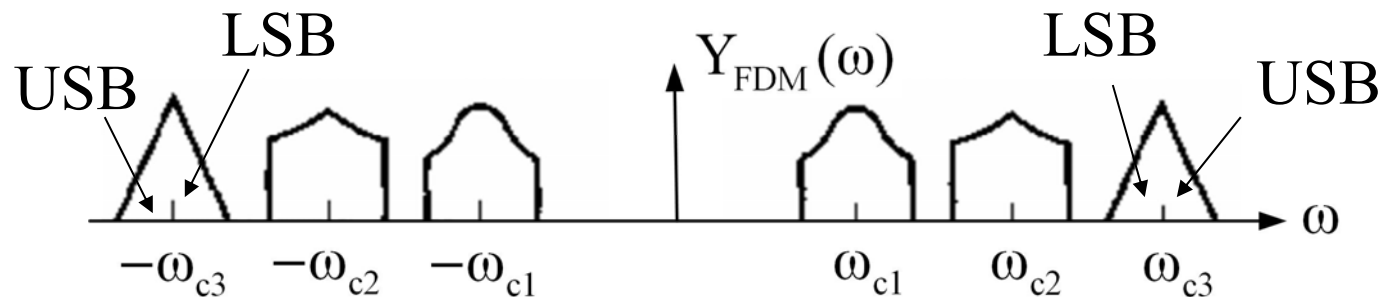


❑ Phân kênh theo tần số:



Thực tế người ta dùng phương pháp đổi tần để phân kênh và giải điều chế tại cùng 1 tần số (thường gọi là trung tần)

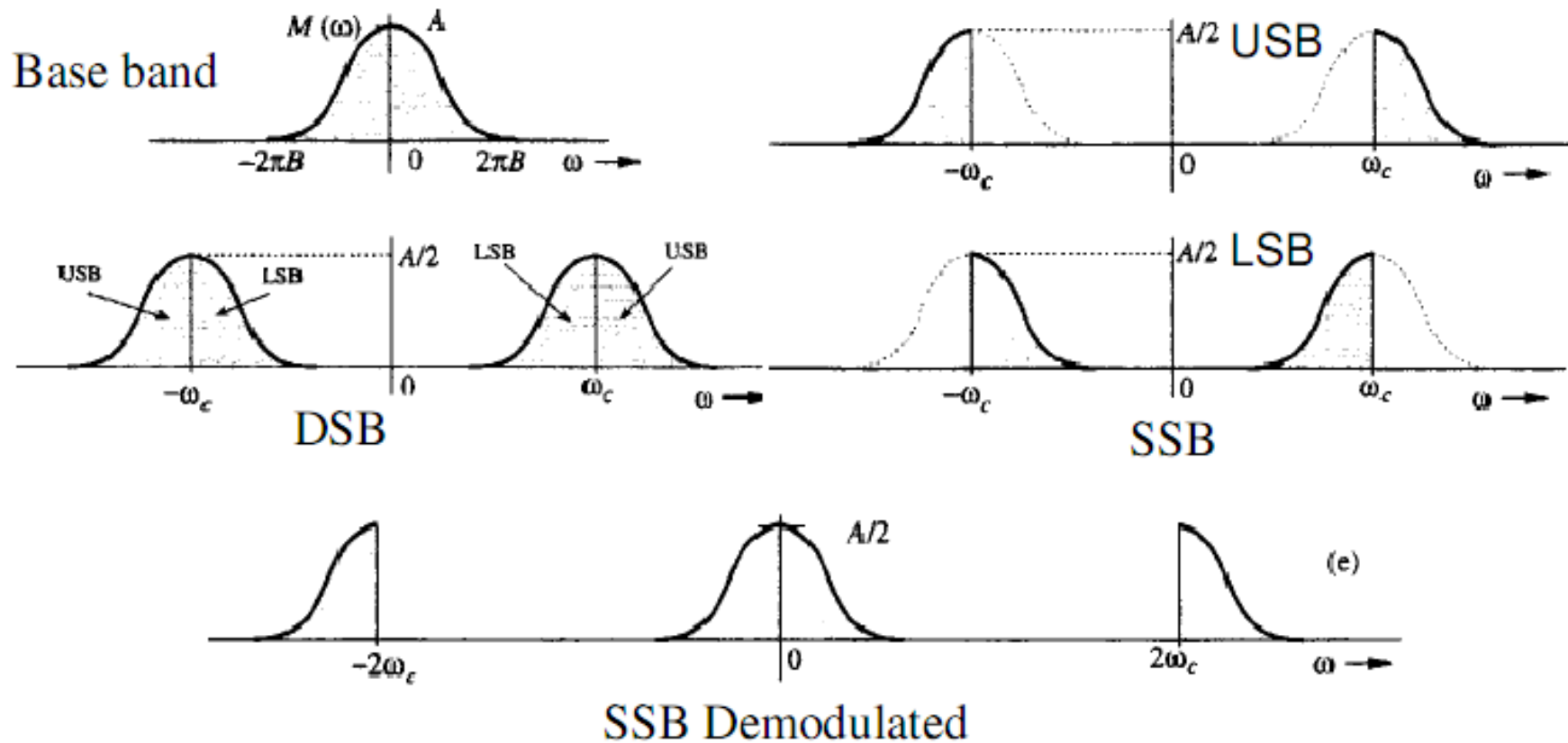
❑ Xét tín hiệu FDM:



