

Môn học

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng

Khoa Điện – Điện Tử

Đại học Bách Khoa TP HCM

Email: hthoang@hcmut.edu.vn

Homepage: www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 7

LẤY MẪU TÍN HIỆU



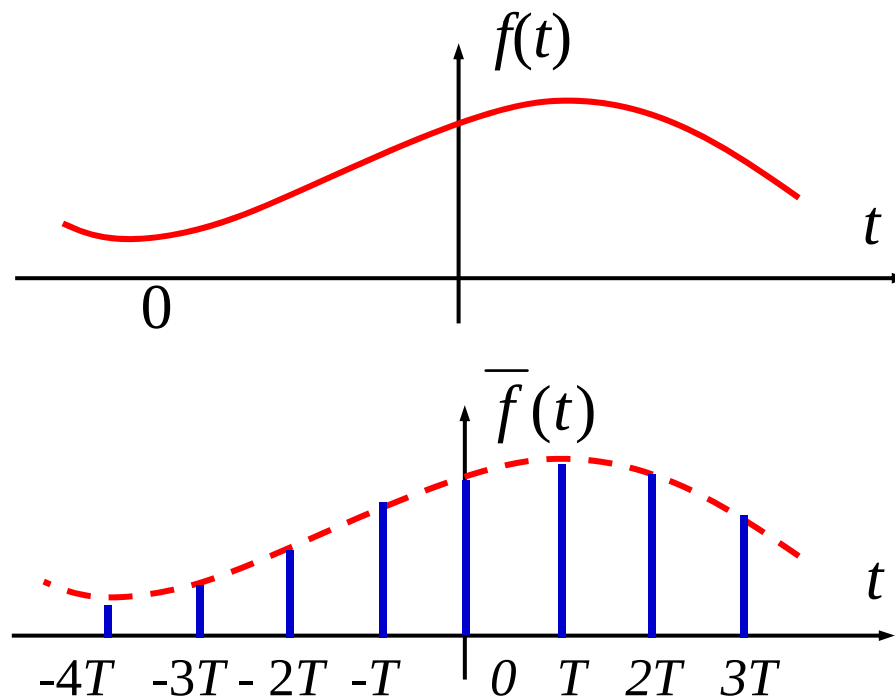
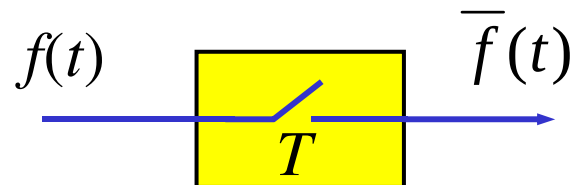
Nội dung chương 7

- ☐ Lý thuyết lấy mẫu
- ☐ Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)
- ☐ Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

LÝ THUYẾT LẤY MẪU

Khái niệm về lấy mẫu

❑ Lấy mẫu là biến đổi tín hiệu liên tục thành tín hiệu rời rạc.



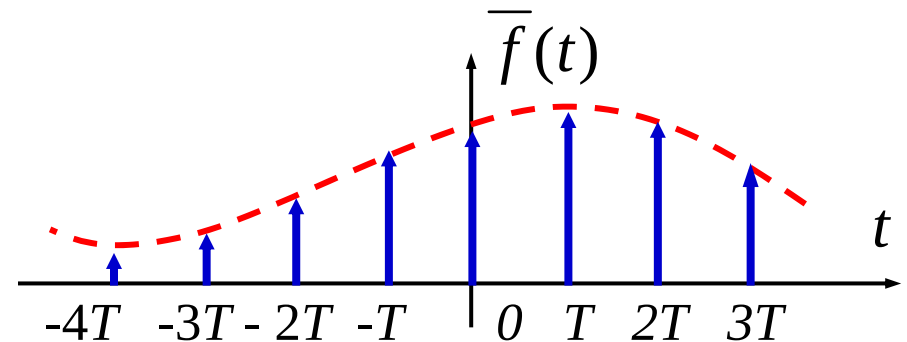
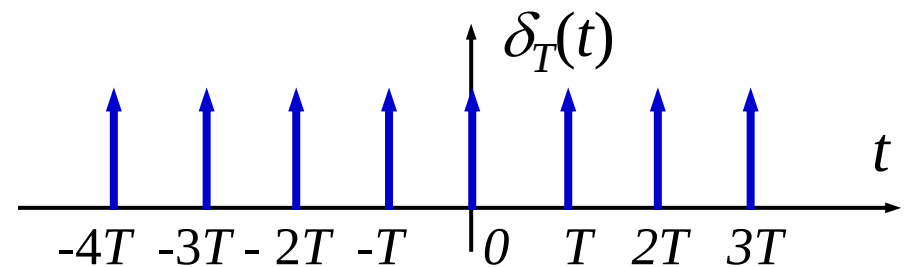
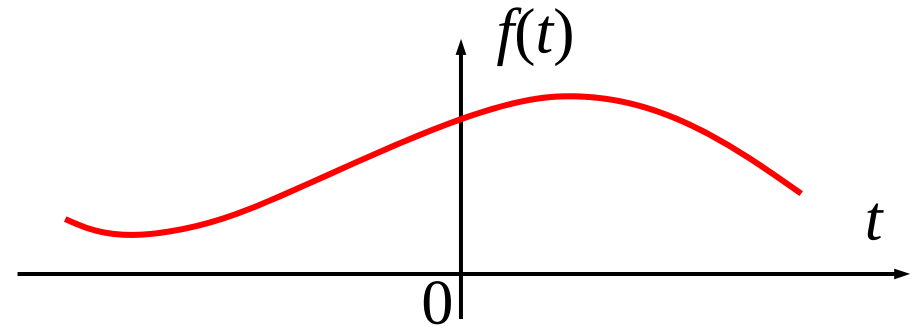
Biểu thức toán học mô tả quá trình lấy mẫu

- Về mặt toán học, tín hiệu lấy mẫu bằng tích giữa tín hiệu liên tục và chuỗi xung dirac:

$$\begin{aligned}\bar{f}(t) &= f(t) \cdot \delta_T(t) \\ &= f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\end{aligned}$$

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

Đặt $F_s = \frac{1}{T}$; $\omega_s = 2\pi F_s$
là tần số lấy mẫu



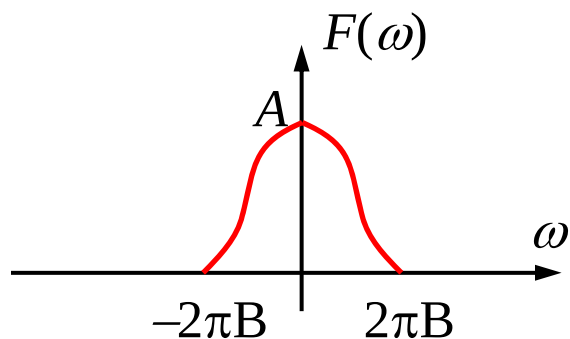
Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

❑ Phân tích $\delta_T(t)$ thành chuỗi Fourier (xem chương 3):

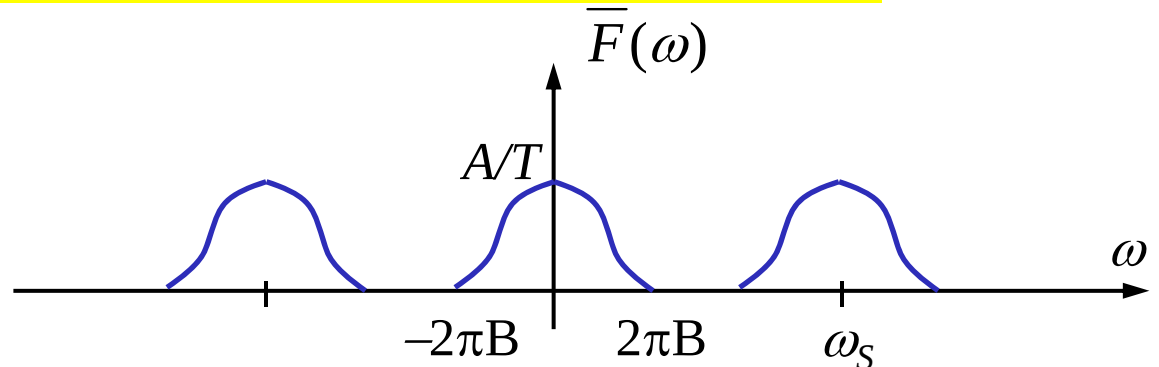
$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\omega_s t) \right)$$

$$\Rightarrow \bar{f}(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) = \frac{1}{T} \left(f(t) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} f(t) \cos(n\omega_s t) \right)$$

$$\Rightarrow \bar{F}(\omega) = \frac{1}{T} \left(F(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} [F(\omega - n\omega_s) + F(\omega + n\omega_s)] \right)$$



Phổ của tín hiệu gốc



Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

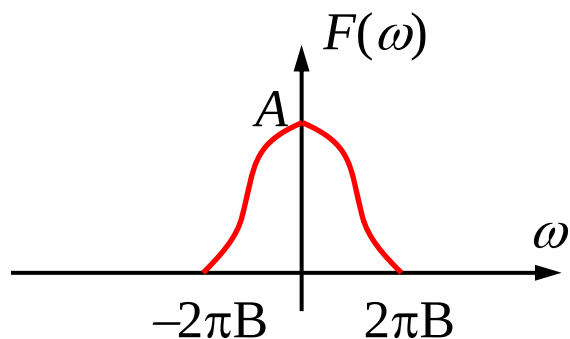
Định lý lấy mẫu

❑ Tín hiệu liên tục $f(t)$ có phổ giới hạn là B Hz có thể được khôi phục chính xác từ các mẫu rời rạc $\bar{f}(t)$ nếu tần số lấy mẫu thỏa điều kiện:

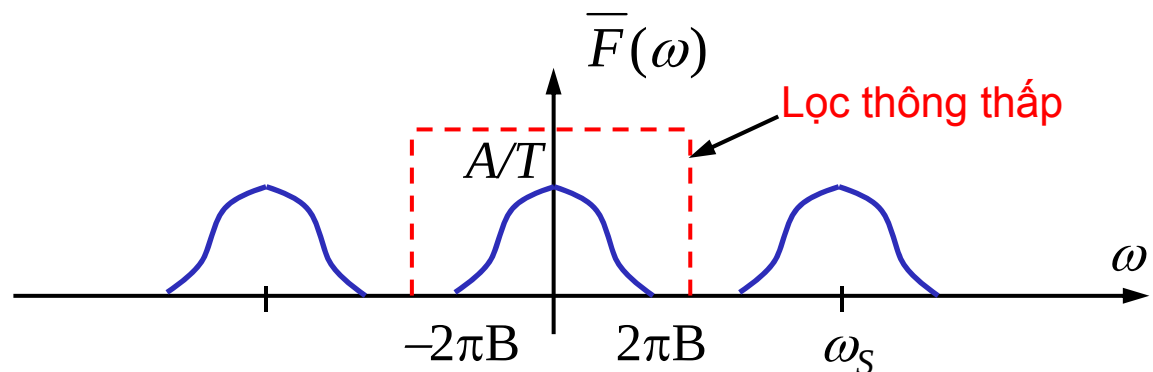
$$F_s \geq 2B$$

➤ Tần số Nyquist (tần số lấy mẫu tối thiểu): $F_s = 2B$

➤ Khoảng cách Nyquist (khoảng cách lấy mẫu tối đa): $T = \frac{1}{2B}$



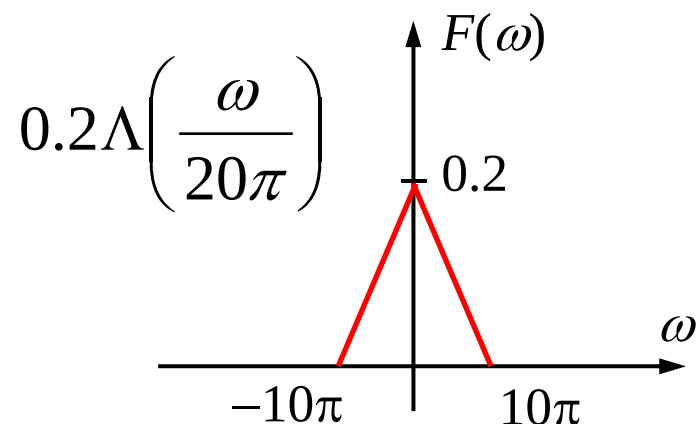
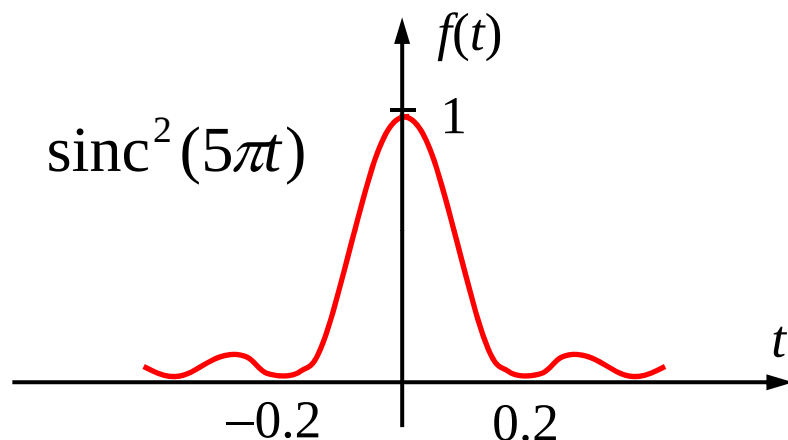
Phổ của tín hiệu gốc



Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

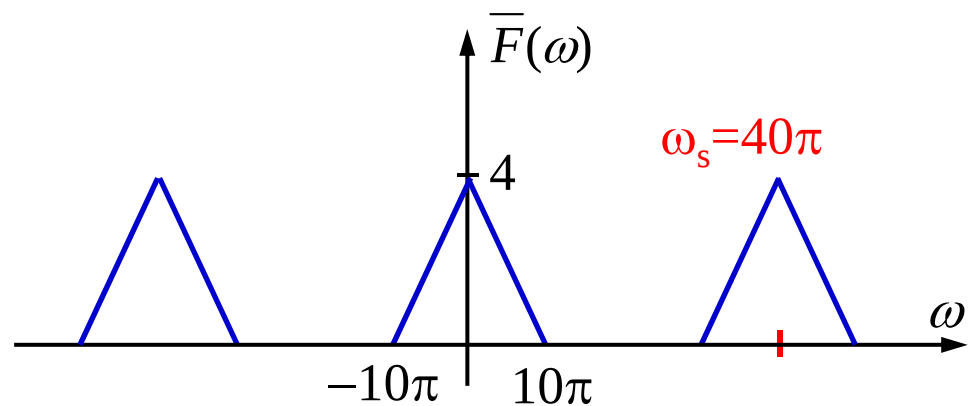
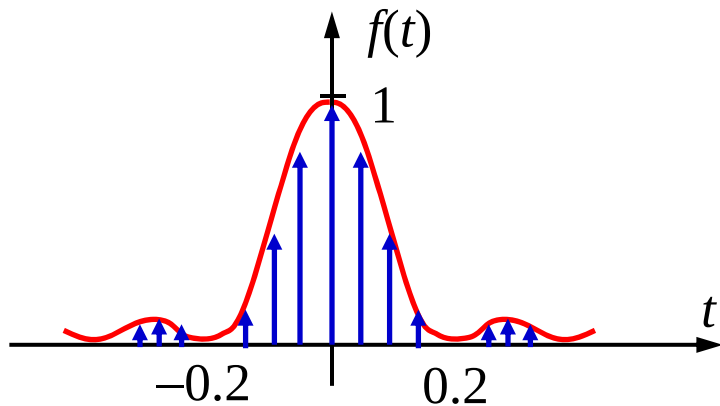
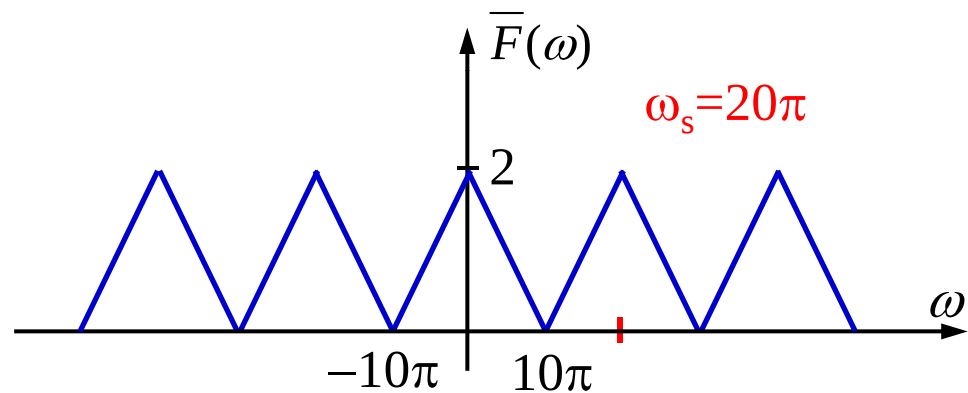
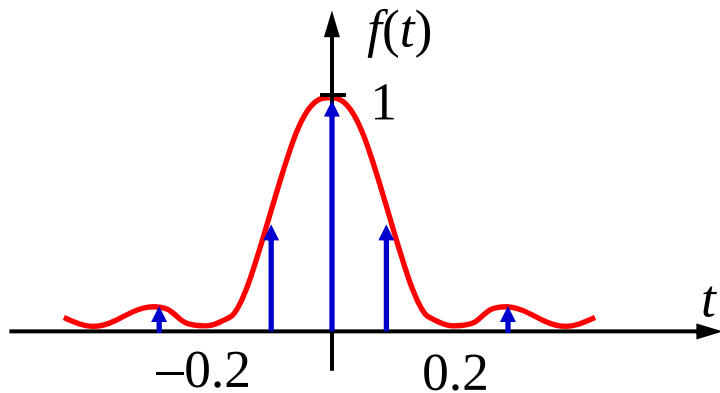
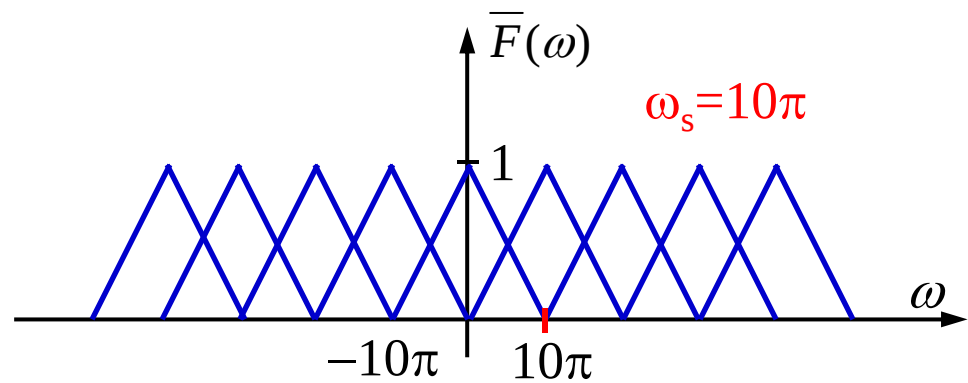
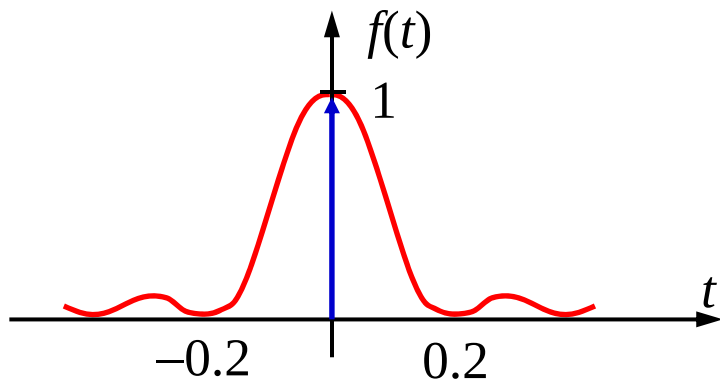
❑ Lấy mẫu tín hiệu $f(t) = \text{sinc}^2(5\pi t)$ ($B=5\text{Hz}$)

