



Chương 2: Tín hiệu và phổ

2.1 Tín hiệu.

2.2 Khai triển (chuỗi) Fourier và phổ vạch.

2.3 Biến đổi Fourier và phổ liên tục.

2.4 Tích chập và tương quan.

2.5 Xác suất và nhiễu



2.1 Tín hiệu

- Biểu thức
- Dạng sóng
- Giá trị trung bình
- Công suất/Năng lượng
- Phổ
- Mật độ phổ công suất/năng lượng
- Bảng thông

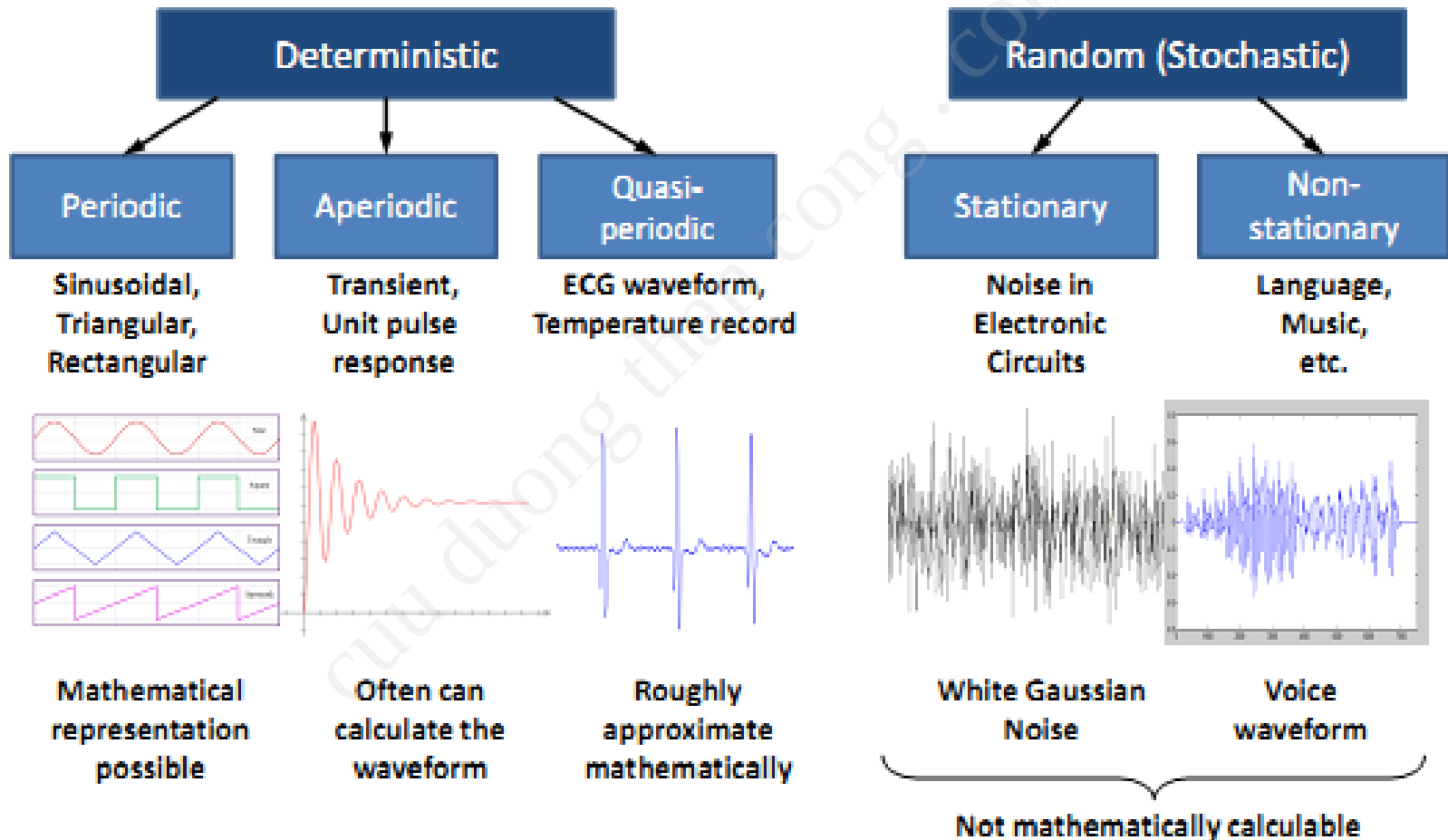


Phân loại tín hiệu

1. Xác định hoặc ngẫu nhiên
2. Tương tự (liên tục) hoặc số (rời rạc)
3. Thực hoặc phức
4. Đơn cực hoặc lưỡng cực
5. Thời gian hữu hạn hoặc thời gian vô hạn
6. Tuần hoàn hoặc không tuần hoàn
7. Năng lượng hoặc công suất

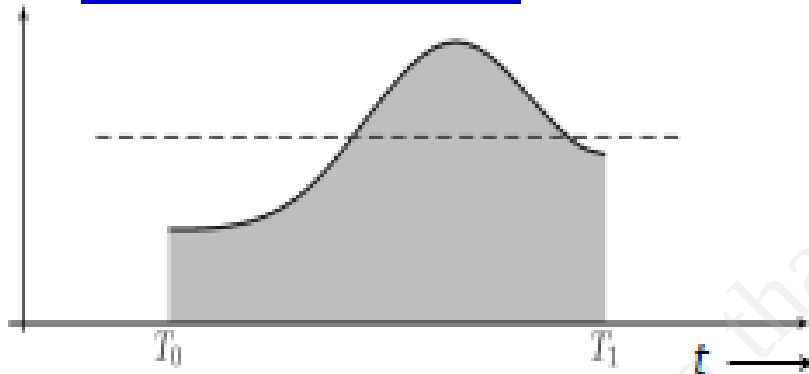
$$x(t) = x(t + T_0)$$

Tín hiệu xác định và ngẫu nhiên

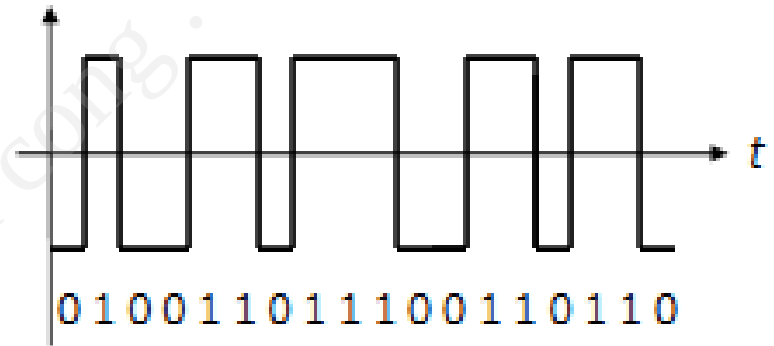


Tín hiệu liên tục (tương tự) và rời rạc (số)

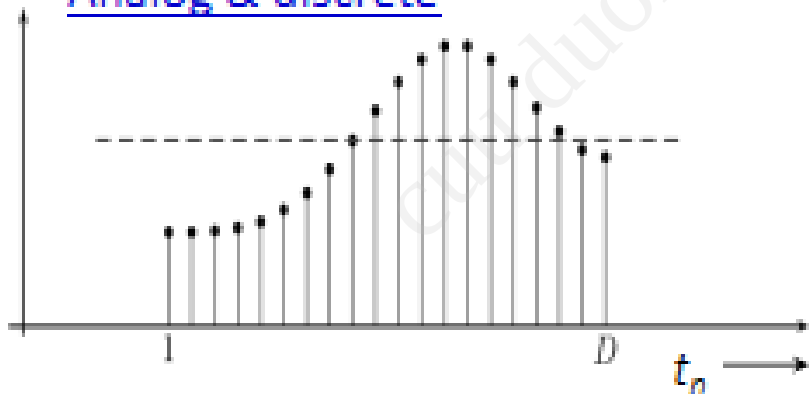
Analog & continuous



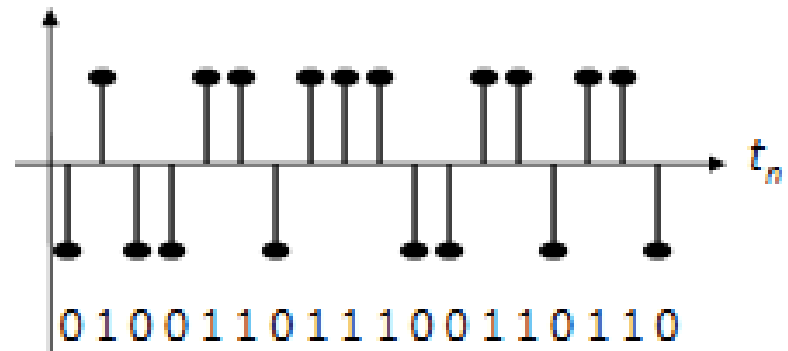
Digital & continuous



Analog & discrete

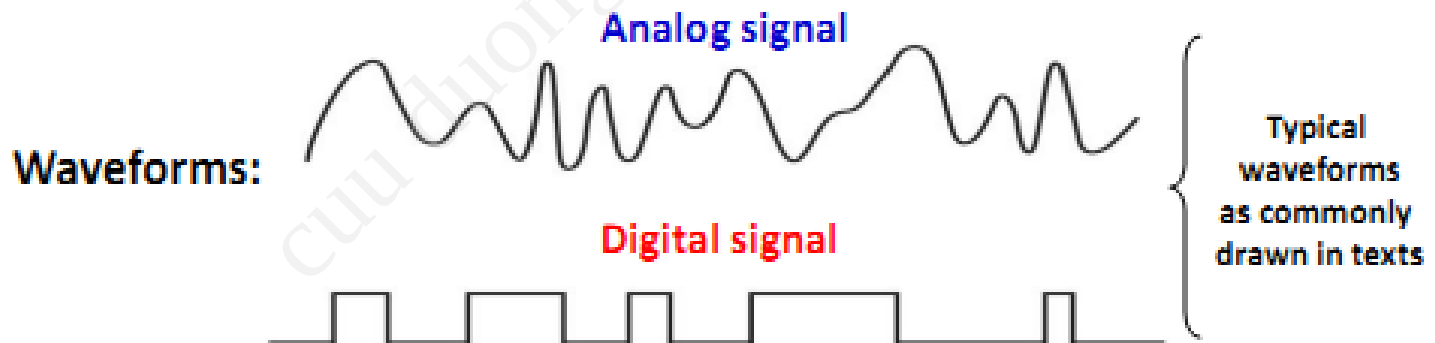


Digital & discrete



Tín hiệu tương tự và số

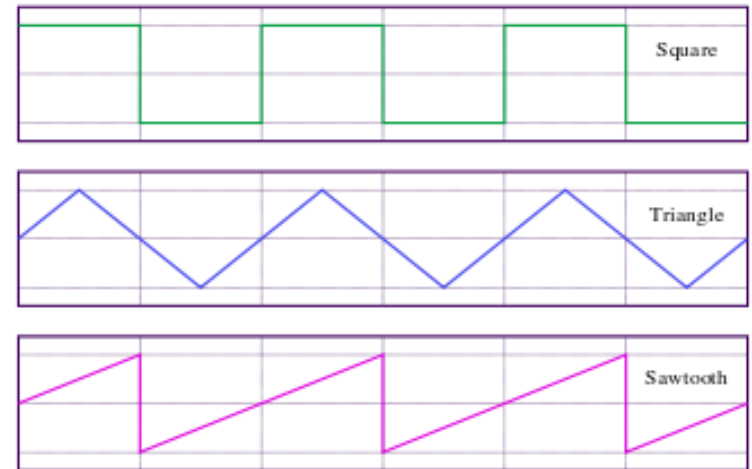
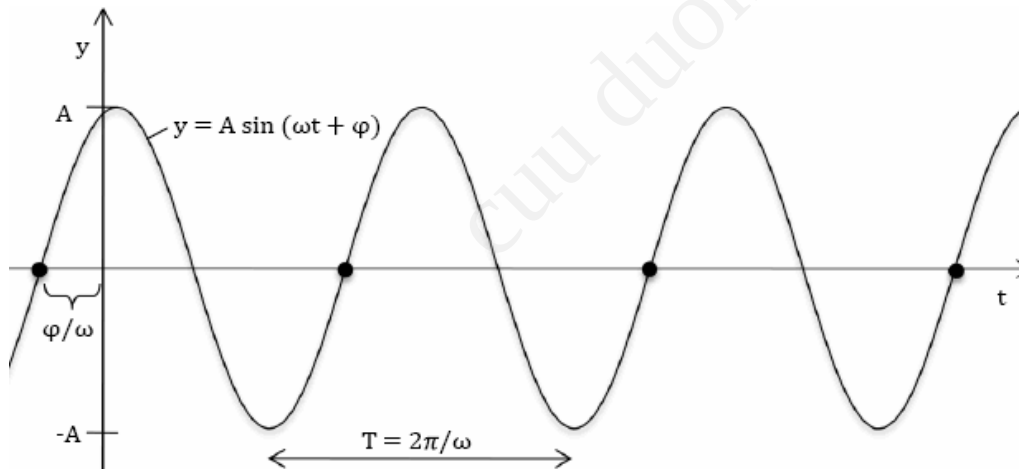
Analog Signals	Digital Signals
(1) A parameter of the signal represents a physical parameter (2) Parameter is <u>time-varying</u> (3) Parameter takes on any value within a defined range (said to be <u>continuous</u>)	(1) Represents a sequence of numbers or states (2) Numbers can change in discrete time (said to be <u>time-varying</u>) (3) Numbers restricted a finite set of <u>discrete</u> values



All signal waveforms are analog – the difference is what they represent!

Tín hiệu tuần hoàn

- Định nghĩa: tồn tại $T \neq 0$ sao cho $x(t) = x(t + T) \forall t$
- Chu kì tuần hoàn: T nhỏ nhất
- Tần số tuần hoàn
 - Hz: $F = 1/T$
 - Rad/s: $\Omega = 2\pi F$ ($\omega = 2\pi f$)





$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t \quad \text{and for some} \quad T_0 \neq 0$$

$$T = \min(|T_0|)$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_m t) \quad T_0 = \frac{n}{f_m} \quad T = \frac{1}{f_m}$$

- Thực tế: mô hình tuần hoàn áp dụng cho tín hiệu xấp xỉ đặc tính tuần hoàn theo định nghĩa.



Xác định chu kì tuần hoàn?

- 1) $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
- 2) $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
- 3) $A.\cos(B.\cos(2\pi Ft+\phi))$
- 4) $A.\cos(B.\sin(2\pi Ft+\phi))$
- 5) $A.\cos(2\pi Ft+\phi). B.\sin(2\pi Ft+\phi)$
- 6) $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1). B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- 7) $A.\cos(2\pi F_1 t+\phi). B.\cos(2\pi F_2 t+\phi)$
- 8) $A.\cos(2\pi F_1 t+\phi) + B.\cos(2\pi F_2 t+\phi)$



Công thức Euler

- Thực tế: tất cả tín hiệu giá trị thực.
- Toán học: tín hiệu có thể giá trị phức.

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \operatorname{Re}[e^{j\theta}]$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \operatorname{Im}[e^{j\theta}]$$



Tín hiệu thực và phức

$$z(t) = x(t) + jy(t) = \alpha(t)e^{j\theta(t)}$$

$$\alpha(t) = |z(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\theta(t) = \arg(z(t)) = \tan^{-1}(y(t), x(t)) \quad [0, 2\pi]$$

$$z^*(t) = x(t) - jy(t) = \alpha(t)e^{-j\theta(t)}$$

$$|z(t)|^2 = \alpha(t)^2 = z(t)z^*(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

$$\Re[z(t)] = x(t) = \alpha(t) \cos(\theta(t)) = \frac{1}{2}[z(t) + z^*(t)]$$

$$\Im[z(t)] = y(t) = \alpha(t) \sin(\theta(t)) = \frac{1}{2j}[z(t) - z^*(t)]$$

Xác định tín hiệu thực hay phức (ảo)?

1) $A.\cos(2\pi Ft + \phi)$

2) $A.\cos(B.\cos(2\pi Ft + \phi))$

3) $A.\exp(j\phi).\cos(2\pi Ft)$

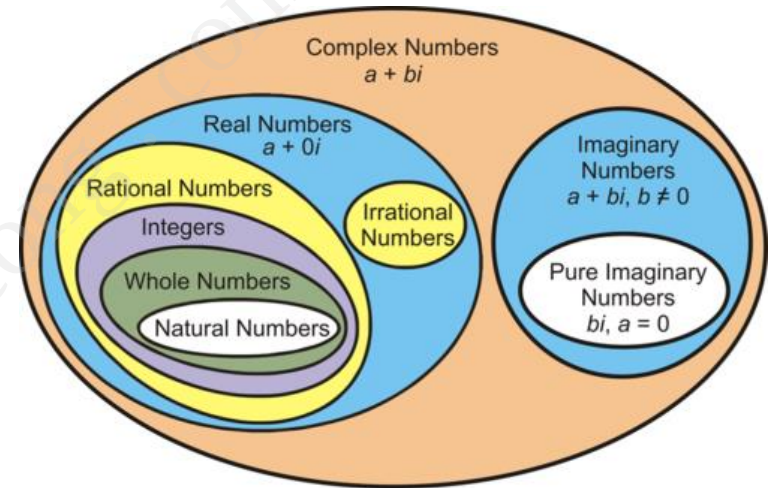
4) $A.\exp\{j(2\pi Ft + \phi)\}$

5) $A.\exp\{j(2\pi Ft + \phi)\} + A.\exp\{-j(2\pi Ft + \phi)\}$

6) $A.\exp\{j(2\pi Ft + \phi)\} - A.\exp\{-j(2\pi Ft + \phi)\}$

7) $A.\exp\{j(2\pi Ft + \phi)\} + A.\exp\{j(2\pi Ft - \phi)\}$

8) $A.\exp\{j(2\pi Ft + \phi)\} - A.\exp\{j(2\pi Ft - \phi)\}$





Ví dụ 1 ($t \in \mathbb{R}$)

Kiểm tra tín hiệu thực và tuần hoàn hay không?

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $\cos(\pi t/3)$ | 7) $\cos(t/3) + \cos(t/4)$ |
| 2) $\cos(t/3)$ | 8) $\cos(t/3) + \cos(\pi t/3)$ |
| 3) $\exp(j\pi t/3)$ | 9) $\exp(j\pi t/3) + \exp(j\pi t/4)$ |
| 4) $\exp(jt/3)$ | 10) $\exp(j\pi t/3) + \exp(-j\pi t/3)$ |
| 5) $\exp(-t/3)$ | 11) $\exp(jt/3) + \exp(jt/4)$ |
| 6) $\cos(\pi t/3) + \cos(\pi t/4)$ | 12) $\exp(jt/3) + \exp(-jt/3)$ |



Ví dụ 2 ($n \in \mathbb{Z}$)

Kiểm tra tín hiệu thực và tuần hoàn hay không?