- Mỗi kênh đều có 2 dải bên nên chiếm dụng băng thông kênh truyền gấp đôi băng thông của tín hiệu.
- Với cách giải điều chế đã khảo sát ta thấy rằng chỉ cần truyền đi dải cao USB hoặc LSB thì vẫn có thể giải điều chế được
- Nếu truyền đi một dải bên của tín hiệu người ta gọi đó là điều biên AM một dải bên. Mục đích: tiết kiệm băng thông của kênh truyền

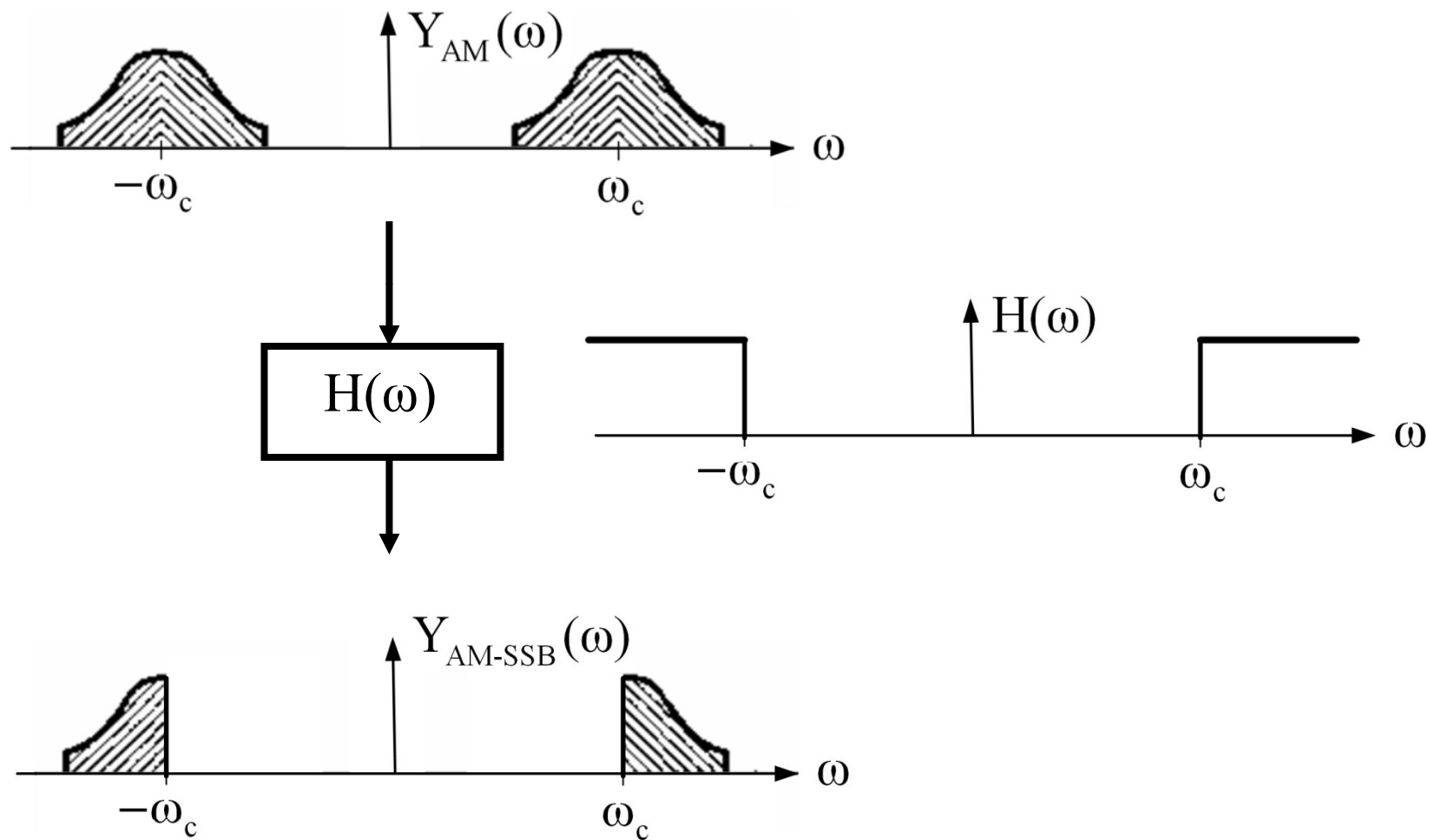
Điều chế và giải điều chế SSB

- ❑ Điều chế đơn biên (AM SSB - Single Sideband Modulation)
 - ❖ Chỉ truyền đi băng tần trên hoặc băng tần dưới (= đơn biên) để giảm băng thông kênh truyền.
 - ❖ Cần giải điều chế đồng bộ