Khảo sát 3 tần số lấy mẫu khác nhau: $F_s = 5\text{Hz}$, 10Hz , và 20Hz



Tần số lấy mẫu F_s	Khoảng cách lấy mẫu T	$\frac{1}{T} F(\omega)$	Ghi chú
5 Hz	0.2	$\Lambda\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$	Undersampling
10 Hz	0.1	$2\Lambda\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$	Nyquist Rate
20 Hz	0.05	$4\Lambda\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$	Oversampling

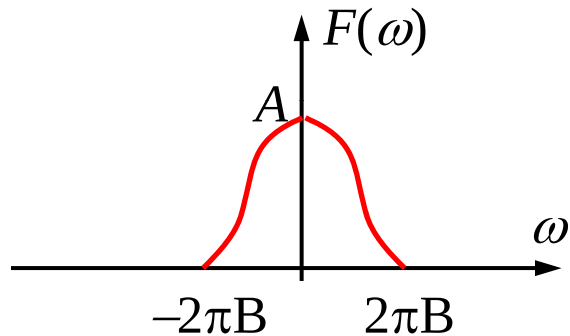
Ví dụ (tt)



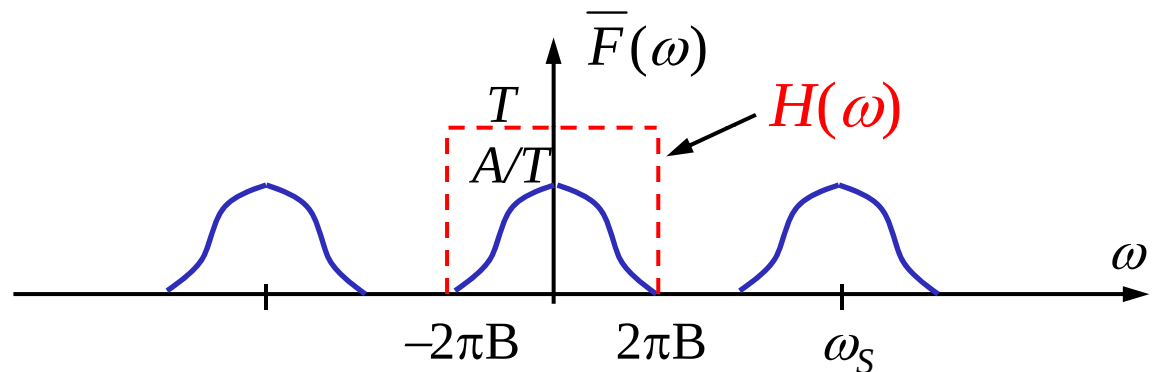
Khôi phục tín hiệu

❑ Hàm truyền bộ lọc lý tưởng khôi phục tín hiệu:

$$H(\omega) = T \text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$



Phổ của tín hiệu gốc



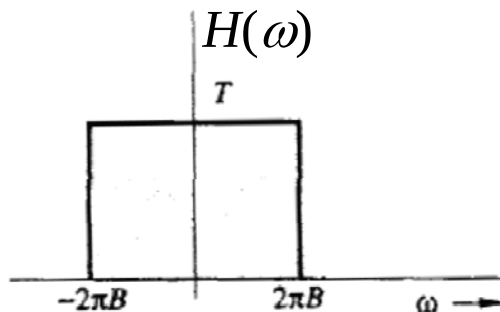
Phổ của tín hiệu được lấy mẫu

❑ Phổ của tín hiệu khôi phục dùng bộ lọc lý tưởng:

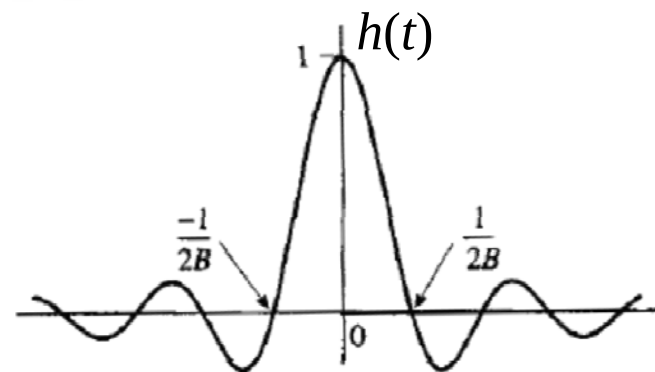
$$F_R(\omega) = H(\omega) \cdot \bar{F}(\omega) = F(\omega)$$

$$\Leftrightarrow f_R(t) = h(t) * \bar{f}(t) = f(t)$$

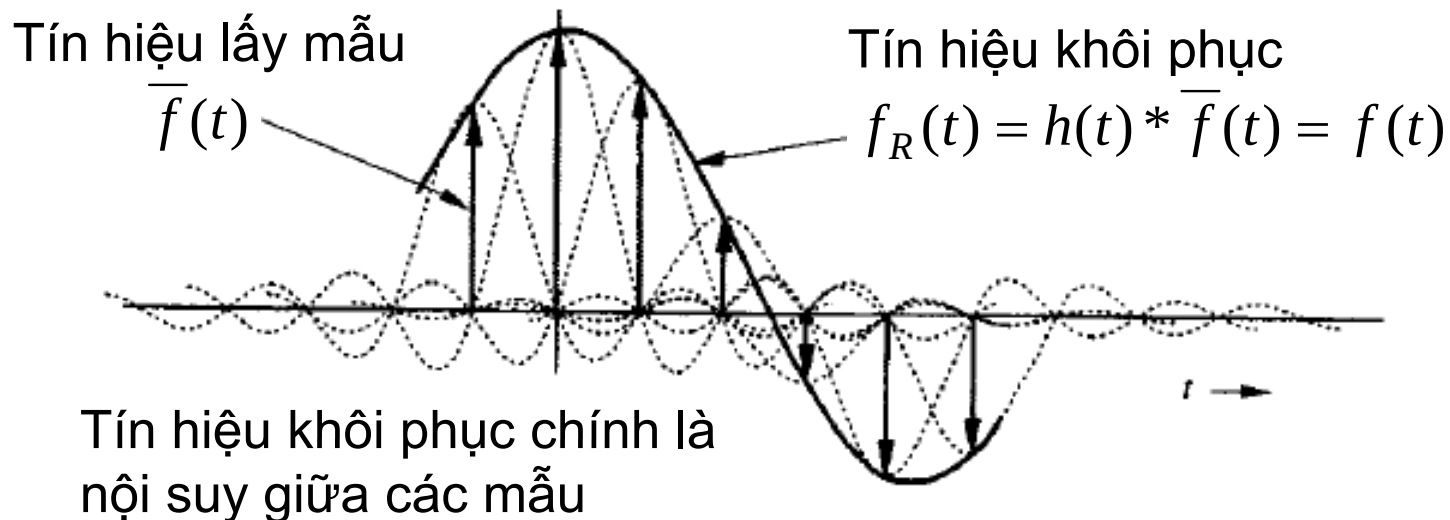
Khôi phục tín hiệu (tt)



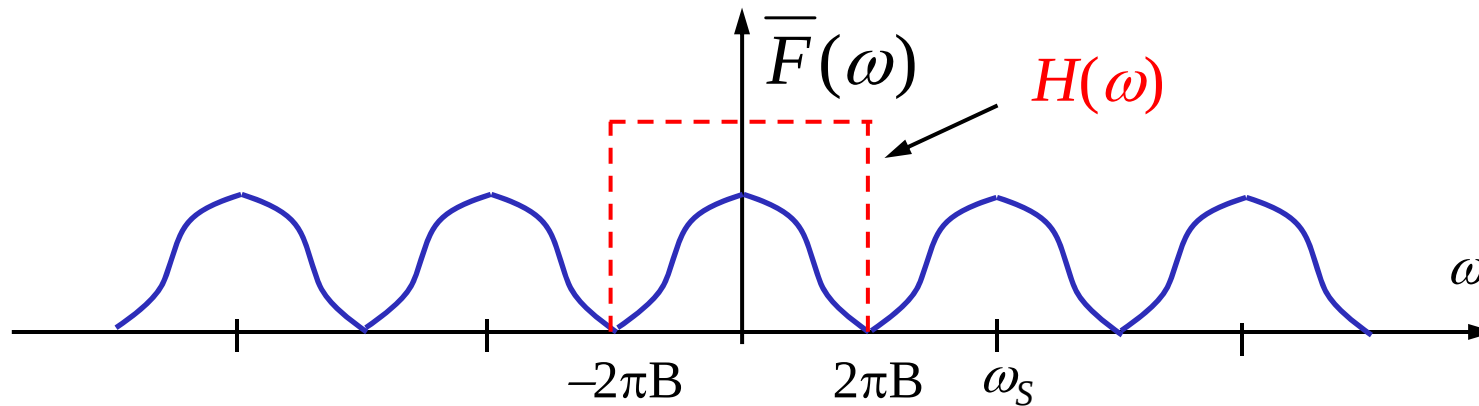
Phổ tần số của bộ lọc
khôi phục tín hiệu lý tưởng



Đáp ứng xung của bộ lọc
khôi phục tín hiệu



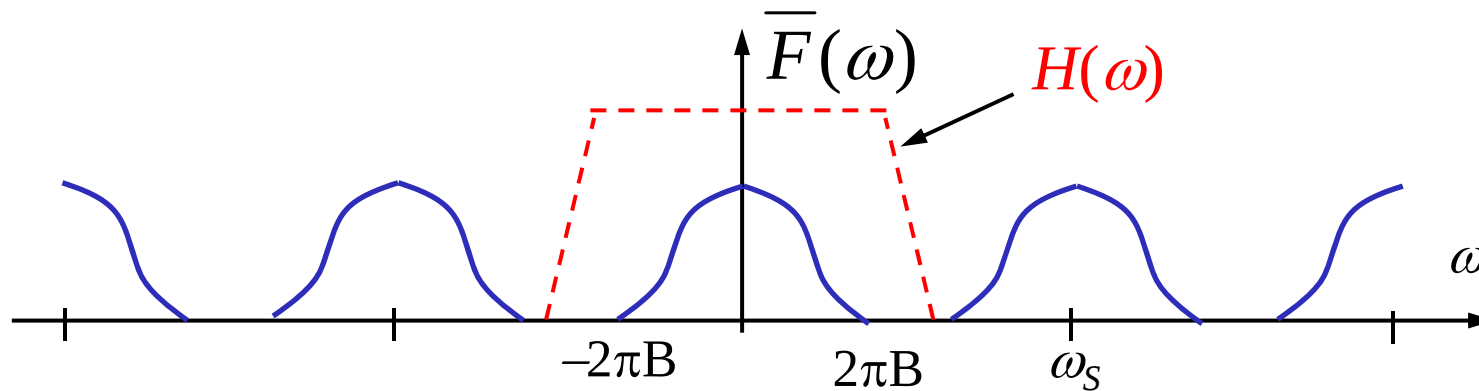
Khó khăn trong khôi phục tín hiệu



Phổ của tín hiệu lấy mẫu bằng tần số Nyquist

- ❑ Nếu tần số lấy mẫu đúng bằng tần số Nyquist ($F_s = 2B$)
- ⇒ Không có khoảng trống trong phổ của tín hiệu lấy mẫu
- ⇒ Muốn khôi phục lại tín hiệu gốc không bị méo dạng thì bộ lọc khôi phục phải là bộ lọc thông thấp lý tưởng ⇒ không khả thi