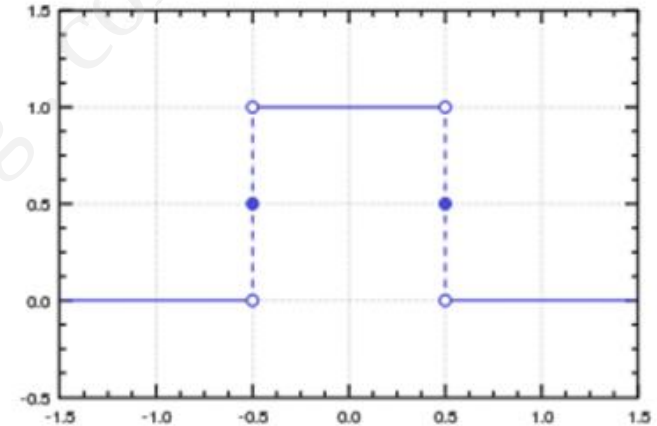
- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $\cos(\pi n/3)$ | 7) $\cos(n/3) + \cos(n/4)$ |
| 2) $\cos(n/3)$ | 8) $\cos(n/3) + \cos(\pi n/3)$ |
| 3) $\exp(j\pi n/3)$ | 9) $\exp(j\pi n/3) + \exp(j\pi n/4)$ |
| 4) $\exp(jn/3)$ | 10) $\exp(j\pi n/3) + \exp(-j\pi n/3)$ |
| 5) $\exp(-n/3)$ | 11) $\exp(jn/3) + \exp(jn/4)$ |
| 6) $\cos(\pi n/3) + \cos(\pi n/4)$ | 12) $\exp(jn/3) + \exp(-jn/3)$ |



Hàm xung chữ nhật và tam giác

❖ Rectangular (rect)

$$\text{rect}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$



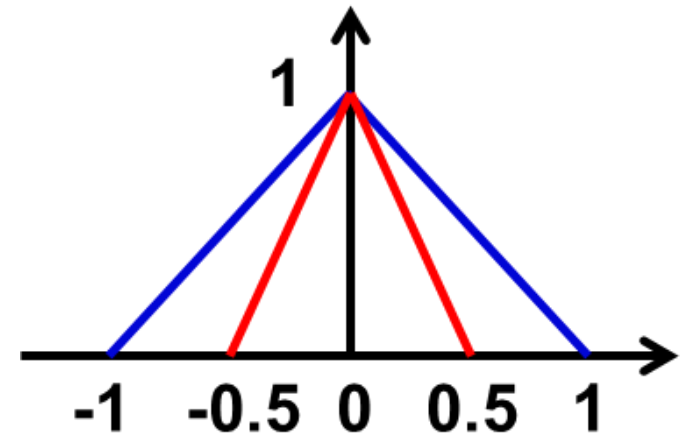
❖ Triangular (tri)

➤ **Phổ biến (mặc định):**

$$\text{tri}(t) = \Lambda(t) = \text{rect}(t/2) \cdot (1 - |t|)$$

➤ **Ngoại lệ:**

$$\text{tri}(t) = \Lambda(t) = \text{rect}(t) \cdot (1 - |t|)$$

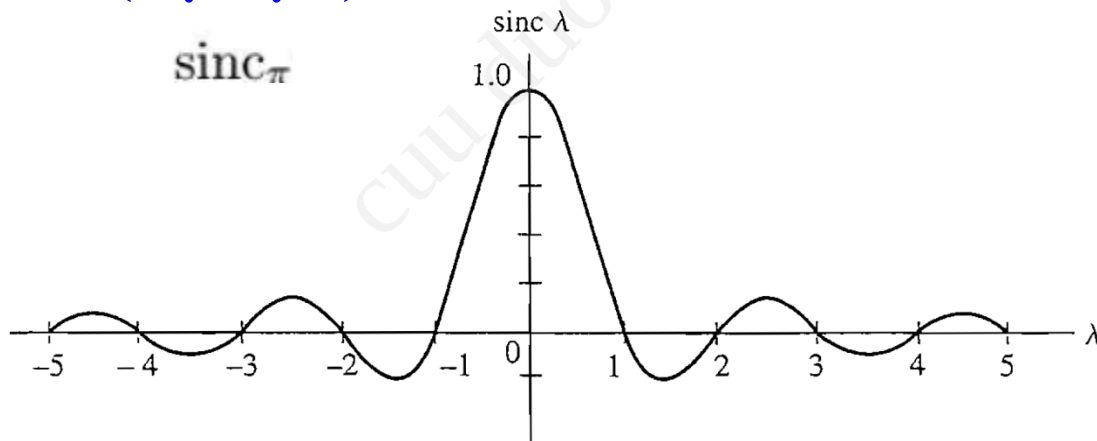
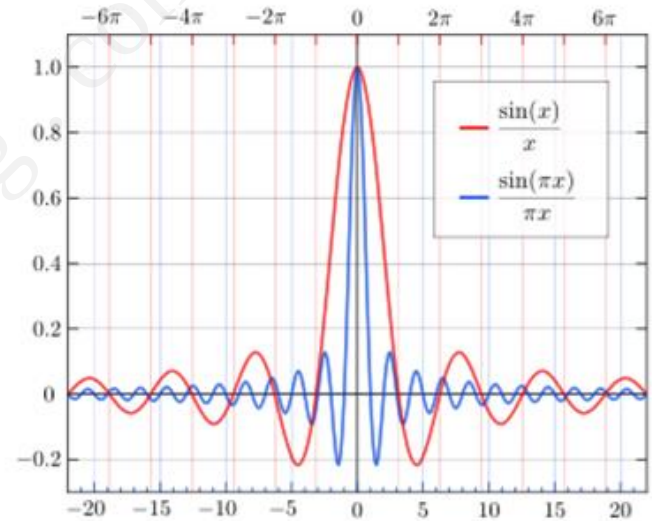


Hàm sinc

❖ Cardinal sine (sinc)

➤ **Unnormalized:** $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

➤ **Normalized:** $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.
(mặc định)

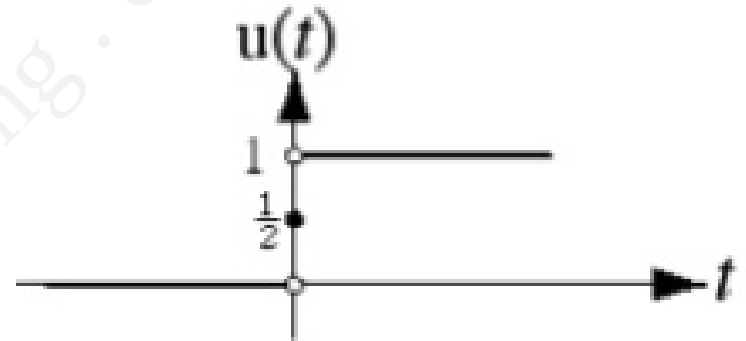




Hàm bước và hàm dấu

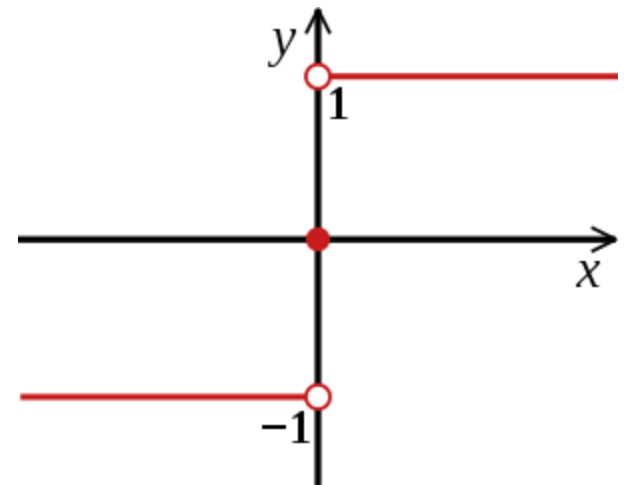
❖ Hàm bước

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 1/2 & , t = 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$



❖ Hàm dấu

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

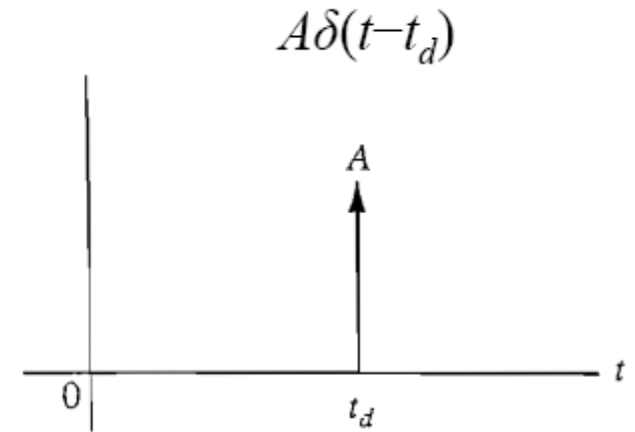
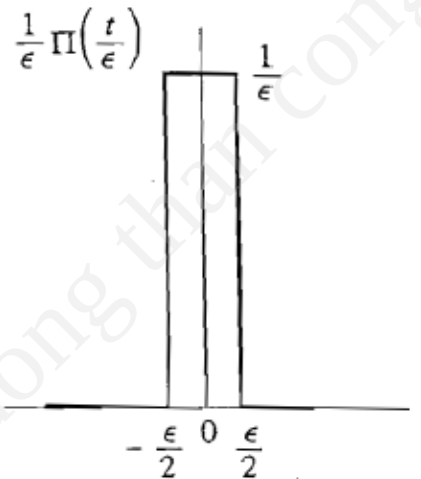


Hàm Dirac delta

- Không tồn tại trong thực tế, chỉ mang ý nghĩa toán học.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - T) dt = f(T).$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}.$$

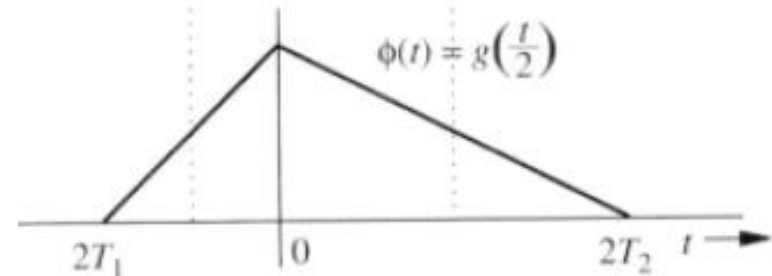
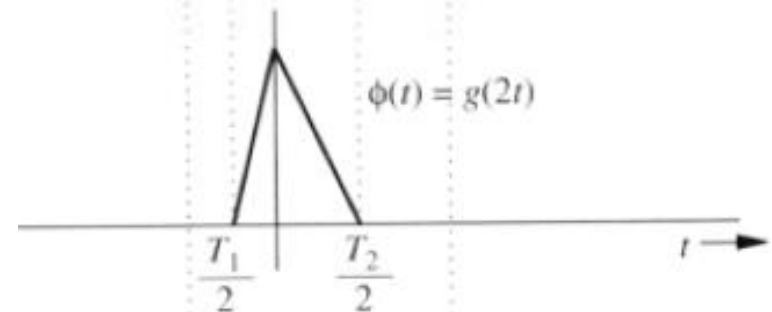
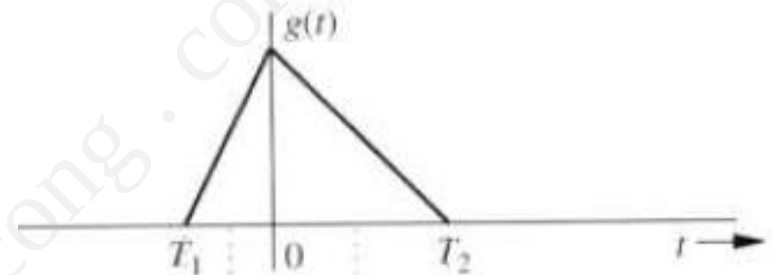
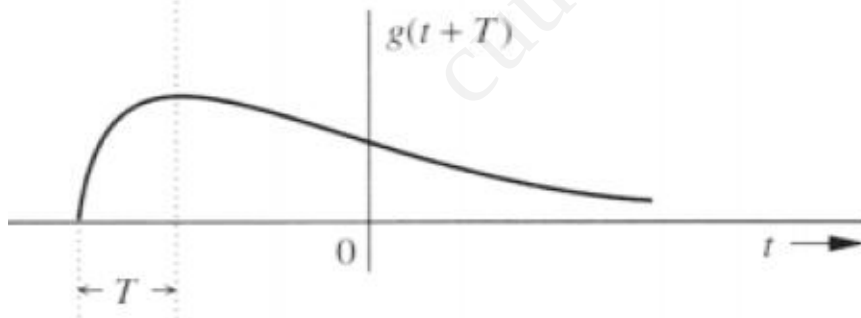
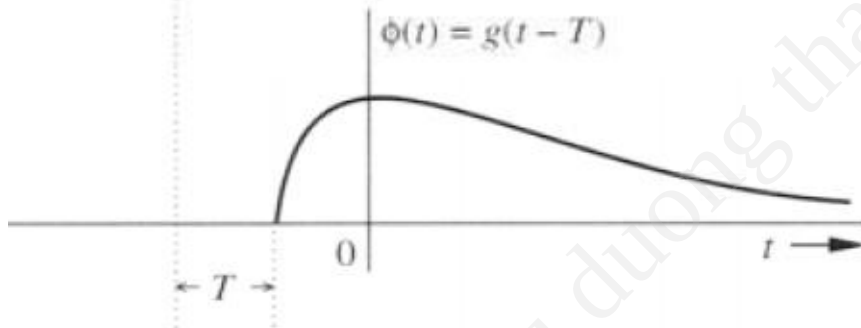
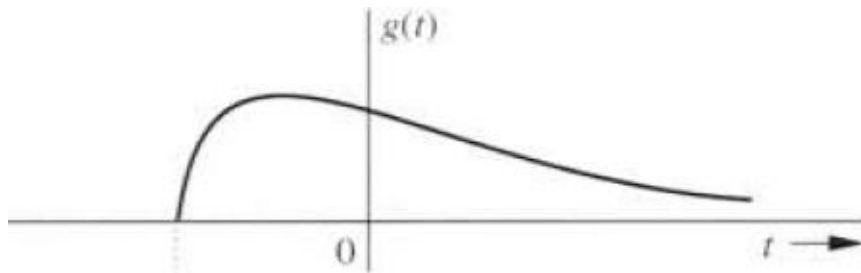
$$\delta'(t) = u(t)$$



Vẽ dạng sóng cơ bản

- 1) $A.\cos(2\pi Ft + \phi) + B$
- 2) $A.\text{sinc}(t/\tau)$
- 3) $A.\Pi\{(t - t_0)/\tau\}$
- 4) $A.\Sigma_k\{\Pi\{(t - kT - t_0)/\tau\}\}$
- 5) $A.\Lambda\{(t - t_0)/\tau\}$
- 6) $A.\Sigma_k\{\Lambda\{(t - kT - t_0)/\tau\}\}$
- 7) $\Sigma_k\{A_k.\delta(t - t_k)\}$

Một số phép biến đổi tín hiệu





Giá trị trung bình

- Ký hiệu: $\langle v(t) \rangle$, $\bar{v}$, m_v , v_{DC} , $E\{v(t)\}$, ...
- Tín hiệu không tuần hoàn

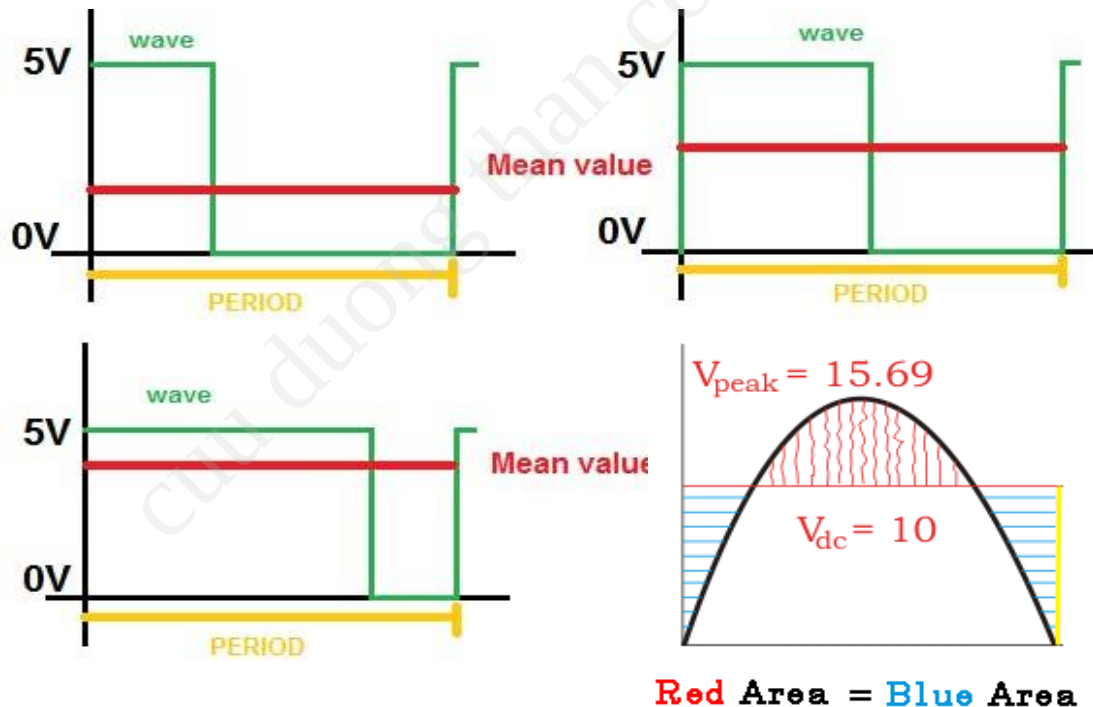
– Thời gian vô hạn $\langle v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt$

– Thời gian hữu hạn $\frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt$

- Tín hiệu tuần hoàn $\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt$

Ý nghĩa của giá trị trung bình

- Còn gọi là giá trị kì vọng hay mức DC: giá trị trung tâm của tín hiệu.





Năng lượng và công suất

- Đo “sức khỏe” của tín hiệu
 - Độ lớn của giá trị
 - Thời gian tồn tại của giá trị
- Năng lượng $E_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$
 - Tín hiệu năng lượng: $0 < E_x < \infty$
- Công suất $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$
 - Tín hiệu công suất: $0 < P_x < \infty$

$$E_x = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} |x(t)|^2 dt$$

$$P_x = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} |x(t)|^2 dt$$

- Tín hiệu: dòng (A) hoặc áp (V)
- Năng lượng (J) và công suất (W): xem như ứng với trở kháng chuẩn 1Ω



Ví dụ tính năng lượng

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T_p}} & 0 \leq t \leq T_p \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad E_x = 1$$

$$x(t) = 2W \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t} = 2W \text{sinc}(2W t) \quad E_x = 2W$$



Ví dụ tính công suất

- Tín hiệu cosine (AC)

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t)$$

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t) \right) dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ tính công suất

- Tín hiệu dùng trong hệ thống radar hoặc sonar đơn giản có dạng sóng:



$$P_x = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^\tau dt = \frac{\tau}{T}$$



Câu hỏi?

- Tín hiệu công suất có năng lượng thế nào?
- Tín hiệu năng lượng có công suất thế nào?
- Tín hiệu không tuần hoàn là tín hiệu năng lượng hay công suất?
 - Thời gian hữu hạn
 - Thời gian vô hạn
- Tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu năng lượng hay công suất?
- Có tồn tại tín hiệu không phải là tín hiệu năng lượng cũng không phải là tín hiệu công suất ($E_x = \infty$, $P_x = \infty$) hay không?
Cho ví dụ minh họa?



Ví dụ 3

Tính giá trị trung bình và năng lượng/công suất:

- 1) $1@$
- 2) $1@.\cos(10\pi t)$
- 3) $1@.\cos(10\pi t) - 1@$
- 4) $1@.\cos^2(10\pi t)$
- 5) $1@.\cos^3(10\pi t)$
- 6) $1@.\cos(10\pi t) - 1@.\sin(10\pi t)$
- 7) $2@.\cos(10\pi t) + 1@.\sin(10\pi t)$
- 8) $1@.\cos(10\pi t) + 2@.\sin(20\pi t)$
- 9) $1@.\cos(15\pi t) + 2@.\sin(20\pi t)$
- 10) $1@.\cos(15t) + 2@.\sin(20\pi t)$
- 11) $u(t) - u(t - 1@)$
- 12) $\text{sign}(t).\{u(t + 1@) - u(t - 1@)\}$



Tính công suất ở miền thời gian?

- A
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm B$
- $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi F_2 t+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm A.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm A.\sin(2\pi Ft+\phi)$



Vấn đề 1

■ Cho tín hiệu $x(t) = A_0$

- 1) Vẽ dạng sóng.
- 2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
- 3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
- 4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/công suất hay không?



Vấn đề 2

■ Cho tín hiệu $x(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$

- 1) Vẽ dạng sóng.
- 2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
- 3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
- 4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/công suất hay không?



Vấn đề 3

■ Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$

- 1) Vẽ dạng sóng.
- 2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
- 3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
- 4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/công suất hay không?



Vấn đề 4

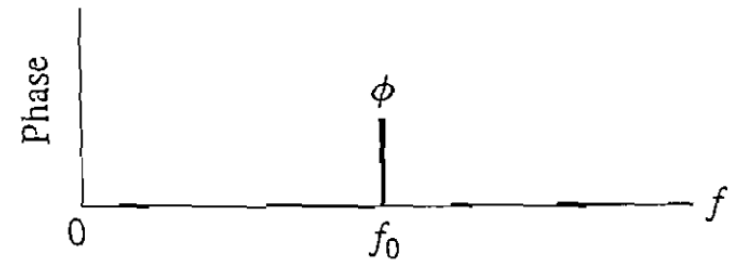
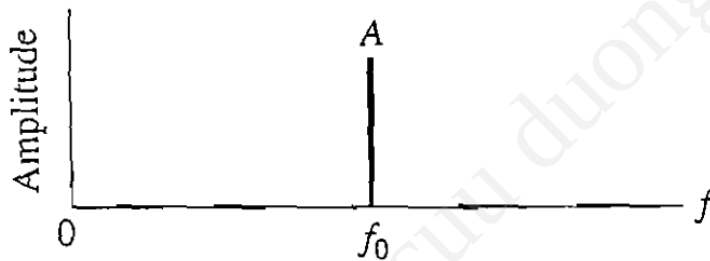
- Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) + A_2 \cdot \cos(2\pi F_2 t + \phi_2)$
- 1) Vẽ dạng sóng.
- 2) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
- 3) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
- 4) Từ dạng sóng có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?
- 5) Giả sử biết trước biểu thức tổng quát, có thể dễ dàng xác định các thông số của biểu thức hay không?

Phổ vạch 1 phía

- Phổ vạch 1 phía chứa thông tin tần số (dương), biên độ (dương) và pha của **tín hiệu thực** $x(t)$.