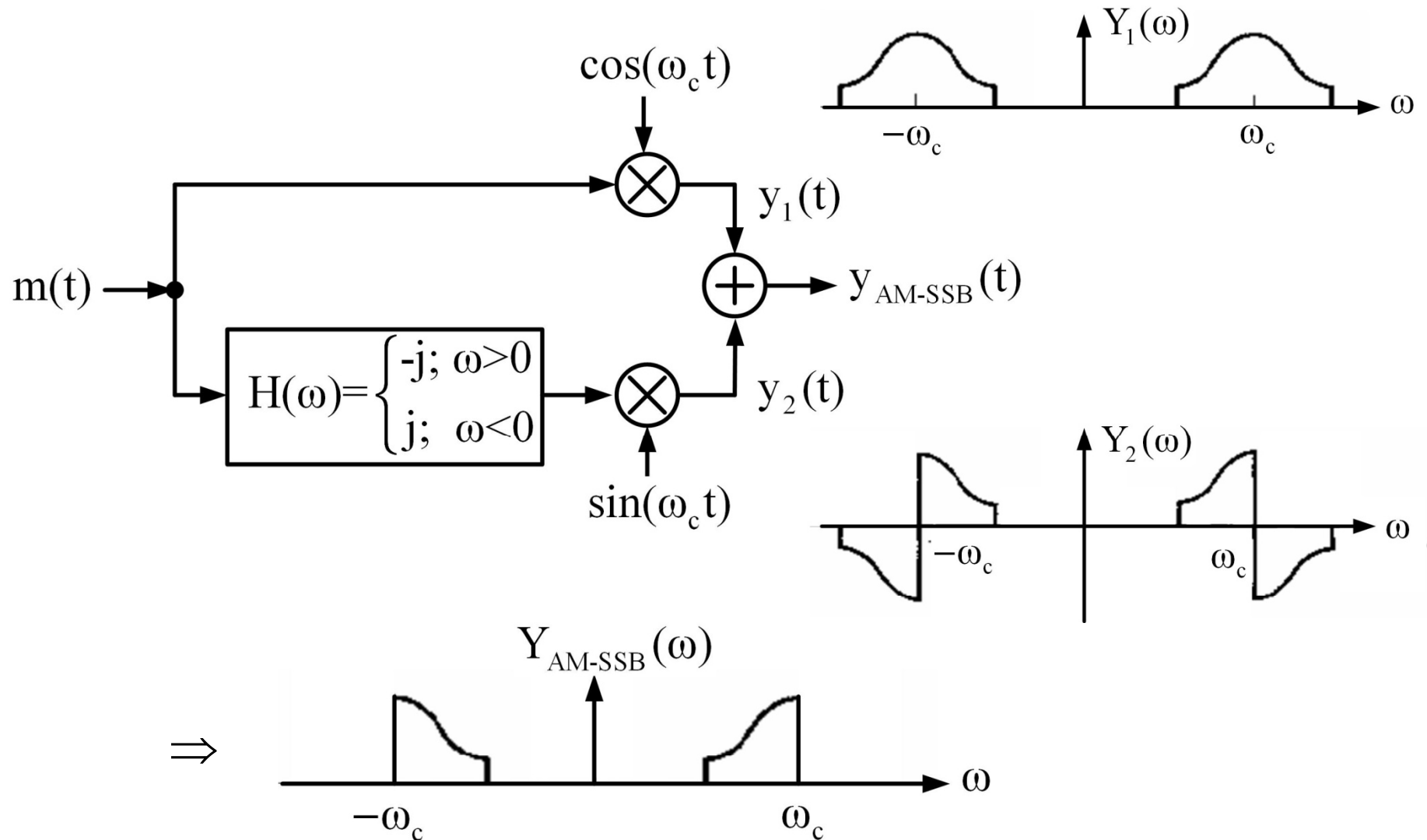
Điều chế và giải điều chế SSB

❑ Phương pháp điều chế 1: điều chế AM-DSB + Filter



Điều chế và giải điều chế SSB

❑ Phương pháp điều chế 2: 90° phase-shift network





Điều chế góc

Đọc thêm: trang 289-300 (B.P. Lathi)

- ☐ Điều chế FM
- ☐ Điều chế PM

Một số công thức tích phân thường gặp

$$\int x \sin(ax) dx = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2}$$

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{x \sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2}$$

$$\int x^2 \sin(ax) dx = -\frac{x^2 \cos(ax)}{a} + \frac{2x \sin(ax)}{a^2} + \frac{2 \cos(ax)}{a^3}$$

$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{x^2 \sin(ax)}{a} + \frac{2x \cos(ax)}{a^2} - \frac{2 \sin(ax)}{a^3}$$

Một số công thức tích phân thường gặp

$$\int x e^{ax} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2x e^{ax}}{a^2} + \frac{2e^{ax}}{a^3}$$

$$\int \cos(ax) e^{bx} dx = \frac{b \cos(ax) e^{bx} + a \sin(ax) e^{bx}}{a^2 + b^2}$$

$$\int \sin(ax) e^{bx} dx = \frac{b \sin(ax) e^{bx} - a \cos(ax) e^{bx}}{a^2 + b^2}$$