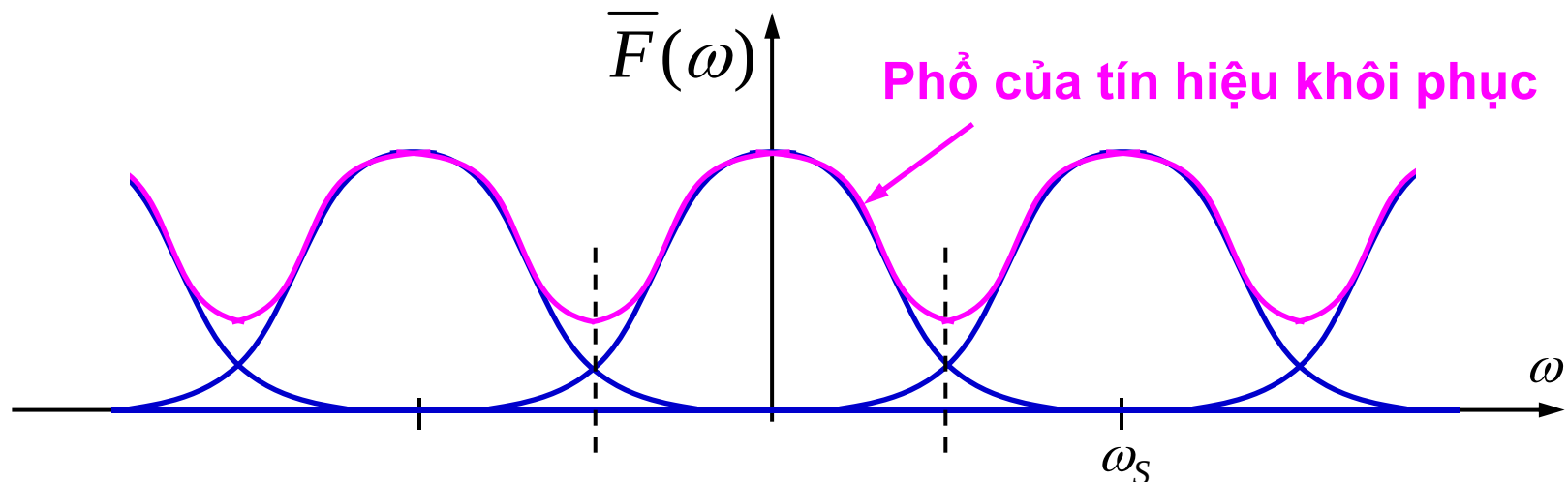
Khó khăn trong khôi phục tín hiệu



Phổ của tín hiệu lấy mẫu cao hơn tần số Nyquist

- ❑ Nếu tần số lấy mẫu cao hơn tần số Nyquist ($F_s > 2B$)
 $\Rightarrow$ có khoảng trống trong phổ của tín hiệu lấy mẫu
 $\Rightarrow$ Biên độ của bộ lọc khôi phục tại tần số cắt không cần phải giảm đột ngột
- ❑ Tuy nhiên để tín hiệu khôi phục không bị méo, biên độ của bộ lọc khôi phục phải bằng 0 bên ngoài chu kỳ đầu tiên của $\bar{F}(\omega)$, không có bộ lọc thực tế nào thỏa mãn yêu cầu này
 $\Rightarrow$ **Tín hiệu khôi phục thực tế bị méo dạng**

Hiện tượng chồng phổ (spectral aliasing)



Phổ của tín hiệu lấy mẫu có băng thông vô hạn

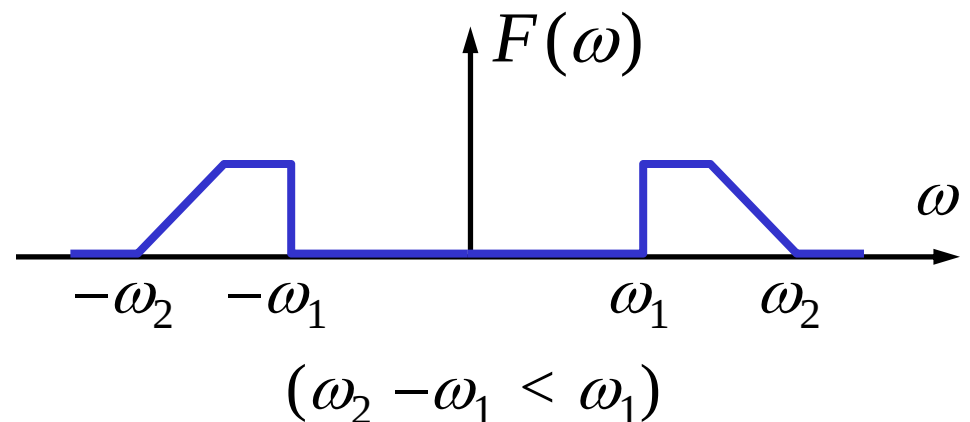
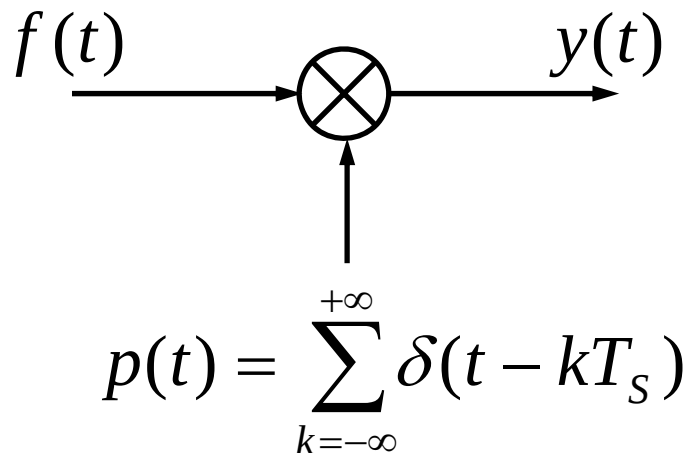
- ❑ Đa số tín hiệu thực tế có thời gian giới hạn
- ⇒ phổ của tín hiệu có băng thông vô hạn
- ⇒ luôn có hiện tượng chồng phổ với mọi tần số lấy mẫu
- ⇒ phổ của tín hiệu khôi phục bị méo dạng
- ❑ Giải pháp: sử dụng bộ lọc chống chồng phổ (antialiasing filter) để giới hạn băng thông của tín hiệu trước khi lấy mẫu

□ Tín hiệu $f(t) = \text{sinc}(200\pi t)$ được lấy mẫu bởi chuỗi xung đơn vị tuần hoàn với các tần số lấy mẫu lần lượt như sau:

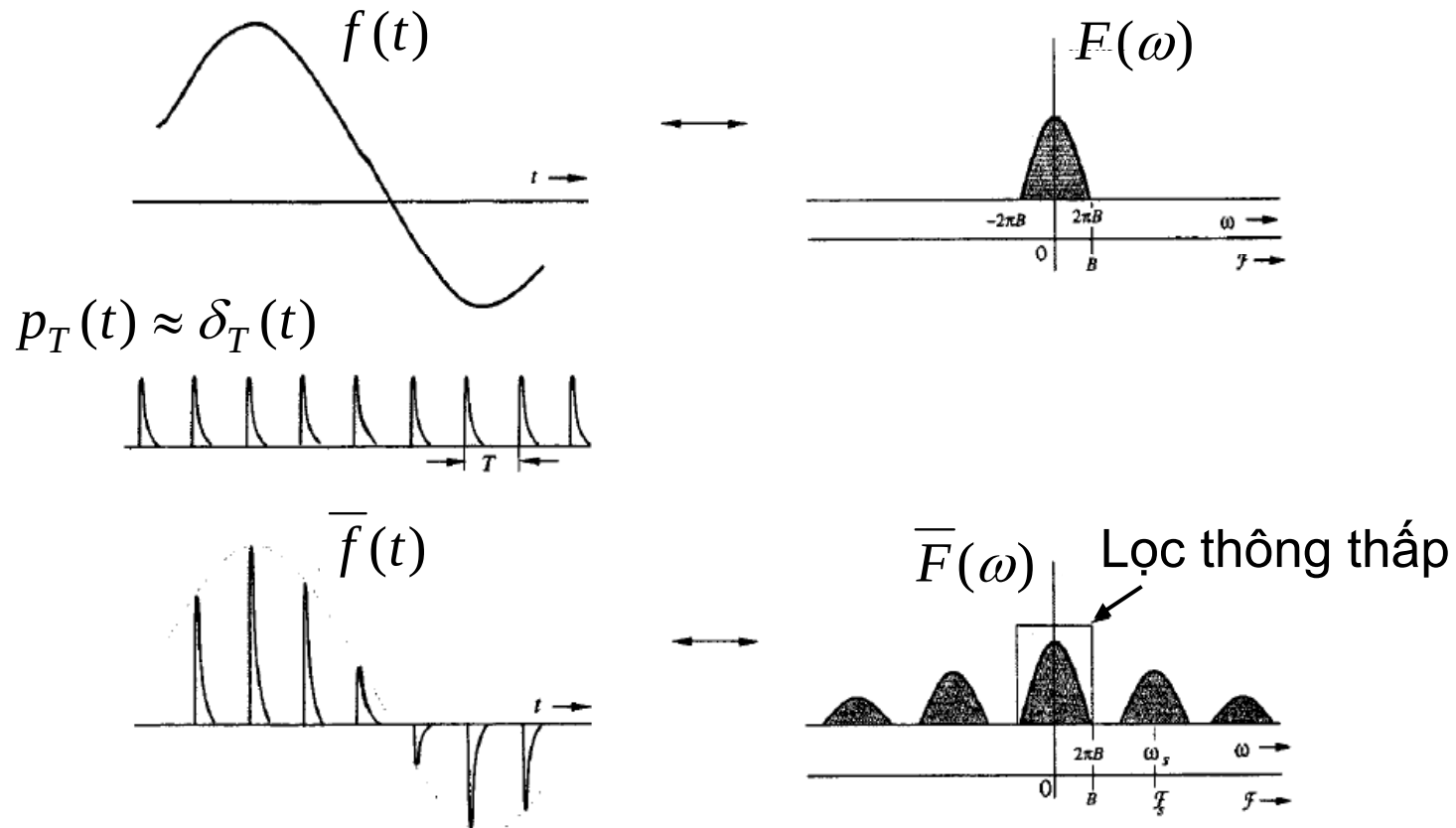
(a) 150Hz, (b) 200Hz, (c) 300Hz.

