

Môn học

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng

Khoa Điện – Điện Tử

Đại học Bách Khoa TP HCM

Email: hthoang@hcmut.edu.vn

Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 5

PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LIÊN TỤC DÙNG BIẾN ĐỔI LAPLACE



Nội dung chương 5

- ☐ Biến đổi Laplace và các tính chất
- ☐ Hàm truyền và đáp ứng của hệ thống LTIC
- ☐ Sơ đồ khối và thực hiện hệ thống
- ☐ Ứng dụng trong hồi tiếp và điều khiển

BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Định nghĩa biến đổi Laplace

- Cho $f(t)$ là tín hiệu xác định với mọi t , biến đổi Laplace của $f(t)$ là:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Trong đó:

- ❖ $s = \sigma + j\omega$: biến phức (biến Laplace)
 - ❖ $\mathcal{L}$: toán tử biến đổi Laplace.
 - ❖ $F(s)$: biến đổi Laplace của hàm $f(t)$
- Miền hội tụ (Region of Convergence – ROC) miền s sao cho tích phân ở biểu thức định nghĩa trên hội tụ.

□ Biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s)$ là:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s).e^{st} ds \quad (c \in \text{ROC})$$

□ Ký hiệu: $F(s) = L\{f(t)\}$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

hoặc: $f(t) \longleftrightarrow F(s)$

Ví dụ tìm biến đổi Laplace và miền hội tụ

□ Tìm biến đổi Laplace và miền hội tụ của các tín hiệu sau:

$$a) f(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \quad b) f(t) = e^{-at}u(-t), a > 0 \quad c) f(t) = u(t)$$

□ **Giải**

$$(a) F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$ROC : \operatorname{Re}\{s + a\} > 0$$

$$(b) F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 e^{-at}e^{-st}dt = -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{s+a}$$

$$ROC : \operatorname{Re}(s + a) < 0$$

□ Nếu $f(t)$ là tín hiệu nhân quả, biến đổi Laplace của $f(t)$ là:

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\text{Biến đổi Laplace một bên})$$

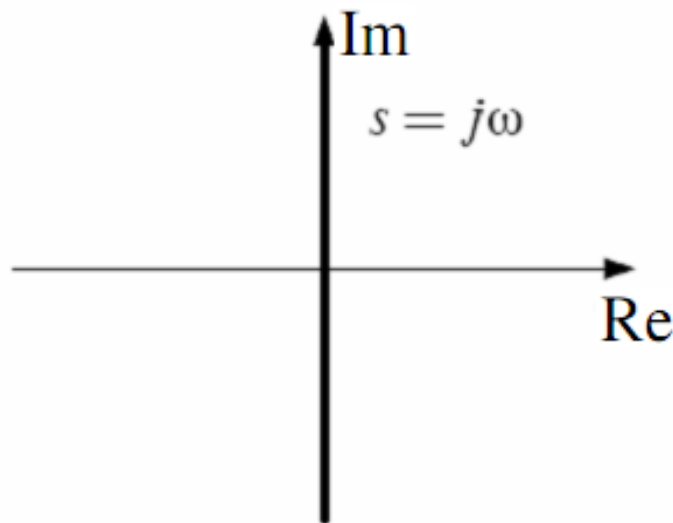
□ Chú ý: giới hạn 0^- bao gồm xung đơn vị tại gốc 0.

Liên hệ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Laplace

□ Biến đổi Fourier là trường hợp đặc biệt của biến đổi Laplace

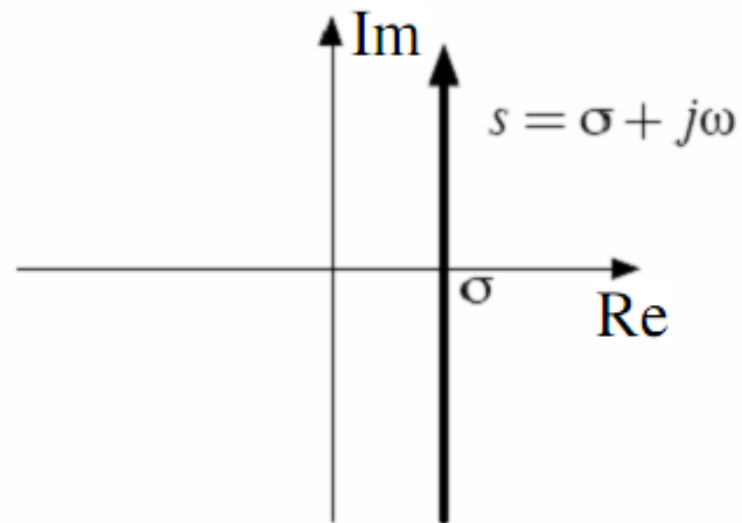
$$F(\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}$$

Trong đó trục ảo $j\omega$ là miền hội tụ.



Fourier Transform

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



Laplace Transform

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Biến đổi Laplace của các tín hiệu thông dụng

□ Hàm dirac $\delta(t)$

$$f(t) = \delta(t) \Rightarrow F(s) = 1; \text{ ROC: s-plane}$$

□ Hàm mũ $e^{-at}u(t)$

$$f(t) = e^{-at}u(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+a}; \text{ ROC: } \text{Re}\{s\} > -a$$

□ Hàm mũ $e^{-at}u(-t)$

$$f(t) = -e^{-at}u(-t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+a}; \text{ ROC: } \text{Re}\{s\} < -a$$

□ Hàm nấc đơn vị $u(t)$

$$f(t) = u(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}; \text{ ROC: } \text{Re}\{s\} > 0$$

□ Tính tuyến tính:

$$\text{Nếu } \begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(s) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(s) \end{cases}$$

$$\text{thì: } a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

□ Ví dụ:

$$2e^{-3t}u(t) - 4e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{2}{s+3} - \frac{4}{s+1} \quad (ROC : \text{Re}\{s\} > -1)$$

□ Tính dời trong miền thời gian:

$$\text{Nếu } f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$\text{thì: } f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-t_0 s} F(s)$$

□ Ví dụ:

$$\text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) = u(t-3) - u(t-5) \leftrightarrow \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$

□ Tính dời trong miền tần số:

Nếu $f(t) \leftrightarrow F(s)$

thì: $f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s - s_0)$

□ Ví dụ: $\cos(2t).u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 2^2}$

$$\Rightarrow \cos(2t)e^{-5t}.u(t) \leftrightarrow \frac{(s + 5)}{(s + 5)^2 + 2^2}$$

□ Đạo hàm trong miền thời gian:

Nếu $f(t) \leftrightarrow F(s)$

thì $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) \dots - f^{(n-1)}(0^-)$$

□ Ví dụ: $\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n$

$$f(t) = \text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) \Rightarrow \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \leftrightarrow se^{-3s} - se^{-5s}$$

□ Đạo hàm trong miền tần số:

Nếu $f(t) \leftrightarrow F(s)$

thì $tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$

□ Ví dụ: $e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+1)}$

$$te^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$t^2e^{-t}u(t) \leftrightarrow ?$$

□ Tích phân trong miền thời gian:

Nếu $f(t) \leftrightarrow F(s)$

thì $\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \frac{F(s)}{s}$$

□ Ví dụ: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$t^2 u(t) \leftrightarrow ?$$

$$t^n u(t) \leftrightarrow ?$$

Tính chất của biến đổi Laplace

☐ Thay đổi thang độ (co/giãn)

Nếu $f(t) \leftrightarrow F(s)$

thì $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$

☐ Ví dụ: $e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s}{a} + 1} = \frac{1}{s+a} \quad (a > 0)$$

❑ Tích chập trong miền thời gian:

$$\text{Nếu } \begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(s) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(s) \end{cases}$$

$$\text{thì } f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

❑ Tích chập trong miền tần số:

$$\text{Nếu } \begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(s) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(s) \end{cases}$$

$$\text{thì } f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

Tìm biến đổi Laplace thuận

- ❑ Sử dụng biến đổi Laplace của các hàm cơ bản
- ❑ Sử dụng các tính chất của biến đổi Laplace để tính biến đổi Laplace của hàm phức tạp dựa vào biến đổi Laplace của các hàm cơ bản.

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
$e^{-at}u(t)$	$1/(s+a)$
$\cos(bt)u(t)$	$s/(s^2+b^2)$
$\sin(bt)u(t)$	$b/(s^2+b^2)$

Bài tập tìm biến đổi Laplace thuận

$$a) f(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$b) f(t) = e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)$$

$$c) f(t) = e^{-(t-\tau)} u(t)$$

$$d) f(t) = e^{-t} u(t-\tau)$$

$$e) f(t) = te^{-t} u(t-\tau)$$

$$f) f(t) = \sin[\omega_0(t-\tau)] u(t-\tau)$$

Tìm biến đổi Laplace ngược

❑ Sử dụng công thức biến đổi Laplace ngược:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s).e^{st} ds \quad (c \in \text{ROC})$$

⇒ Phức tạp, ít khi sử dụng

❑ Phân tích $F(s)$ thành tổng của các thành phần đơn giản, sau đó sử dụng các tính chất của biến đổi Laplace và tra bảng biến đổi Laplace các hàm cơ bản.

⇒ Đơn giản hơn, đa số trường hợp sử dụng cách này

Ví dụ tìm biến đổi Laplace ngược

□ Tìm $f(t)$, biết $F(s) = \frac{s^2 - 2}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

□ Giải:

□ Phân tích $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2 - 2}{s(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

□ Tra bảng biến đổi Laplace, suy ra:

$$f(t) = L^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right\} = (-1 + e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm hữu tỉ

- Trong nhiều trường hợp $F(s)$ có dạng hàm hữu tỉ:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- nếu $n \geq m$: $F(s)$ là hàm hợp thức (proper)
 - nếu $n > m$: $F(s)$ là hàm hợp thức chặt (strictly proper)
 - nếu $n < m$: $F(s)$ là hàm không hợp thức (improper)
- Khái niệm zero và cực:
- Zero là giá trị s làm cho $F(s) = 0$
 $\Rightarrow$ Zero là nghiệm của phương trình $P(s) = 0$
 - Cực là giá trị s làm cho $F(s) = \infty$
 $\Rightarrow$ Cực là nghiệm của phương trình $Q(s) = 0$

Khai triển hàm hữu tỉ thành các thành phần cơ bản

- Xét hàm $F(s)$ hợp thức: $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (n > m)$

Giả sử $F(s)$ tối giản và các cực của $F(s)$ là $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

- Nếu các cực của $F(s)$ khác nhau:

$$F(s) = \frac{k_1}{s + \lambda_1} + \frac{k_2}{s + \lambda_2} + \frac{k_3}{s + \lambda_3} + \dots$$

- Nếu $F(s)$ có cực lặp lại, giả sử λ_2 lặp lại r lần:

$$F(s) = \frac{k_1}{s + \lambda_1} + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{k_{2j}}{(s + \lambda_2)^{r-j}} + \frac{k_3}{s + \lambda_3} + \dots$$

- Nhân hai vế với $Q(s)$, sau đó cân bằng hai vế thu được hệ phương trình. Giải hệ phương trình, tìm được các hệ số

Ví dụ tìm biến đổi Laplace ngược dùng pp khai triển

❑ Ví dụ: Tìm biến đổi Laplace ngược: $F(s) = \frac{s^2 - 2}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

❑ Giải: Phân tích:

$$\frac{s^2 - 2}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$\Rightarrow s^2 - 2 = k_1(s+1)(s+2) + k_2s(s+2) + k_2s(s+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1 \\ 3k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow f(t) = (-1 + e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

Xác định các hệ số dùng phương pháp Heaviside

$$F(s) = \frac{k_1}{s + \lambda_1} + \frac{k_2}{s + \lambda_2} + \dots + \sum_{j=0}^{r-1} \frac{k_{ij}}{(s + \lambda_2)^{r-j}} + \dots$$

□ Công thức Heaviside:

- Các cực không lặp:

$$k_i = (s - \lambda_i) F(s) \Big|_{s=\lambda_i}$$

- Các cực lặp: giả sử cực bội r

$$k_{i0} = (s - \lambda_i)^r F(s) \Big|_{s=\lambda_i}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{ds^j} \left[(s - \lambda_i)^r F(s) \right] \Big|_{s=\lambda_i}, \quad (0 < j < r)$$

Ví dụ xác định các hệ số dùng phương pháp Heaviside

□ Ví dụ: $F(s) = \frac{8s + 10}{(s + 1)(s + 2)^3}$

□ Giải: $F(s) = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_{20}}{(s + 2)^3} + \frac{k_{21}}{(s + 2)^2} + \frac{k_{22}}{s + 2}$

$$k_1 = \left. \frac{8s + 10}{(s + 2)^3} \right|_{s=-1} = 2 \qquad k_{20} = \left. \frac{8s + 10}{(s + 1)} \right|_{s=-1} = 6$$

$$k_{21} = \left. \frac{d}{dt} \left\{ \frac{8s + 10}{(s + 1)} \right\} \right|_{s=-2} = \left. \frac{-2}{(s + 1)^2} \right|_{s=-2} = -2$$

$$k_{22} = \left. \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{8s + 10}{(s + 1)} \right\} \right|_{s=-2} = \left. \frac{1}{2} \frac{4}{(s + 1)^3} \right|_{s=-2} = -2$$

□ Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau:

$$(a) \quad F(s) = \frac{7s - 6}{s^2 - s - 6}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2}$$

$$(c) \quad F(s) = \frac{6(s + 34)}{s(s^2 + 10s + 34)}$$

HÀM TRUYỀN VÀ ĐÁP ỨNG CỦA HỆ THỐNG LTIC



Tính đáp ứng của hệ LTIC dùng biến đổi Laplace

- Biến đổi Laplace cho phép tính đồng thời:
 - Đáp ứng khi tín hiệu vào bằng 0 (zero-input response)
 - Đáp ứng khi điều kiện đầu bằng 0 (zero-state response)

Tính đáp ứng của hệ LTIC dùng biến đổi Laplace

□ Ví dụ: Tính đáp ứng của hệ thống LTIC dưới đây:

$$(D^2 + 5D + 6)y(t) = (D + 1)f(t)$$

$$y(0^-) = 2; y'(0^-) = 1; f(t) = e^{-4t}u(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+4}$$

□ Lấy biến đổi Laplace 2 vế PTVP:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5[sY(s) - y(0^-)] + 6Y(s) = sF(s) - f(0^-) + F(s)$$

$$\Rightarrow (s^2 + 5s + 6)Y(s) - 2s - 11 = (s + 1)F(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{2s+11}{(s^2+5s+6)}}_{\text{Đáp ứng ngõ vào bằng 0}} + \underbrace{\frac{(s+1)}{(s^2+5s+6)}F(s)}_{\text{Đáp ứng trạng thái đầu bằng 0}} = \frac{13/2}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{3/2}{s+4}$$

Đáp ứng ngõ vào bằng 0 **Đáp ứng trạng thái đầu bằng 0**

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t} \right) u(t)$$

□ Tính đáp ứng của hệ thống LTIC dưới đây:

$$(a) (D^2 + 4D + 4)y(t) = (D + 4)f(t)$$

$$y(0^-) = -1, y'(0^-) = 2, f(t) = 2u(t)$$

$$(b) (D^2 + 3D)y(t) = (D + 1)f(t)$$

$$y(0^-) = 1, y'(0^-) = -1, f(t) = u(t)$$

Hàm truyền của hệ LTIC

- Xét hệ LTIC mô tả bởi phương trình vi phân

$$\underbrace{(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n)}_{Q(D)} y(t) = \underbrace{(b_m D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_m)}_{P(D)} f(t)$$

- Giả sử điều kiện đầu bằng 0, lấy biến đổi Laplace 2 vế PTVP:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) Y(s) = (b_m s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) F(s)$$

- Hàm truyền của hệ thống:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

⇒ Hàm truyền của hệ thống là tỉ số giữa biến đổi Laplace của tín hiệu ra và biến đổi Laplace của tín hiệu vào khi ĐK đầu bằng 0.

Bài tập tìm hàm truyền của hệ LTIC

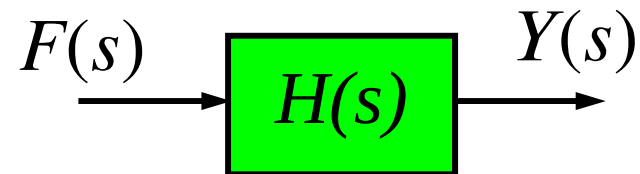
- Tìm hàm truyền của các hệ thống mô tả bởi các phương trình vi phân dưới đây:

$$a) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \frac{df(t)}{dt} + 3f(t)$$

$$b) \quad \frac{d^3 y(t)}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 4f(t)$$

Mô tả hệ thống dùng hàm truyền

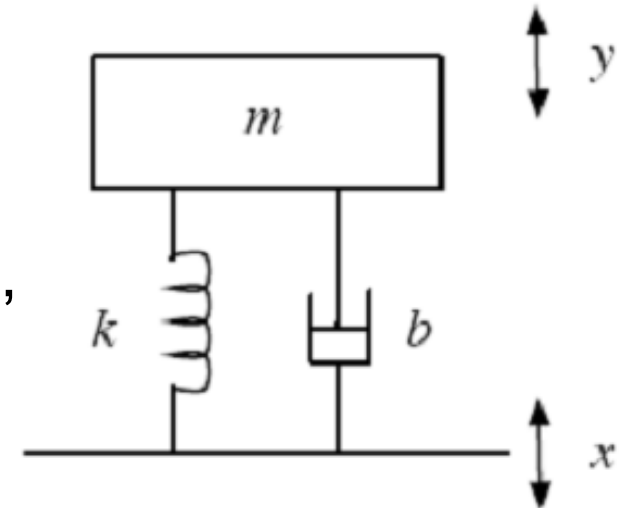
- Sơ đồ khối của hệ thống:



- Sử dụng hàm truyền có thể:
 - Tính đáp ứng khi điều kiện đầu bằng 0
 - Khảo sát tính ổn định của hệ thống
 - Thiết kế hệ thống
 - Thực hiện hệ thống

Hàm truyền của hệ thống cơ

- ❑ Hệ thống giảm sóc (ô tô, xe máy):
 - Tín hiệu vào: độ cao mặt đường x
 - Tín hiệu ra: dịch chuyển thân xe y
 - m khối lượng thân xe, k độ cứng lò xo, b : hệ số ma sát



- ❑ Phương trình vi phân mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra:

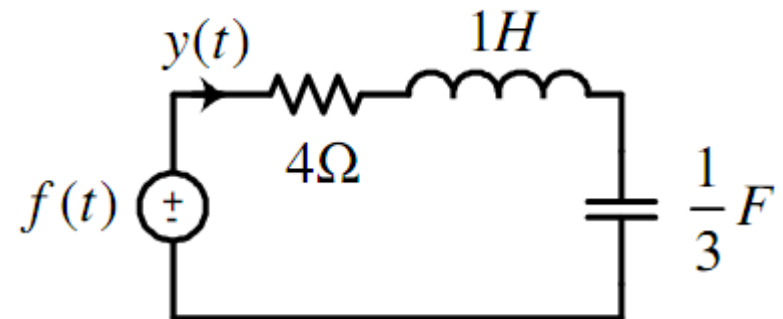
$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$$

$$\Rightarrow (mD^2 + bD + k)y(t) = (bD + k)x(t)$$

- ❑ Hàm truyền: $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$

Hàm truyền của mạch điện

- Xét mạch điện với tín hiệu vào là điện áp nguồn, tín hiệu ra là dòng điện chạy trong mạch.