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$A > 0 \quad \omega_0 = 2\pi f_0 > 0$$

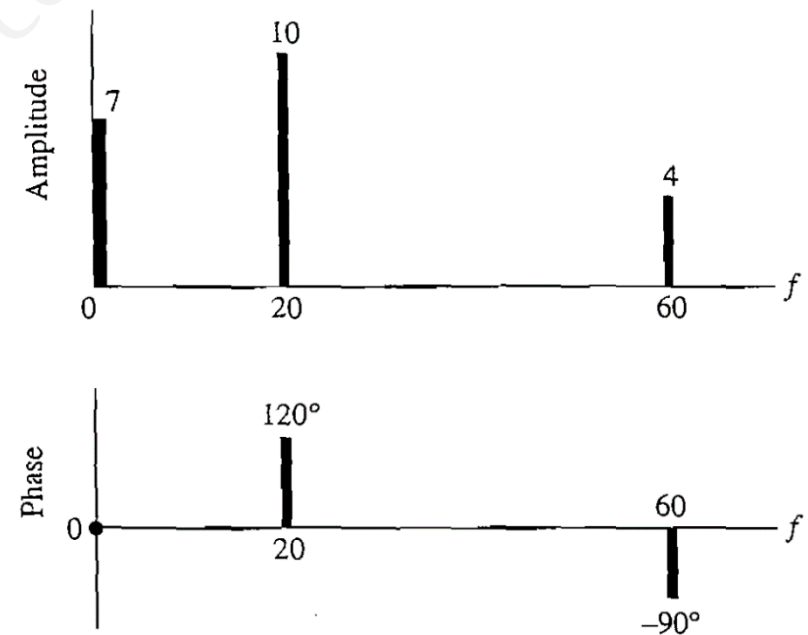
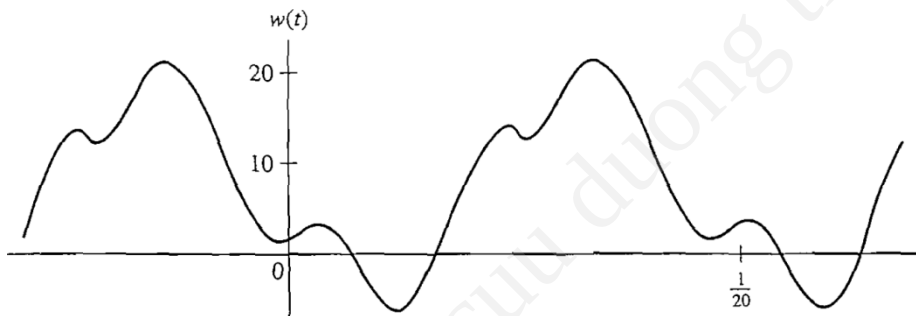


- Tuyến tính (xếp chồng)

Ví dụ phổ vạch 1 phía

$$w(t) = 7 - 10 \cos(40 \pi t - 60^\circ) + 4 \sin 120 \pi t$$

$$w(t) = 7 \cos 2 \pi 0 t + 10 \cos(2 \pi 20 t + 120^\circ) + 4 \cos(2 \pi 60 t - 90^\circ)$$





Phổ vạch 2 phía (phổ phức)

- Phổ vạch 2 phía chứa thông tin tần số thực (có thể âm/dương) và giá trị của **tín hiệu phức** $x(t)$.

$$x(t) = A \cdot \exp(j \cdot \omega_0 t) = A \cdot \exp(j \cdot 2\pi f_0 t)$$

– **Phổ biên độ:** $|A|$

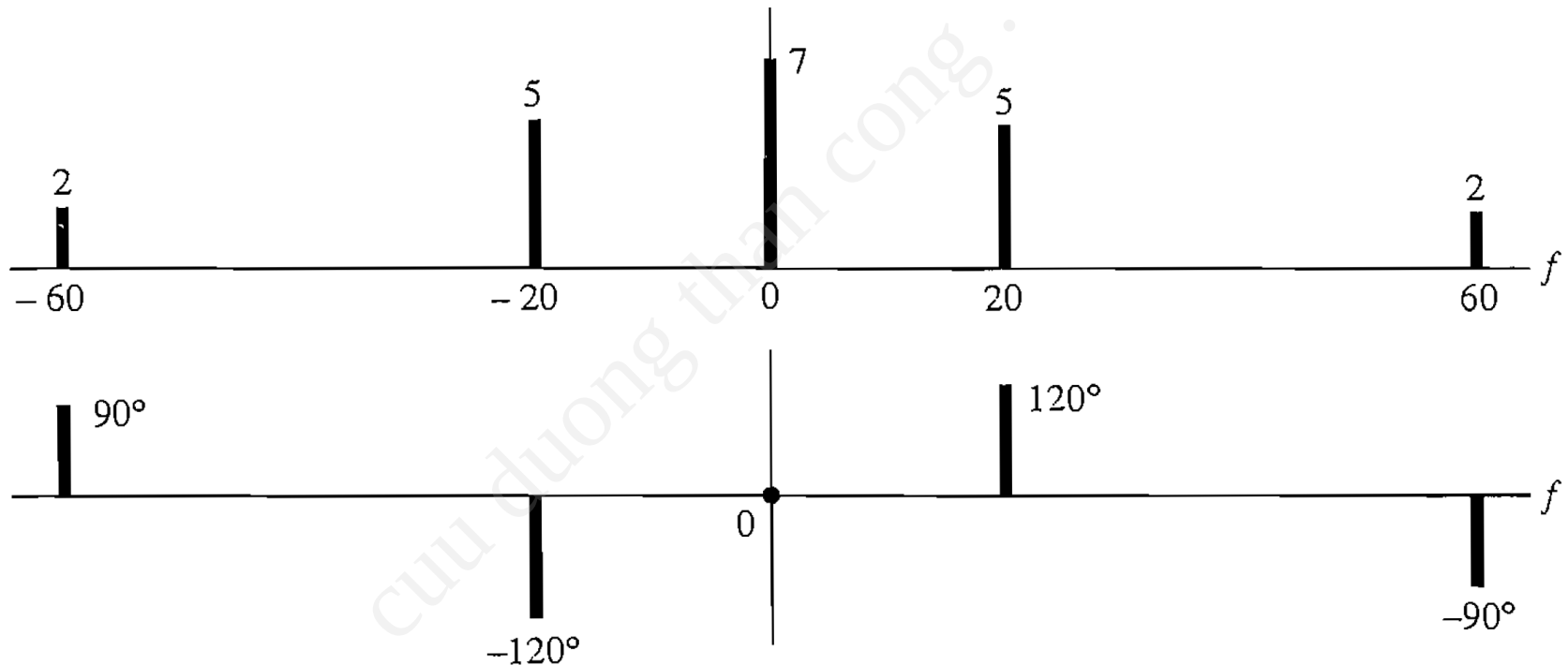
– **Phổ pha:** $\arg A$

- Tuyến tính (xếp chồng)

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

Ví dụ phổ vạch 2 phía

$$w(t) = 7 \cos 2\pi 0t + 10 \cos(2\pi 20t + 120^\circ) + 4 \cos(2\pi 60t - 90^\circ)$$



- So sánh với phổ vạch 1 phía? Mối liên hệ qua lại?



Đặc trưng tín hiệu miền tần số

1. Phổ:

- ☐ Tần số (f) và tần số góc ($\omega=2\pi f$)
- ☐ Phổ 1 phía $[0 \infty)$ và phổ 2 phía $(-\infty \infty)$
- ☐ Khai triển Fourier và biến đổi Fourier
- ☐ Phổ biên độ và phổ pha
- ☐ Mật độ phổ năng lượng (công suất)

2. Bảng thông

- ☐ Hữu hạn / vô hạn
- ☐ Thông thấp / thông cao / thông dải / chặn dải
- ☐ Bảng gốc (dải nền) / bảng dải (dải thông)
- ☐ Tần số DC (bằng 0) / AC (khác 0)

3. Giá trị trung bình (DC): ứng với tần số bằng 0

4. Năng lượng (công suất)



Vấn đề 1 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0$
 - 1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
 - 2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
 - 3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
 - 4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?



Vấn đề 2 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_1 \cdot \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$
 - 1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
 - 2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
 - 3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
 - 4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?



Vấn đề 3 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$
 - 1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
 - 2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
 - 3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
 - 4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?



Vấn đề 4 (phổ)

- Cho tín hiệu $x(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) + A_2 \cdot \cos(2\pi F_2 t + \phi_2)$
 - 1) Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha (2 phía).
 - 2) Từ phổ có thể dễ dàng xác định chính xác biểu thức hay không?
 - 3) Từ phổ có thể dễ dàng xác định giá trị trung bình hay không?
 - 4) Từ phổ có thể dễ dàng xác định năng lượng/ công suất hay không?



Vẽ phổ 2 phía? (phổ biên độ và phổ pha)

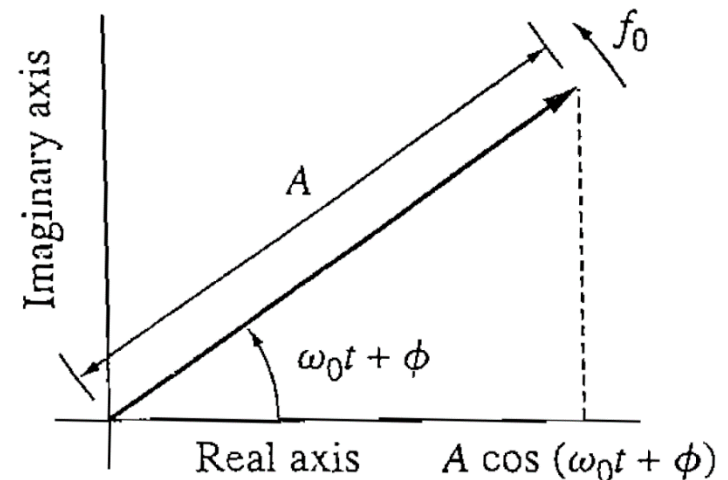
- A
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm B$
- $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi F_2 t+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm A.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm A.\sin(2\pi Ft+\phi)$

Biểu đồ pha 1 phía

- Biểu đồ pha (phasor) 1 phía chứa thông tin biên độ (dương) và pha của tín hiệu thực $x(t)$ dưới dạng vector quay theo tần số (dương).

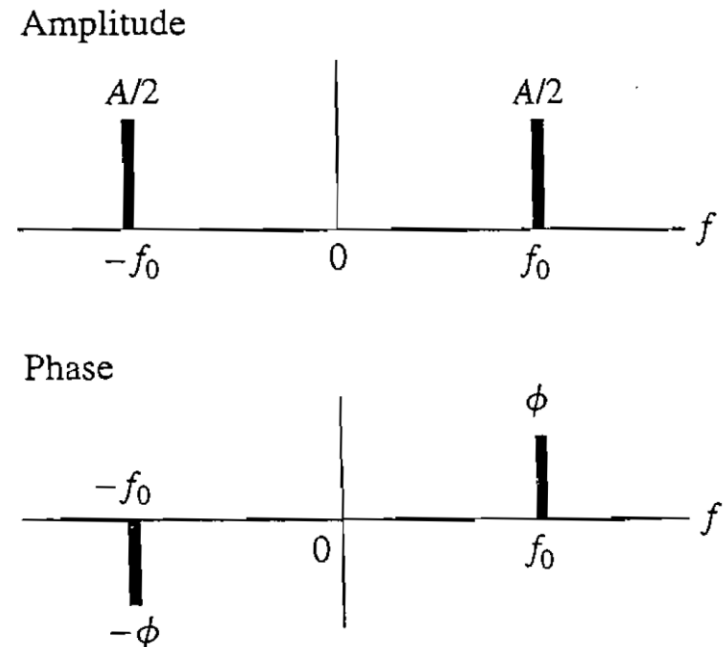
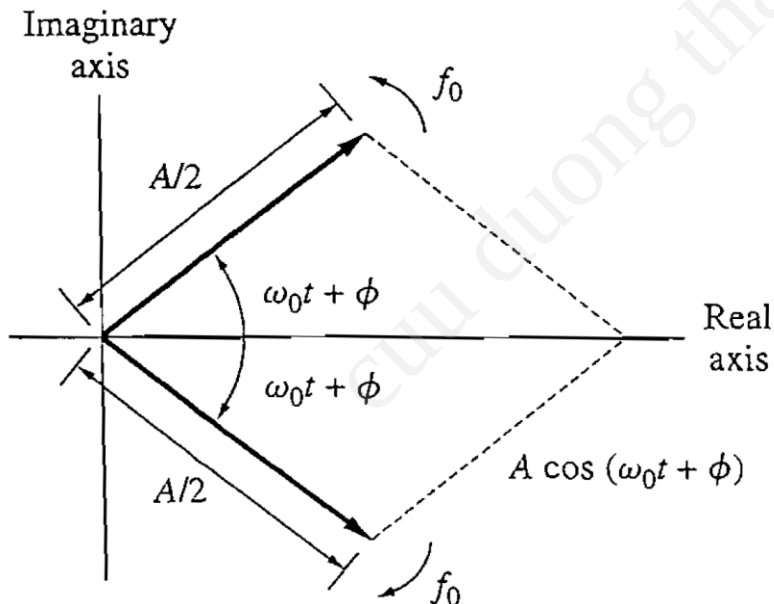
$$\mathbf{x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) = \text{Re}\{F \cdot \exp(j \cdot \omega_0 t)\}}$$

- Phasor $F = A \cdot \exp(j\phi)$
- Tuyến tính (xếp chồng):
cộng số phức (khi cùng tần số)



Biểu đồ pha 2 phía

- Biểu đồ pha (phasor) 2 phía chứa thông tin biên độ (dương) và pha của tín hiệu $\mathbf{x(t) = A.exp\{j.(\omega_0 t + \phi)\} = A.exp\{j.(2\pi f_0 t + \phi)\}}$ dưới dạng vec-tơ quay theo tần số (âm/dương).
- Tuyến tính (xếp chồng): **cộng vec-tơ** (khi cùng tốc độ quay).



2.2 Khai triển Fourier

- Dùng cho tín hiệu tuần hoàn
- Có nhiều dạng thực hiện
 - Dạng lượng giác
 - Dạng hàm mũ

$f(t)$, period $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$	Form	Coefficients
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_o t}$	Exponential	$F_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_o t} dt$
$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)$	Trigonometric	$a_n = F_n + F_{-n}$ $b_n = j(F_n - F_{-n})$
$\frac{c_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_o t + \theta_n)$	Compact for real $f(t)$	$c_n = 2 F_n $ $\theta_n = \angle F_n$



Khai triển Fourier dạng lượng giác

- Let denote $g_{T_0}(t)$ a **periodic signal**, where the subscript T_0 denotes the duration of periodicity.

$$g_{T_0}(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

- The **fundamental frequency** is $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{T_0}(t) dt$$
$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{T_0}(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt,$$
$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{T_0}(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt,$$
$$n = 1, 2, \dots$$



Khai triển Fourier dạng hàm mũ

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp \left[\frac{j 2\pi n t}{T} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp [j 2\pi f_T n t]$$

$$x_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp [-j 2\pi f_T n t] dt$$

- x_n : complex numbers
- A periodic signal, $x(t)$, with period T can be decomposed into a weighted sum of complex sinusoids with frequencies that are an integer multiple of the fundamental frequency ($f_T = 1/T$).



Phổ vạch

- All frequencies are **integer multiples** (or **harmonics**) of the **fundamental frequency** f_0
- The **DC component** c_0 equals the average value of the signal.
- If the **signal is real**, then Hermitian symmetry

$$|c_{-n}| = |c_n|$$

$$\arg c_{-n} = -\arg c_n$$

which means that the **amplitude spectrum** has **even symmetry** and the **phase spectrum** has **odd symmetry**



Ví dụ khai triển Fourier (phổ vạch)

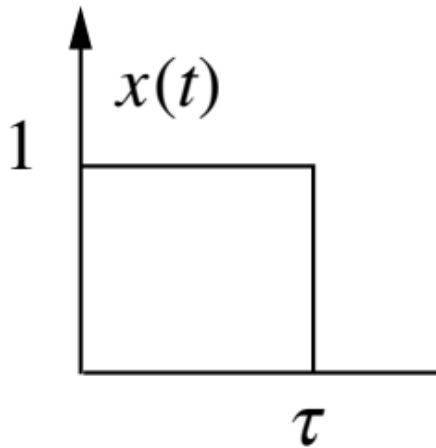
$$x(t) = \cos(2\pi f_m t) = \frac{1}{2} \exp[j 2\pi f_m t] + \frac{1}{2} \exp[-j 2\pi f_m t]$$

$$f_T = f_m \quad x_1 = x_{-1} = \frac{1}{2}, \quad x_n = 0 \quad \text{for all other } n$$

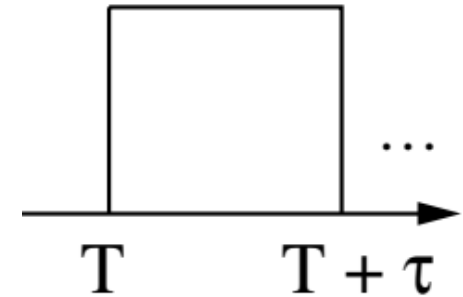
$$x(t) = \exp(j 2\pi f_m t)$$

$$f_T = f_m \quad x_1 = 1, \quad x_n = 0 \quad \text{for all other } n$$

Chuỗi xung chữ nhật

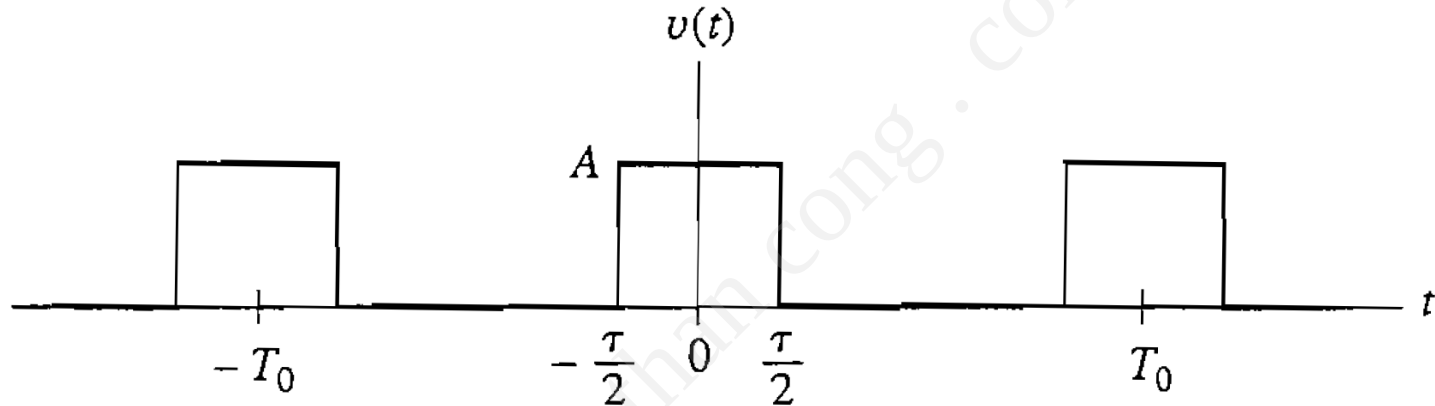


$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} \exp\left(-j \frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\
 &= \frac{1}{T} \frac{\exp\left(\frac{-j 2\pi n t}{T}\right)}{\frac{-j 2\pi n}{T}} \bigg|_0^{\tau} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{1 - \exp\left(\frac{-j 2\pi n \tau}{T}\right)}{\frac{j 2\pi n}{T}}
 \end{aligned}$$



$$x_n = \frac{\tau}{T} \exp\left[-j \frac{\pi n \tau}{T}\right] \frac{\sin\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)}{\frac{\pi n \tau}{T}} = \frac{\tau}{T} \exp\left[-j \frac{\pi n \tau}{T}\right] \text{sinc}\left(\frac{n \tau}{T}\right)$$