Vẽ phổ của tín hiệu đã lấy mẫu tương ứng với các trường hợp trên. Có thể khôi phục lại tín hiệu gốc $f(t)$ từ tín hiệu lấy mẫu được không, giải thích? Cho tín hiệu đã được lấy mẫu qua bộ lọc thông thấp lý tưởng có băng thông 100Hz, vẽ phổ của tín hiệu ngõ ra bộ lọc

- Cho hệ thống lấy mẫu lý tưởng với chu kỳ lấy mẫu là T_s .
- (a) Theo định lý lấy mẫu thì chu kỳ lấy mẫu lớn nhất ($T_{\max}$) là bao nhiêu, vẽ $Y(\omega)$ tương ứng.
- (b) Nếu $T_s = 2\pi/\omega_2$, hãy xác định và vẽ $Y(\omega)$
- (c) Xác định sơ đồ khối khôi phục lại $f(t)$ từ $y(t)$ cho cả hai trường hợp ở câu (a) và (b)



Lấy mẫu thực tế

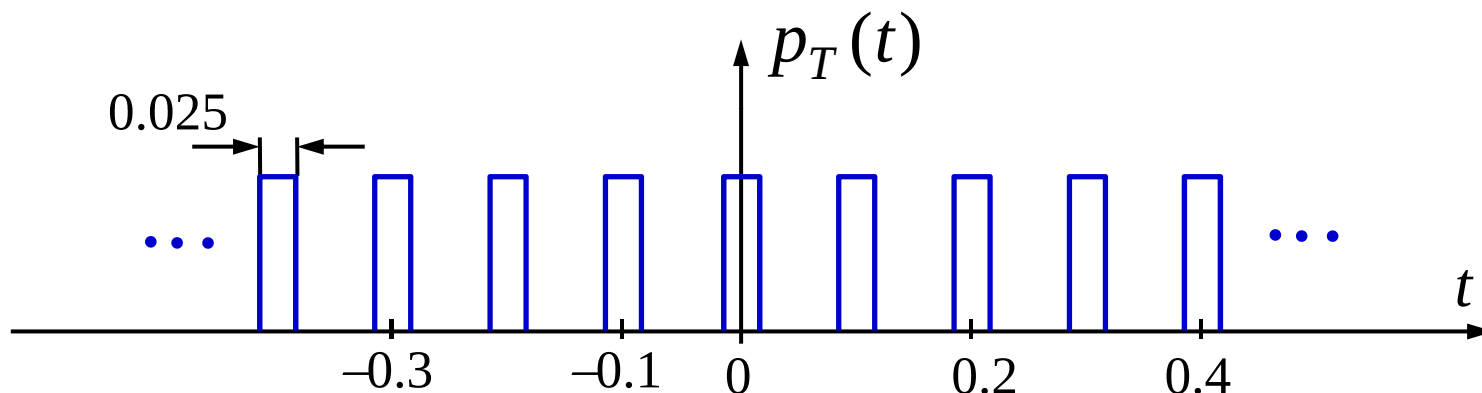


- ❑ Thực tế, chuỗi xung dirac được thực hiện bằng chuỗi xung có biên độ hữu hạn và độ rộng xung khác 0.
- ❑ Nếu tần số lấy mẫu lớn hơn tần số Nyquist thì vẫn có thể khôi phục được tín hiệu ban đầu từ các mẫu rời rạc (Lathi, 1998)

Ví dụ lấy mẫu thực tế

□ Cho tín hiệu $f(t) = \text{sinc}^2(5\pi t)$

Lấy mẫu $f(t)$ bằng chuỗi xung cổng $p_T(t)$ như hình vẽ. Hãy xác định và vẽ phổ của tín hiệu rời rạc sau khi lấy mẫu.



□ **Giải**

□ Chu kỳ lấy mẫu (chu kỳ của $p_T(t)$) là 0.1 giây, tần số lấy mẫu là:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 20\pi$$

Ví dụ lấy mẫu thực tế

□ Phân tích $p_T(t)$ thành chuỗi Fourier:

$$p_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_S t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{0.1} \int_{-0.05}^{0.05} p_T(t) dt = \frac{1}{0.1} \int_{-0.0125}^{0.0125} dt = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{0.1} \int_{-0.05}^{0.05} p_T(t) \cos(n\omega_S t) dt \\ &= \frac{2}{0.1} \int_{-0.0125}^{0.0125} \cos(20n\pi t) dt = \frac{4}{0.1} \frac{\sin(20n\pi t)}{20n\pi} \Big|_{t=0}^{0.0125} = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{0.1} \int_{-0.05}^{0.05} p_T(t) \sin(n\omega_S t) dt = \frac{2}{0.1} \int_{-0.0125}^{0.0125} \sin(20n\pi t) dt = 0$$

Ví dụ lấy mẫu thực tế

$$C_0 = a_0 = \frac{1}{4} \qquad C_n = a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow p_T(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos(20n\pi t)$$

□ Suy ra tín hiệu sau lấy mẫu là:

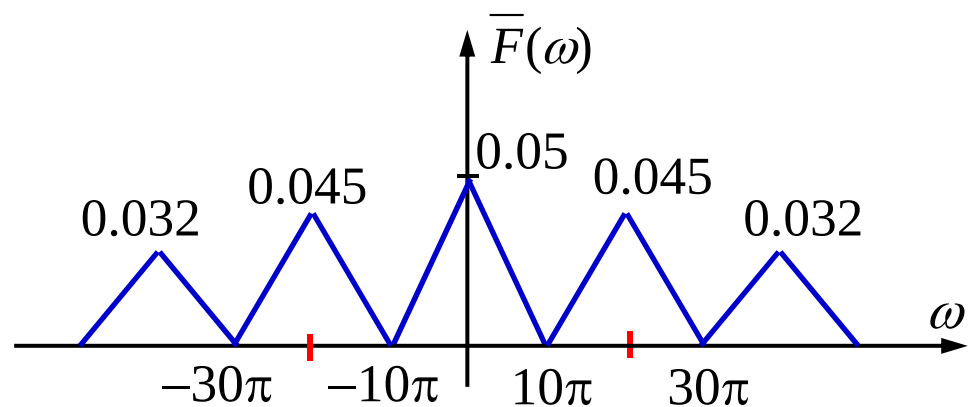
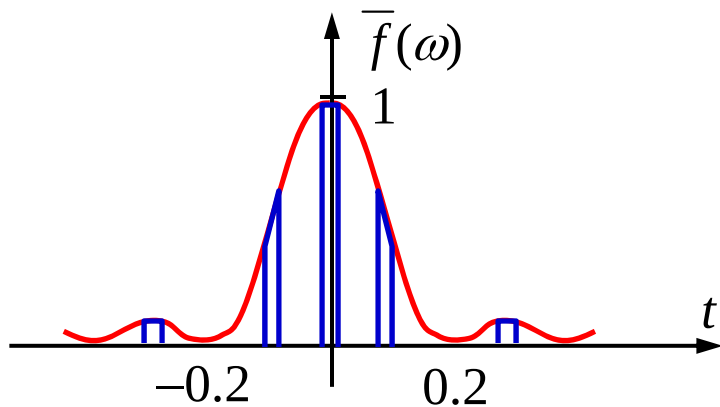
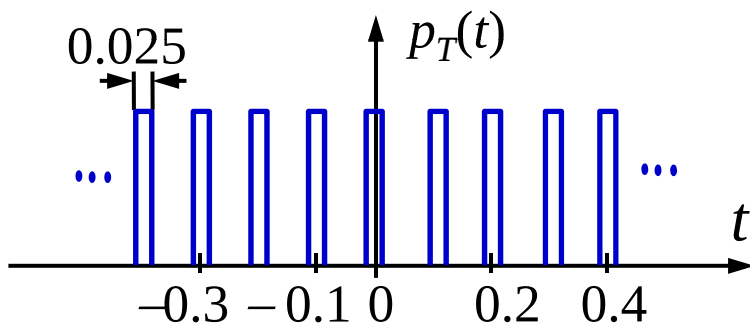
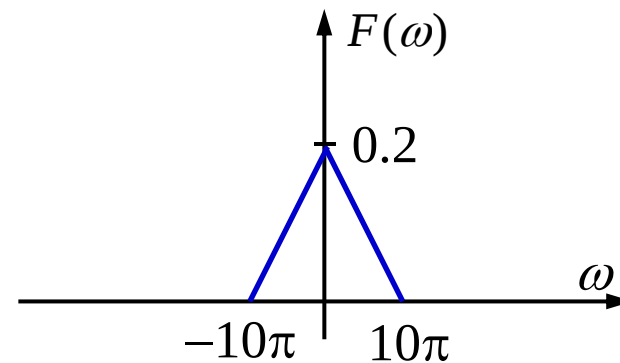
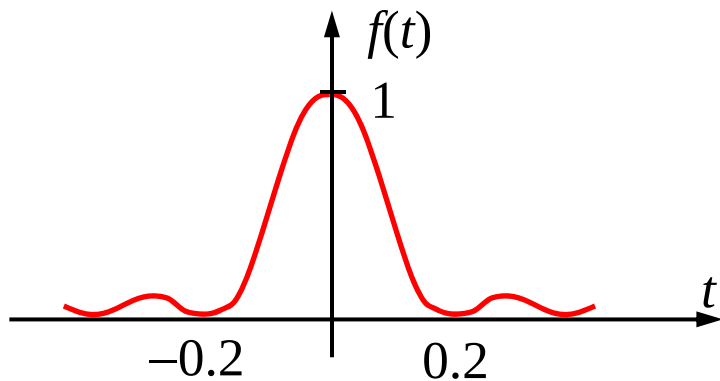
$$\bar{f}(t) = f(t)p_T(t) = \frac{1}{4} f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) f(t) \cos(20n\pi t)$$