- PTVP mô tả quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra:

$$Ry(t) + L \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t y(\tau) d\tau = f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

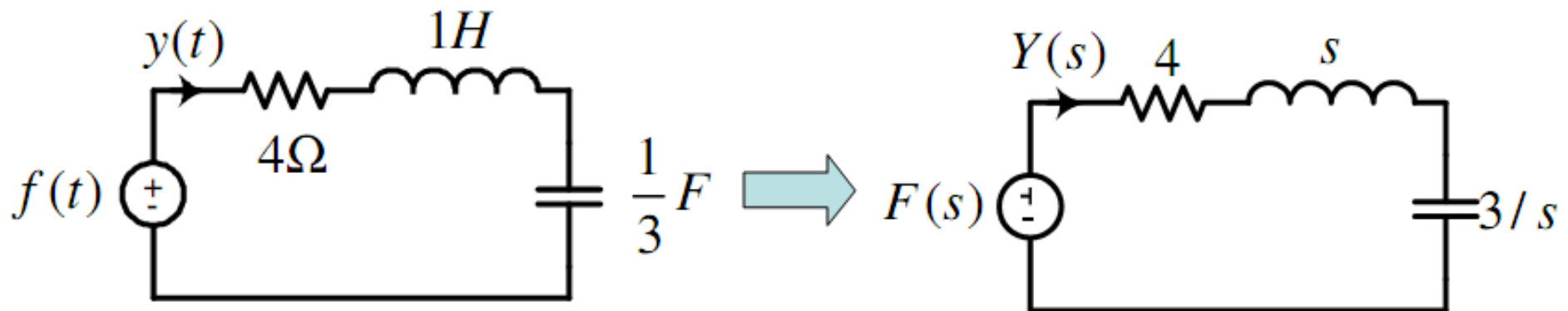
$$\Rightarrow (D^2 + 4D + 3)y(t) = Df(t)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

Giải mạch điện dùng biến đổi Laplace

- ❑ Bằng cách đưa biến đổi Laplace vào mạch điện, có thể khảo sát mạch điện có phần tử L, C như mạch thuần trở.
- ❑ Các phần tử cơ bản trong mạch điện:
 - Điện trở R: $v_R(t) = Ri_R(t) \Rightarrow V_R(s) = RI_R(s)$
 - Điện dung C: $v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \Rightarrow V_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s)$
 - Điện cảm L: $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow V_L(s) = LsI_L(s)$
- ❑ Định luật Kirchhoff:
 - KLC: $\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n I_j(s) = 0$
 - KLV: $\sum_{j=1}^n v_j(t) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n V_j(s) = 0$

Ví dụ giải mạch điện dùng biến đổi Laplace



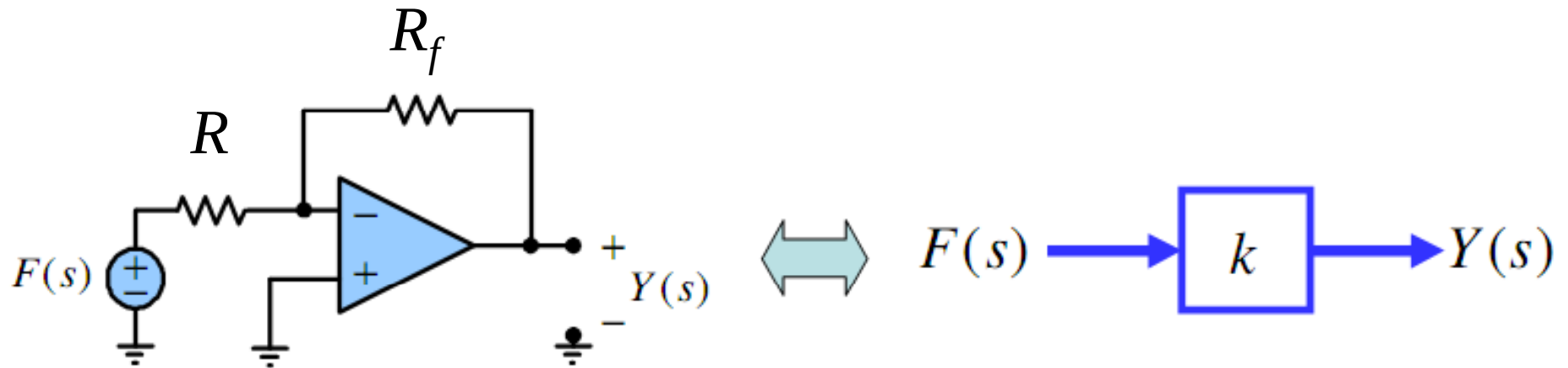
□ Dòng điện trong mạch

$$Y(s) = \frac{F(s)}{4 + s + 3/s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{sF(s)}{s^2 + 4s + 3} \quad \Rightarrow y(t)$$

Hàm truyền các mạch điện thông dụng

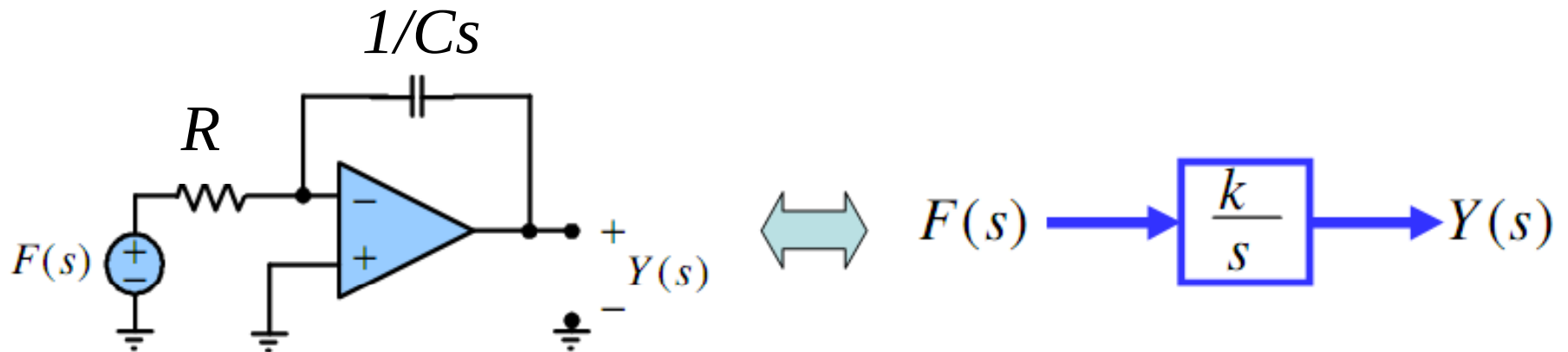
□ Mạch khuếch đại:



$$H(s) = k = -\frac{R_f}{R}$$

Hàm truyền các mạch điện thông dụng (tt)

□ Mạch tích phân:

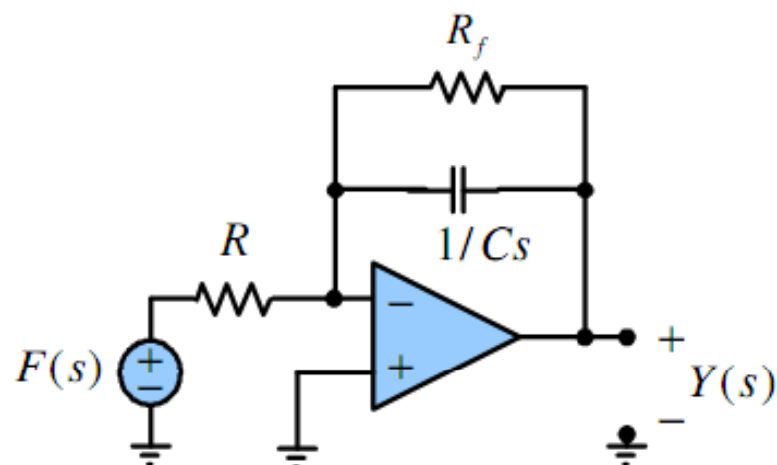


$$H(s) = -\frac{1/Cs}{R} = -\frac{1}{RCs} = \frac{k}{s}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{k}{s} \quad (\text{với } k = -\frac{1}{RC})$$

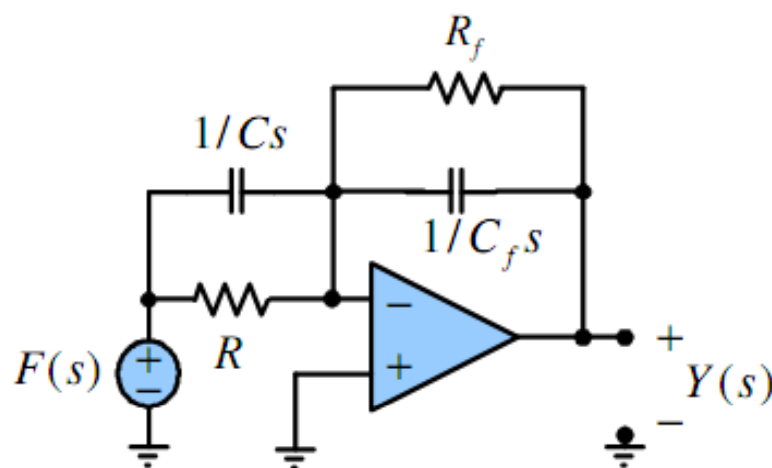
Hàm truyền các mạch điện thông dụng (tt)

□ Hệ thống bậc 1:



$$F(s) \rightarrow \boxed{\frac{ka}{s+a}} \rightarrow Y(s)$$

$$k = -\frac{R_f}{R}; a = \frac{1}{R_f C}$$

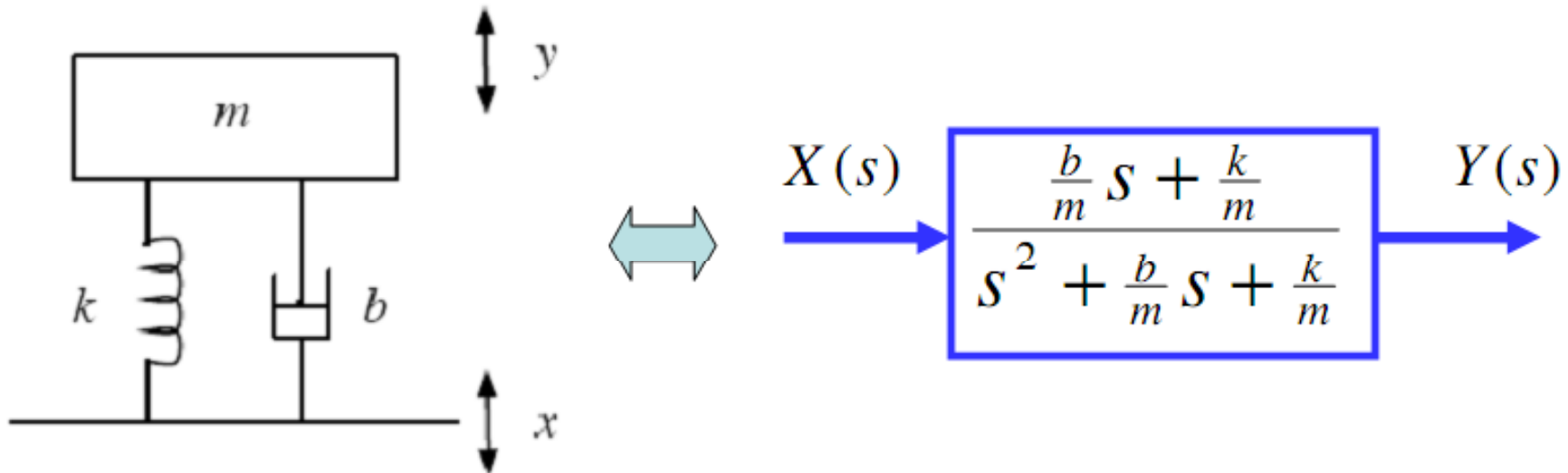


$$F(s) \rightarrow \boxed{\frac{k(s+a)}{(s+b)}} \rightarrow Y(s)$$

$$k = -\frac{C}{C_f}; a = \frac{1}{R_f C_f}; b = \frac{1}{RC}$$

Đáp ứng của hệ thống

- Ví dụ: Tính đáp ứng của hệ cơ học dưới đây khi điều kiện đầu bằng 0:



- Giả sử $m=1$, $k=2$, $b=3$: $\Rightarrow H(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 2}$

- Giả sử tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị:

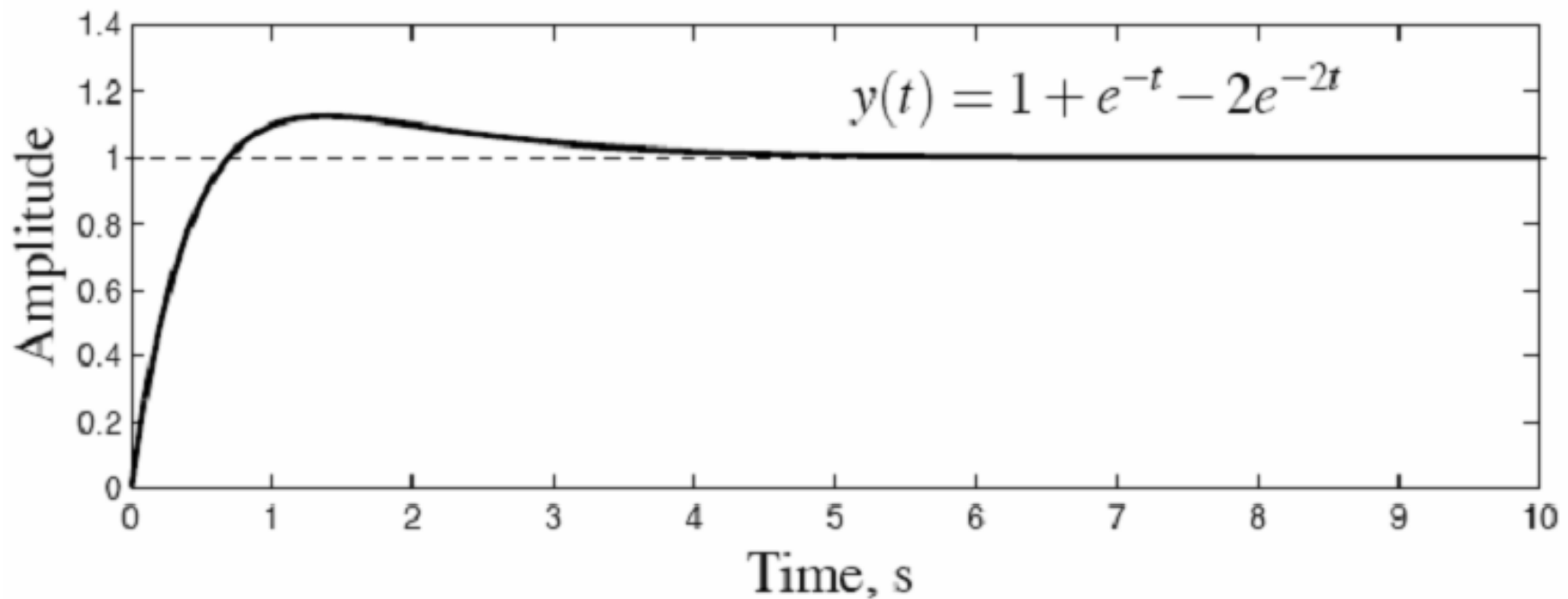
$$x(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

Đáp ứng của hệ thống

□ Tín hiệu ra:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s} \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \Rightarrow y(t) = (1 - e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$



Giá trị ban đầu và giá trị xác lập của đáp ứng

□ Giá trị ban đầu: $y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$

□ Giá trị xác lập: $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$

□ Ví dụ: $Y(s) = \frac{3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)}$

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = 1$$

Đánh giá tính ổn định của hệ thống

- ❑ Tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào vị trí cực của hàm truyền $H(s)$:
 - ❖ Hệ thống ổn định nếu tất cả các cực nằm bên trái mặt phẳng phức
 - ❖ HT ở biên giới ổn định nếu có cực đơn nằm trên trục ảo và các cực còn lại nằm bên trái mặt phẳng phức.
 - ❖ Hệ thống không ổn định nếu có ít nhất một cực ở bên phải mặt phẳng phức hoặc có nghiệm lặp nằm trên trục ảo.