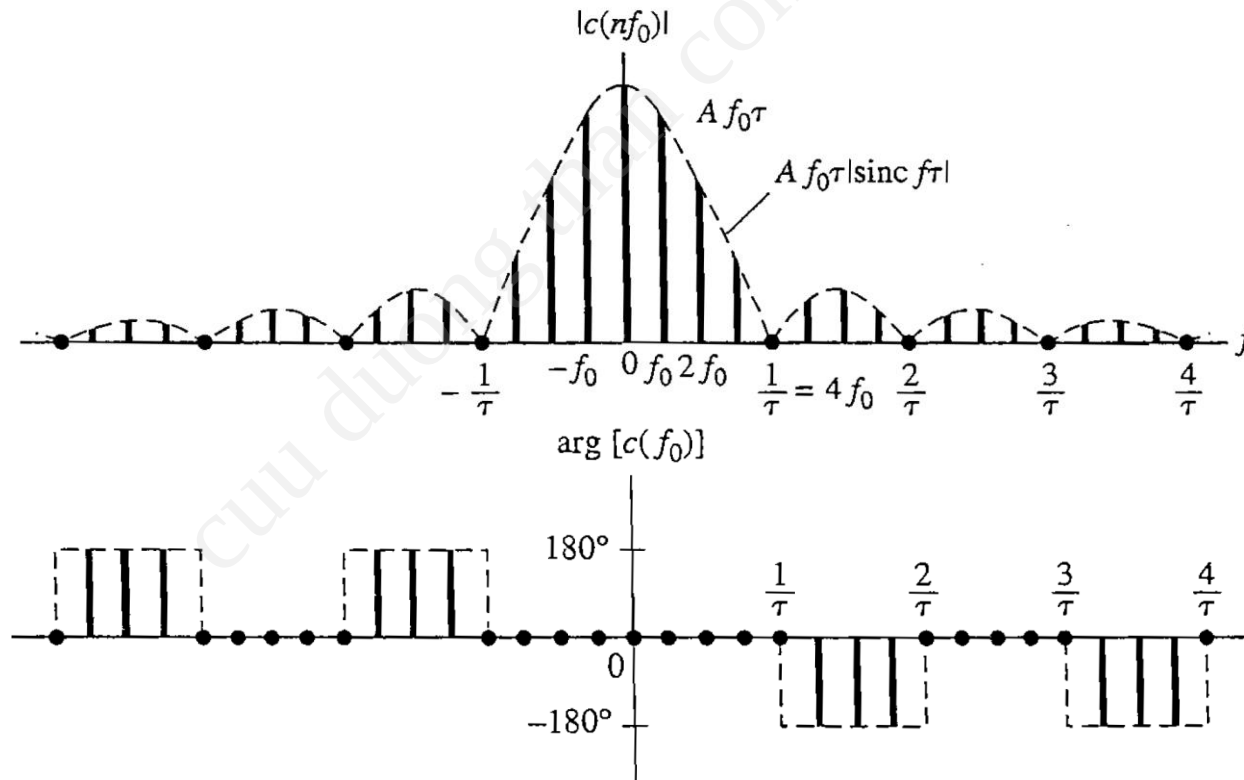
Chuỗi xung chữ nhật (2)



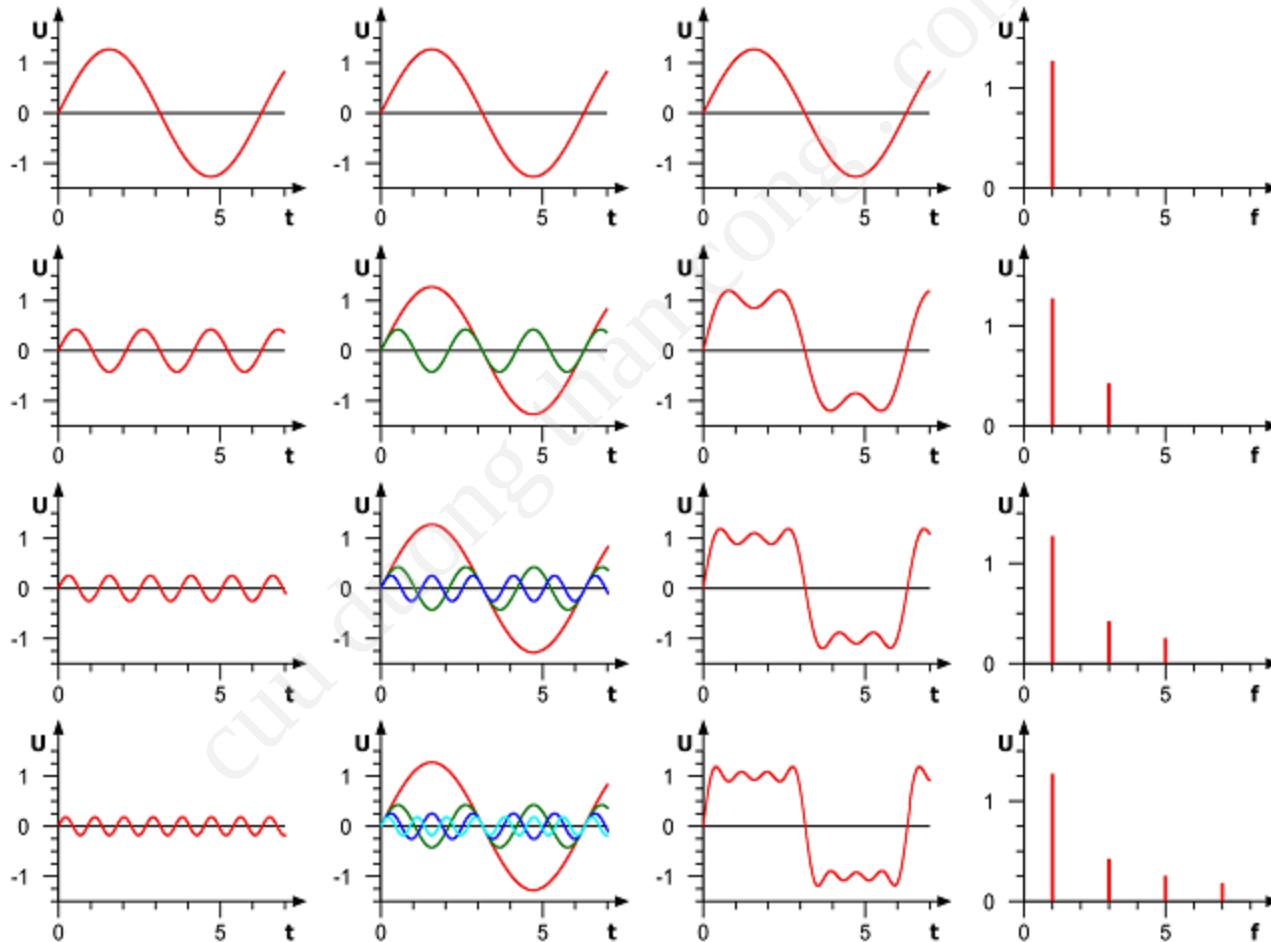
$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{-j2\pi n f_0 T_0} \left(e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{j\pi n f_0 \tau} \right) = \frac{A}{T_0} \frac{\sin \pi n f_0 \tau}{\pi n f_0} = \frac{A \tau}{T_0} \text{sinc} n f_0 \tau
 \end{aligned}$$

Chuỗi xung chữ nhật (3)

- Below figures are amplitude and phase spectra in the case where $\tau / T_0 = 1/4$. The function $\text{sinc } f\tau$ can be recognized from the envelope of the amplitude spectrum. The amplitude of the DC component is $c_0 = A\tau / T_0$.

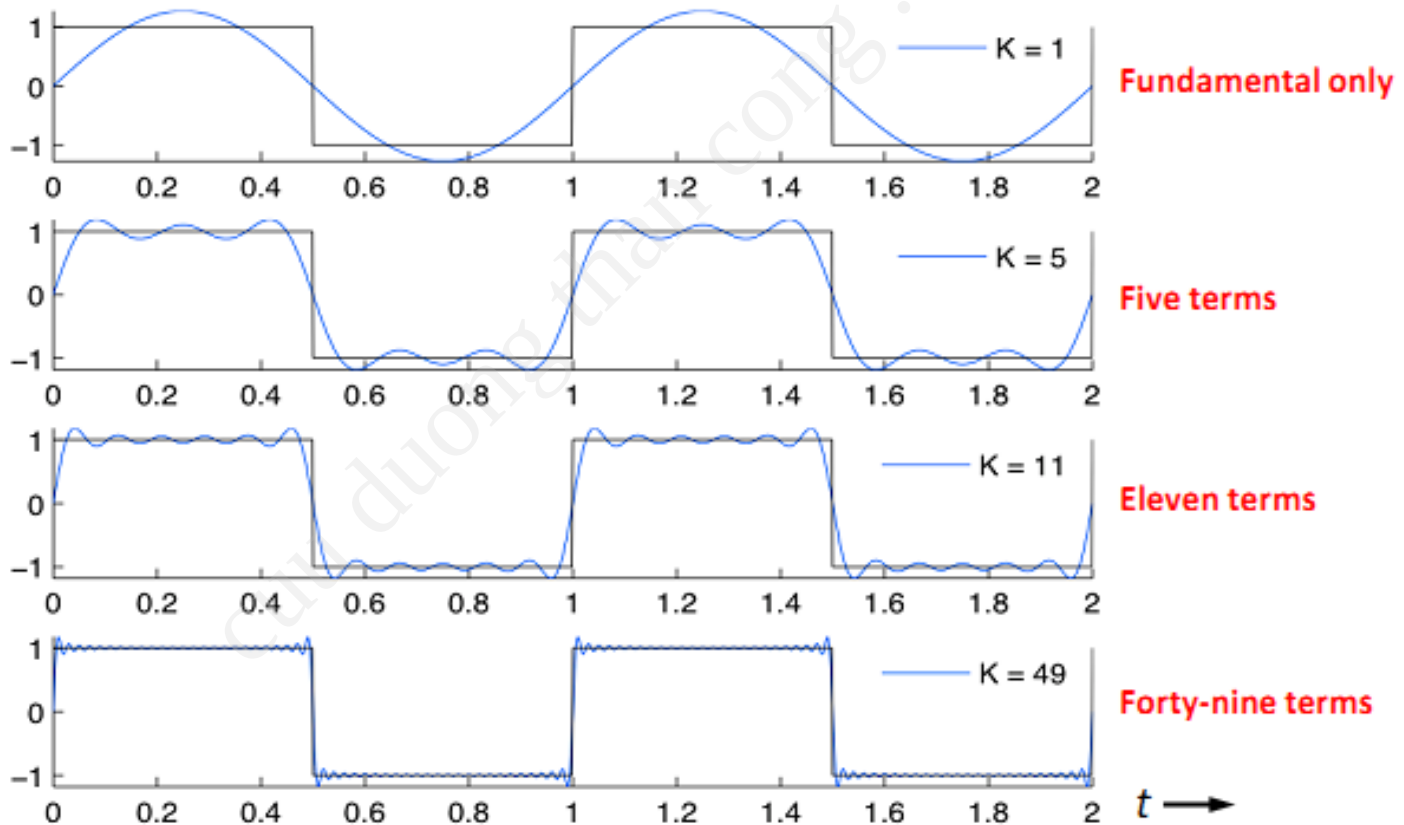


Chuỗi xung chữ nhật (4)



Chuỗi xung chữ nhật (5)

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \frac{1}{7} \sin(7\pi t) + \dots \right]$$



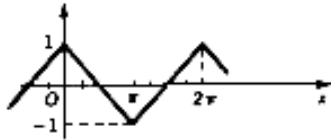


Đặc tính chuỗi xung chữ nhật

- Độ rộng xung và băng thông tỉ lệ nghịch.
- Độ rộng xung và công suất tỉ lệ thuận.
- Nếu chu kì tuần hoàn là bội số của độ rộng xung thì sẽ có một số thành phần tần số (hài) triệt tiêu.
- Cần vô số thành phần tần số để tạo ra tín hiệu dạng sóng chuỗi xung chữ nhật.

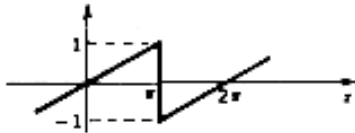


Khai triển Fourier của một số hàm tuần hoàn



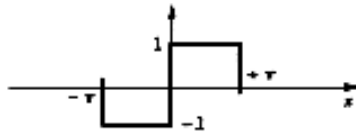
Triangular wave:

$$\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos(2n+1)x$$



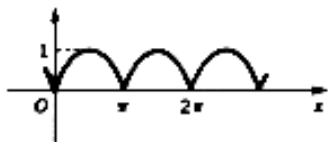
Rectangular sawtooth wave:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx$$



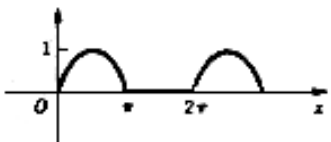
Square wave:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$



Absolute value sine wave:

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx$$



Half sine wave:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2nx$$



Mật độ phổ công suất (PSD)

- The *power spectral density* (PSD) function $G_x(f)$ of the periodic signal $x(t)$ is a real, even, and nonnegative function of frequency that gives the distribution of the power of $x(t)$ in the frequency domain.

- PSD is represented as:

$$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

- Whereas the average power of a periodic signal $x(t)$ is represented as:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

- Using PSD, the average normalized power of a real-valued signal is represented as:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} G_x(f) df$$



Tính chất khai triển Fourier

Condition:	Property:
Constant K	$K f(t) \leftrightarrow K F_n$
$f(t) \leftrightarrow F_n, g(t) \leftrightarrow G_n, \dots$	$f(t) + g(t) + \dots \leftrightarrow F_n + G_n + \dots$
Delay t_o	$f(t - t_o) \leftrightarrow F_n e^{-jn\omega_o t_o}$
Continuous $f(t)$	$\frac{df}{dt} \leftrightarrow jn\omega_o F_n$
Real $f(t)$	$F_{-n} = F_n^*$
$f(-t) = f(t)$	$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_o t)$
$f(-t) = -f(t)$	$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_o t)$
	$P \equiv \frac{1}{T} \int_T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n ^2$



Tính công suất ở miền tần số?

- A
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm B$
- $A.\cos^2(2\pi Ft+\phi)$
- $A.\cos(2\pi F_1 t+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi F_2 t+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm B.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi_1) \pm A.\cos(2\pi Ft+\phi_2)$
- $A.\cos(2\pi Ft+\phi) \pm A.\sin(2\pi Ft+\phi)$



2.3 Biến đổi Fourier

- Dùng cho tín hiệu không tuần hoàn

$$V(f) = \mathbf{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$v(t) = \mathbf{F}^{-1}[V(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{j2\pi ft} df$$

- Nếu $v(t)$ giá trị thực thì $V(-f) = V^*(f)$

$$|V(-f)| = |V(f)| \quad \arg V(-f) = -\arg V(f)$$



Mật độ phổ năng lượng (ESD)

- Energy spectral density describes the signal energy per unit bandwidth measured in joules/hertz.

- Represented as $\psi_x(f)$, the **squared magnitude spectrum**

$$\psi_x(f) = |X(f)|^2$$

- According to Parseval's theorem, the energy of $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

- Therefore:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(f) df$$

- The Energy spectral density is symmetrical in frequency about origin and total energy of the signal $x(t)$ can be expressed as:

$$E_x = 2 \int_0^{\infty} \psi_x(f) df$$



Ví dụ biến đổi Fourier

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_p \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$E_x = \int_0^{T_p} |x(t)|^2 dt = T_p$$

$$X(f) = \int_0^{T_p} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{\exp[-j2\pi f t]}{-j2\pi f} \Big|_0^{T_p} = T_p \exp[j\pi f T_p] \text{sinc}(f T_p)$$

$$x(t) = 2W \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t} = 2W \text{sinc}(2W t)$$

$$X(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq W \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$E_x = \int_{-W}^W |X(f)|^2 df = 2W$$



Xung chữ nhật

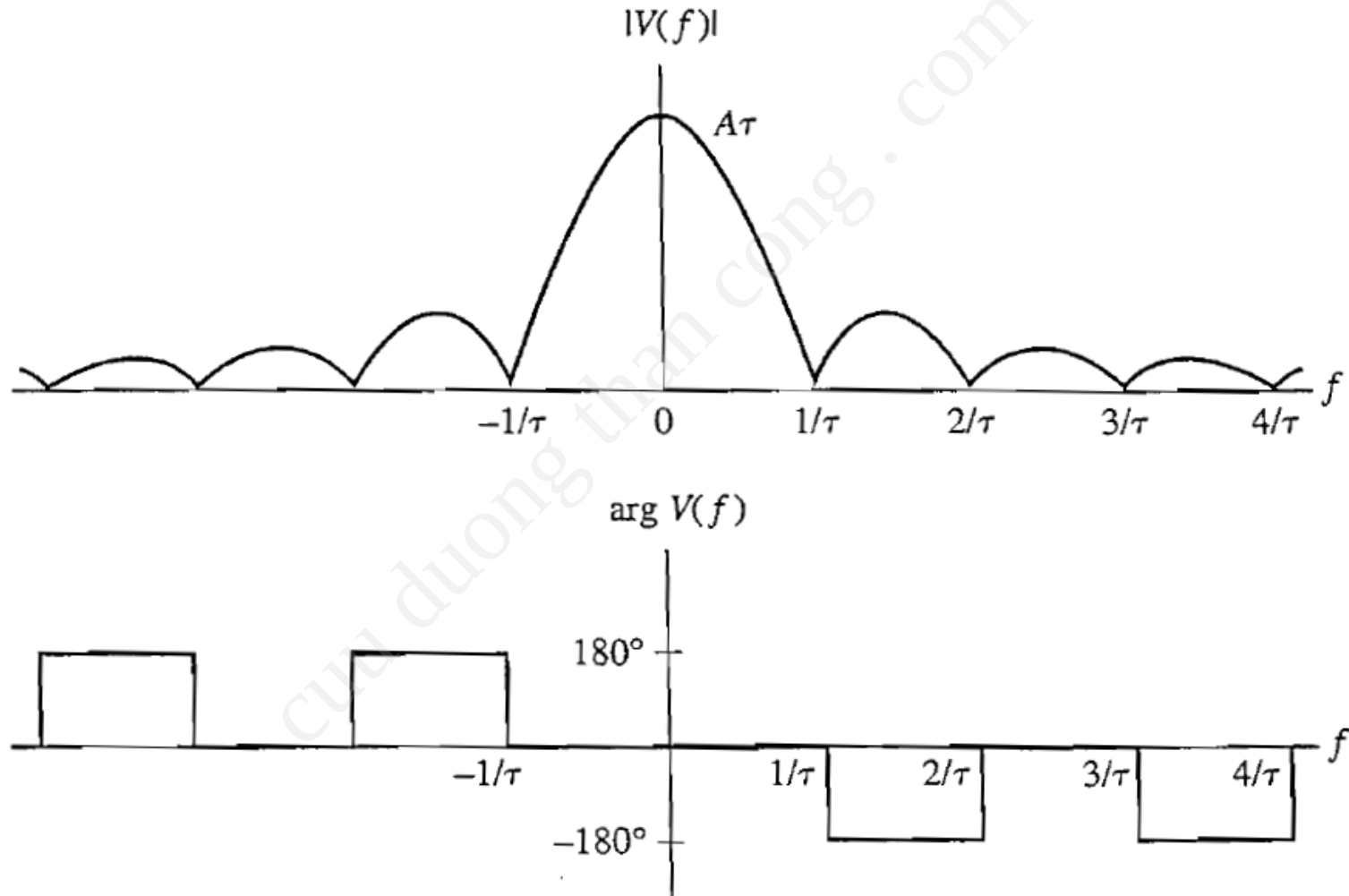
- $v(t) = A \Pi(t / \tau).$ $\Pi(t / \tau) = \begin{cases} A & |t| < \tau / 2 \\ 0 & |t| > \tau / 2 \end{cases}$

$$V(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A\tau}{\pi f \tau} \sin \pi f \tau = A \tau \text{sinc } f \tau$$

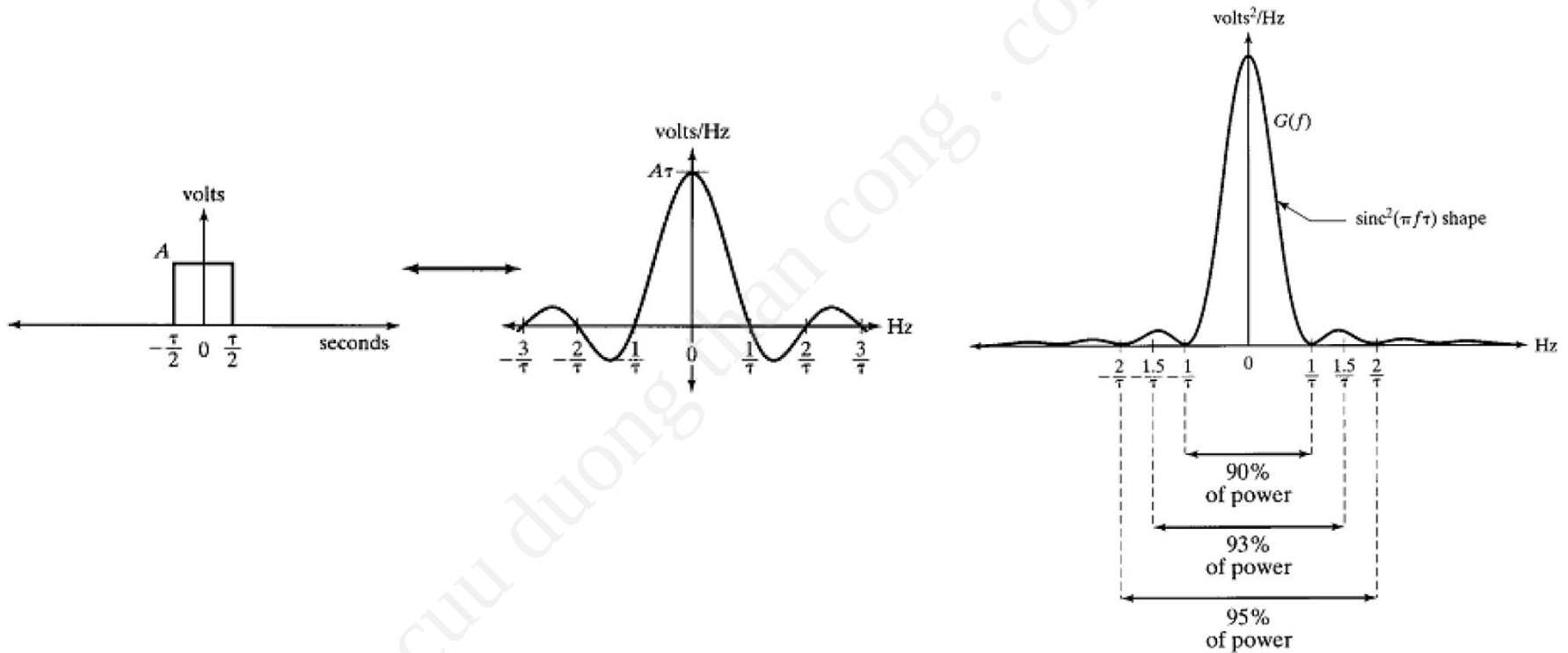
- Năng lượng $E = A^2 \tau$
- Năng lượng tập trung trong dải tần $|f| < 1/\tau$

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau} |V(f)|^2 df = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (A\tau)^2 \text{sinc}^2 f \tau df = 0.9 A^2 \tau$$

Xung chữ nhật (2)



Xung chữ nhật (3)



- Tín hiệu thời gian hẹp thì phổ rộng.