□ Phổ của tín hiệu sau lấy mẫu là:

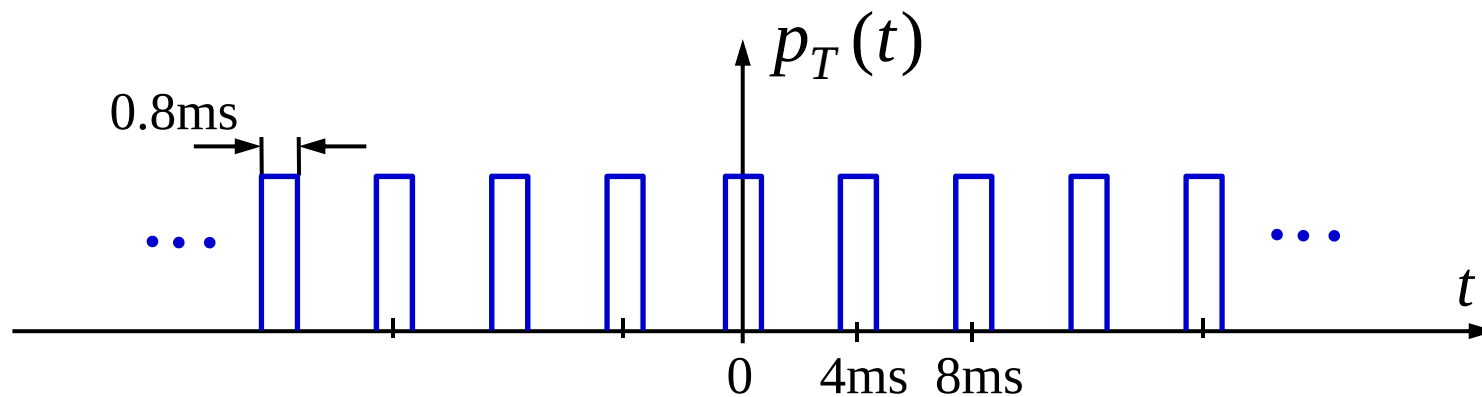
$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{4} F(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) [F(\omega + 20n\pi) + F(\omega - 20n\pi)]$$

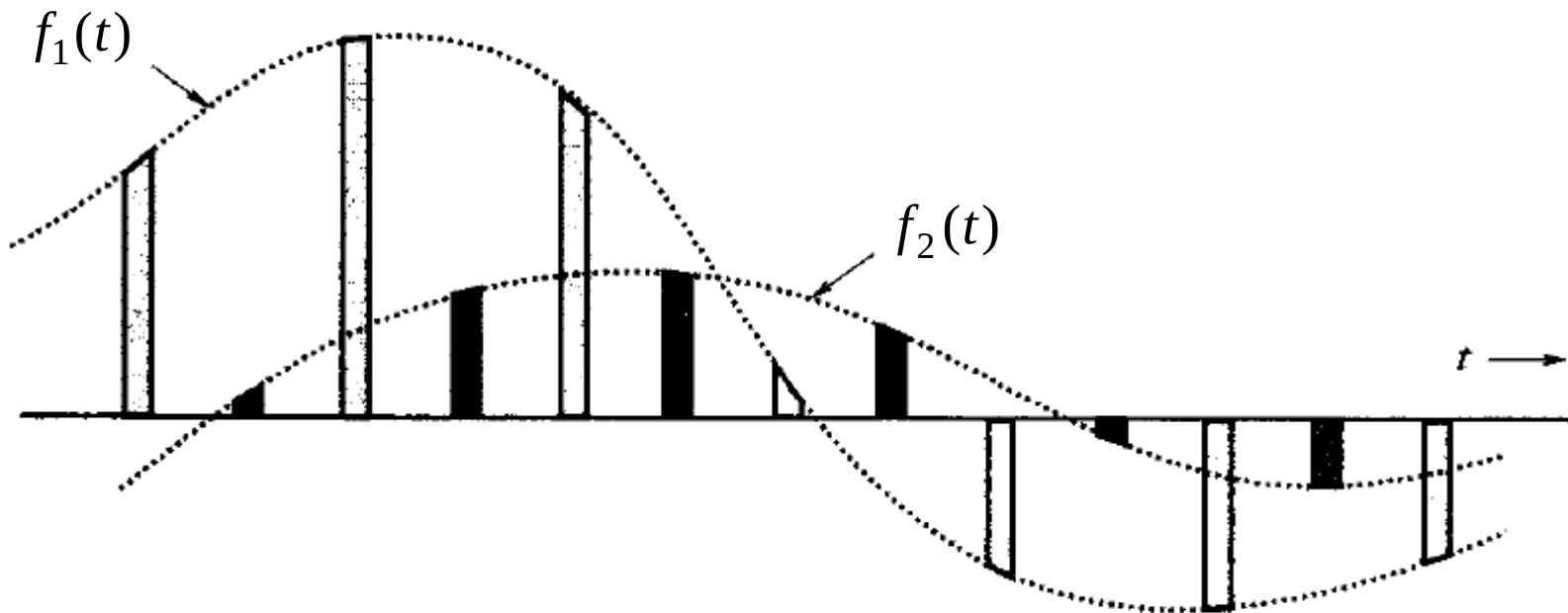
$$\text{với } f(t) = \text{sinc}^2(5\pi t) \longleftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{5} \Lambda\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

Ví dụ (tt)



Tín hiệu $f(t)=\text{sinc}(200\pi t)$ được lấy mẫu bởi tín hiệu xung tuần hoàn $p_T(t)$ như hình vẽ. Hãy tìm và vẽ phổ của tín hiệu đã được lấy mẫu? Cho tín hiệu đã được lấy mẫu đi qua bộ lọc thông thấp lý tưởng có băng thông bằng 100Hz, hãy xác định tín hiệu ngõ ra của bộ lọc?

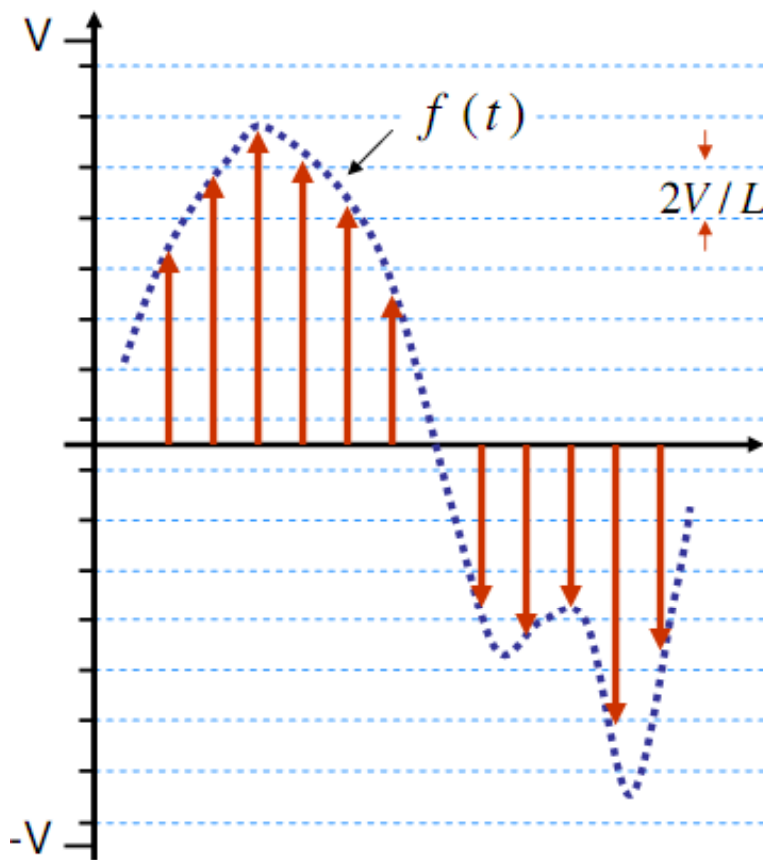




- ❑ Ghép kênh phân chia thời gian (Time Division Multiplexing – TDM) cho phép truyền nhiều tín hiệu trên cùng 1 kênh