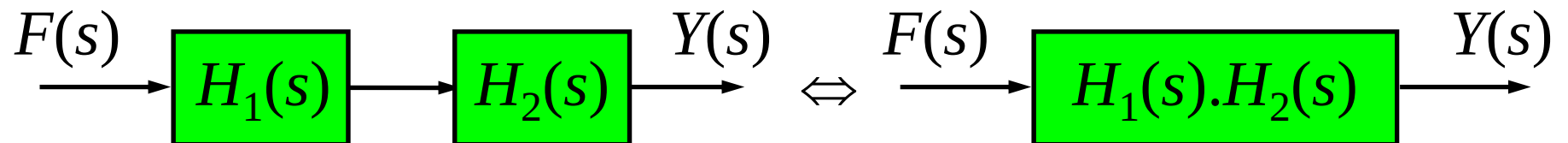
❑ Ví dụ: $H(s) = \frac{3s + 2}{(s^2 + 3s + 2)}$ $\Rightarrow$ Ổn định

$$H(s) = \frac{6}{(s - 3)(s + 2)} \Rightarrow \text{Không ổn định}$$

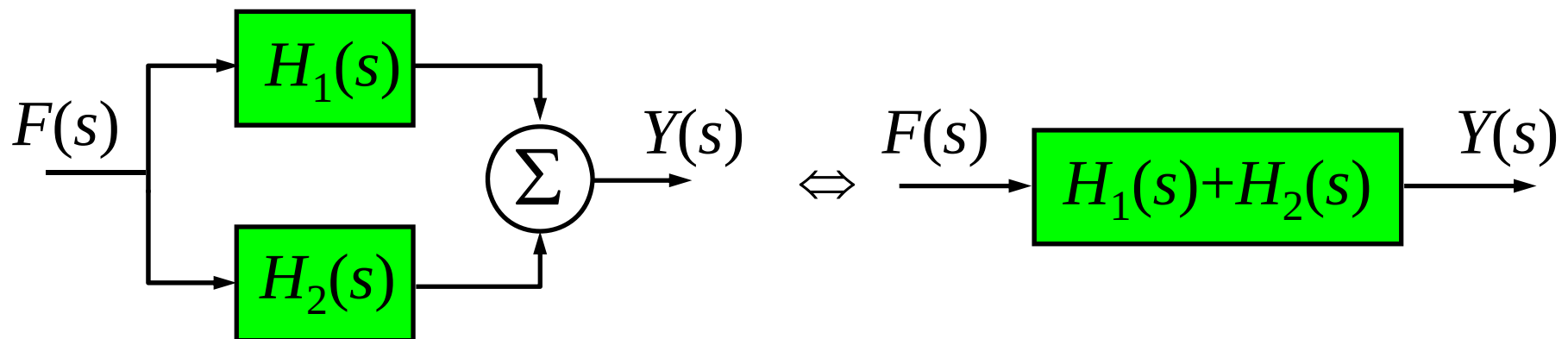
$$H(s) = \frac{s - 2}{(s^2 + 3)(s + 2)} \Rightarrow \text{Biên giới ổn định}$$

SƠ ĐỒ KHỐI VÀ THỰC HIỆN HỆ THỐNG

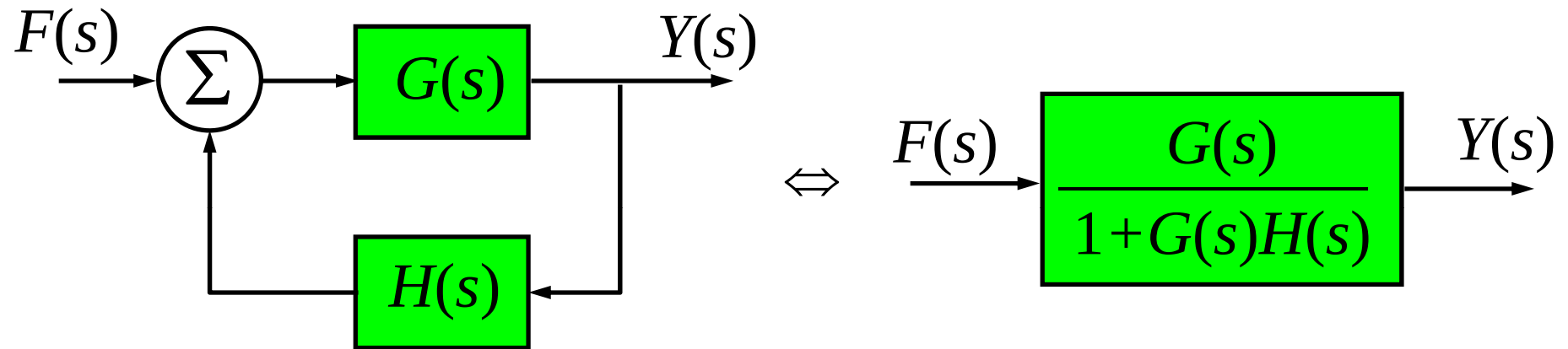
❑ Ghép nối tiếp



❑ Ghép song song



□ Ghép hồi tiếp

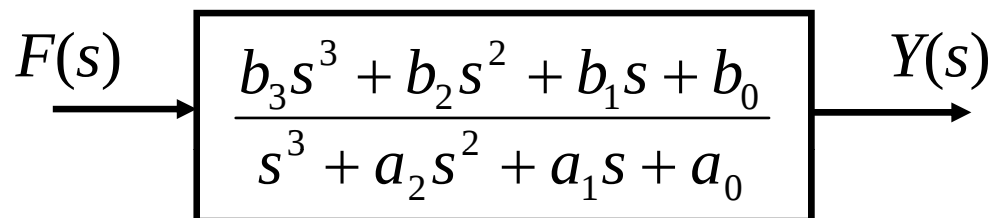


- ❑ Ba cách thực hiện hệ thống:
 - ❖ Dạng trực tiếp
 - ❖ Dạng nối tiếp
 - ❖ Dạng song song
- ❑ Sử dụng các phần tử:
 - ❖ Mạch tích phân
 - ❖ Mạch khuếch đại
 - ❖ Mạch cộng
- ❑ Xét hệ thống có hàm truyền với $n=m$:
(nếu $m < n$: thêm vào các phần tử có hệ số bằng 0)

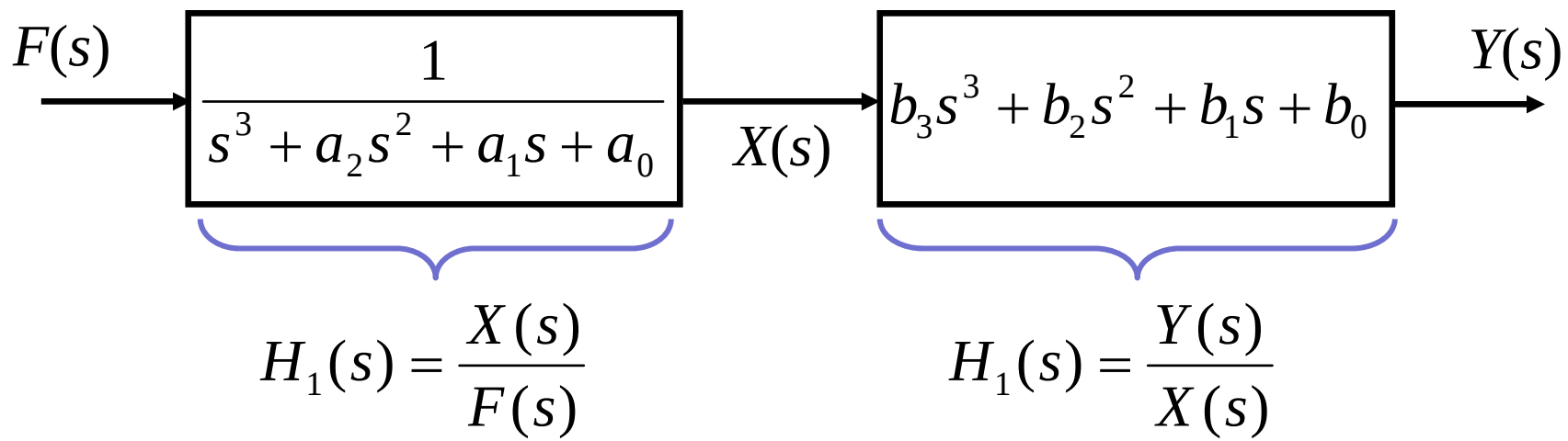
$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0}$$

□ Xét hệ bậc 3:

$$H(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$



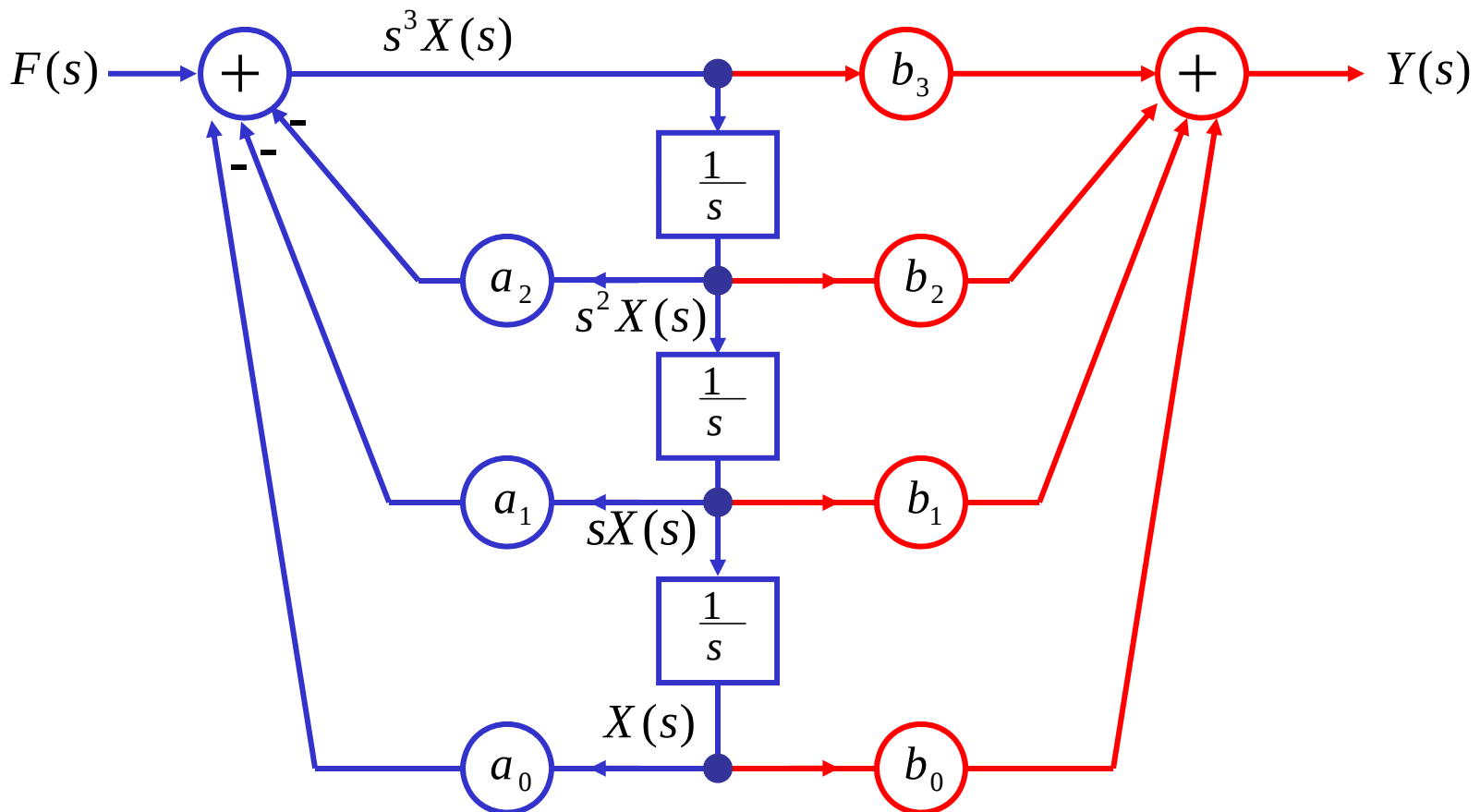
$\Leftrightarrow$



Dạng trực tiếp

$$H_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{X(s)}{F(s)}$$

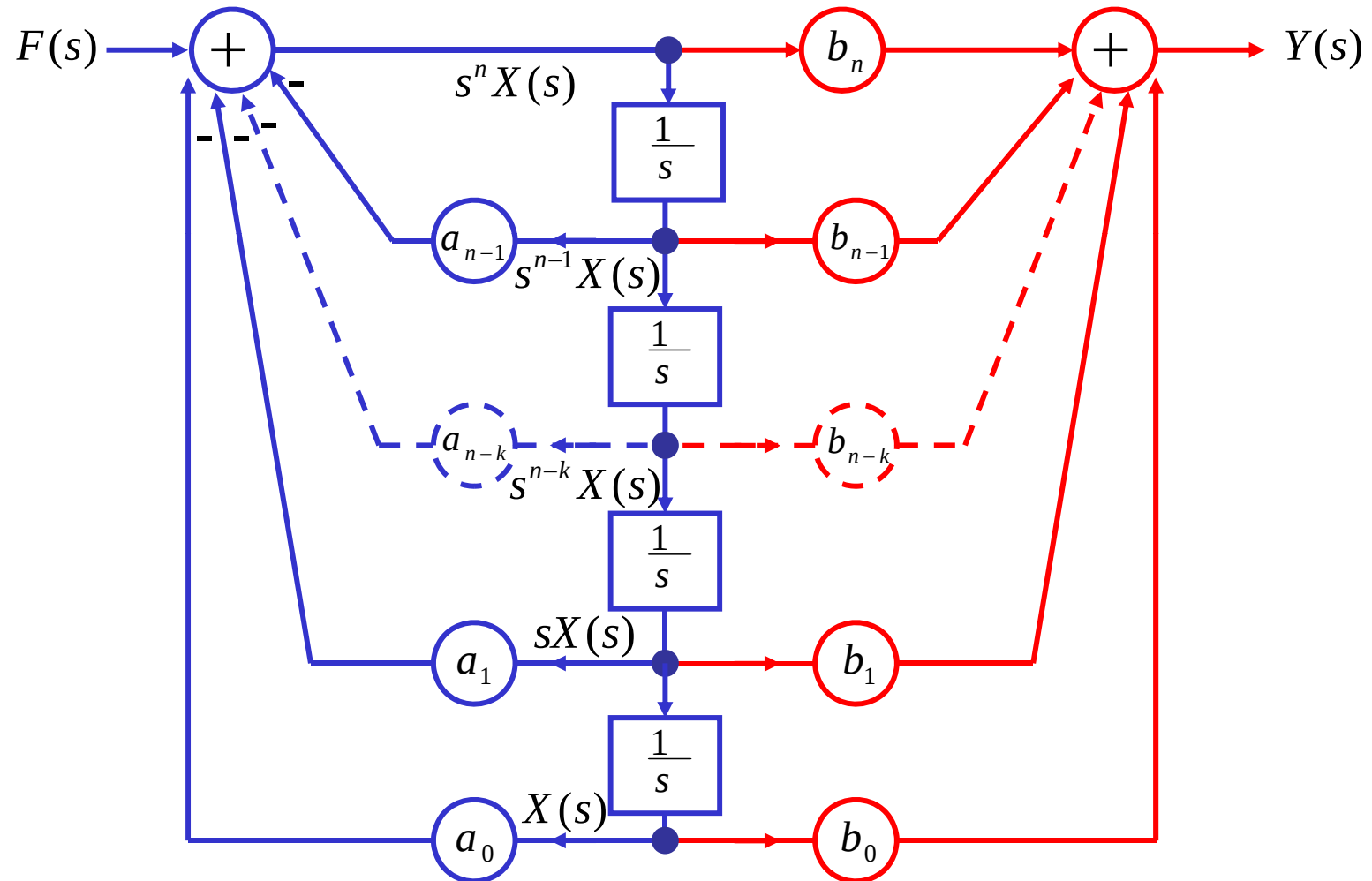
$$H_2(s) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



Dạng trực tiếp

□ Tổng quát:

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0}$$



□ Vẽ sơ đồ dạng trực tiếp thực hiện các hệ thống sau:

$$a) \quad H(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$b) \quad H(s) = \frac{s+2}{s+7}$$

$$c) \quad H(s) = \frac{s}{s+2}$$

$$d) \quad H(s) = \frac{s+4}{s^2+2s+3}$$

$$e) \quad H(s) = \frac{s+1}{s^2+2}$$

$$f) \quad H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

Thực hiện hệ thống dạng nối tiếp và song song

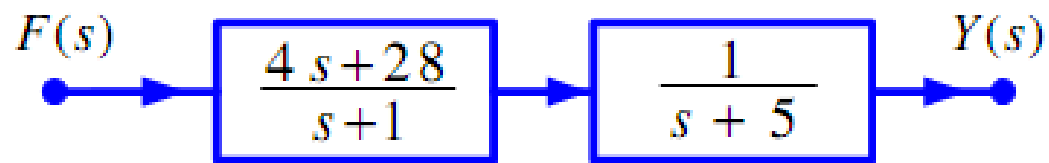
- ❑ Dạng **nối tiếp**: Phân tích hàm truyền hệ thống thành **tích** các hàm truyền bậc nhất (tương ứng với cực thực) hoặc bậc 2 (tương ứng cực phức liên hợp).
- ❑ Dạng **song song**: Phân tích hàm truyền hệ thống thành **tổng** các hàm truyền bậc nhất (tương ứng với cực thực) hoặc bậc 2 (tương ứng cực phức liên hợp).