Vấn đề 5

■ Vẽ phở của các tín hiệu sau

$$1) x_1(t) = A_1 \cos(2\pi F_1 t)$$

$$2) x_2(t) = A_2 \cos(2F_2 t)$$

$$3) x_3(t) = A_1 \cos(2\pi F_1 t) + A_2 \cos(2F_2 t)$$



Biến đổi Fourier tổng quát

- Tín hiệu không tuần hoàn: biến đổi Fourier (phổ liên tục)
- Tín hiệu tuần hoàn: khai triển Fourier (phổ vạch rời rạc)
- Biến đổi Fourier tổng quát: thay thế phổ vạch bằng hàm Dirac delta (liên tục)

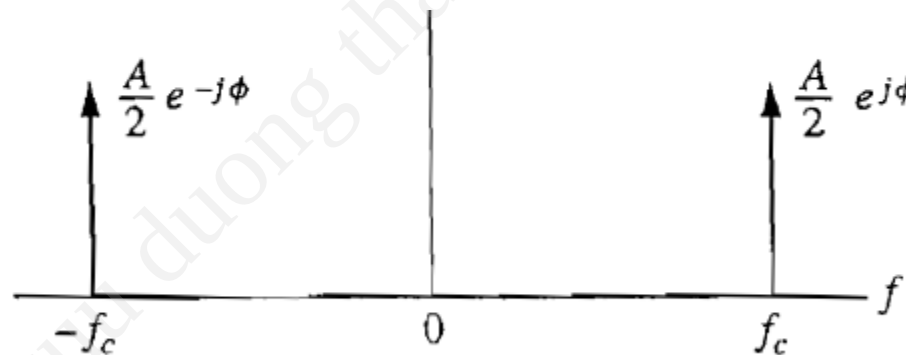
$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - n f_0)$$



Biến đổi Fourier tổng quát (2)

$$\delta(f - f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi f_1 t] \exp[-j2\pi f t] dt$$

$$A \cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{Ae^{j\phi}}{2} \delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2} \delta(f + f_c)$$



$$A \leftrightarrow A \delta(f)$$

$$A \delta(t) \leftrightarrow A$$

$$Ae^{j\omega_c t} \leftrightarrow A \delta(f - f_c)$$

$$A \delta(t - t_d) \leftrightarrow Ae^{-j\omega t_d}$$



Tần số f (Hz) và tần số góc ω (rad/s)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t} dt = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t} df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Một số định nghĩa biến đổi Fourier dựa trên tần số f (Hz) hoặc ω (rad/s) và **có thể khác nhau hệ số tỉ lệ!** Do đó cần lưu ý khi xác định biên độ hoặc công suất/năng lượng.



Cặp biến đổi Fourier

Time Function, $x(t)$	Transform, $X(f)$	Transform, $X(\omega)$
$x(t) = \begin{cases} 1 & -T_p/2 \leq t \leq T_p/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$	$T_p \frac{\sin(\pi f T_p)}{\pi f T_p}$	$T \frac{\sin(\omega T_p/2)}{\omega T_p/2}$
$x(t) = \begin{cases} \exp(-at) & 0 \leq t \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f + a}$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$x(t) = A$	$A\delta(f)$	$2\pi A\delta(\omega)$
$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j2\pi f_0 t}$	$A\delta(f - f_0)$	$2\pi A\delta(\omega - \omega_0)$



Tính chất biến đổi Fourier

Operation	Time Function, $x(t)$	Transform, $X(f)$	Transform, $X(\omega)$
Reversal	$x(-t)$	$X(-f)$	$X(-\omega)$
Symmetry	$X(t)$	$x(-f)$	$2\pi x(-\omega)$
Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time Delay	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Time Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$	$(j\omega)^n X(\omega)$
Energy	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 dt$	$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 dt$
Frequency Translation	$x(t)e^{j2\pi f_c t} = x(t)e^{j\omega_c t}$	$X(f - f_c)$	$X(\omega - \omega_c)$
Convolution	$x(t) * h(t)$	$X(f)H(f)$	$X(\omega)H(\omega)$
Multiplication	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$

Thiết bị đo thực tế

- Chỉ thu nhận tín hiệu trong khoảng thời gian hữu hạn (T_m)

$$P_x(T_m) = \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} |x(t)|^2 dt$$

$$X_{T_m}(f) = \int_{-T_m/2}^{T_m/2} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$S_x(f, T_m) = \frac{1}{T_m} |X_{T_m}(f)|^2$$



Băng thông

- Trong trường hợp tín hiệu thực, do phổ đối xứng nên chỉ đề cập tần số dương.
- Băng thông 1 phía và 2 phía
- Băng gốc và băng dải
- Băng thông hữu hạn và vô hạn
 - Băng thông tuyệt đối
 - Băng thông null-to-null (qua điểm 0)
 - Băng thông -3dB (nửa công suất)



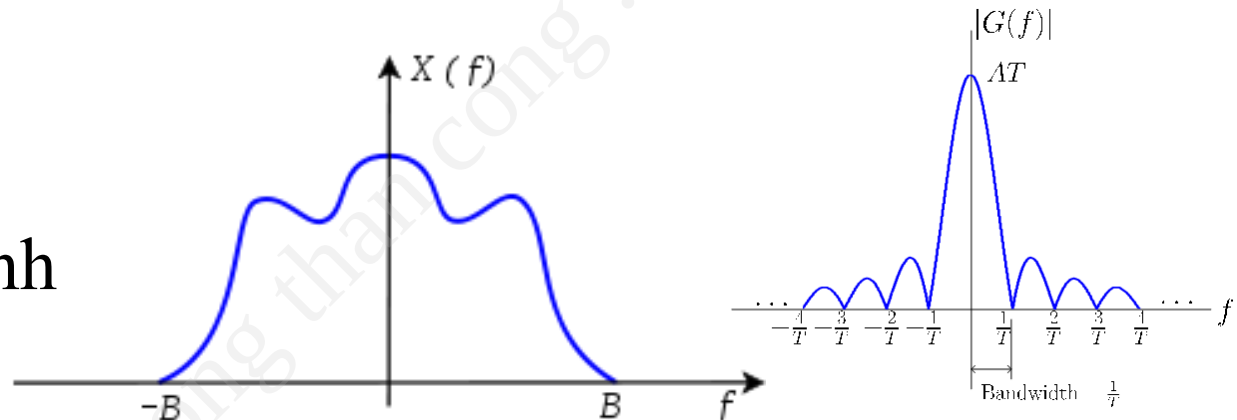
Một số quy ước băng thông

- Nếu phổ tín hiệu (phía dương) chỉ có 1 vạch tần số W
 - $F_{\max} = W$
 - $F_{\min} = 0$
 - Băng thông 1 phía $BW_1 = [0 \div W] = W$
 - Băng thông 2 phía $BW_2 = [-W \div W] = 2W$
- Nếu phổ tín hiệu (phía dương) có nhiều hơn 1 vạch tần số
 - Băng thông 1 phía $BW_1 = [F_{\min} \div F_{\max}] = F_{\max} - F_{\min}$
 - Băng thông 2 phía $BW_2 = [-F_{\max} \div -F_{\min}]$ và $[F_{\min} \div F_{\max}] = 2(F_{\max} - F_{\min})$

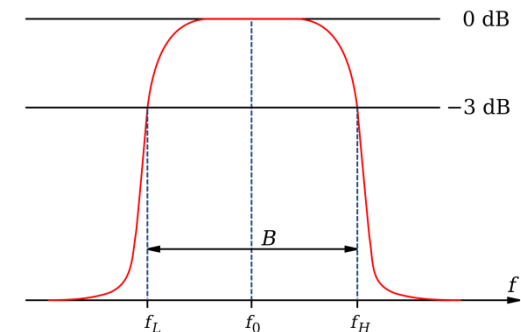
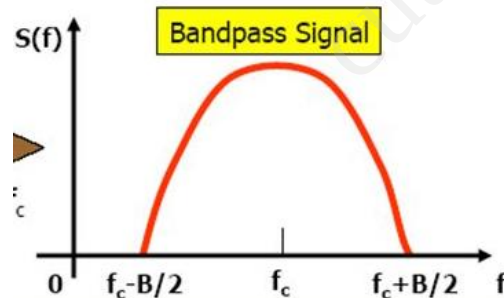
Bảng thông tín hiệu

■ Tín hiệu băng gốc (baseband): $F_{\min} = 0 (\approx)$

- Thoại
- Âm thanh
- Truyền hình
- Y sinh



■ Tín hiệu băng dải (bandpass): $F_{\min} \neq 0 (>>)$

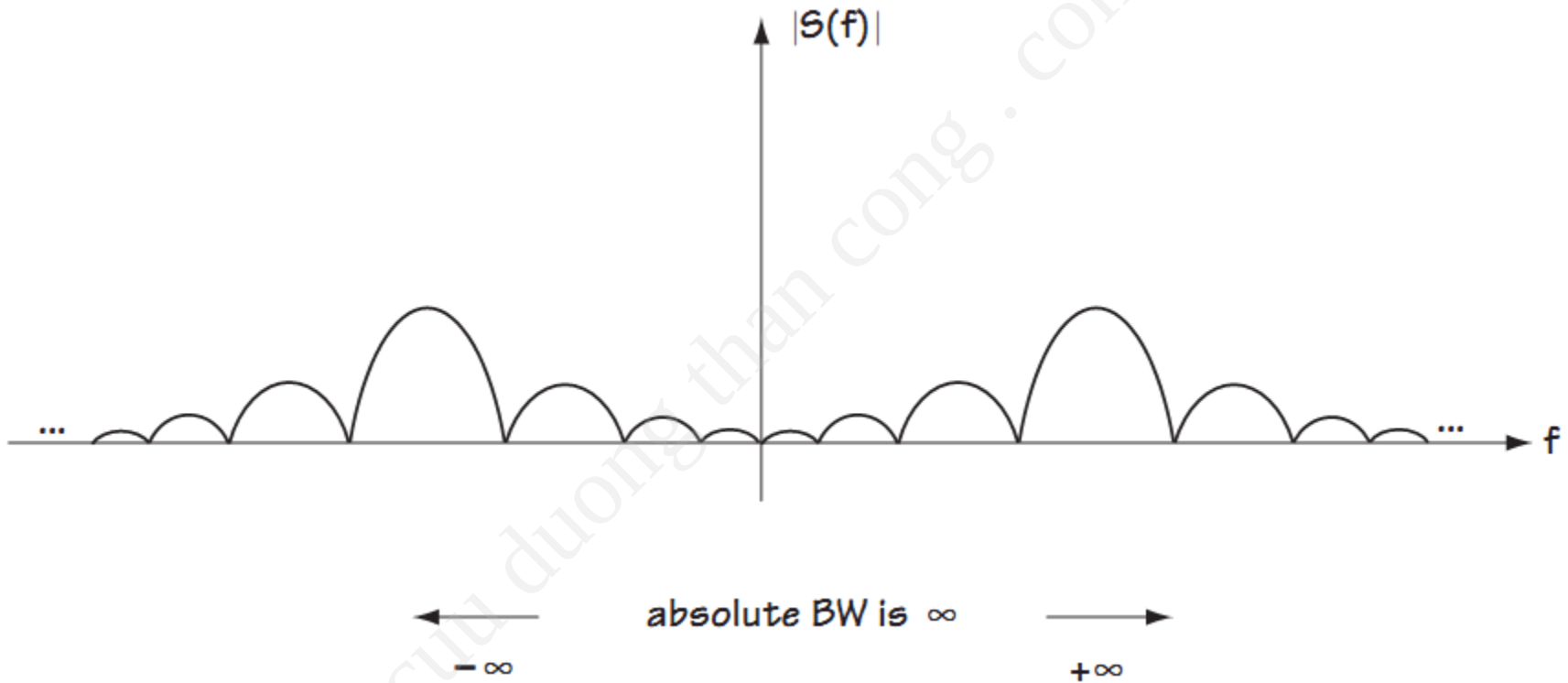




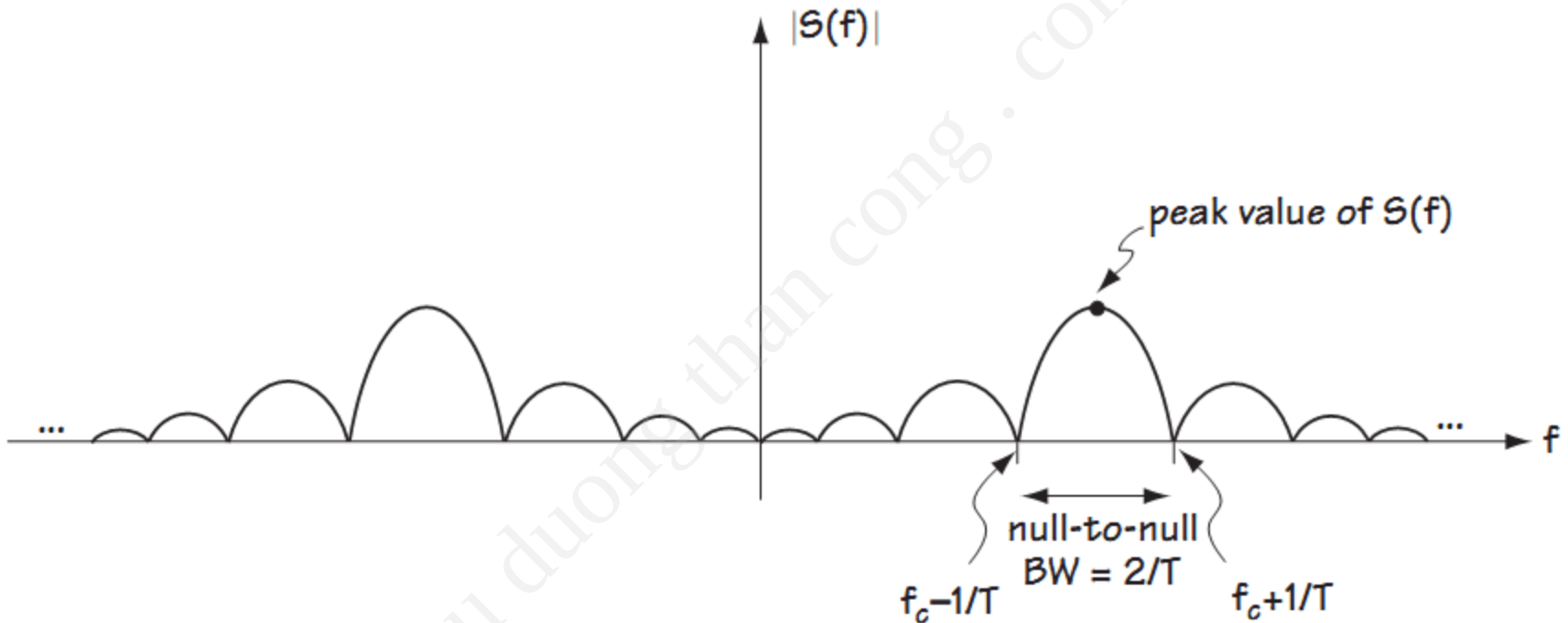
Câu hỏi?

- Tín hiệu tương tự có phổ thế nào?
 - Tuần hoàn
 - Không tuần hoàn
- Tín hiệu thời gian hữu hạn có băng thông thế nào?
- Tín hiệu băng thông hữu hạn có thời gian thế nào?
- Tín hiệu âm thanh (thoại, nhạc), truyền hình (đen/trắng, màu), ... có phổ thế nào?

Băng thông tuyệt đối

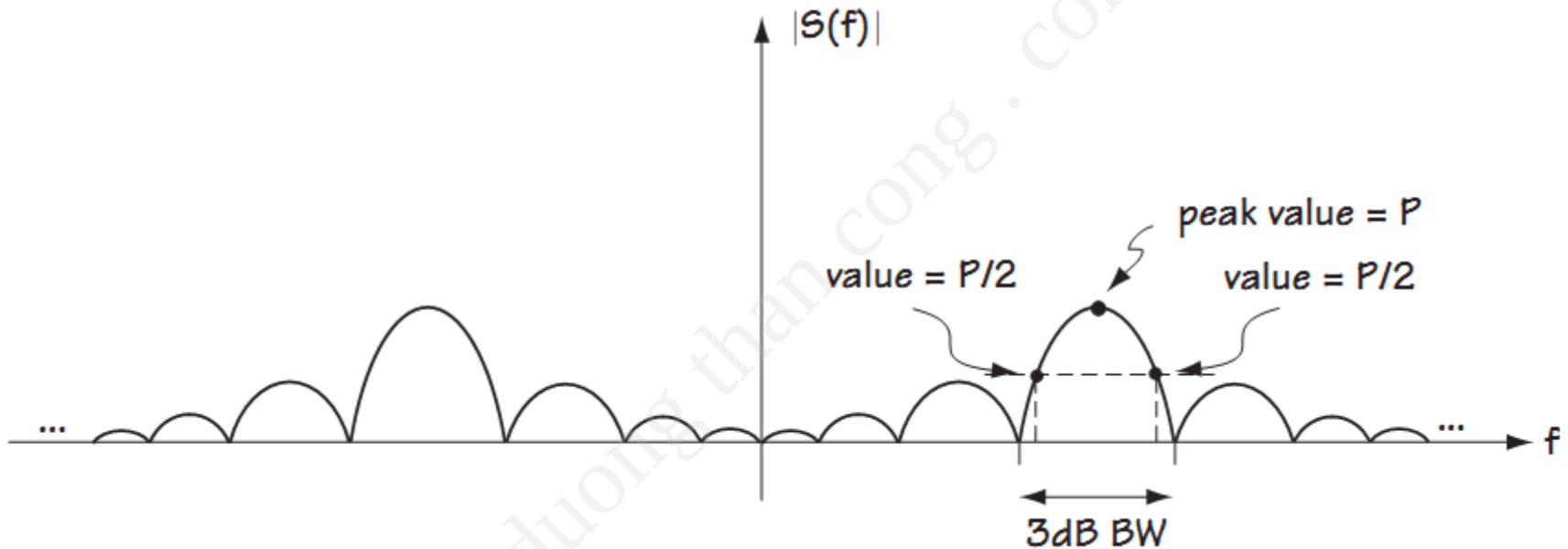


Băng thông null-to-null





Băng thông nửa công suất (-3dB)