Ứng dụng của lấy mẫu: Điều chế mã xung

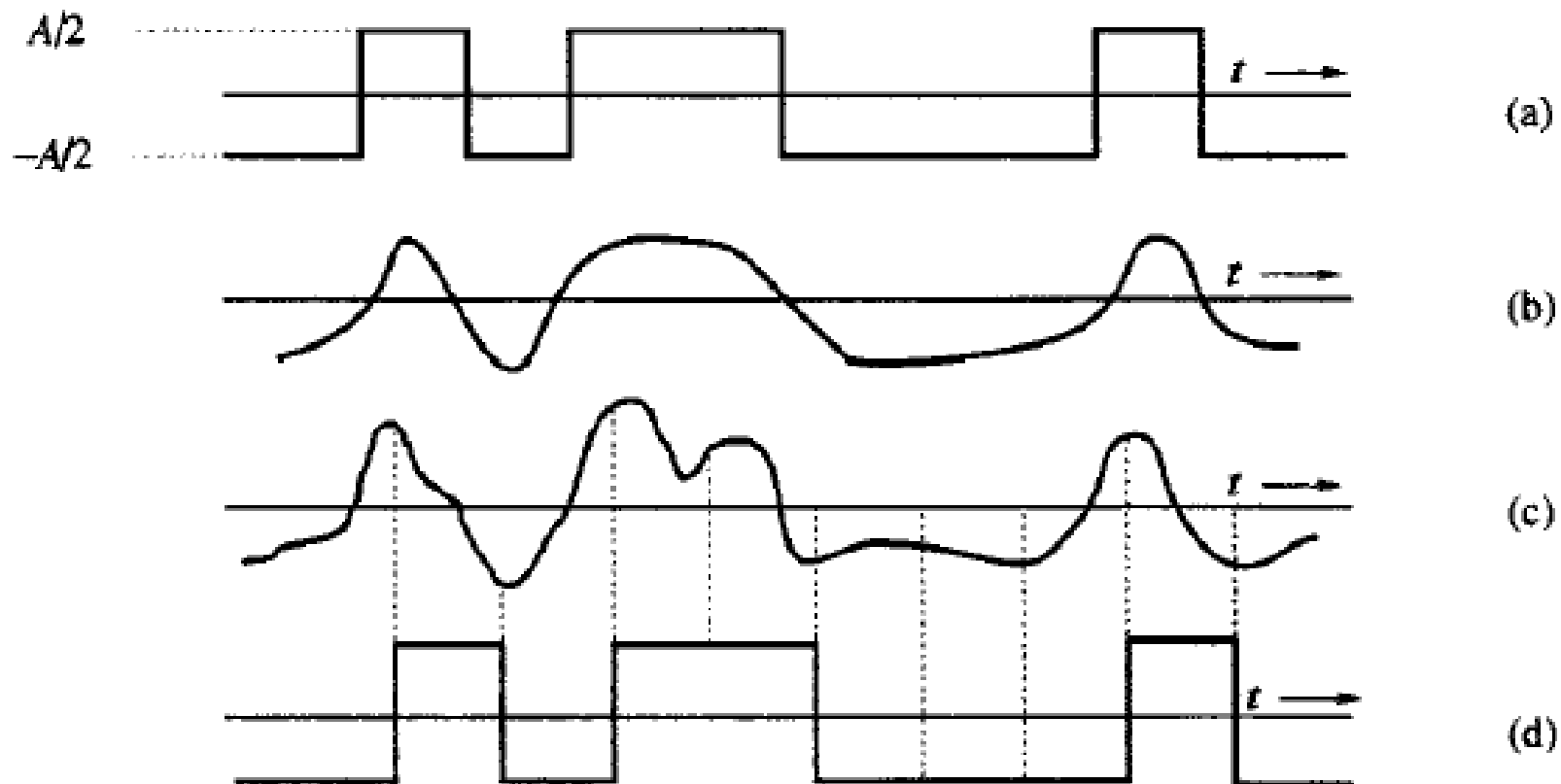
- Điều chế mã xung (Pulse Code Modulation-PCM) là phương pháp chuyển đổi A/D, biến đổi tín hiệu tương tự thành tín hiệu số mã hóa bằng 1 chuỗi xung.



Digit	Binary equivalent	Pulse code waveform
0	0000	
1	0001	
2	0010	
3	0011	
4	0100	
5	0101	
6	0110	
7	0111	
8	1000	
9	1001	
10	1010	
11	1011	
12	1100	
13	1101	
14	1110	
15	1111	

Ưu điểm của tín hiệu số

- Ưu điểm trong truyền dẫn: khôi phục chính xác tín hiệu (chống méo dạng, nhiễu,...), các bộ phát lặp lại (Repeater) không cộng dồn nhiễu, có khả năng sửa lỗi ở đầu thu.



Ưu điểm của tín hiệu số

- ❑ Ưu điểm trong xử lý:
 - Xử lý số có tính mềm dẻo, dễ dàng thực hiện bằng cách lập trình các thuật toán cho vi xử lý, DSP (Digital signal processor)
 - Dễ dàng ghép kênh số (TDM)
 - Lưu trữ dễ dàng, giá thành thấp, tìm kiếm và chỉnh sửa dễ dàng
- ❑ Hiệu quả kinh tế: giá thành phần cứng xử lý số càng giảm trong khi khả năng tính toán và hiệu quả tăng

BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC



Đọc thêm: Biến đổi Fourier rời rạc

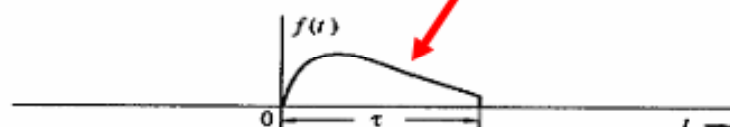
- ❑ Biến đổi Fourier rời rạc (Discrete Fourier Transform – DFT)
- ❑ Biến đổi Fourier nhanh (Fast Fourier Transform – FFT)

- ❖ Môn học “Xử lý số tín hiệu” sẽ đề cập chi tiết các vấn đề lý thuyết và ứng dụng DFT & FFT.

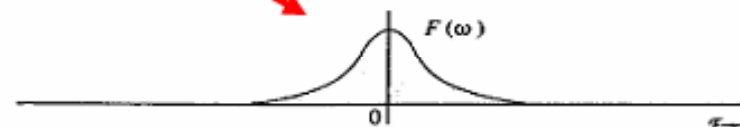
Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

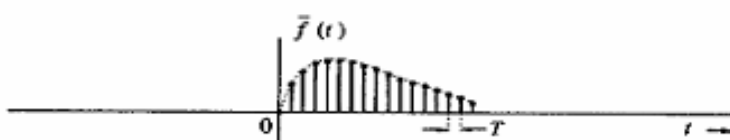
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



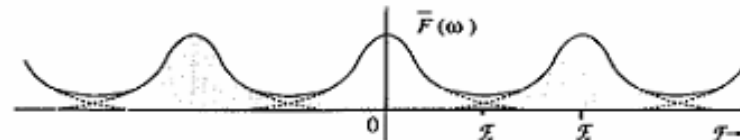
(a)



(b)



(c)



(d)

N_0 mẫu

N_0 mẫu

$$\Omega_0 = 2\pi / N_0$$

$$N_0 = T_0 / T$$

$$f_k = T f(kT)$$

$$f_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jr\Omega_0 k}$$

$$F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k}$$

Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

Đưa ra bởi Turkey and Cooley năm 1965, N_0 phải là lũy thừa của 2

Giảm khối lượng tính toán: $N_0^2 \rightarrow N_0 \log N_0$

$$f_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r e^{jr\Omega_0 k} \quad F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k e^{-jr\Omega_0 k}$$

Nhân: N_0
Cộng: N_0-1

Tổng cộng cho các hệ số: $N_0 N_0$ phép nhân và $N_0(N_0-1)$ phép cộng

□ Đặt: $W_{N_0} = e^{-j(2\pi/N_0)} = e^{-j\Omega_0}$

□ Các biểu thức DFT được viết lại:

$$F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k W_{N_0}^{kr} \quad f_k = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} F_r W_{N_0}^{-kr}$$

□ Chia f_k thành 2 chuỗi: chẵn và lẻ theo số thứ tự:

$$\underbrace{f_0, f_4, f_6, \dots, f_{N_0-2}}_{\text{sequence } g_k} \quad \underbrace{f_1, f_3, f_5, \dots, f_{N_0-1}}_{\text{sequence } h_k}$$

Biểu thức DFT được viết lại:

$$F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{N_0}^{2kr} + \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{N_0}^{(2k+1)r}$$

Ta có: $W_{\frac{N_0}{2}} = W_{N_0}^2$

$$\Rightarrow F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} + W_{N_0}^r \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} = G_r + W_{N_0}^r H_r$$

Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

$$\Rightarrow F_r = \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} + W_{N_0}^r \sum_{k=0}^{\frac{N_0}{2}-1} f_{2k+1} W_{\frac{N_0}{2}}^{kr} \Rightarrow \boxed{F_r = G_r + W_{N_0}^r H_r}$$

$(0 \leq r \leq N_0 - 1)$

□ Do G_r và H_r là DFT $N_0/2$ điểm nên nó có tính tuần hoàn:

$$G_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r \quad \& \quad H_{r+\frac{N_0}{2}} = H_r$$

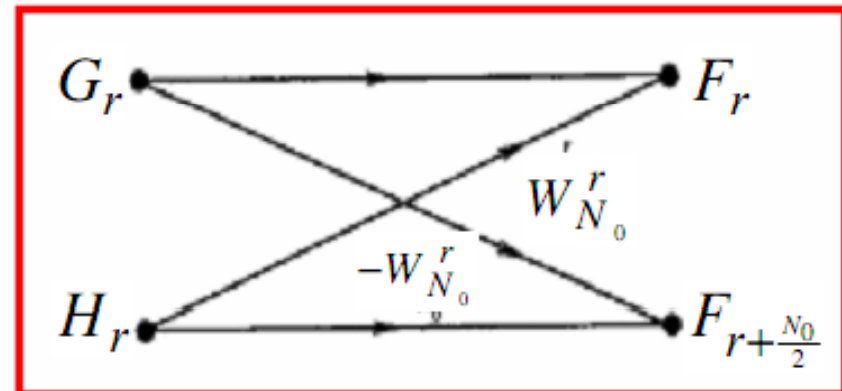
Mặt khác: $W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} = W_{\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}} W_{N_0}^r = e^{-j\pi} W_{N_0}^r = -W_{N_0}^r$

$$\Rightarrow F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_{r+\frac{N_0}{2}} + W_{N_0}^{r+\frac{N_0}{2}} H_{r+\frac{N_0}{2}} \Rightarrow \boxed{F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r - W_{N_0}^r H_r}$$

$$\boxed{F_r = G_r + W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1}$$

$$\boxed{F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r - W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1}$$