Thực hiện hệ thống dạng nối tiếp và song song

□ Ví dụ 1: $H(s)$ có cực thực đơn $H(s) = \frac{4s + 28}{s^2 + 6s + 5}$

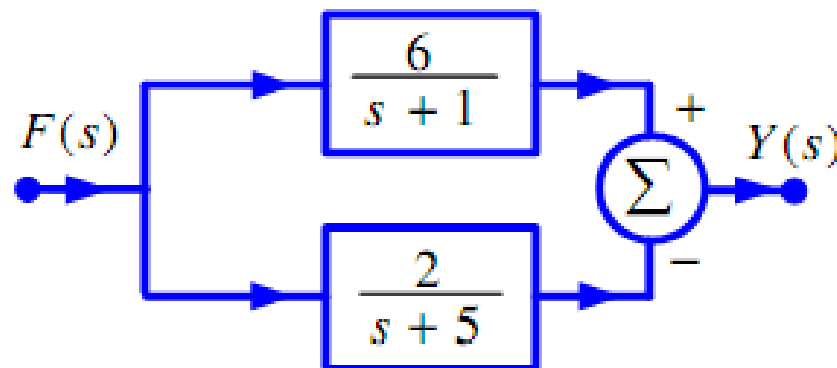
□ Dạng nối tiếp:

$$H(s) = \frac{4s + 28}{s + 1} \cdot \frac{1}{s + 5}$$



□ Dạng song song:

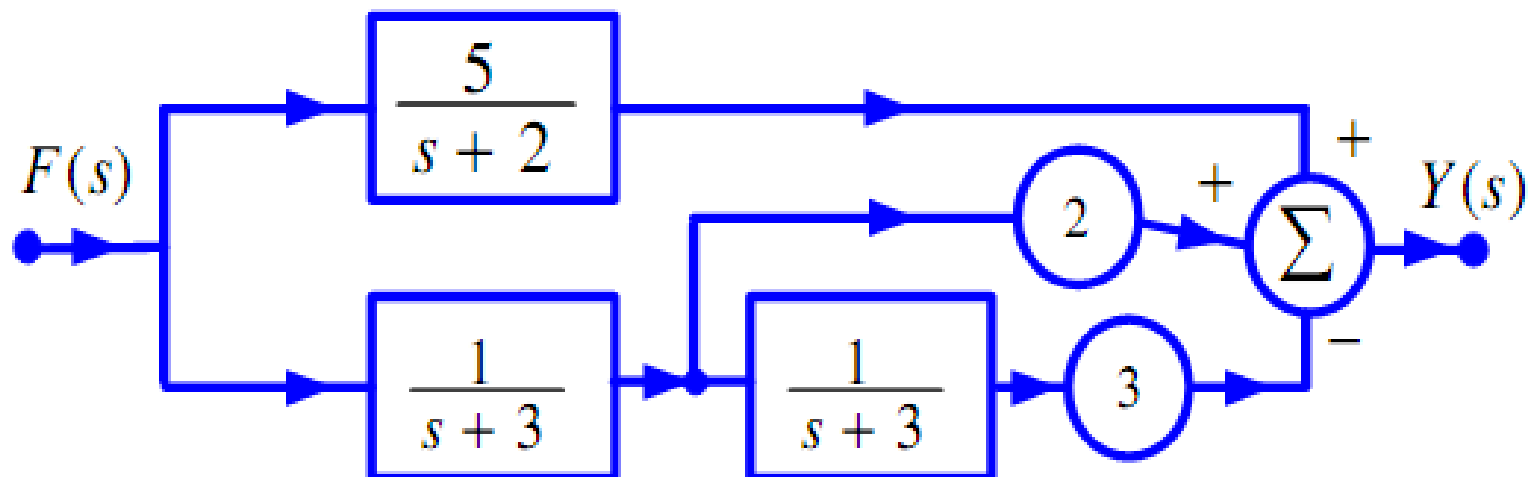
$$H(s) = \frac{6}{s + 1} - \frac{2}{s + 5}$$



Thực hiện hệ thống dạng nối tiếp và song song

□ Ví dụ 2: $H(s)$ có cực thực lặp $H(s) = \frac{7s^2 + 37s + 51}{(s + 2)(s + 3)^2}$

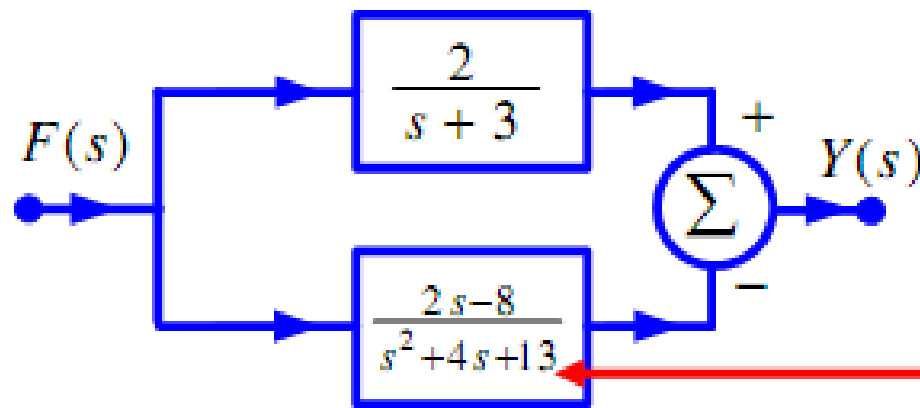
$$H(s) = \frac{5}{(s + 2)} + \frac{2}{(s + 3)} - \frac{3}{(s + 3)^2}$$



Thực hiện hệ thống dạng nối tiếp và song song

□ Ví dụ 3: $H(s)$ có cực phức: $H(s) = \frac{10s + 50}{(s + 3)(s^2 + 4s + 13)}$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{2}{s + 3} - \frac{2s - 8}{s^2 + 4s + 13}$$



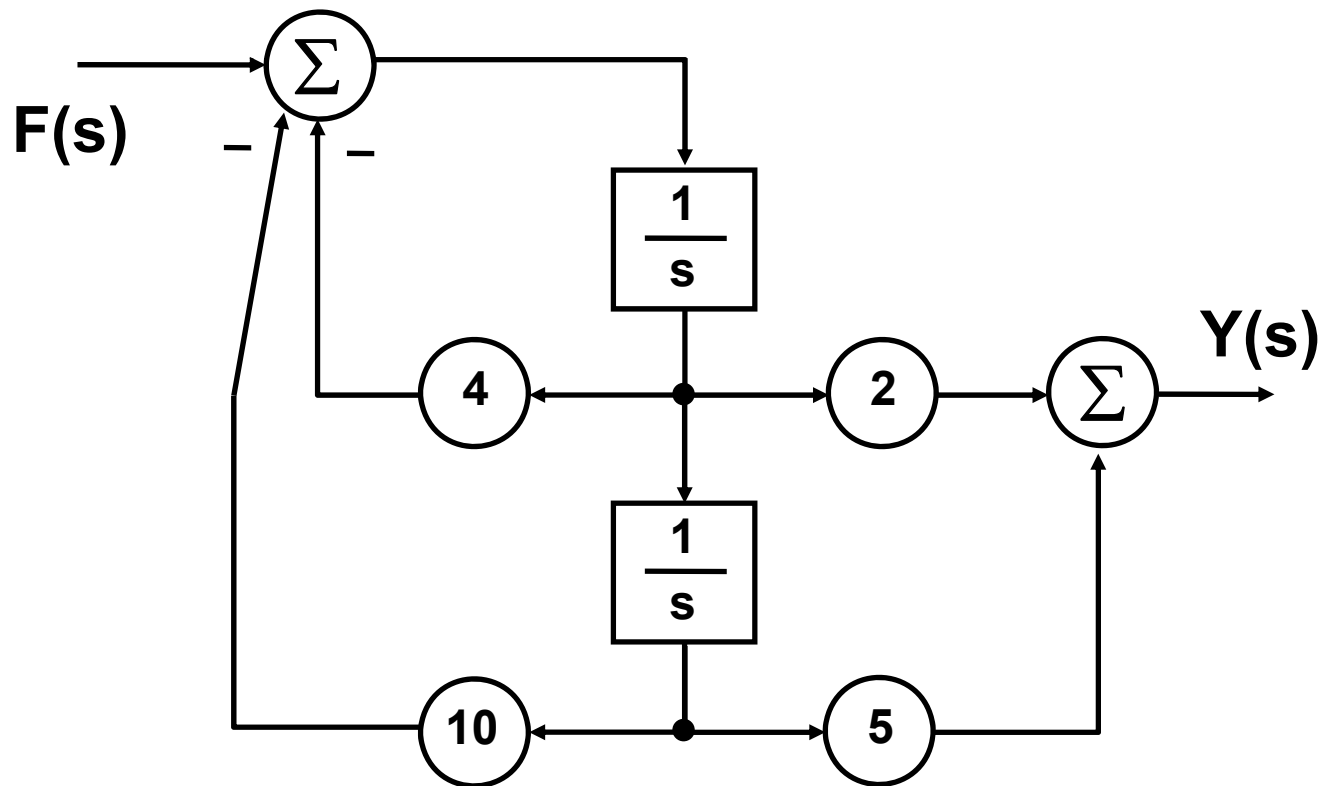
Thực hiện
dạng trực tiếp

Thực hiện hệ thống dùng OP-AMP

- Ví dụ: Vẽ sơ đồ OP-AMP thực hiện hệ thống có hàm truyền:

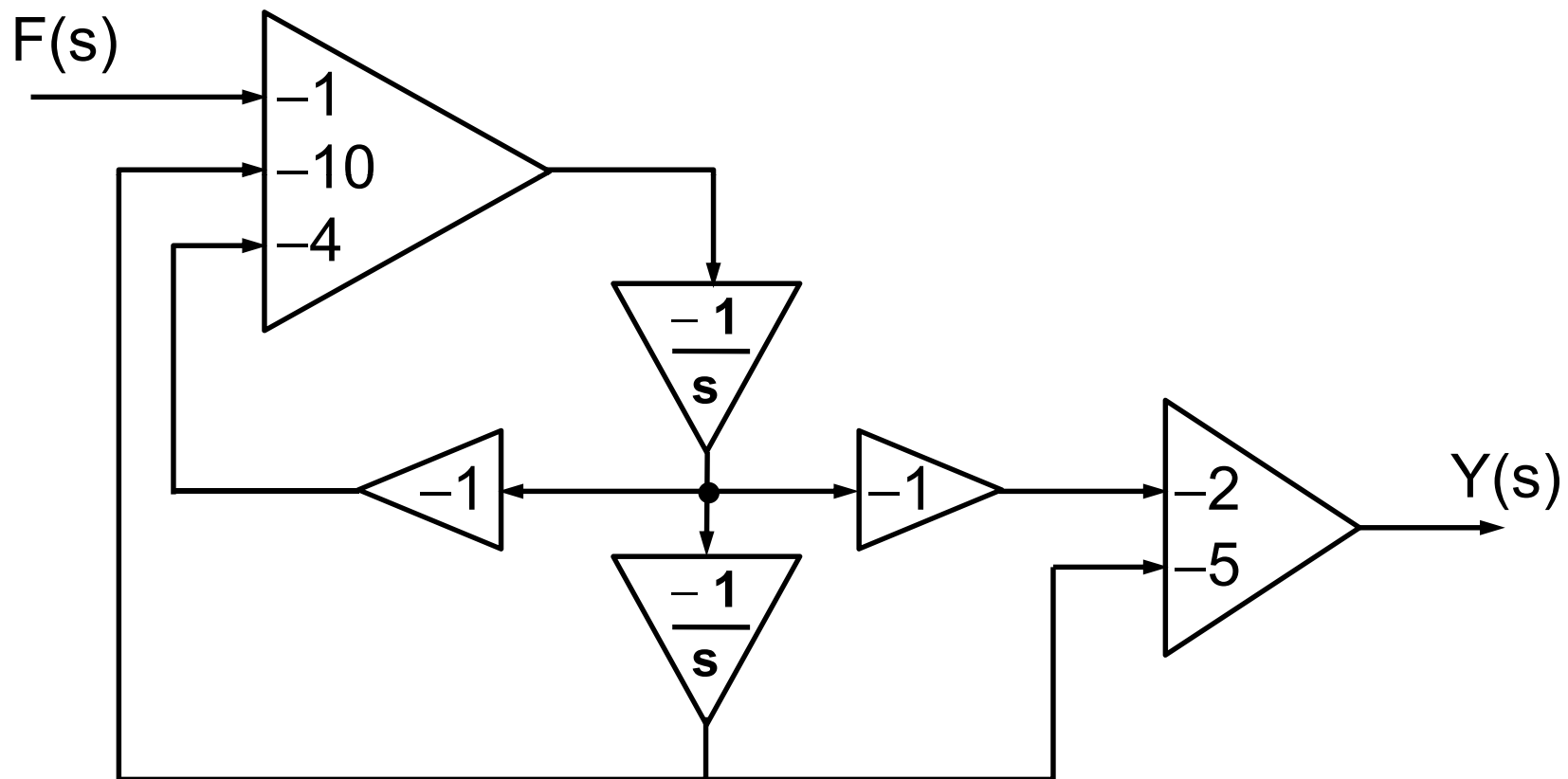
$$H(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 10}$$

- B1: Vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống



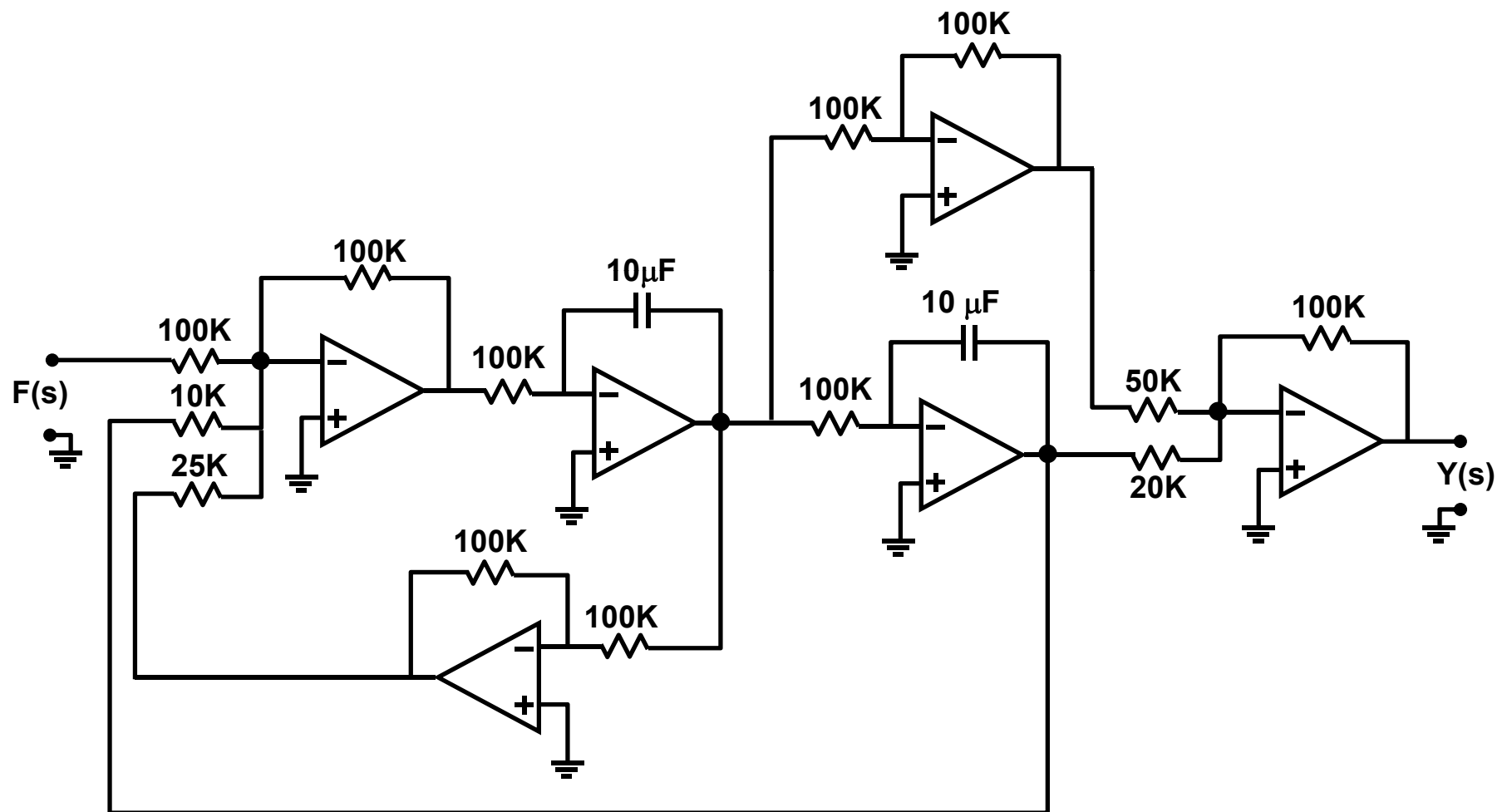
Thực hiện hệ thống dùng OP-AMP

- B2: Biến đổi sơ đồ về dạng tương đương để có thể thực hiện bằng OP-AMP



Thực hiện hệ thống dùng OP-AMP

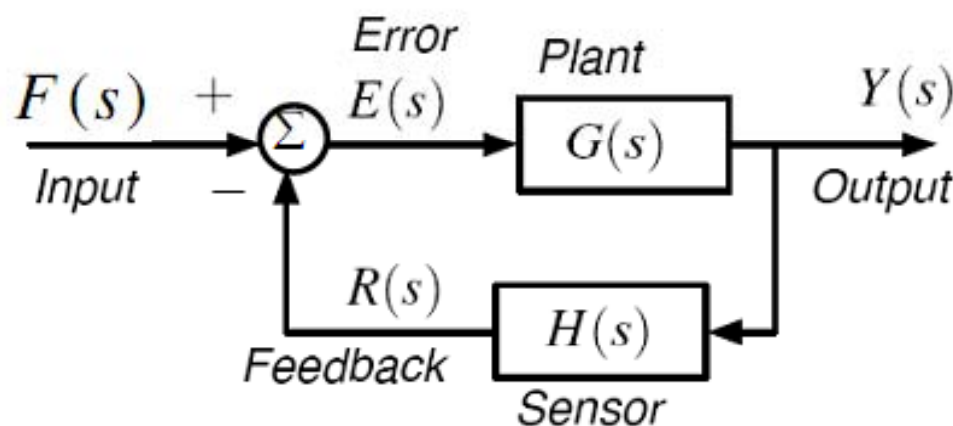
□ B3: Vẽ sơ đồ thực hiện bằng OP-AMP



ỨNG DỤNG TRONG HỘI TIẾP VÀ ĐIỀU KHIỂN

Ứng dụng của ghép hồi tiếp

- ❑ Hệ thống có thể không thực hiện chính xác các yêu cầu mong muốn do:
 - Bị tác động bởi sự thay đổi các thông số trong hệ thống
 - Bị tác động bởi ảnh hưởng của nhiễu
 - Không tuyến tính
- ⇒ Chất lượng của hệ thống không đảm bảo
- ❑ Khắc phục: ghép hồi tiếp.