2.4 Tích chập và tương quan

- Tích chập

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = H(f)X(f)$$

- Tự tương quan

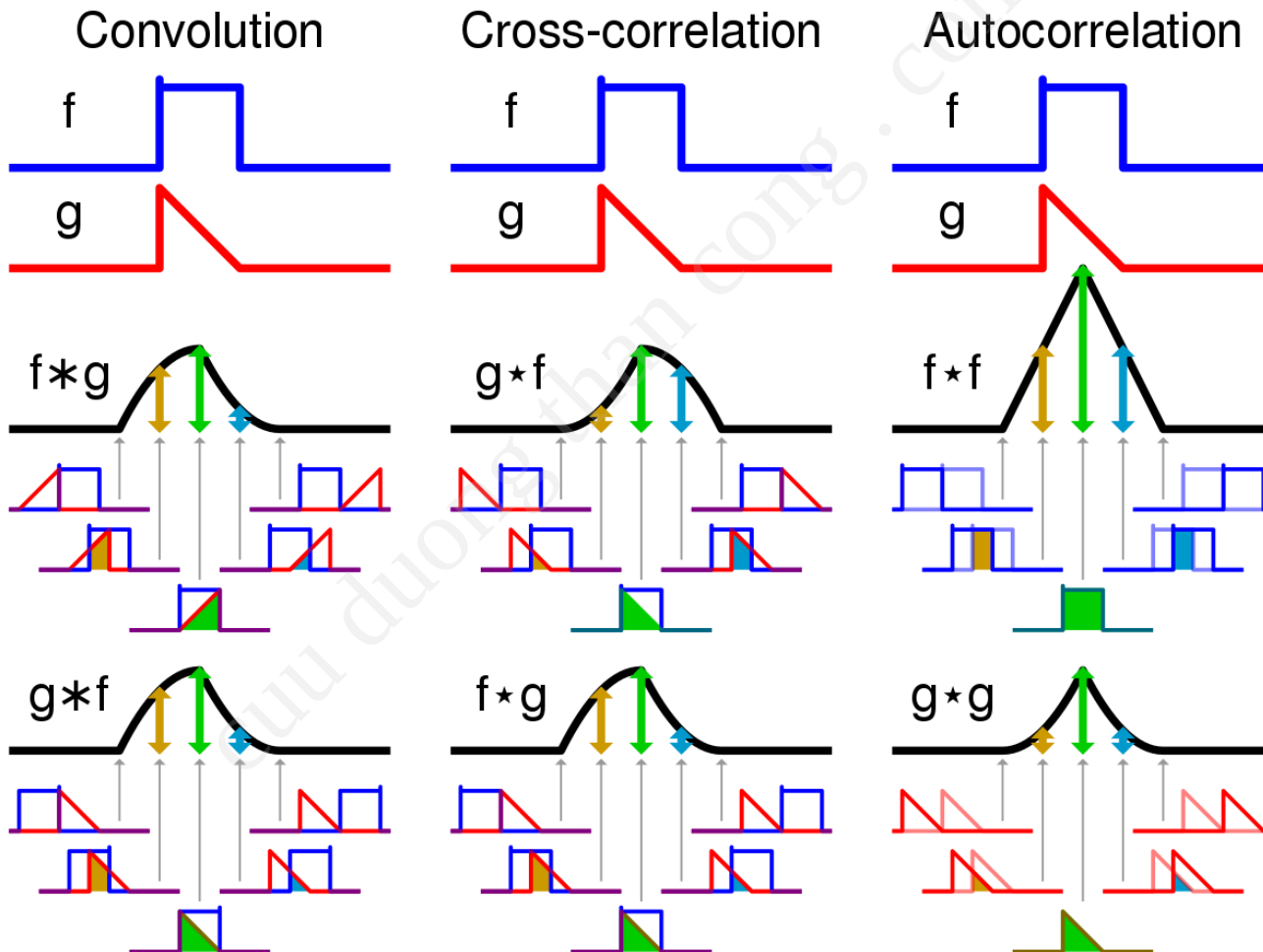
$$V_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

1. $V_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$

2. $V_x(\tau) = V_x^*(-\tau)$

3. $|V_x(\tau)| < V_x(0)$

Ví dụ tích chập và tương quan





Ví dụ tự tương quan

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_p \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$V_x(\tau) = \begin{cases} T_p \left(1 - \frac{|\tau|}{T_p} \right) & |\tau| \leq T_p \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Tính chất tích chập

$$h(t) * f(t) = f(t) * h(t)$$

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

$$f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$$

$$h(t) * f(t) = y(t) \Rightarrow h(t - t_0) * f(t) = h(t) * f(t - t_0) = y(t - t_0)$$

$$h(t) * f(t) = y(t) \Rightarrow \left(\frac{d}{dt}h(t)\right) * f(t) = h(t) * \left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = \frac{d}{dt}y(t)$$

$$f(t) * h(t) = y(t) \Rightarrow h(-t) * f(-t) = y(-t)$$

If $h(t) = 0$ for $t < t_{sh}$ and $f(t) = 0$ for $t < t_{sf}$
then $y(t) = h(t) * f(t) = 0$ for $t < t_{sy} = t_{sh} + t_{sf}$.

If $h(t) = 0$ for $t > t_{eh}$ and $f(t) = 0$ for $t > t_{ef}$
then $y(t) = h(t) * f(t) = 0$ for $t > t_{ey} = t_{eh} + t_{ef}$.

$$h(t) * f(t) = y(t) \Rightarrow T_y = T_h + T_f$$

where T_h , T_f , and T_y denote the widths of $h(t)$, $f(t)$, and $y(t)$.



2.5 Xác suất và nhiễu

- Xác suất và hàm mật độ xác suất (pdf)
 - Đều (uniform)
 - Chuẩn (normal, Gaussian)
- Giá trị trung bình (mean, average) $m_X = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx$
- Giá trị trung bình bình phương (mean square)
- Độ lệch chuẩn (standard deviation) và phương sai (variance) $\sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2]$
- Tín hiệu ngẫu nhiên độc lập $\rightarrow$ xếp chồng phương sai $\rightarrow$ tương tự công suất (xoay chiều)



Khái niệm xác suất

- Xác suất P của biến cố E nào đó, ký hiệu $P(E)$ được xác định trong không gian mẫu Ω gồm mọi biến cố sơ cấp (elementary event) sao cho P phải thỏa mãn các tiên đề xác suất Kolmogorov.
 - 1) Với mọi biến cố E , $P(E) \geq 0$. Xác suất của một biến cố là một số thực không âm.
 - 2) $P(\Omega)=1$. Xác suất một biến cố sơ cấp nào đó trong tập mẫu sẽ xảy ra là 1. Cụ thể hơn, không có biến cố sơ cấp nào nằm ngoài tập mẫu.
 - 3) Một chuỗi đếm được bất kỳ gồm các biến cố đôi một không giao nhau $\{E_1, E_2, \dots\}$ thỏa mãn $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$. Xác suất của một tập biến cố là hợp của các tập con không giao nhau bằng tổng các xác suất của các tập con đó.



Hàm xác suất (liên tục)

- Hàm phân phối tích lũy (cumulative distribution function, còn gọi là hàm phân phối xác suất - probability distribution function): $F_X(x) = P(X \leq x)$
 - $0 \leq F_X(x) \leq 1$, $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(\infty) = 1$
 - $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ với $x_1 \leq x_2$

- **Hàm mật độ xác suất (probability density function):**
 $p_X(x) = dF_X(x)/dx \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \qquad \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx = P(x_1 < X \leq x_2)$$

- **Lưu ý 1: $p_X(x) \neq P(X=x)$ vì $P(X=x)=0 \ \forall x$**
- **Lưu ý 2: $p_X(x)$ có thể lớn hơn 1.**



Các moments

$$m_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

**DC
value**

- The first moment of a probability distribution of a random variable X is called mean value m_X , or expected value of a random variable X

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$$

**Total
power**

- The second moment of a probability distribution is the mean-square value of X

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E\{(X - m_X)^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx \end{aligned}$$

- Central moments are the moments of the difference between X and m_X and the second central moment is the variance of X

$$\text{var}(X) = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

**AC
power**

- Variance is equal to the difference between the mean-square value and the square of the mean

Ví dụ 4

- Tìm giá trị trung bình và phương sai của tín hiệu ngẫu nhiên có phân bố đều trong đoạn $[a \ b]$?

$$x_m = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_m)^2 p(x) dx$$



Định lý giới hạn trung tâm

Theo định lý trên cho dù biến ngẫu nhiên X (kỳ vọng μ và độ lệch chuẩn σ) có bất cứ phân phối nào thì khi n khá lớn trung bình cộng của n biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối xác suất với X (ký hiệu là $\bar{X}_n$) sẽ có phân phối chuẩn (Gaussian) với kỳ vọng bằng μ và độ lệch chuẩn bằng $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Nếu chuẩn hoá biến ngẫu nhiên $\bar{X}_n$ ta thu được biến ngẫu nhiên $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ có phân phối chuẩn tắc với kỳ vọng bằng 0 và độ lệch chuẩn bằng 1.

Nhiều Gaussian

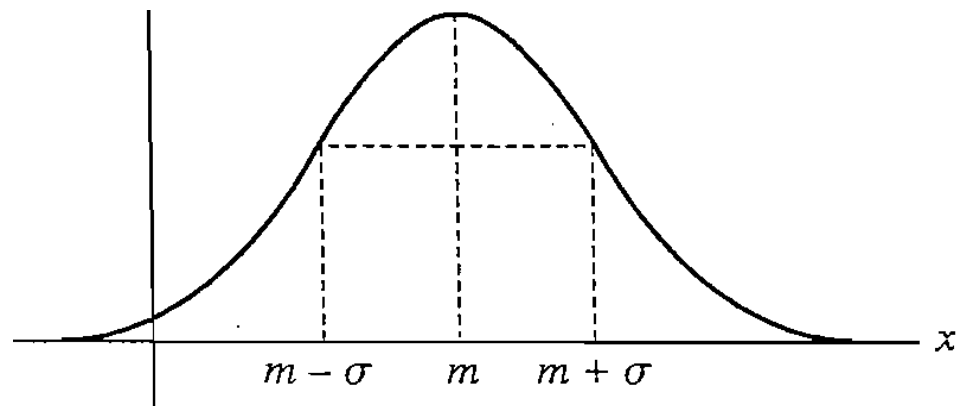
- Phân bố chuẩn (Normal) hay Gaussian có hàm mật độ

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad -\infty < x < \infty$$

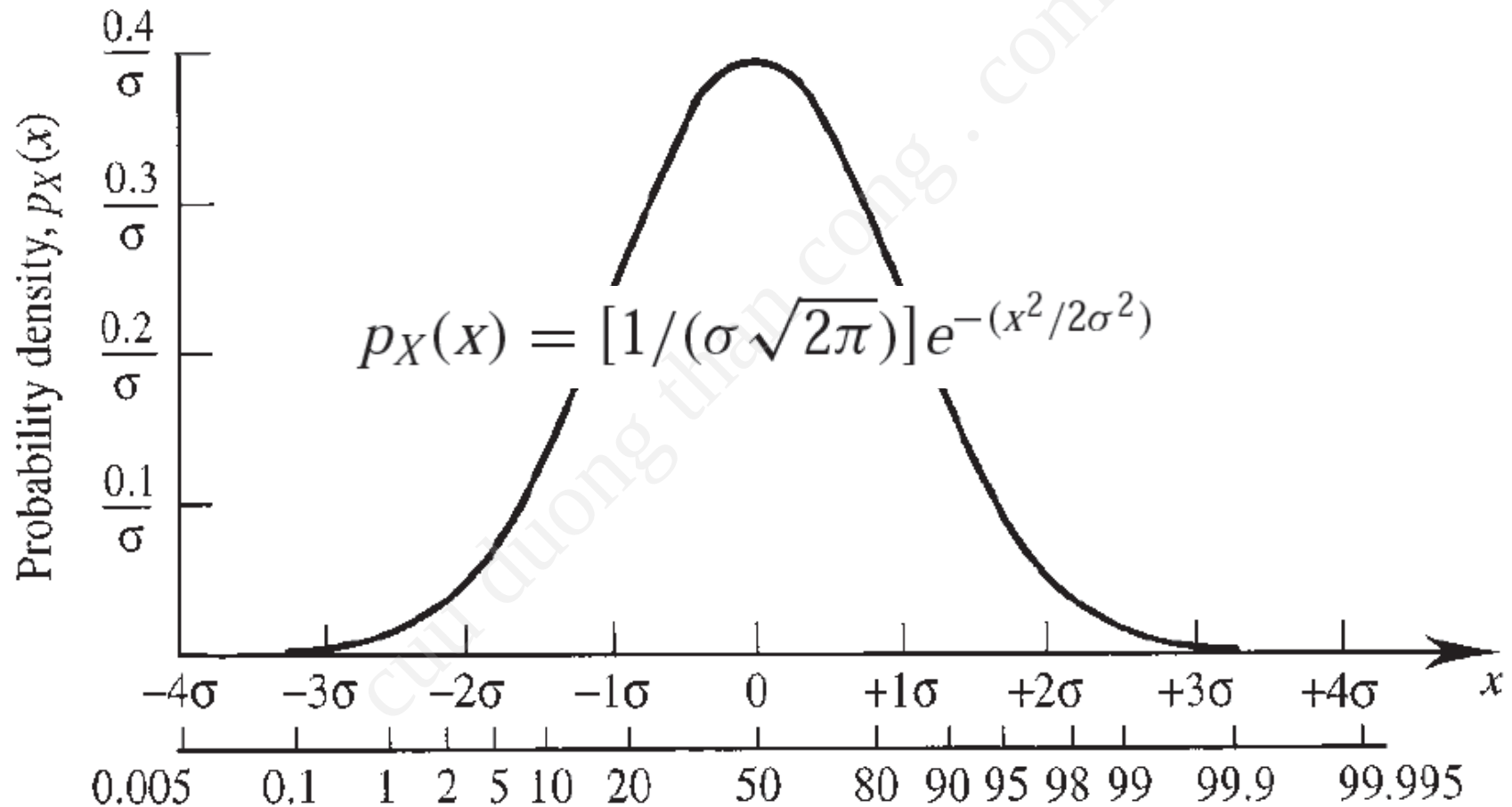
trong đó m và σ^2 là giá trị trung bình và phương sai.

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} p_X(x) dx$$

- Lưu ý ký hiệu
 - $N(m, \sigma^2)$: phổ biến**
 - $N(m, \sigma)$

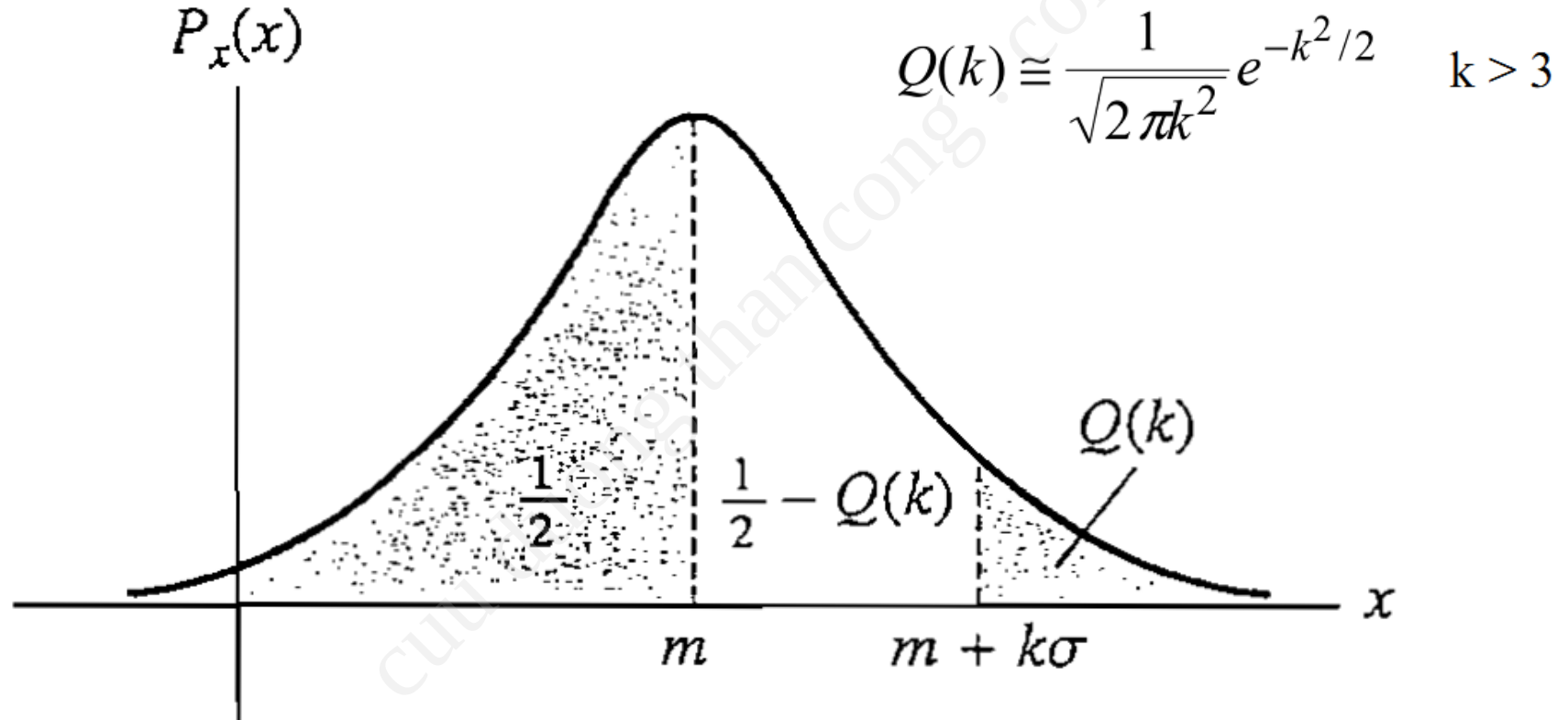


Phân phối Gaussian ($0, \sigma^2$)

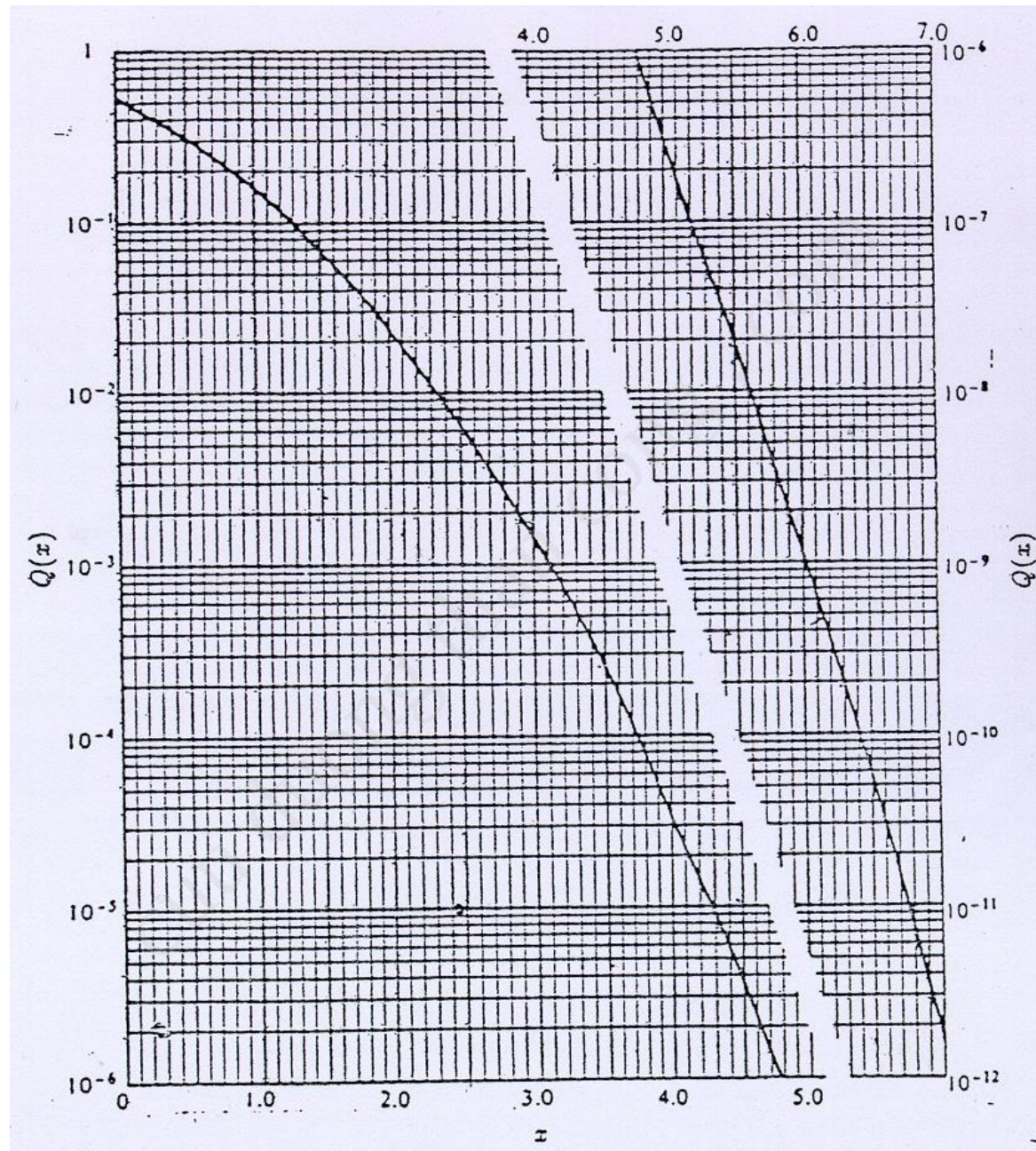


$$\text{CD (\%)} = P(X \leq x) \times 100\%$$

Q(k)