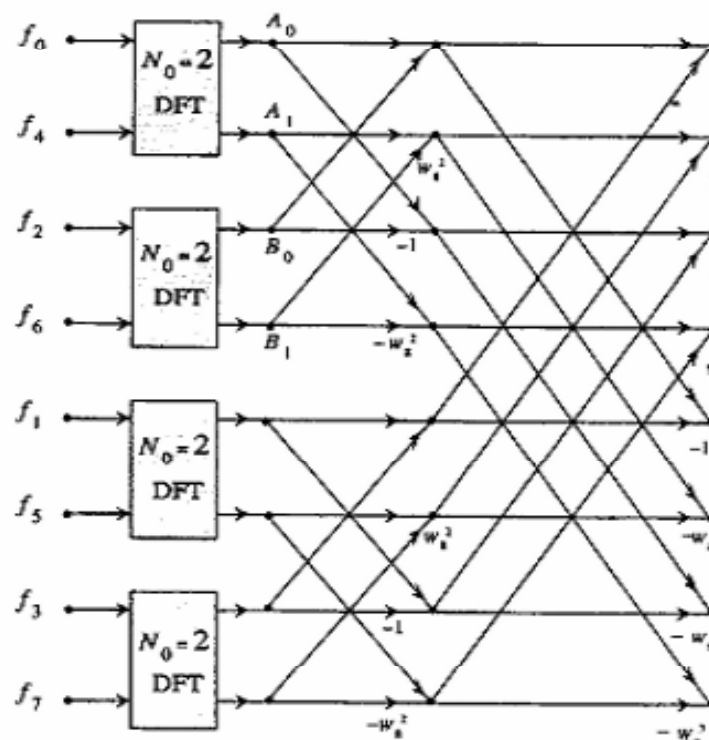
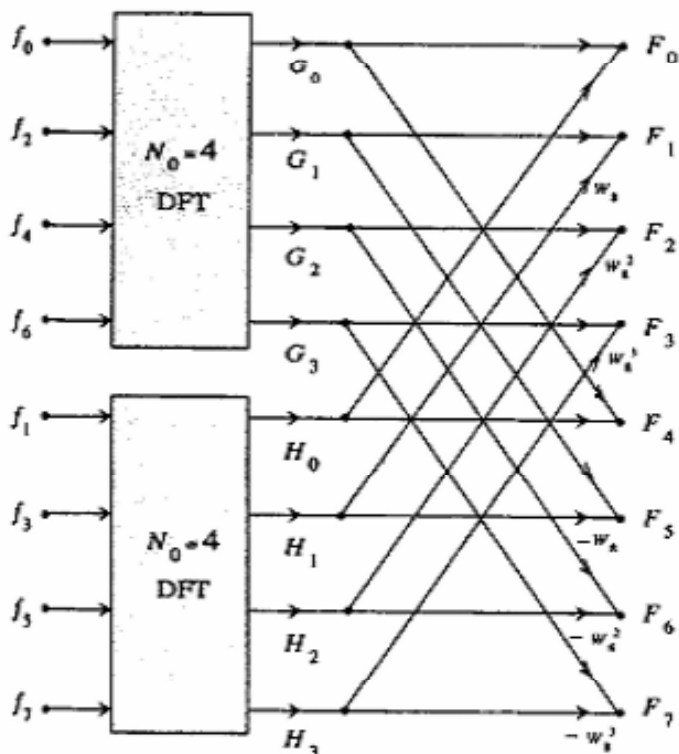
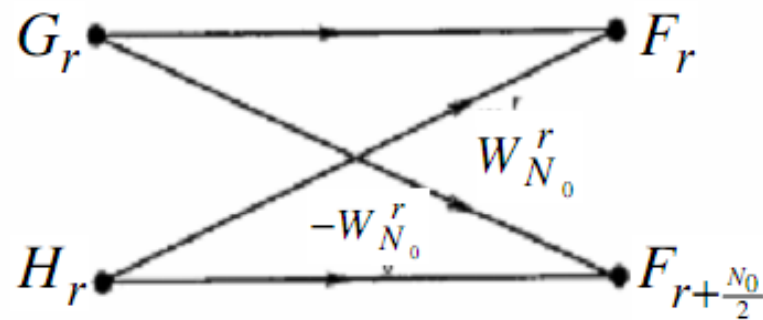
$\Leftrightarrow$



Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

$$F_r = G_r + W_{N_0}^r H_r; 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1$$

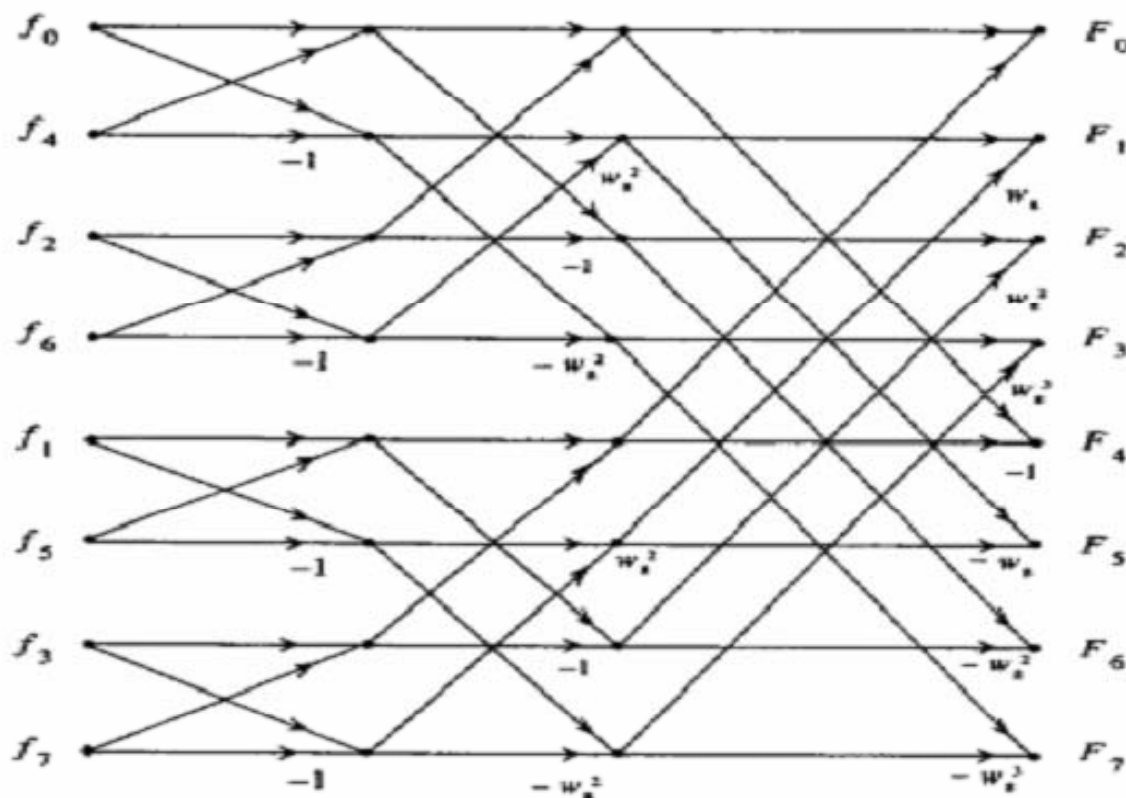
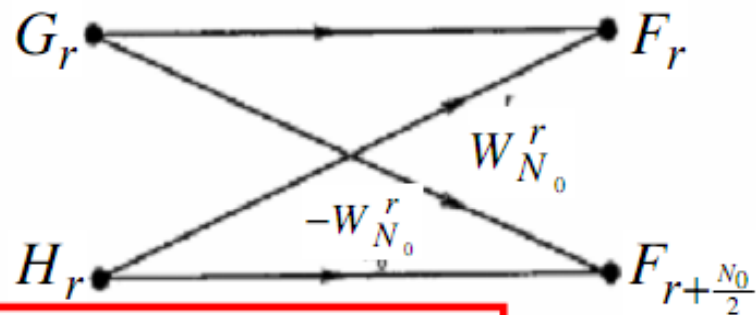
$$F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r - W_{N_0}^r H_r; 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1$$

 $\Leftrightarrow$


Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

$$F_r = G_r + W_{N_0}^r H_r; 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1$$

$$F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r - W_{N_0}^r H_r; 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1$$

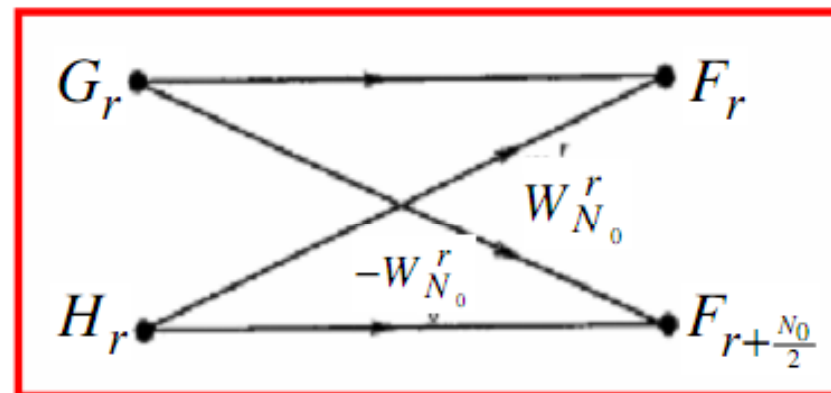
 $\Leftrightarrow$


Biến đổi Fourier nhanh (FFT)

$$F_r = G_r + W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1$$

$$F_{r+\frac{N_0}{2}} = G_r - W_{N_0}^r H_r; \quad 0 \leq r \leq \frac{N_0}{2} - 1$$

$\Leftrightarrow$



❖ Số phép toán nhân và cộng dùng để tính DFT dùng giải thuật FFT:

▪ Số phép toán nhân: $\frac{N_0}{2} \log_2 N_0$

▪ Số phép toán cộng: $N_0 \log_2 N_0$

NHẮC LẠI MỘT SỐ CÔNG THỨC

Chuỗi Fourier lượng giác

- Hàm $f(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T_0 có thể phân tích thành chuỗi Fourier lượng giác:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Tóm tắt biến đổi Fourier của các hàm cơ bản

□ Hàm dirac:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

□ Hàm đơn vị:

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

□ Hàm nấc đơn vị:

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

□ Hàm mũ:

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \quad (a > 0)$$

□ Xung cổng đơn vị:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

□ Xung tam giác đơn vị:

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \frac{T}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

Biến đổi Fourier của 2 hàm thường gặp

Biến đổi Fourier của hai hàm dưới đây suy ra từ biến đổi Fourier của các hàm cơ bản và tính chất đối ngẫu:

□ Hàm sinc: $\text{sinc}(Wt) \longleftrightarrow \frac{\pi}{W} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$

□ Hàm sinc²: $\text{sinc}^2(Wt) \longleftrightarrow \frac{\pi}{W} \Lambda\left(\frac{\omega}{4W}\right)$

Một số tính chất của biến đổi Fourier

- Tính tuyến tính:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- Dịch chuyển trong miền thời gian:

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- Dịch chuyển trong miền tần số (điều chế):

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

$$f(t)\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0)$$

- Đối ngẫu thời gian – tần số:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \Rightarrow F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

- Tính tỉ lệ (co/giãn thời gian/tần số):

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Đảo thời gian/tần số:

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega)$$

- Tích chập trong miền thời gian:

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

- Tích chập trong miền tần số:

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$