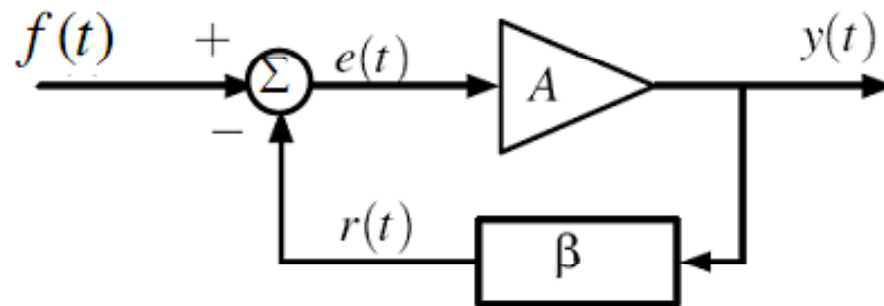


$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

Ứng dụng của ghép hồi tiếp

□ **Ứng dụng 1:** giảm ảnh hưởng do thay đổi thông số trong hệ thống:

- Ví dụ 1: xét bộ khuếch đại hồi tiếp



$A = 1000$ and A varies

$\beta = \text{const}$

$$T = \frac{A}{1 + \beta A}$$

- Bộ khuếch đại vòng hở A có trước!???
- Cần $T \rightarrow$ tìm β : $\beta = \frac{1}{A} \left(\frac{A}{T} - 1 \right)$. Ví dụ cần $T=10$: $\Rightarrow \beta = 0.099$
- Khảo sát sự ổn định khi thông số của hệ thống (A) thay đổi

$$A = 900 \text{ (10\% low)} \Rightarrow T = \frac{900}{1 + (0.099)(900)} = 9.989 \text{ (0.11\% low!!!)}$$

$$A = 1100 \text{ (10\% high)} \Rightarrow T = \frac{1100}{1 + (0.099)(1100)} = 10.009 \text{ (0.09\% high!!!)}$$

Ứng dụng của ghép hồi tiếp

- Độ nhạy của hệ thống hồi tiếp: xét hàm truyền vòng kín

$$T = \frac{G}{1 + GH}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\partial}{\partial G} \left(\frac{G}{1 + GH} \right) \Delta G \Rightarrow \Delta T = \left(\frac{1}{(1 + GH)} - \frac{GH}{(1 + GH)^2} \right) \Delta G$$

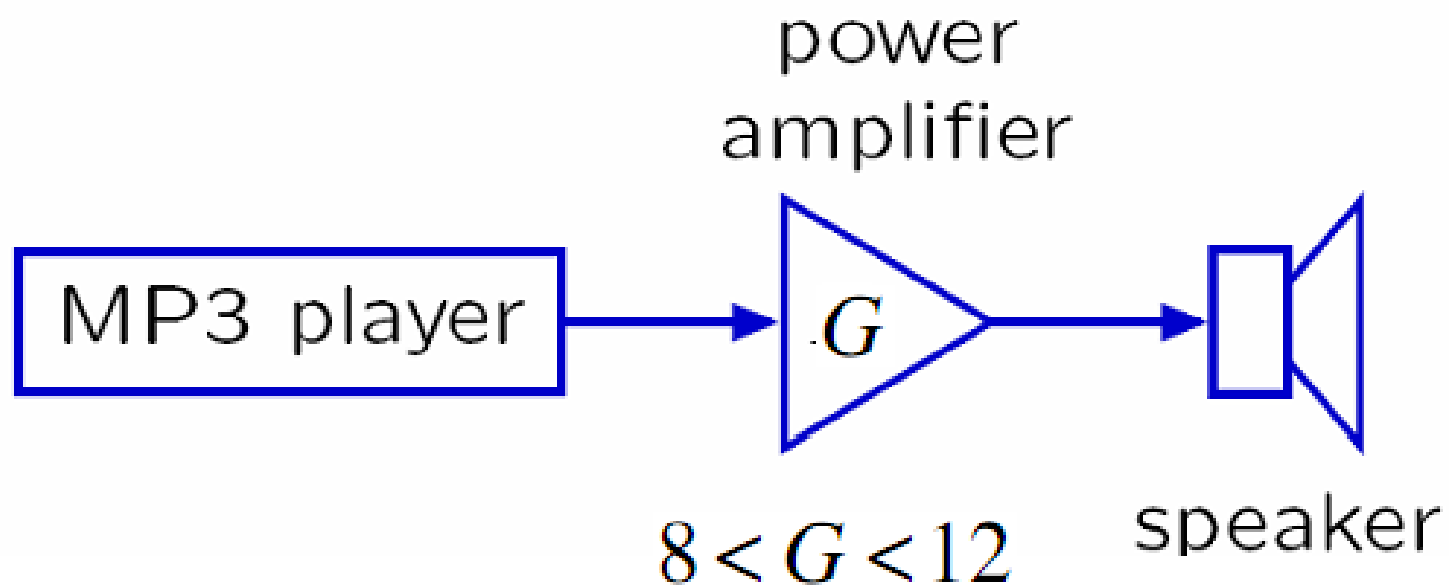
$$\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{(1 + GH)^2} \Delta G \Rightarrow \Delta T = \left(\frac{1}{1 + GH} \right) \left(\frac{G}{1 + GH} \right) \frac{\Delta G}{G}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{1}{1 + GH} \right) \frac{\Delta G}{G} \Rightarrow S = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G} = \frac{1}{1 + GH} \quad (\text{độ nhạy})$$

Nếu chọn $GH \gg 1$ thì:

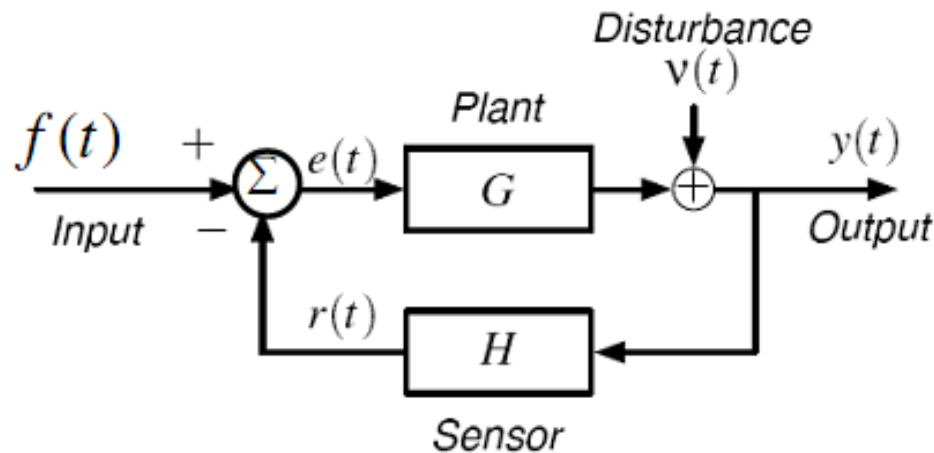
$$S \approx \frac{1}{GH}$$

- Ví dụ 2: xét hệ thống khuếch đại sau



Làm thế nào để khắc phục sự thay đổi này?

□ Ứng dụng 2: giảm ảnh hưởng của nhiễu với hệ thống hồi tiếp



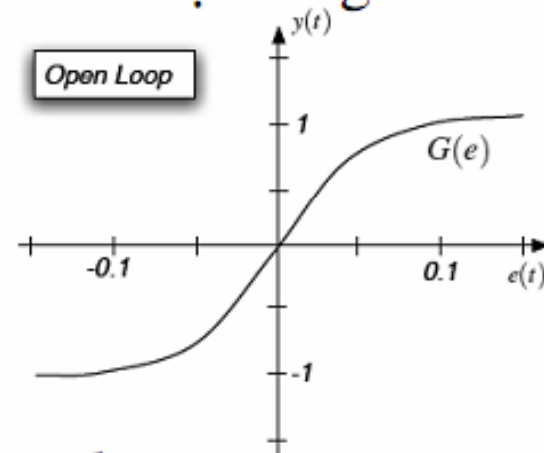
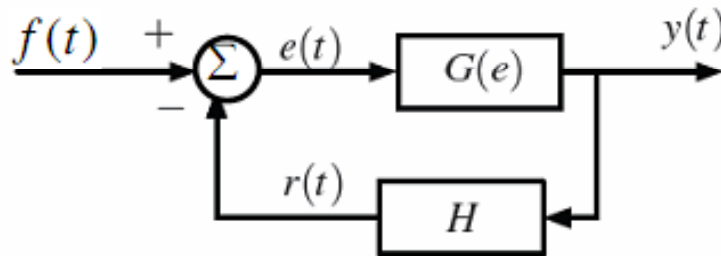
$$\Rightarrow y(t) = \frac{G}{1+GH} f(t) + \frac{1}{1+GH} v(t)$$

$$\Rightarrow y(t) \approx \frac{1}{H} f(t) + \frac{1}{GH} v(t); GH \gg 1$$

Giảm nhiễu

Ứng dụng của ghép hồi tiếp

□ **Ứng dụng 3:** điều chỉnh tính tuyến tính của hệ thống



Ngỏ ra: $T(f) = G(e) \Rightarrow T'(f) = G'(e) \frac{de}{df}$

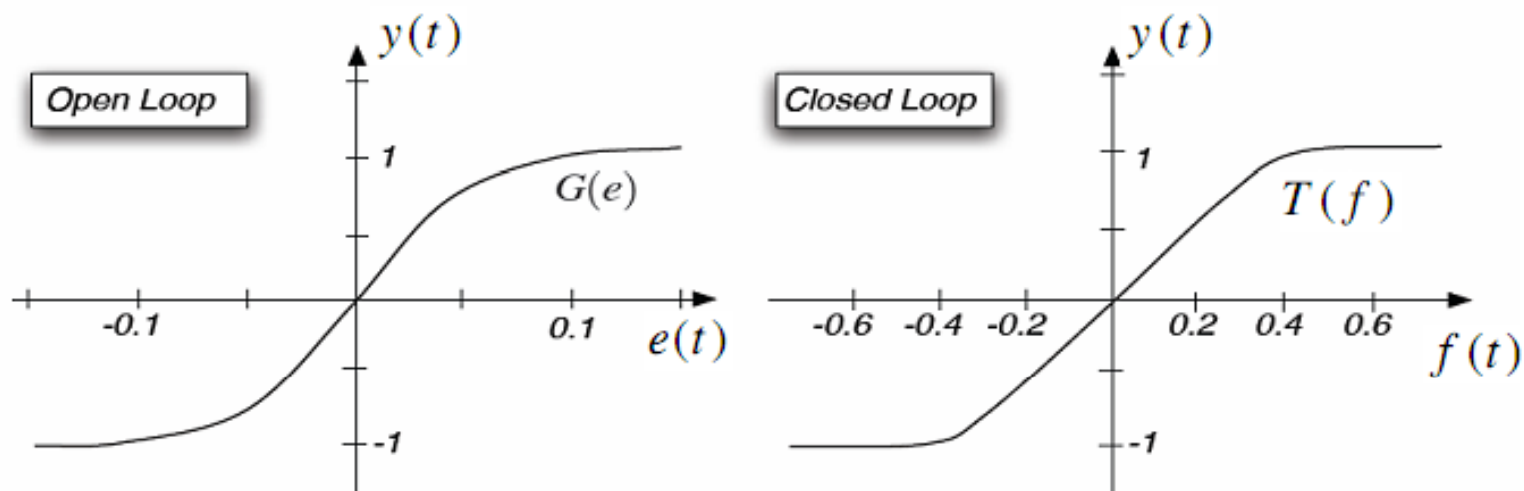
Sai số: $e = f - HT(f) \Rightarrow \frac{de}{df} = 1 - HT'(f)$

$$\Rightarrow T'(f) = G'(e)[1 - HT'(f)] \Rightarrow T'(f) = \frac{G'(e)}{1 + G'(e)H}$$

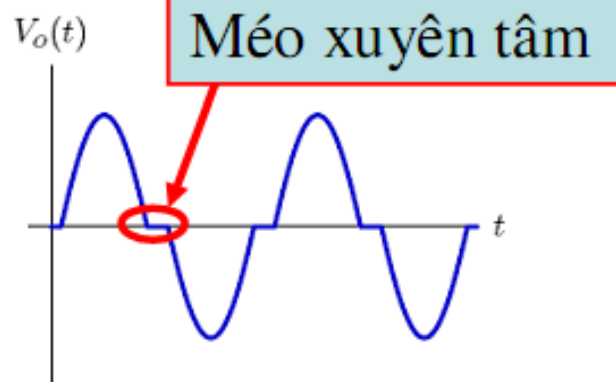
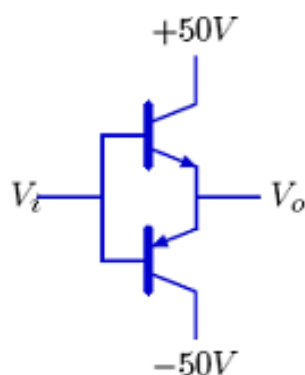
Nếu có $G'(e)H \gg 1$ thì: $T'(f) \approx \frac{1}{H}$ T(f): tuyến tính

Ứng dụng của ghép hồi tiếp

Trong ví dụ trên, nếu $H=0.2$ ta có



Ví dụ: xét bộ khuếch đại công suất như dưới đây, **làm thế nào để khắc phục méo?**

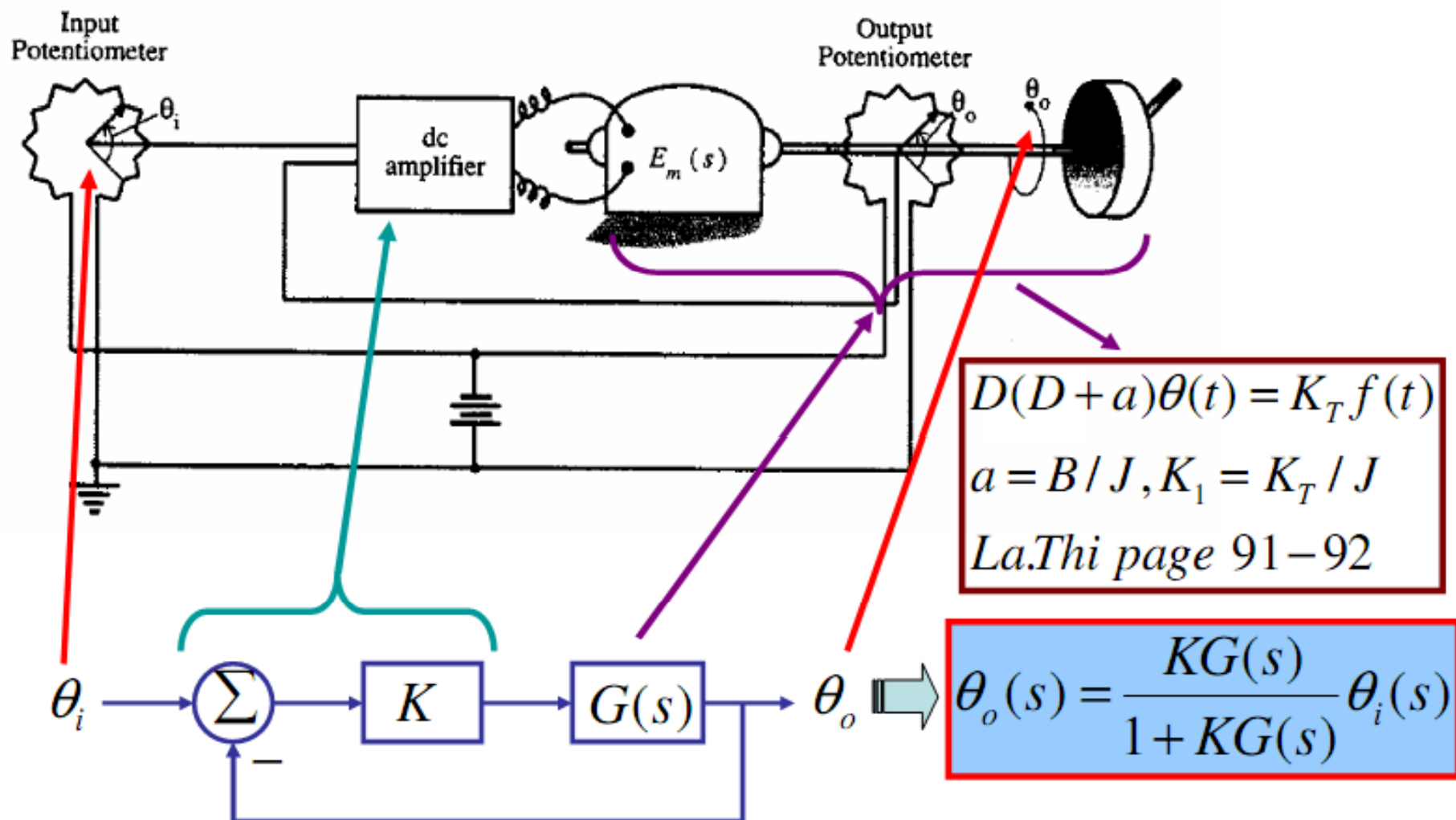


- ☐ Phân tích một hệ thống đơn giản
- ☐ Phân tích hệ bậc 2
- ☐ Quỹ đạo nghiệm số
- ☐ Sai số xác lập
- ☐ Các bộ điều chỉnh

❖ Môn học “Cơ sở tự động” sẽ đề cập chi tiết các vấn đề phân tích và thiết kế hệ thống điều khiển dùng biến đổi Laplace.