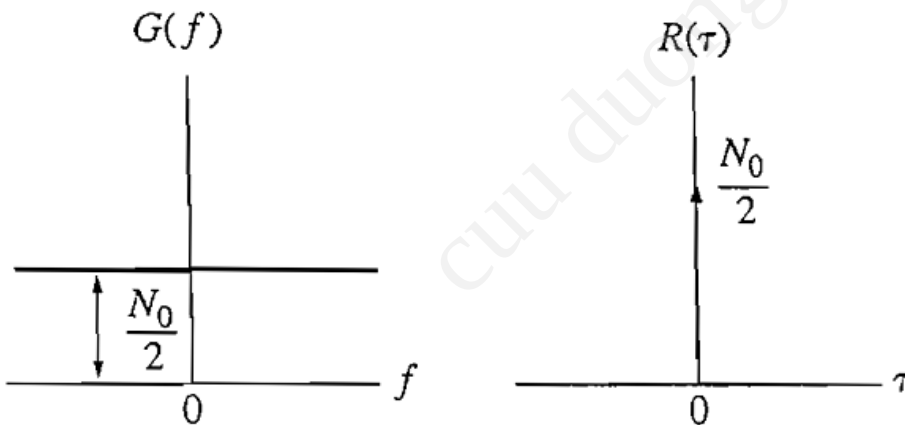
$$P(X > m + k\sigma) = P(X \leq m - k\sigma) = Q(k)$$



Nhiều trắng

- Hàm mật độ phổ của nhiễu trắng (white) có dạng hằng số $N_0/2$ (W/Hz).
- Ví dụ: nhiễu nhiệt

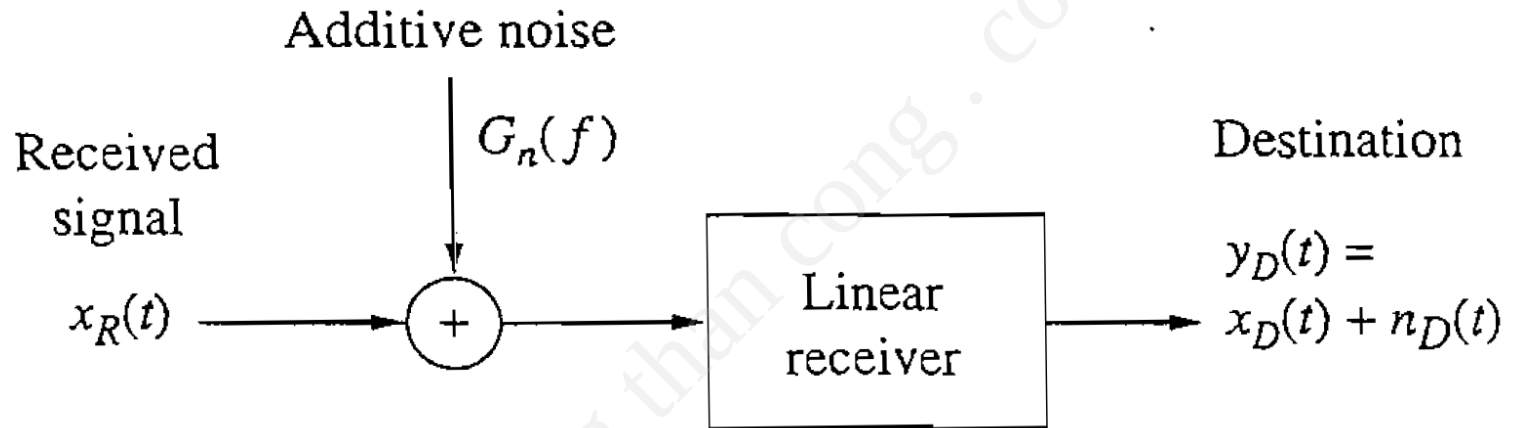
$$2G_N(f) = \eta = kT_N.$$



k = Boltzmann constant = 1.37×10^{-23} (J/deg)

T = Temperature is Kelvins (K)

Nhiều cộng



$$\overline{y_D^2} = \overline{x_D^2} + \overline{n_D^2} = S_D + N_D$$



Tóm tắt

- Phân loại tín hiệu miền thời gian?
- Vẽ dạng sóng?
- Khai triển và biến đổi Fourier thuận ngược?
- Vẽ phổ, phổ biên độ và phổ pha tín hiệu?
- Các tính chất cơ bản của phổ tín hiệu?
- Tính đối ngẫu thời gian-tần số?
- Phân loại tín hiệu miền tần số?
- Cách tính băng thông?
- Cách tính giá trị trung bình ở miền thời gian và miền tần số?
- Cách tính công suất/năng lượng ở miền thời gian và miền tần số?
- Đặc tính nhiễu AWGN?
- Cách tính công suất nhiễu dựa trên phân bố xác suất?



Bài tập 1

❖ Vẽ dạng sóng của tín hiệu trong các trường hợp sau:

- 1) $x(t) = 1 @ \sin(t) \text{ (t:s)}$
- 2) $x(t) = 1 @ \sin(\pi t) \text{ (t:s)}$
- 3) $x(t) = 4 \sin(1 @ \pi t) \text{ (t:s)}$
- 4) $x(t) = 4 \cos(1 @ \pi t) \text{ (t:s)}$
- 5) $x(t) = 1 + 1 @ \cos(4\pi t) \text{ (t:s)}$
- 6) $x(t) = 1 + 4 \cos(1 @ \pi t) \text{ (t:s)}$
- 7) $x(t) = 4 \cos(2\pi t) + 1 @ \cos(4\pi t) \text{ (t:s)}$
- 8) $x(t) = 4 \sin^2(1 @ \pi t) \text{ (t:s)}$
- 9) $x(t) = 4 \text{sinc}(1 @ t) \text{ (t:s)}$
- 10) $x(t) = 4 \Pi\{(t - 3)/1 @\}$
- 11) $x(t) = \Sigma_k \{4 \Pi\{(t - 20k - 3)/1 @\}\}$
- 12) $x(t) = 4 \delta(t - 1 @) - 1 @ \delta(t + 4)$



Bài tập 2

■ Tìm và vẽ phổ biên độ của các tín hiệu sau:

- 1) $-1@$
- 2) $10\cos(1@\pi t)$
- 3) $10\sin(1@\pi t)$
- 4) $10\cos(1@\pi t) - 10$
- 5) $10 - 10\sin(1@\pi t)$
- 6) $10\cos(1@\pi t) - 10\sin(1@\pi t)$
- 7) $10\cos(1@\pi t) - 20\sin(1@\pi t)$
- 8) $10\cos(1@\pi t) - 10\sin(2@\pi t)$
- 9) $10\cos(1@\pi t) - 20\sin(2@\pi t)$
- 10) $10\cos(1@\pi t) + 20\cos(1@\pi t + \pi/3)$
- 11) $10\cos(1@\pi t) + 20\cos(1@\pi t - \pi/3)$
- 12) $10\cos(1@\pi t) + 20\sin(1@\pi t - \pi/3)$



Bài tập 3

■ Tìm và vẽ phổ biên độ của các tín hiệu sau:

- 1) $10\cos(1@ \pi t) \cdot \cos(100\pi t)$
- 2) $10\cos(1@ \pi t) \cdot \sin(100\pi t)$
- 3) $10\sin(1@ \pi t) \cdot \cos(100\pi t)$
- 4) $10\sin(1@ \pi t) \cdot \sin(100\pi t)$
- 5) $10\cos(1@ \pi t) \cdot \cos(100\pi t) + 10\sin(1@ \pi t) \cdot \sin(100\pi t)$
- 6) $10\cos(1@ \pi t) \cdot \cos(100\pi t) - 10\sin(1@ \pi t) \cdot \sin(100\pi t)$
- 7) $\{2\cos(1@ \pi t) + 4\cos(20\pi t)\} \cdot \cos(100\pi t)$
- 8) $\{1 - \cos^2(1@ \pi t)\} \cdot \cos(100\pi t)$
- 9) $\cos(1@ \pi t) \cdot \cos(20\pi t) \cdot \cos(100\pi t)$
- 10) $\{1 + 2\cos(1@ \pi t)\} \cdot \cos(100\pi t)$
- 11) $\{10 + 2\cos(1@ \pi t)\} \cdot \cos(100\pi t)$
- 12) $\{10 + 2\cos(1@ \pi t) - 4\cos(20\pi t)\} \cdot \cos(100\pi t)$



Bài tập 4

■ Tìm, vẽ phổ biên độ và xác định băng thông của các tín hiệu sau:

1) $\Pi(t) - 1@$

2) $\Pi(t - 1@)$

3) $\Pi(1@t)$

4) $\Pi(t/1@)$

5) $\Pi(3t - 1@)$

6) $\Pi(t/1@ - 2)$

7) $\Pi((t - 2)/1@)$

8) $\Pi((t - 1@)/2)$

9) $\Pi((3t - 2)/1@)$

10) $\Pi(t).10.\cos(1@\pi t)$

11) $\{1 + \Pi(t)\}.10.\cos(1@\pi t)$

12) $\{1 + \Pi(t - 2)\}.10.\cos(1@\pi t)$



Bài tập 5

- Cho tín hiệu thực $x(t)$ có băng thông $[0 \text{ W}]$. Tìm băng thông của các tín hiệu sau:

1) $y(t) = x(t) - 2$

2) $y(t) = x(t - 2)$

3) $y(t) = x(t - 2) + 2$

4) $y(t) = 2x(t)$

5) $y(t) = x(2t)$

6) $y(t) = x^2(t)$

7) $y(t) = x(-t)$

8) $y(t) = x(t) + x(-t)$

9) $y(t) = x(t).x(-t)$

10) $y(t) = x(t) * x(-t)$ (tích chập)



Bài tập 6

- Cho tín hiệu thực $x(t)$ có băng thông $[0 \text{ W}]$ (rad/s). Tìm băng thông của các tín hiệu sau:

1) $y(t) = x(t) \cdot \cos(Wt)$

2) $y(t) = x(t) \cdot \sin(Wt)$

3) $y(t) = x(t) \cdot \cos(10Wt)$

4) $y(t) = x(t) \cdot \cos(Wt) + x(t) \cdot \sin(Wt)$

5) $y(t) = x(t) \cdot \cos(Wt) - x(t) \cdot \sin(Wt)$

6) $y(t) = \{1 + x(t)\} \cdot \cos(Wt)$

7) $y(t) = \{1 - x(t)\} \cdot \cos(Wt)$

8) $y(t) = \{1 + 2x(t)\} \cdot \cos(Wt)$

9) $y(t) = x(t) + \cos(Wt)$

10) $y(t) = x(t) * \cos(Wt)$



Bài tập 7

- Cho tín hiệu thực $x(t)$ có băng thông $[0 \text{ W}]$ (Hz). Tìm băng thông của các tín hiệu sau:

1) $y(t) = dx(t)/dt$

2) $Y(t) = x(t) \cdot \delta(t)$

3) $y(t) = x(t) \cdot \Pi(t)$

4) $y(t) = x(t) \cdot \Pi(Wt)$

5) $y(t) = x(t) \cdot \Pi(2Wt)$

6) $y(t) = x(t) \cdot \Pi(Wt/2)$

7) $y(t) = x(t) * \Pi(t)$

8) $y(t) = x(t) * \Pi(Wt)$

9) $y(t) = x(t) * \Pi(2Wt)$

10) $y(t) = x(t) * \Pi(Wt/2)$



Bài tập 8

- Cho các tín hiệu thực $x_1(t)$ và $x_2(t)$ có băng thông $[0 \text{ W}]$ (Hz). Tìm băng thông của các tín hiệu sau:

- 1) $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$
- 2) $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$
- 3) $y(t) = x_1(t).x_2(t)$
- 4) $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$
- 5) $y(t) = \{x_1(t) + x_2(t)\}.\cos(Wt)$
- 6) $y(t) = x_1(t) + x_2(t).\cos(Wt)$
- 7) $y(t) = x_1(t) + x_2(t).\cos(10Wt)$
- 8) $y(t) = x_1(t).\cos(Wt) + x_2(t).\sin(Wt)$
- 9) $y(t) = x_1(t).\cos(10Wt) + x_2(t).\sin(10Wt)$
- 10) $y(t) = x_1(t).\cos(Wt).\cos(10Wt)$



Bài tập 9

- Vẽ dạng sóng, tìm chu kì tuần hoàn và khai triển Fourier

$$(a) \ x(t) = 2 \cos(200\pi t) + 5 \sin(400\pi t)$$

$$(b) \ x(t) = 2 \cos(200\pi t) + 5 \sin(300\pi t)$$

$$(c) \ x(t) = 2 \cos(150\pi t) + 5 \sin(250\pi t)$$



Bài tập 10

$$x_1(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$x_2(t) = m(t) \sin(2\pi f_c t)$$

1) Rút gọn

$$(a) \ y_1(t) = x_1(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$(b) \ y_2(t) = x_1(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$(c) \ y_3(t) = x_2(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$(d) \ y_4(t) = x_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

2) Chỉ ra cách khôi phục tín hiệu $m(t)$ có băng thông rất nhỏ hơn f_c từ tín hiệu $x_1(t)$ hoặc $x_2(t)$.



Bài tập 11

$$x(t) = 23 \frac{\sin(2\pi 147t)}{2\pi 147t}$$

- 1) Tìm $X(f)$
- 2) Tìm E_x
- 3) Tìm $y(t) = dx(t)/dt$
- 4) Tìm $Y(f)$

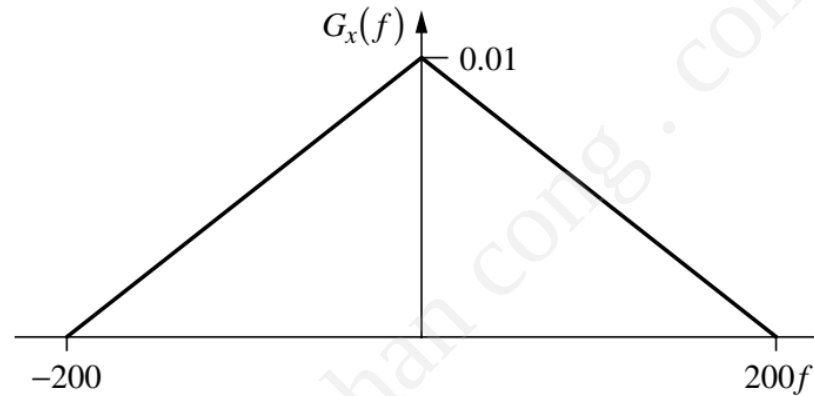


Bài tập 12

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(10\pi(2k+1)t)$$

- Vẽ dạng sóng $x(t)$ trong 1 chu kì tuần hoàn.
- Tìm công suất P_x
- Tìm băng thông 98% công suất.

Bài tập 13



- Tìm năng lượng E_x
- Tìm băng thông 98% năng lượng
- Tìm băng thông 3dB
- Tìm băng thông 40dB



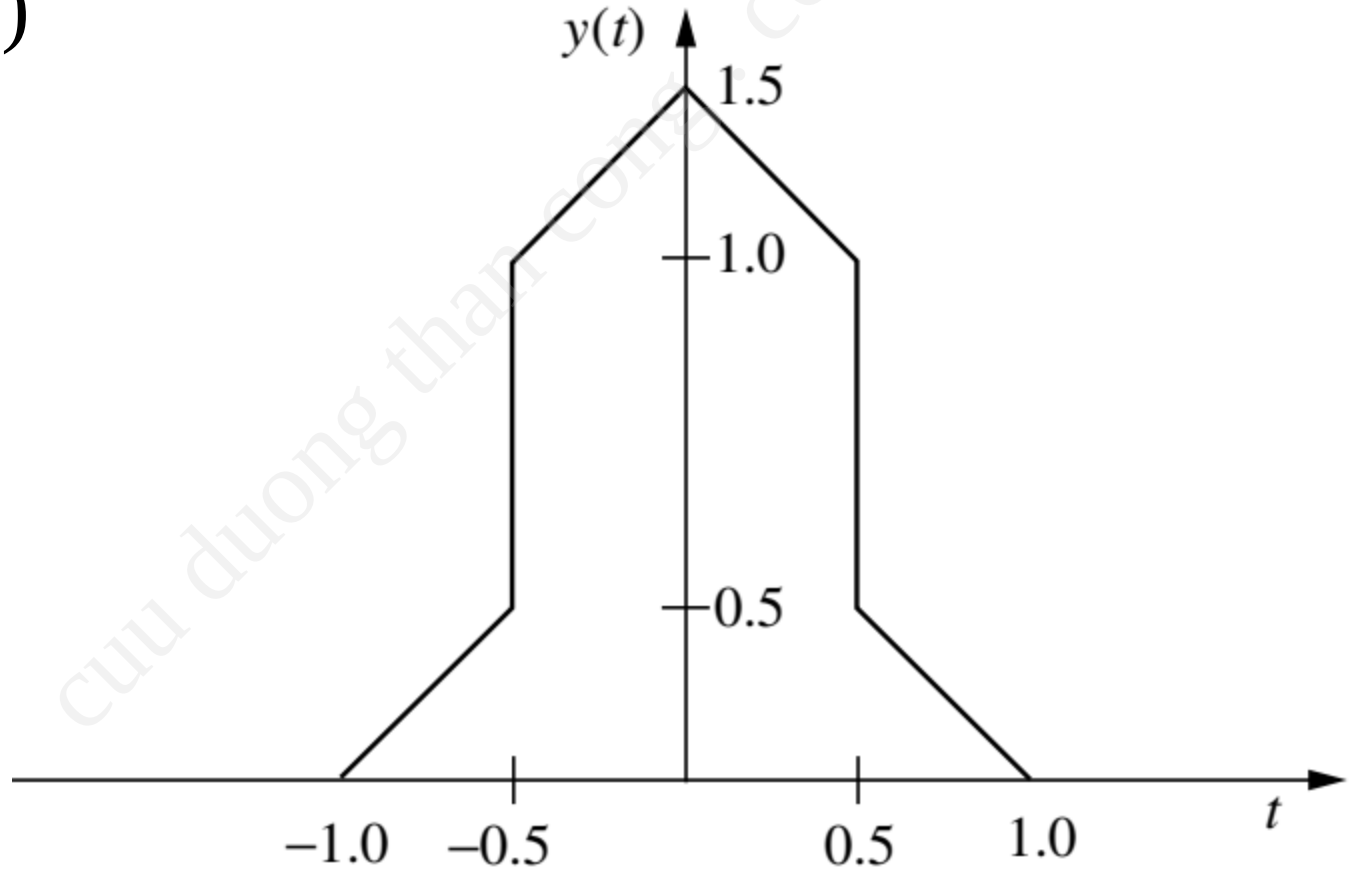
Bài tập 14

$$m(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{2\pi(2n-1)t}{T}\right)$$

- Vẽ phổ vạch.
- Tìm băng thông 3dB
- Tìm băng thông 40dB
- Tìm băng thông 98% công suất
- Tìm băng thông 99% công suất

Bài tập 15

- Tìm $Y(f)$





Bài tập 16

■ Tính các giá trị sau:

- 1) $Q(0)$
- 2) $Q(0.5@)$
- 3) $Q(1.1@)$
- 4) $Q(1.9@)$
- 5) $Q(3.@)$
- 6) $Q(4.@)$
- 7) $Q(5.@)$
- 8) $Q(-1.1@)$
- 9) $Q(-1.9@)$
- 10) $Q(-3.@)$

Câu	Giá trị
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	



Bài tập 17

■ Tìm các giá trị A thỏa điều kiện sau:

1) $Q(A)=0.3@$

2) $Q(A)=0.7@$

3) $Q(A)=10^{-3}$

4) $Q(A)=3.@ \times 10^{-3}$

5) $Q(A)=7.@ \times 10^{-7}$

6) $Q(A)>3.@\%$

7) $Q(A)<7.@\%$

Câu	A
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	



Bài tập 18

- Cho biến ngẫu nhiên X phân bố Gauss $(0, 1)$, tính các xác suất sau:

- 1) $\Pr(X > 0.5@)$
- 2) $\Pr(X > -0.5@)$
- 3) $\Pr(X < 1.@)$
- 4) $\Pr(X < -1.@)$
- 5) $\Pr(-0.5@ < X < 0.5@)$
- 6) $\Pr(0.5@ < X < 1.@)$
- 7) $\Pr(-0.5@ < X < 1.@)$
- 8) $\Pr(-1.@ < X < -0.5@)$
- 9) $\Pr(-1.@ < X < 0.5@)$
- 10) $\Pr(-1.@ < X < 1.@)$

Câu	Theo hàm $Q(.)$	Giá trị
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



Bài tập 19

- Cho biến ngẫu nhiên X phân bố Gauss $(1, 4)$, tính các xác suất sau:

- 1) $\Pr(X > 0.5@)$
- 2) $\Pr(X > -0.5@)$
- 3) $\Pr(X < 1.@)$
- 4) $\Pr(X < -1.@)$
- 5) $\Pr(-0.5@ < X < 0.5@)$
- 6) $\Pr(0.5@ < X < 1.@)$
- 7) $\Pr(-0.5@ < X < 1.@)$
- 8) $\Pr(-1.@ < X < -0.5@)$
- 9) $\Pr(-1.@ < X < 0.5@)$
- 10) $\Pr(-1.@ < X < 1.@)$

Câu	Theo hàm $Q(.)$	Giá trị
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



Bài tập 20

If $w(t)$ has the Fourier transform

$$W(f) = \frac{j2\pi f}{1 + j2\pi f}$$

find $X(f)$ for the following waveforms:

(a) $x(t) = w(2t + 2)$.