Phân tích một hệ thống đơn giản

☐ Xét hệ thống điều khiển sau:



Phân tích một hệ thống đơn giản

□ Đáp ứng với $\theta_i(t)=u(t)$: $\theta_o(s) = \frac{KG(s)}{s[1 + KG(s)]}$

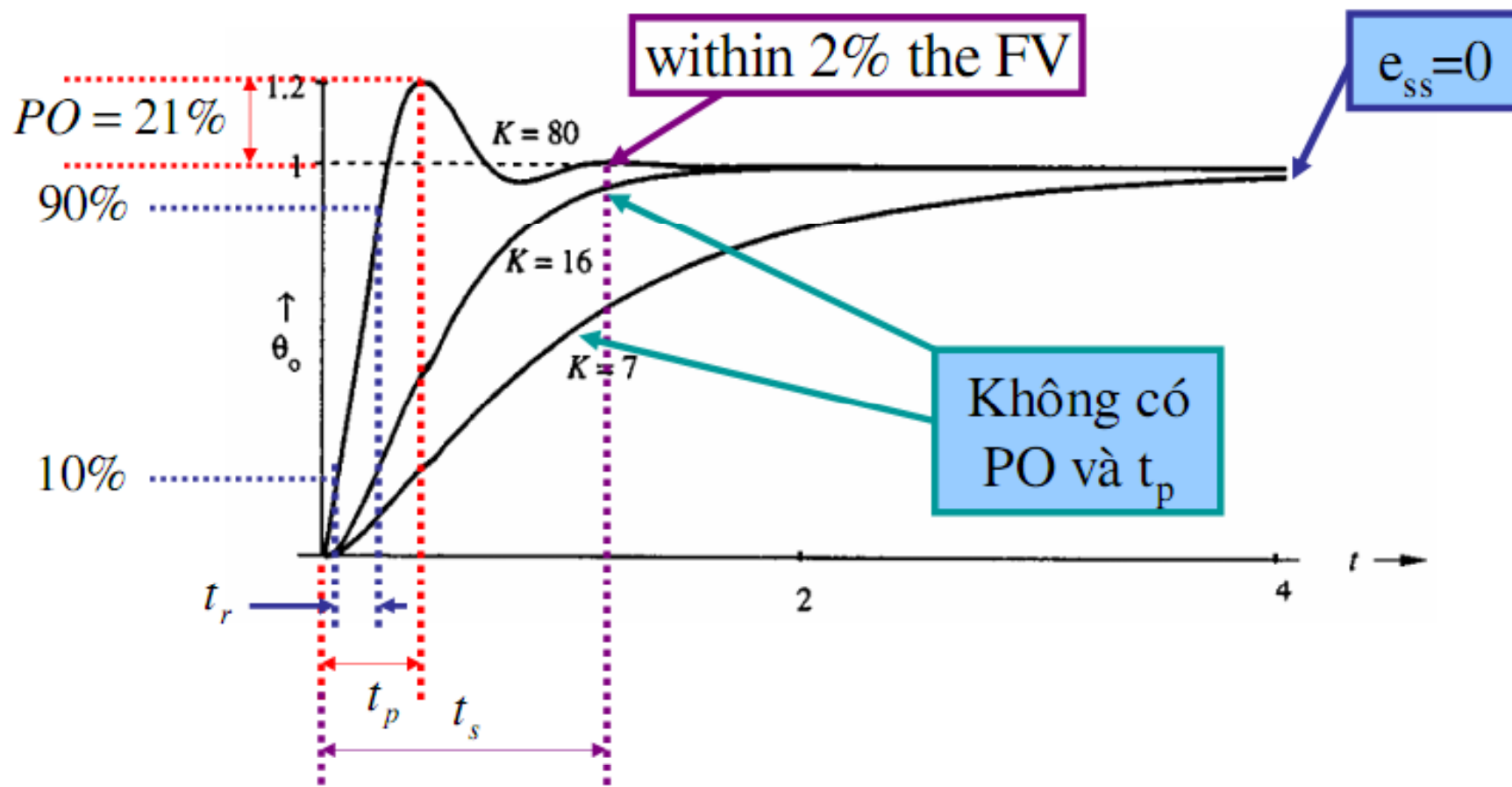
Giả sử: $G(s) = \frac{1}{s(s+8)} \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{K / s(s+8)}{s[1 + K / s(s+8)]} = \frac{K}{s(s^2 + 8s + K)}$

▪ K=7: $\theta_o(s) = \frac{7}{s(s^2 + 8s + 7)} \Rightarrow \theta_o(t) = (1 - \frac{7}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-7t})u(t)$

▪ K=80: $\theta_o(s) = \frac{80}{s(s^2 + 8s + 80)} \Rightarrow \theta_o(t) = [1 - \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-4t} \cos(8t + 153^\circ)]u(t)$

▪ K=16: $\theta_o(s) = \frac{16}{s(s^2 + 8s + 16)} \Rightarrow \theta_o(t) = [1 - (4t + 1)e^{-4t}]u(t)$

Phân tích một hệ thống đơn giản



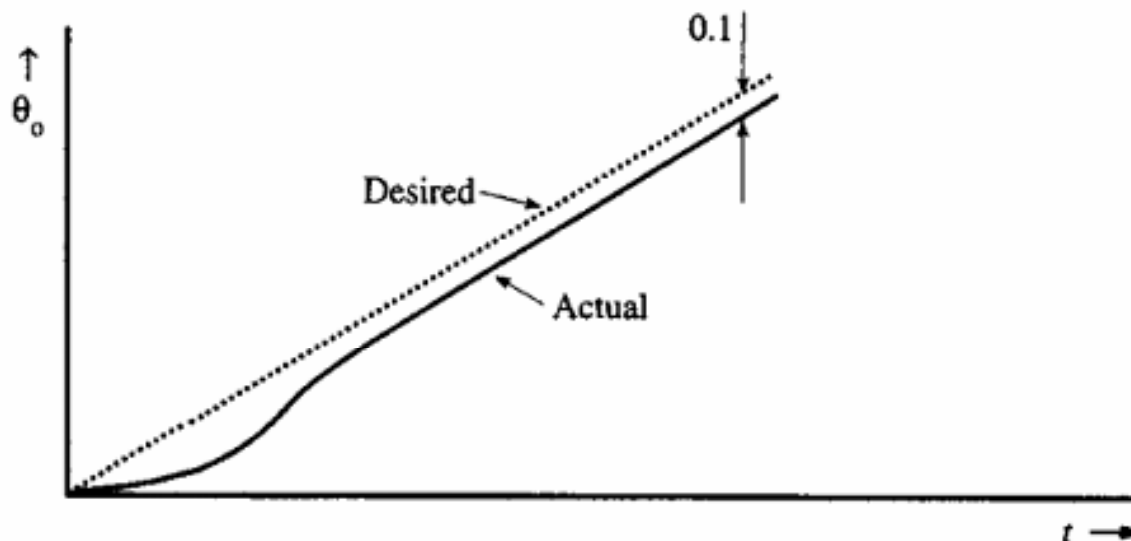
Giá trị của K được lựa chọn để đạt được yêu cầu kỹ thuật của hệ thống
Yêu cầu nào là tốt cho hệ thống?

Phân tích một hệ thống đơn giản

□ Đáp ứng với $\theta_i(t)=tu(t)$: $\theta_o(s) = \frac{K}{s^2(s^2 + 8s + K)}$

Giả sử: $K = 80 \Rightarrow \theta_o(s) = \frac{80}{s^2(s^2 + 8s + 80)}$

$\Rightarrow \theta_o(t) = [-0.1 + t + \frac{1}{8}e^{-8t} \cos(8t + 36.87^\circ)]u(t)$



Yêu cầu nào là tốt cho hệ thống?

Phân tích một hệ thống đơn giản

☐ Yêu cầu thiết kế hệ thống:

- Đáp ứng quá độ
 - Chỉ rõ PO với kích thích $u(t)$
 - Chỉ rõ t_r and/or t_d
 - Chỉ rõ thời gian xác lập t_s
 - Sai số xác lập: chỉ rõ ss x.lập với các kích thích $u(t)$, $tu(t)$ và $t^2u(t)$
 - Độ nhạy của hệ thống: do sự thay đổi của thông số h.thống, nhiều
- Không phân tích thông số này!!!!

Phân tích hệ thống bậc 2

- ❑ Đáp ứng quá độ phụ thuộc vào vị trí của poles và zeros của $T(s)$.
Có cách để xác định nhanh chóng các thông số (PO , t_r , t_s) của hệ thống bậc 2 không có điểm zero dựa vào vị trí của các poles.
→ Chúng ta sẽ khảo sát chi tiết hệ thống này (cơ sở nghiên cứu hệ thống bậc cao hơn)
- ❑ Xét hệ thống bậc 2 có hàm truyền vòng kín $T(s)$ như sau:

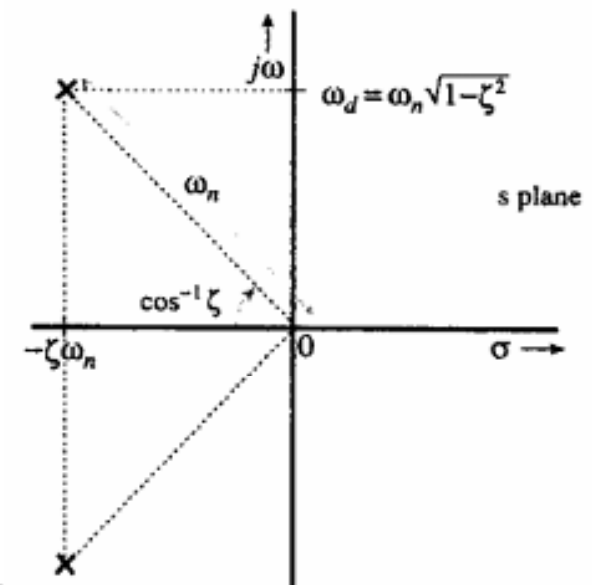
$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Hai poles của hệ thống là:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

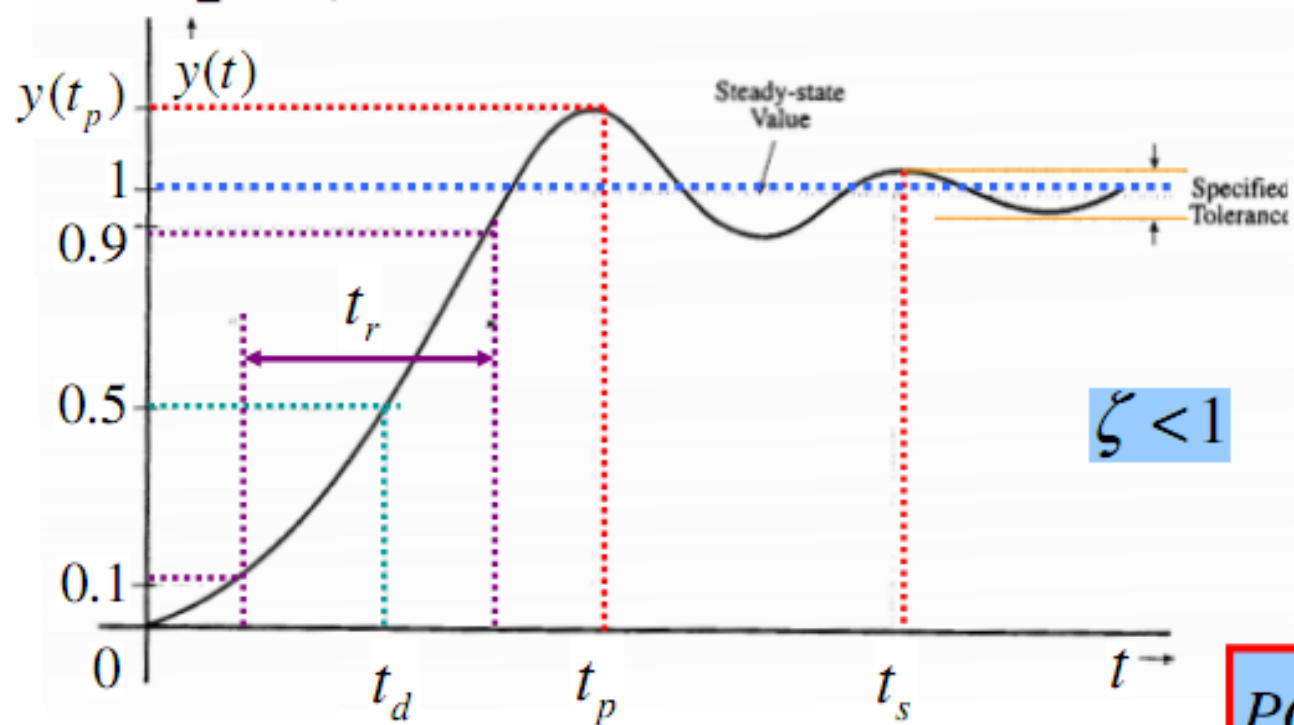
- Đáp ứng với $u(t)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



Phân tích hệ thống bậc 2

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \right] u(t)$$



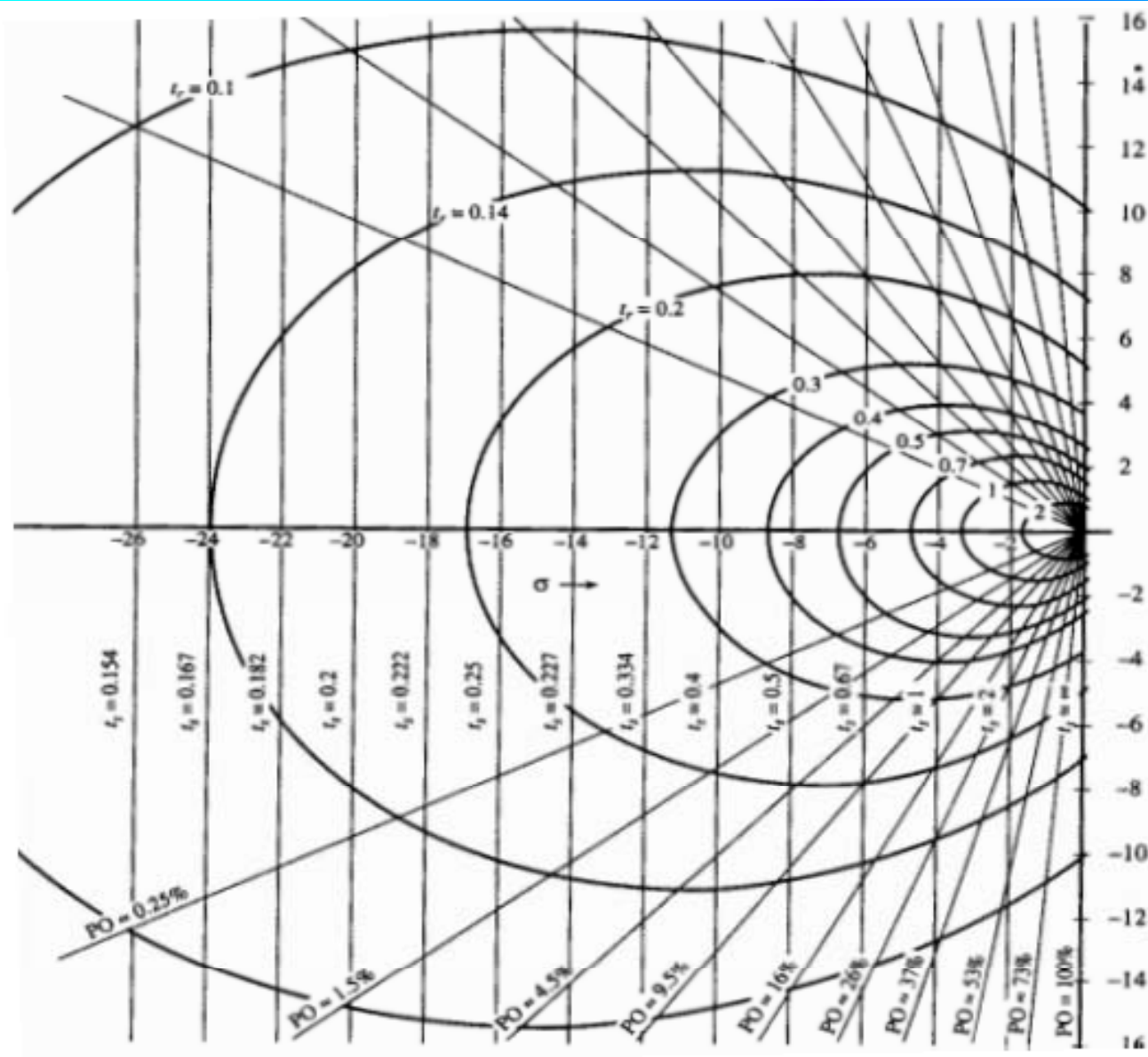
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$PO = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_r \approx \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad t_d \approx \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n}$$

Phân tích hệ thống bậc 2



$$PO = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$$t_r \approx \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n}$$

Phân tích hệ thống bậc 2

❑ Ví dụ: $T(s) = \frac{KG(s)}{[1 + KG(s)]} = \frac{K}{s^2 + 8s + K}$

Yêu cầu thiết kế: chọn K sao cho $PO \leq 16\%$, $t_r \leq 0.5s$, $t_s \leq 2s$?

- Xác định miền cho phép của các poles

$$PO \leq 16\%; t_r \leq 0.5; t_s \leq 2$$

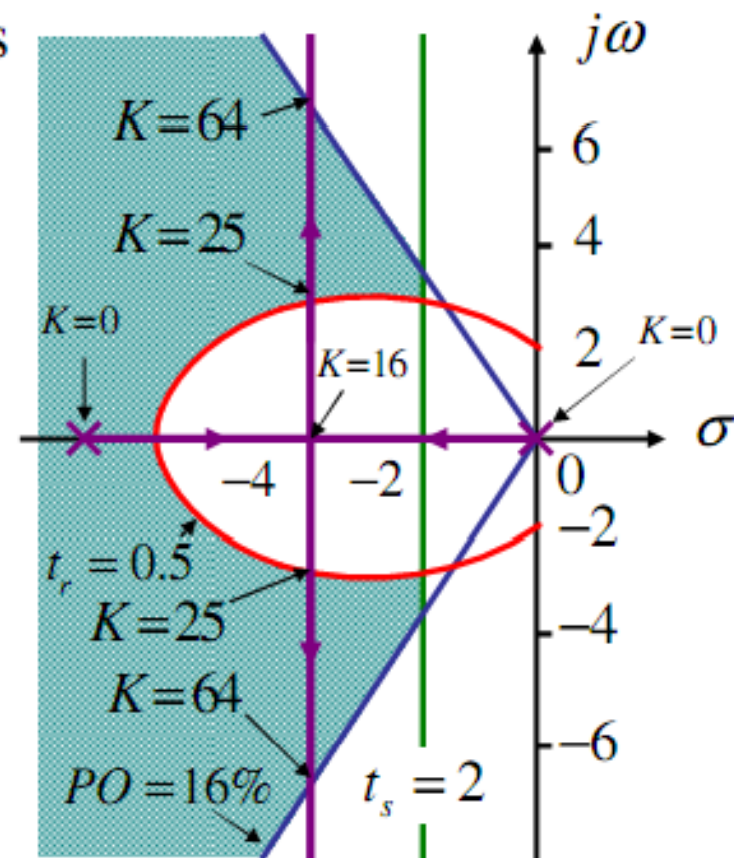
- Xác định quỹ tích các poles khi K thay đổi (quỹ đạo nghiệm số)

$$s^2 + 8s + K = 0$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - K}$$

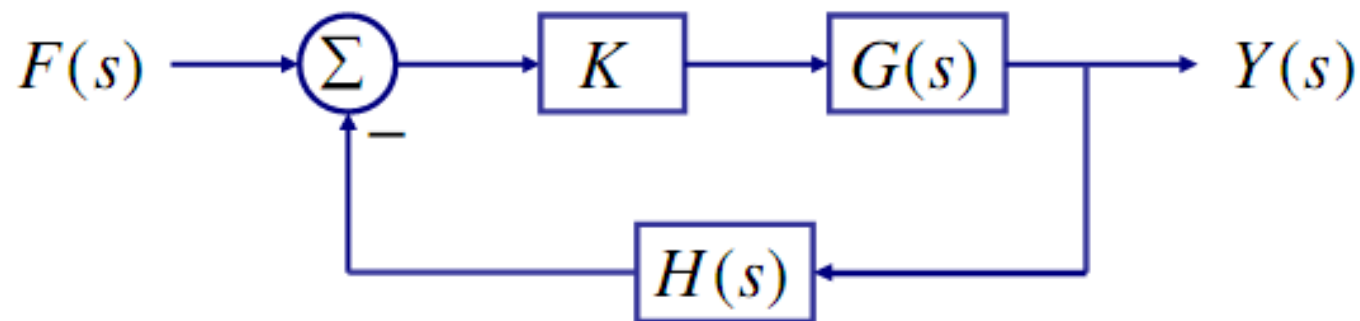
- Xác định giá trị của K

$$25 \leq K \leq 64$$



Quỹ đạo nghiệm số

❑ Xét hệ thống với hệ số khuếch đại K thay đổi như sau:



Hàm truyền vòng kín của hệ thống: $T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$

Phương trình đặc trưng của hệ thống: $1 + KG(s)H(s) = 0$

Chúng ta sẽ khảo sát quỹ đạo của nghiệm phương trình đặc trưng (poles của hệ thống) khi K thay đổi từ 0 đến $\infty \rightarrow$ Quỹ đạo nghiệm số.