(b) $x(t) = e^{-jt}w(t - 1)$.

(c) $x(t) = 2 \frac{dw(t)}{dt}$.

(d) $x(t) = w(1 - t)$.



Bài tập 21

2.3-4 Sketch $v(t)$ and find $V(f)$ for

$$v(t) = A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + B\Pi\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right)$$

2.3-5 Sketch $v(t)$ and find $V(f)$ for

$$v(t) = A\Pi\left(\frac{t - 2T}{4T}\right) + B\Pi\left(\frac{t - 2T}{2T}\right)$$

Bài tập 22

2.1-1 Find the energies of the signals shown in Fig. P2.1-1. Comment on the effect on energy of sign change, time shifting or doubling of the signal. What is the effect on the energy if the signal is multiplied by k ?

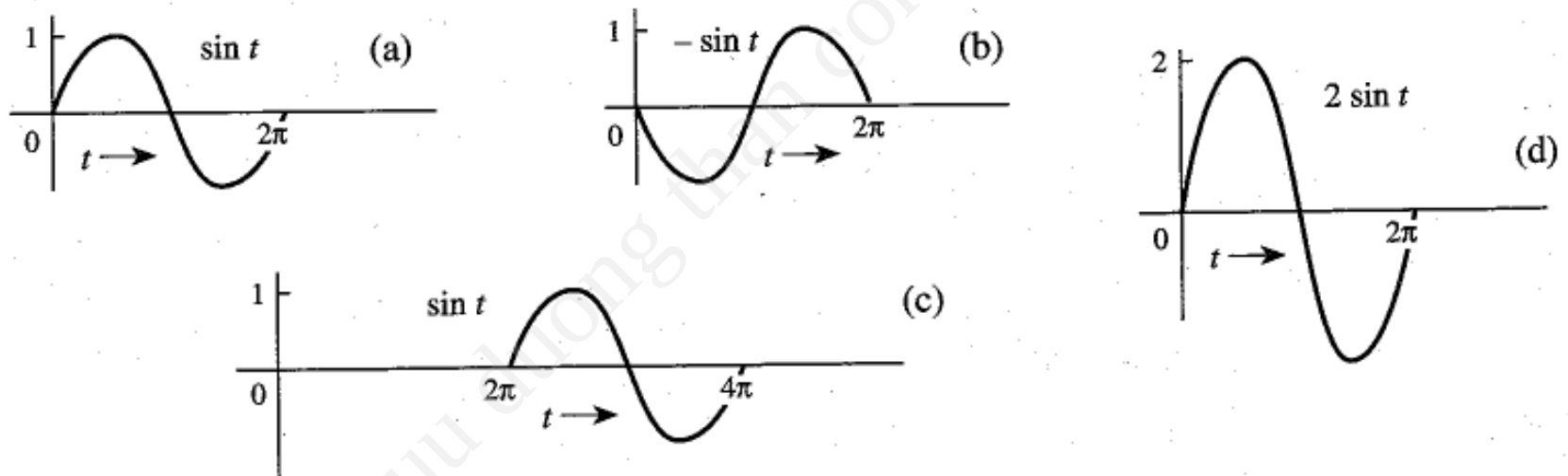


Figure P2.1-1

- 2.1-2 (a)** Find E_x and E_y , the energies of the signals $x(t)$ and $y(t)$ shown in Fig. P2.1-2a. Sketch the signals $x(t) + y(t)$ and $x(t) - y(t)$ and show that the energies of either of these two signals are equal to $E_x + E_y$. Repeat the procedure for the signal pair of Fig. P2.1-2b.
- (b)** Repeat the procedure for the signal pair of Fig. P2.1-2c. Are the energies of the signals $x(t) + y(t)$ and $x(t) - y(t)$ identical in this case?

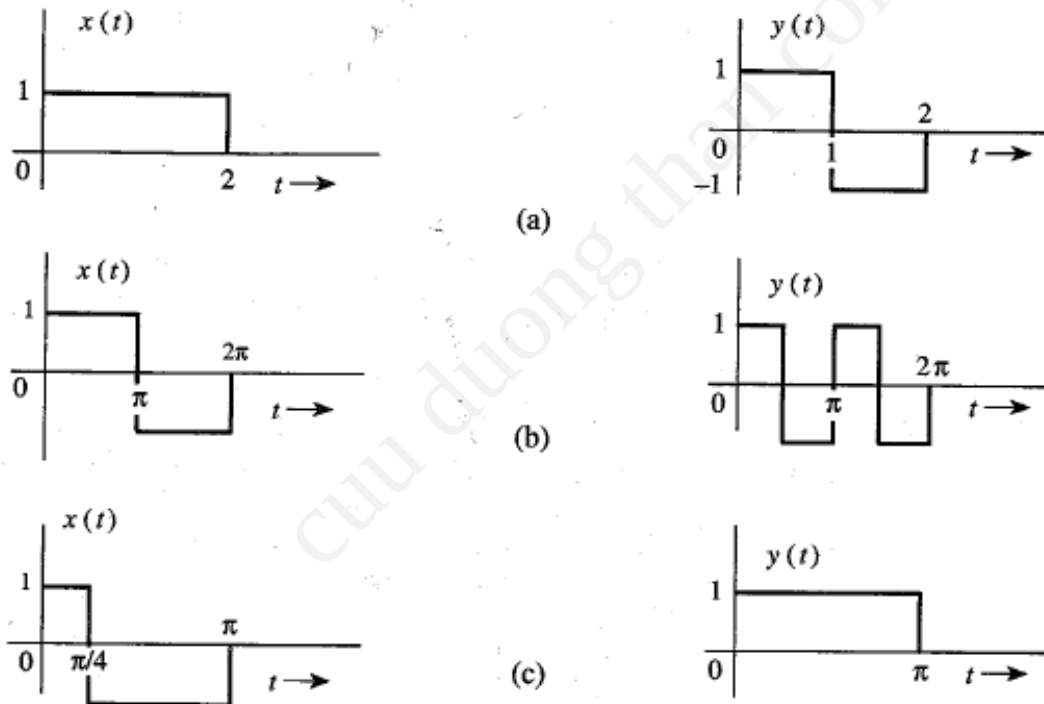


Figure P2.1-2



Bài tập 24

2.1-8 Determine the power and the rms value for each of the following signals:

(a) $10 \cos \left(100t + \frac{\pi}{3} \right)$

(b) $10 \cos \left(100t + \frac{\pi}{3} \right) + 16 \sin \left(150t + \frac{\pi}{5} \right)$

(c) $(10 + 2 \sin 3t) \cos 10t$

(d) $10 \cos 5t \cos 10t$

(e) $10 \sin 5t \cos 10t$

(f) $e^{j\alpha t} \cos \omega_0 t$



Bài tập 25

Determine whether each of the following signals is an energy signal or a power signal, and evaluate the normalized energy or power, as appropriate:

(a) $w(t) = \Pi(t/T_0)$.

(b) $w(t) = \Pi(t/T_0) \cos \omega_0 t$.

(c) $w(t) = \cos^2 \omega_0 t$.

Bài tập 26

2-2 A function generator produces the periodic voltage waveform shown in Fig. P2-2.

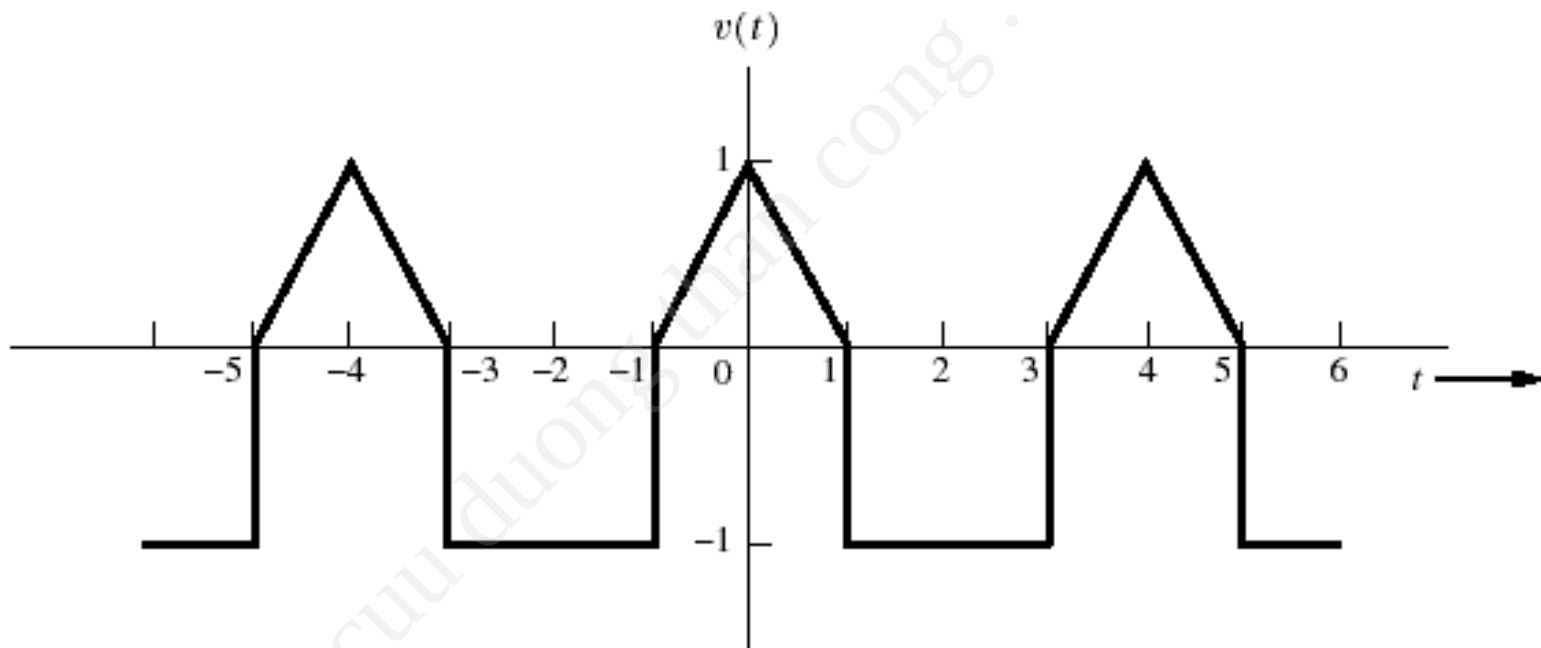
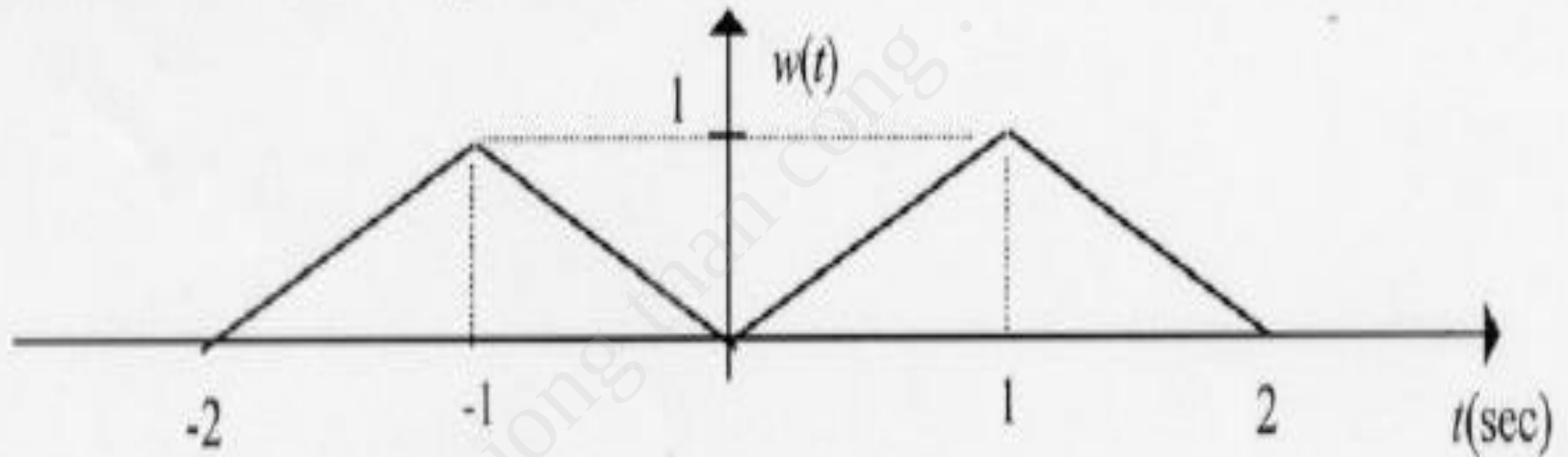


Figure P2-2

- Find the value for the dc voltage.
- Find the value for the rms voltage.

Bài tập 27

2.) Consider the waveform $w(t)$ shown below.



- Find the Fourier transform $W(f)$.
- Plot clearly $W(f)$ for $0 \leq f \leq 2$ Hz.
- What is the first null bandwidth B_{null} of $W(f)$.



Bài tập 28

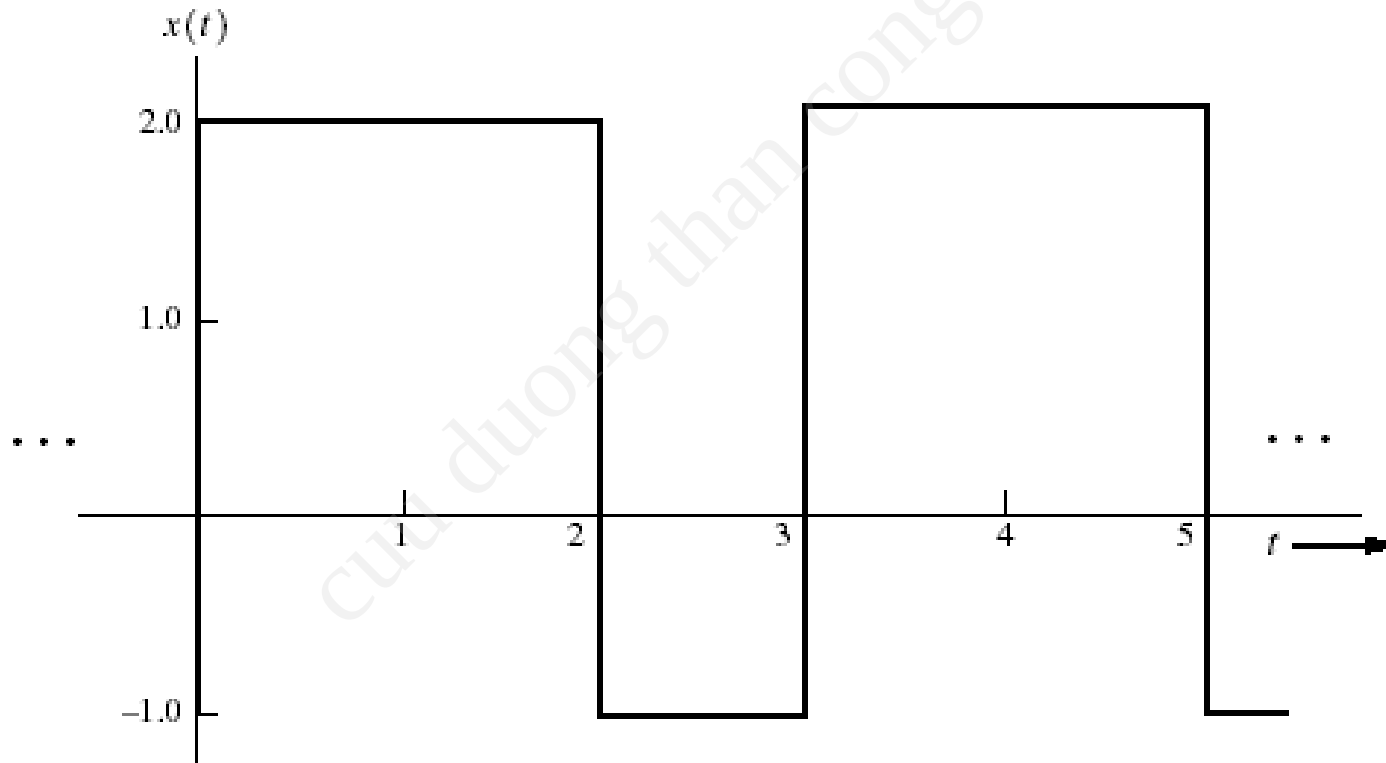
.) The transfer function of an ideal high-pass filter is given in terms of the rectangular function Π as;

$$H(f) = \left[1 - \Pi\left(\frac{f}{10}\right) \right] e^{-j0.6\pi f}$$

- a) Plot the magnitude and phase responses $|H(f)|$ and $\angle H(f)$
- b) Obtain the impulse response $h(t)$.
- c) Clearly plot $h(t)$ for $0 \leq t \leq 0.6$ second.

Bài tập 29

Find expressions for the complex Fourier series coefficients that represent the waveform shown in Fig. P2-51.





Bài tập 30

2.4-1 Simplify the following expressions:

(a) $\left(\frac{\sin t}{t^2 + 2} \right) \delta(t)$

(c) $[e^{-t} \cos(3t - 60^\circ)] \delta(t)$

(e) $\left(\frac{1}{j\omega + 2} \right) \delta(\omega + 3)$

(b) $\left(\frac{j\omega + 2}{\omega^2 + 9} \right) \delta(\omega)$

(d) $\left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}(t - 2)}{t^2 + 4} \right] \delta(t - 1)$

(f) $\left(\frac{\sin k\omega}{\omega} \right) \delta(\omega)$

Bài tập 31

2.4-2 Evaluate the following integrals:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + 3) e^{-t} dt$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} g(2 - t) \delta(3 - t) dt$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) g(t - \tau) d\tau$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 2) \sin \pi t dt$

(f) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 4) \delta(1 - t) dt$

(h) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-1)} \cos \frac{\pi}{2} (x - 5) \delta(x - 3) dx$

1. Fourier series of $f(x) = \begin{cases} -k & \text{if } -\pi < x < 0 \\ k & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$ and $f(x + 2\pi) = f(x)$

a) $\frac{2k}{\pi} \left(\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$

b) $\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$

c) $\frac{2k}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$

d) $\frac{k}{\pi} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \dots \right)$

2. Fourier series of periodic function $f(x) = 3x^2$, $(-1 < x < 1)$

a) $1 - \frac{12}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{4} + \frac{\cos 3\pi x}{9} - \frac{\cos 4\pi x}{16} + \dots \right)$

b) $2 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos 2\pi x - \frac{\cos 4\pi x}{4} + \frac{\cos 9\pi x}{9} - \frac{\cos 16\pi x}{16} + \dots \right)$

c) $1 - \frac{3}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2} + \frac{\cos 3\pi x}{3} - \frac{\cos 4\pi x}{4} + \dots \right)$

d) $2 - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{\cos 2\pi x}{2} + \frac{\cos 3\pi x}{3} + \frac{\cos 4\pi x}{4} + \dots \right)$

Bài tập 33

3. Fourier series of periodic function $f(x) = |\sin x|$,

a) $\frac{3}{\pi} - \frac{3}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{(3n^2 - 1)} \right) \cos 3nx$

b) $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{(4n^2 - 1)} \right) \cos nx$

c) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{(4n^2 - 1)} \right) \cos 2nx$

d) $\frac{2}{3\pi} - \frac{4}{3\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{(12n^2 - 1)} \right) \cos 4nx$



Bài tập 34

4. Fourier transform of $f(x) = x^2 e^{-4x^2}$,

a) $i^2 \frac{\sqrt{\pi}}{16} e^{\left(\frac{-\omega^2}{16}\right)} \left(\frac{\omega^2}{8} - 1\right)$

b) $i^2 \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{\left(\frac{-\omega^2}{16}\right)} \left(\frac{\omega^2}{8} - 4\right)$

c) $i^2 \frac{\sqrt{\pi}}{16} e^{\left(\frac{-\omega^2}{24}\right)} \left(\frac{\omega^2}{4} - 1\right)$

d) $i^2 \frac{\sqrt{\pi}}{16} e^{\left(\frac{-\omega^2}{16}\right)} \left(\frac{\omega^2}{4} - 3\right)$

5. Inverse Fourier transform of $\frac{1}{\omega^2 + 6\omega + 25}$

a) $\frac{1}{4} (e^{-i2x} e^{-3|x|})$

b) $\frac{1}{2} (e^{-i3x} e^{-4|x|})$

c) $\frac{1}{16} (e^{-i2x} e^{-4|x|})$

d) $\frac{1}{8} (e^{-i3x} e^{-4|x|})$