Giá trị của s trong mp- s làm cho hàm truyền vòng hở $KG(s)H(s)$ bằng -1 chính là các poles của hàm truyền vòng kín

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow KG(s)H(s) = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |KG(s)H(s)| = 1 \\ \angle KG(s)H(s) = \pm 180^\circ (2l + 1) \\ l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |G(s)H(s)| = 1/K \\ \angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2l + 1) \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

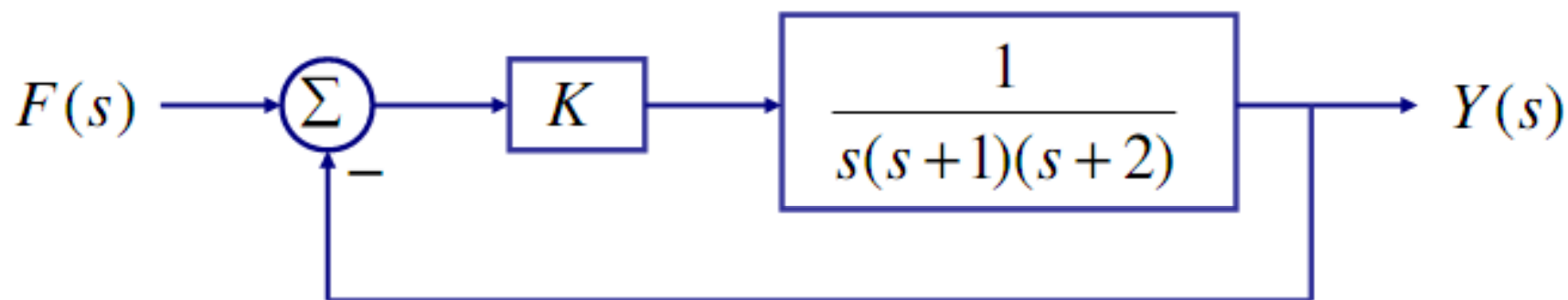
Independent of K

Quỹ đạo nghiệm số

☐ Quỹ đạo nghiệm số được vẽ tuân theo các quy luật sau:

Áp dụng các quy luật dùng ví dụ sau:

Ví dụ 1: vẽ quỹ đạo nghiệm số của hệ thống sau khi K thay đổi



Luật #1

Giả sử $G(s)H(s)$ có n poles và m zeros:

**n nhánh của quỹ đạo nghiệm bắt đầu ($K=0$) tại n poles.
 m trong n nhánh kết thúc ($K=\infty$) tại m zeros
 $n-m$ nhánh còn lại kết thúc ở vô cùng theo các đường tiệm cận.**

Bước 1: Vẽ n poles và m zeros của $G(s)H(s)$ dùng ký hiệu
x và **o**

Áp dụng bước #1

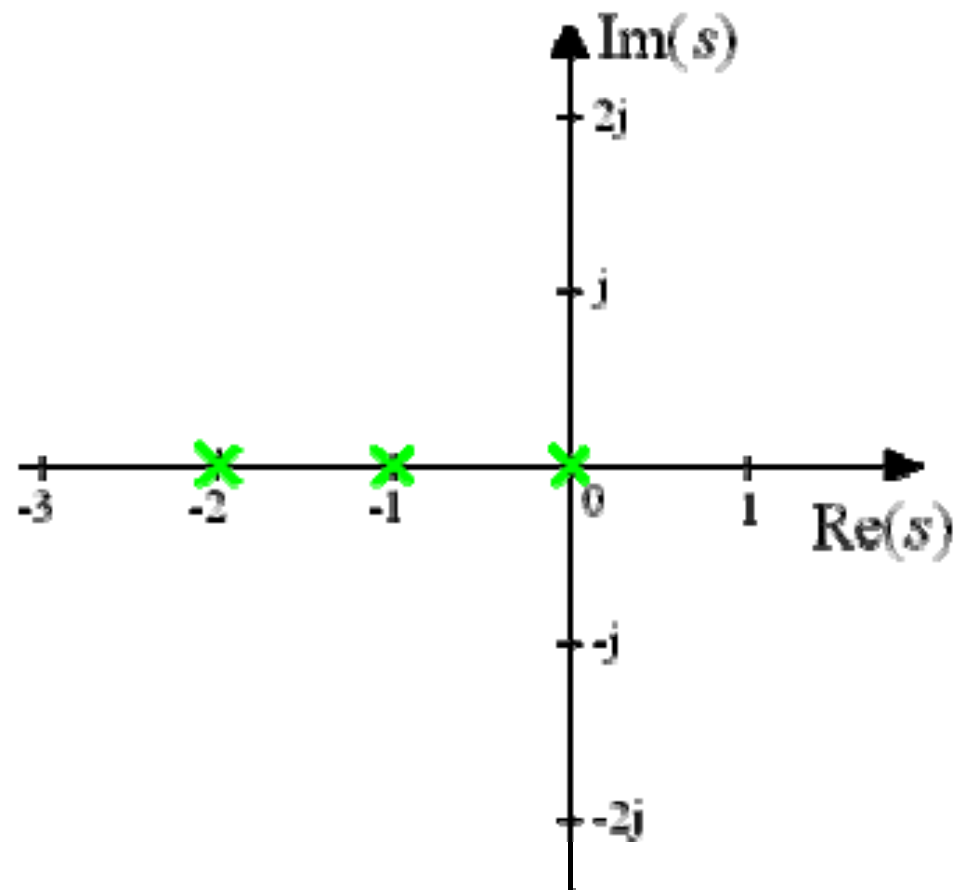
Vẽ n poles và m zeros của $G(s)H(s)$ dùng ký hiệu **x** và **o**

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

- Có 3 poles:

$$s = 0, s = -1, s = -2$$

- Không có zero

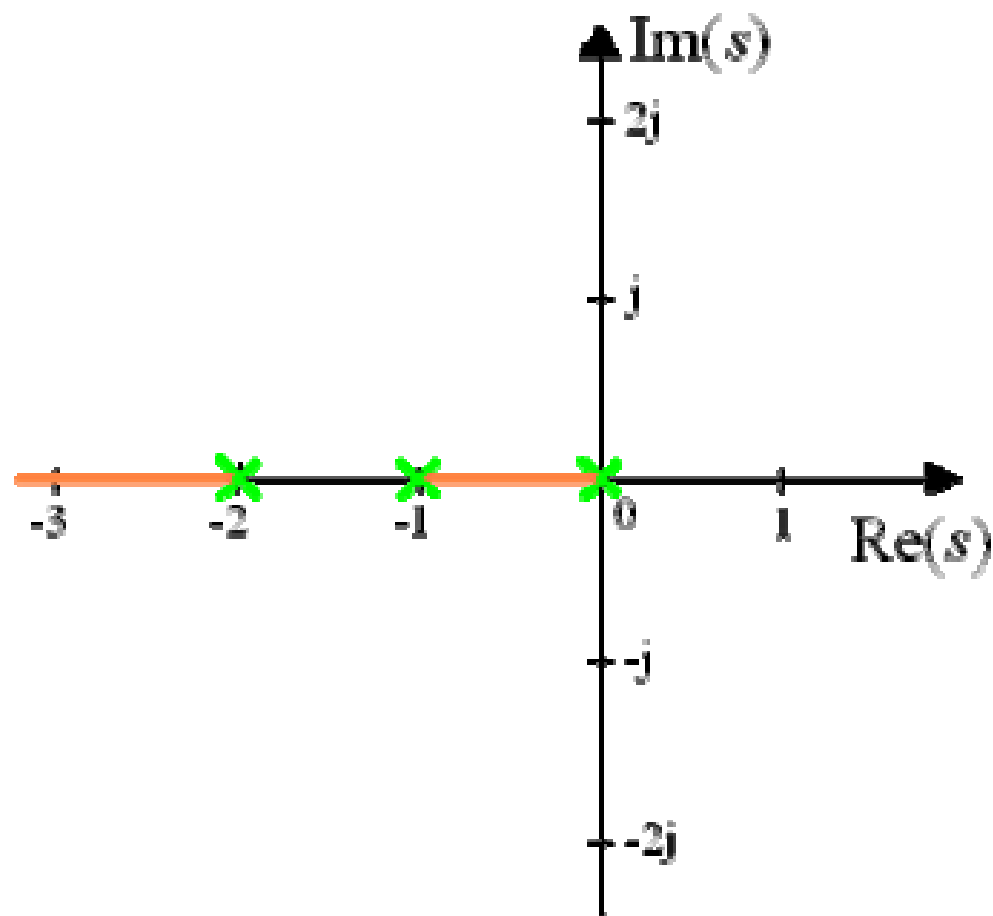


Luật #2

Các điểm trên trục thực thuộc quỹ đạo nghiệm khi bên phải nó có tổng số poles thực và zeros thực của $G(s)H(s)$ là một số lẻ

Bước #2: Xác định các nghiệm trên trục thực. Chọn điểm kiểm tra tùy ý. Nếu tổng số của cả poles thực và zeros thực bên phải của điểm này là lẻ thì điểm đó thuộc quỹ đạo nghiệm số.

Áp dụng bước #2



Luật #3

Giả sử $G(s)H(s)$ có n poles và m zeros:

Các nghiệm **s có giá trị lớn** phải **tiệm cận** theo đường thẳng **bắt đầu tại điểm trên trục thực:**

$$s = \sigma_0 = \frac{\sum_n p_i - \sum_m z_i}{n - m}$$

theo hướng của góc:

$$\phi_\ell = \frac{\pm 180^\circ (2\ell + 1)}{n - m}$$

Bước #3: Xác định $n - m$ tiệm cận của các nghiệm. Tại $s = \sigma_0$ trên trục thực. Tính và vẽ các đường tiệm cận theo góc ϕ_ℓ

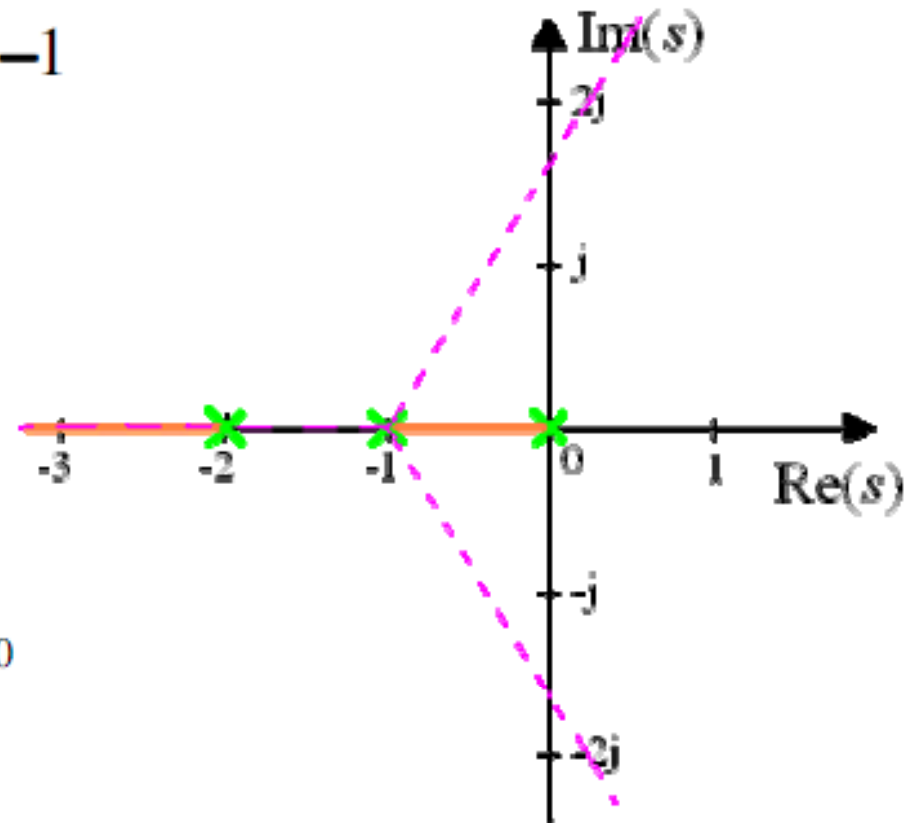
Áp dụng bước #3

$$s = \sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3 - 0} = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

$$\phi_\ell = \frac{\pm 180 (2\ell + 1)}{n - m}$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_0 = \frac{\pm 180^\circ (2 \times 0 + 1)}{3 - 0} = \pm 60^\circ \\ \phi_1 = \frac{\pm 180^\circ (2 \times 1 + 1)}{3 - 0} = \pm 180^\circ \end{cases}$$



Luật #4

Phương trình đặc trưng của hệ thống có thể viết là: $KG(s)H(s) = -1$

Điểm tách phải thỏa điều kiện sau:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Bước #4: xác định điểm tách. Biểu diễn K dưới dạng:

$$K = \frac{-1}{G(s)H(s)}.$$

Tính và giải $dK/ds=0$ để tìm pole là điểm tách

Áp dụng bước #4

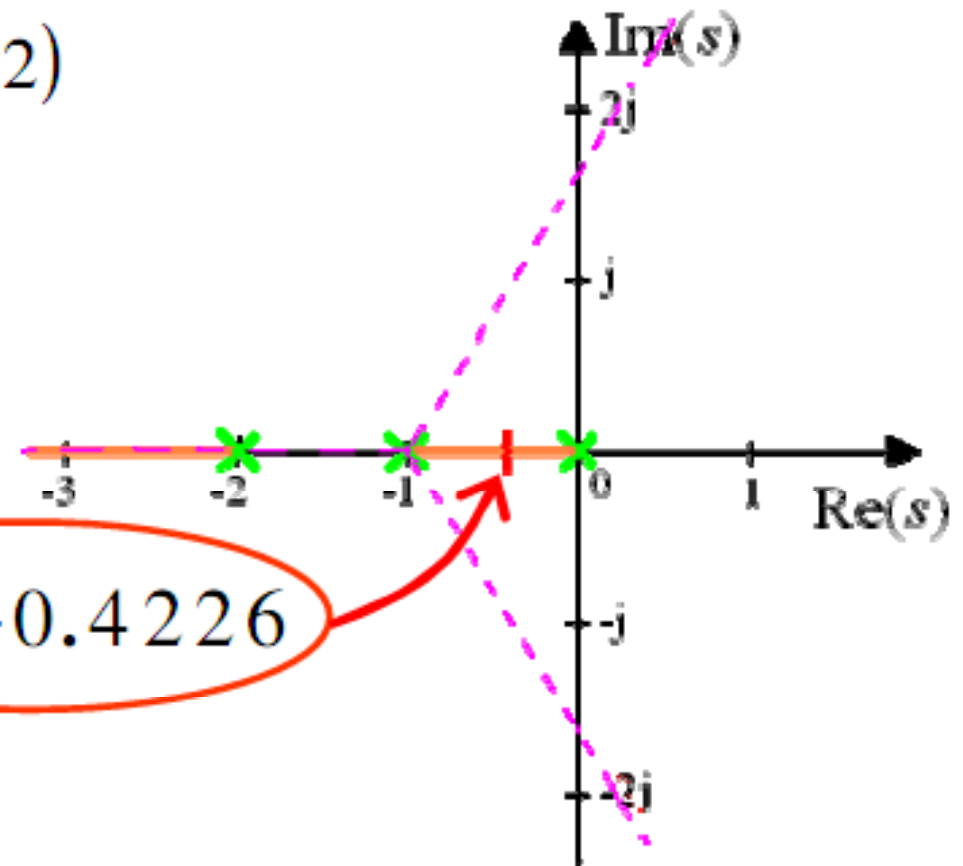
$$K = \frac{-1}{G(s)H(s)} = -s(s+1)(s+2)$$

$$K = -s^3 - 3s^2 - 2s$$

$$dK / ds = -s^3 - 3s^2 - 2s$$

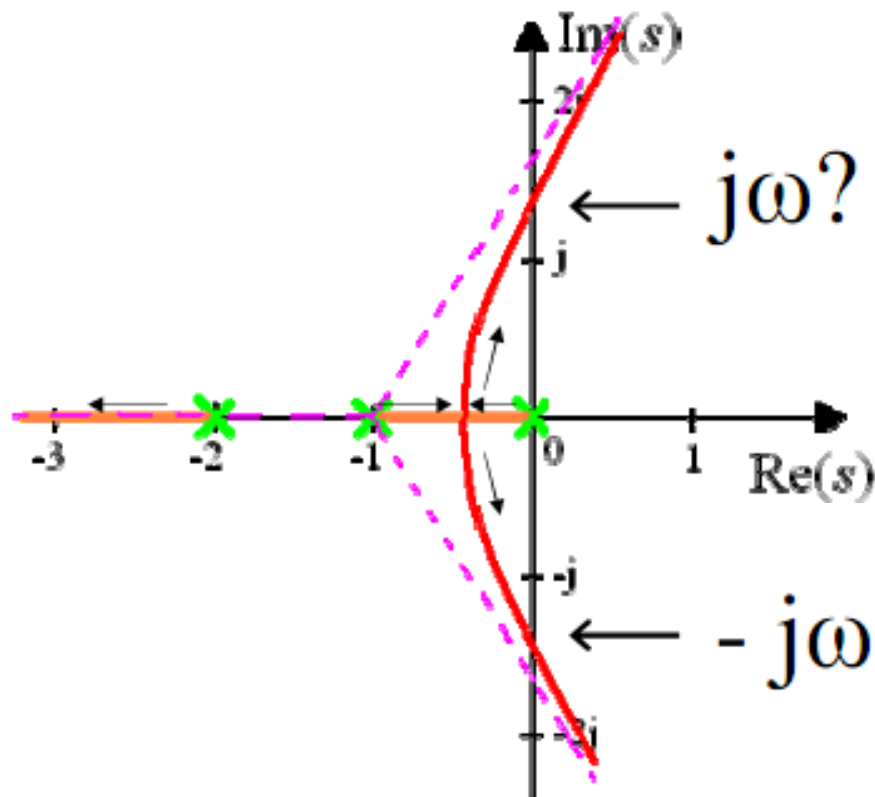
$$\Rightarrow -3s^2 - 6s - 2 = 0$$

$$s_1 = -1.5774, \quad s_2 = -0.4226$$



Bước #5

Vẽ n-m nhánh kết thúc ở vô cùng dọc theo các đường tiệm cận



Cho: $s = j\omega$

Thế vào: $1 + KG(s)H(s) = 0$

$$\Rightarrow \omega = 0 \text{ or } \omega = \pm\sqrt{2}$$

❑ Sai số xác lập là sự sai khác giữa tín hiệu vào $f(t)$ và ra $y(t)$ tại xấp

$$e(t) = f(t) - y(t) \Rightarrow E(s) = F(s) - Y(s) = F(s)[1 - T(s)]$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)[1 - T(s)]$$

■ Với $f(t)=u(t)$: $e_{ss} = e_s = \lim_{s \rightarrow 0} [1 - T(s)] \Rightarrow e_s = 1 - T(0)$

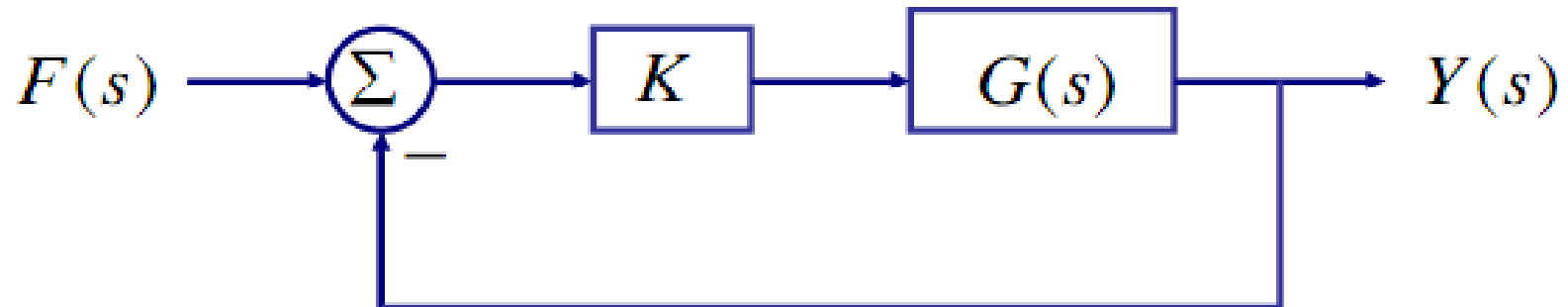
■ Với $f(t)=tu(t)$: $e_{ss} = e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[1 - T(s)]}{s}$

if $T(0)=1 \Rightarrow e_r = -T'(0)$

■ Với $f(t)=(1/2)t^2u(t)$: $e_{ss} = e_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[1 - T(s)]}{s^2}$

if $T(0)=1$ and $T'(0)=0 \Rightarrow e_p = -T''(0)/2$

□ Với hệ thống hồi tiếp đơn vị:



▪ Định nghĩa các hằng số sau:

- Hằng số sai số vị trí: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} [KG(s)]$
- Hằng số sai số vận tốc: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s[KG(s)]$
- Hằng số sai số gia tốc: $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2[KG(s)]$

- Các sai số xác lập được tính như sau:

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s}{1 + KG(s)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad ; \quad e_r = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^2}{1 + KG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

$$e_p = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^3}{1 + KG(s)} = \frac{1}{K_a}$$

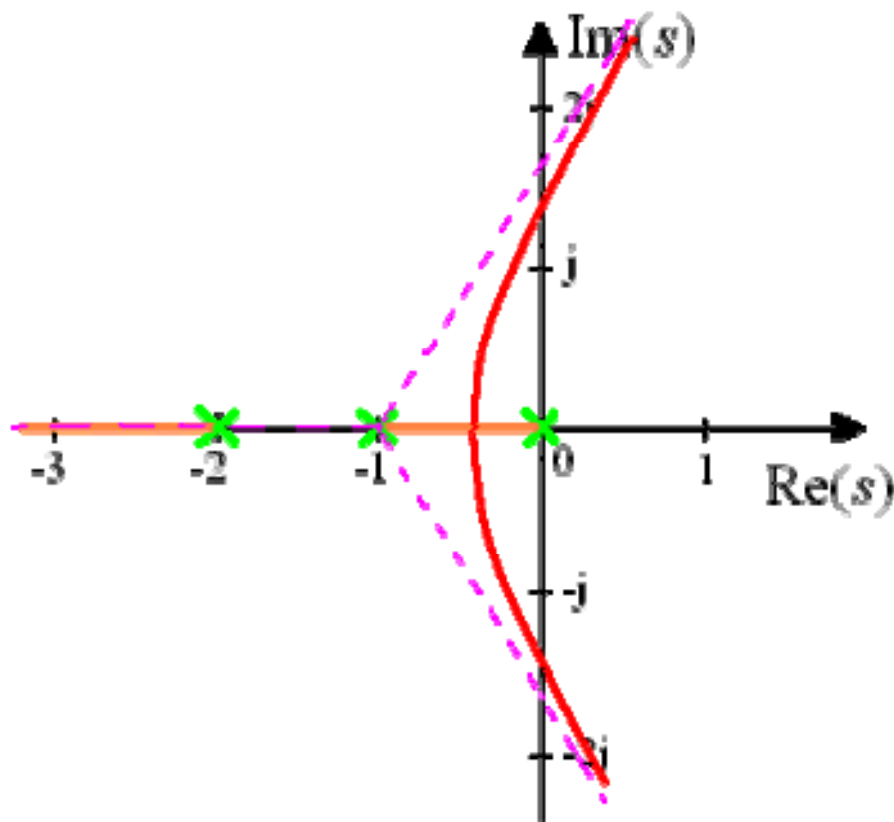
- Phân loại hệ thống điều khiển:

- Hệ thống loại 0: $e_s = \text{finite}$; $e_r = e_p = \infty$. Ví dụ: $G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+10)}$
- Hệ thống loại 1: $e_s = 0$; $e_r = \text{finite}$; $e_p = \infty$. Ví dụ: $G(s) = \frac{1}{s(s+8)}$
- Hệ thống loại 2: $e_s = e_r = 0$; $e_p = \text{finite}$. $G(s)$ có 2 poles tại gốc tọa độ
- Hệ thống loại q: có q poles tại gốc tọa độ

Sai số xác lập

- Kết luận: với hệ thống hồi tiếp đơn vị việc tăng số poles tại gốc tọa độ sẽ cải thiện chất lượng của hệ thống ở chế độ xác lập.

Vậy có nên tăng số poles tại gốc tọa độ?

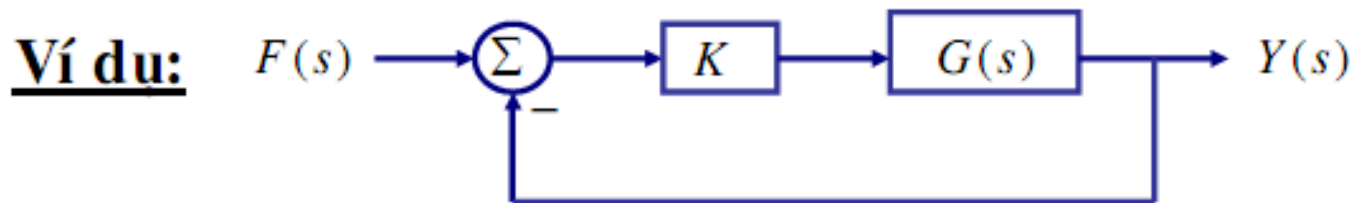


$$s = \sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

$$\phi_\ell = \frac{\pm 180^\circ (2\ell + 1)}{n - m}$$

Sai số xác lập

❑ Nói chung trong thiết kế hệ thống người ta phải xác định rõ e_{ss}



$$G(s) = \frac{1}{s(s+8)} \Rightarrow T(s) = \frac{KG(s)}{[1+KG(s)]} = \frac{K}{s^2 + 8s + K}$$

Yêu cầu thiết kế: chọn K sao cho $PO \leq 16\%$, $t_r \leq 0.5s$, $t_s \leq 2s$,
 $e_s = 0$ và $e_r \leq 0.15$

- Đảm bảo yêu cầu quá độ: $25 \leq K \leq 64$
- Đảm bảo yêu cầu xác lập: $e_s = 0; e_r = 8/K; e_p = \infty$

$$\Rightarrow 8/K \leq 0.15 \Rightarrow K \geq 53.34$$

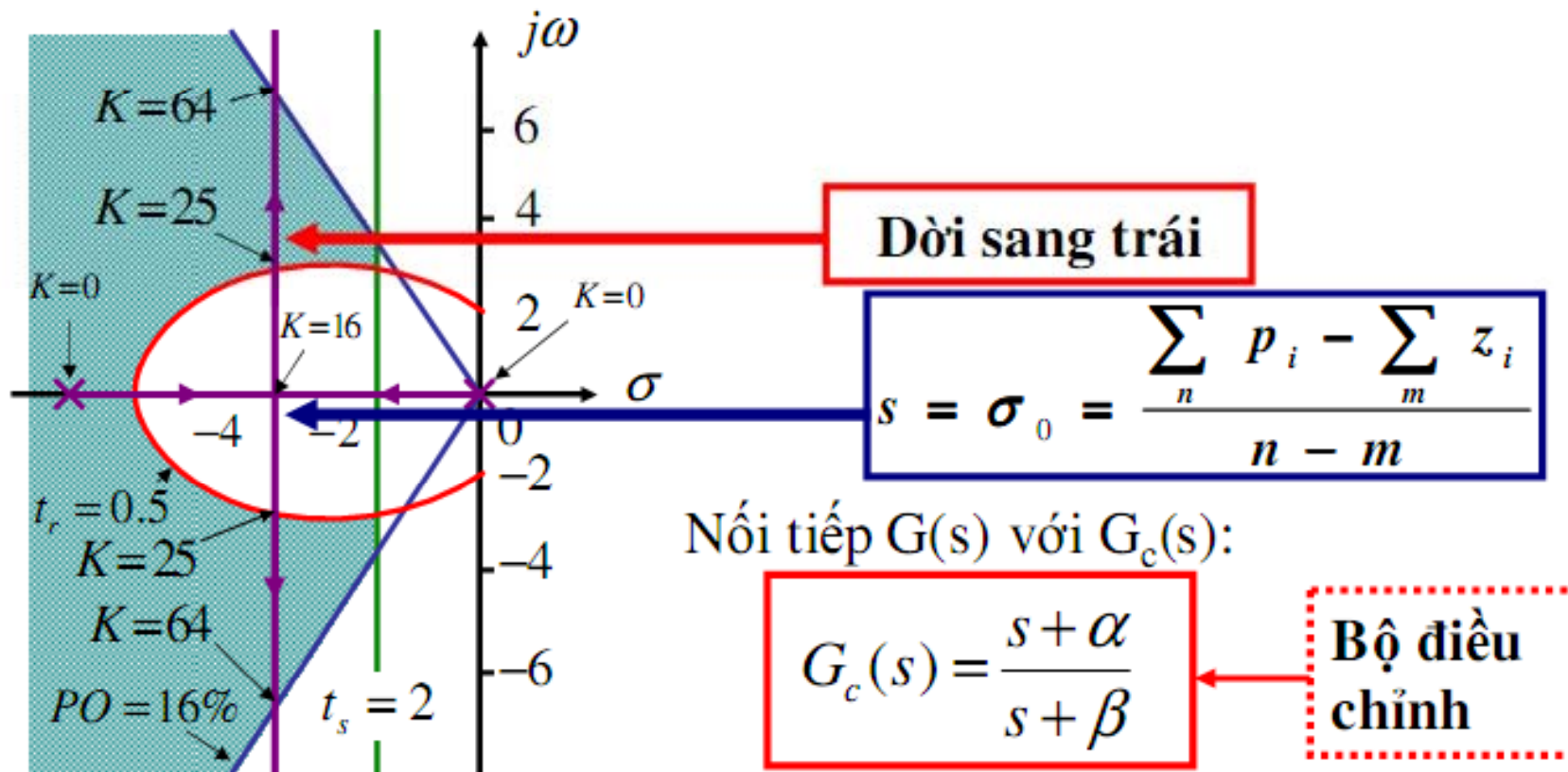
- Kết luận: $53.34 \leq K \leq 64$

Điều chỉnh hệ thống

- Trong ví dụ trước ta thấy chất lượng xác lập tốt nhất khi K lớn nhất!!!

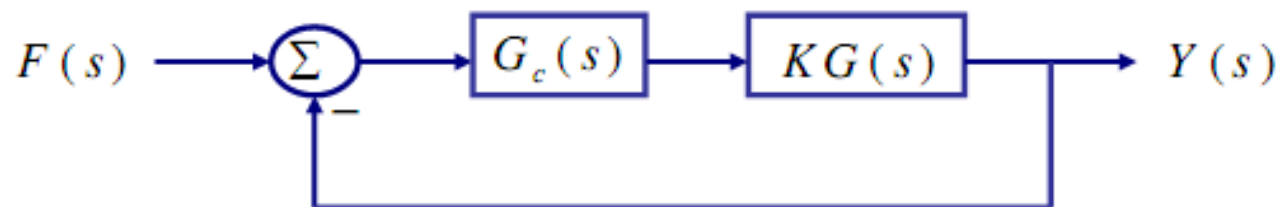
$$K = 64 \Rightarrow (e_r)_{\min} = 8/K = 8/64 = 0.125$$

Nếu yêu cầu thiết kế là $e_r < 0.125$?



Điều chỉnh hệ thống

□ Hệ thống có bộ điều chỉnh:



■ Ví dụ:

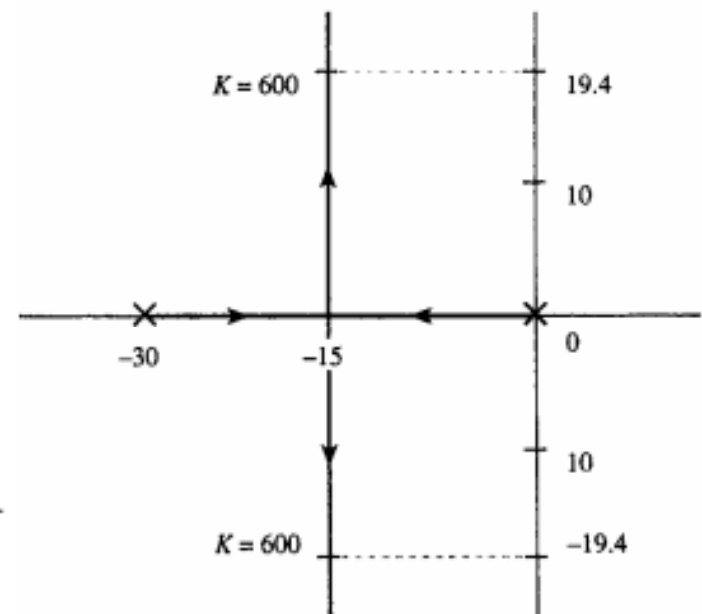
$$G(s) = \frac{1}{s(s+8)} ; PO \leq 16\%; t_r \leq 0.5; t_s \leq 2; e_s = 0; e_r \leq 0.05$$

$$e_r = 8/K \leq 0.05 \Rightarrow K \geq 160$$

Giả sử chọn:

$$G_c(s) = \frac{s+8}{s+30} \Rightarrow KG_c(s)G(s) = \frac{K}{s(s+30)}$$

Và chọn $K=600$: $\Rightarrow T(s) = \frac{600}{s^2 + 30s + 600}$



$$T(s) = \frac{600}{s^2 + 30s + 600} ; PO \leq 16\%; t_r \leq 0.5; t_s \leq 2; e_s = 0; e_r \leq 0.05$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{600} ; \zeta \omega_n = 15 \Rightarrow \zeta = 0.61$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4/15 = 0.266 < 2 \\ PO = 8.9\% < 16\% \\ t_r = 0.0747 < 0.5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_s = 0 \\ e_r = 0.05 \end{array} \right.$$

Đạt được mọi yêu cầu thiết kế!!!

Điều chỉnh hệ thống

- Với hệ thống điều khiển hồi tiếp đơn vị thì $G_c(s)=1/s$ sẽ bảo đảm cải thiện chất lượng xác lập. Tuy nhiên lại làm giảm chất lượng quá độ, và tính ổn định của hệ thống!!! Để dung hòa người ta chọn $G_c(s)$ như sau:

$$G_c(s) = \frac{s + \alpha}{s + \beta}$$

α và β chọn rất nhỏ và tỷ số α/β rất lớn

$$s = \sigma_0 = \frac{\sum_n p_i - \sum_m z_i}{n - m}$$

$$(K_p)_c = K_p \cdot G_c(0) = (\alpha/\beta) K_p \Rightarrow (e_s)_c = \frac{1}{1 + (K_p)_c} < e_s = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$(K_v)_c = K_v \cdot G_c(0) = (\alpha/\beta) K_v \Rightarrow (e_r)_c = 1/(K_v)_c < e_r = 1/K_v$$

$$(K_a)_c = K_a \cdot G_c(0) = (\alpha/\beta) K_a \Rightarrow (e_p)_c = 1/(K_a)_c < e_p = 1/K_a$$