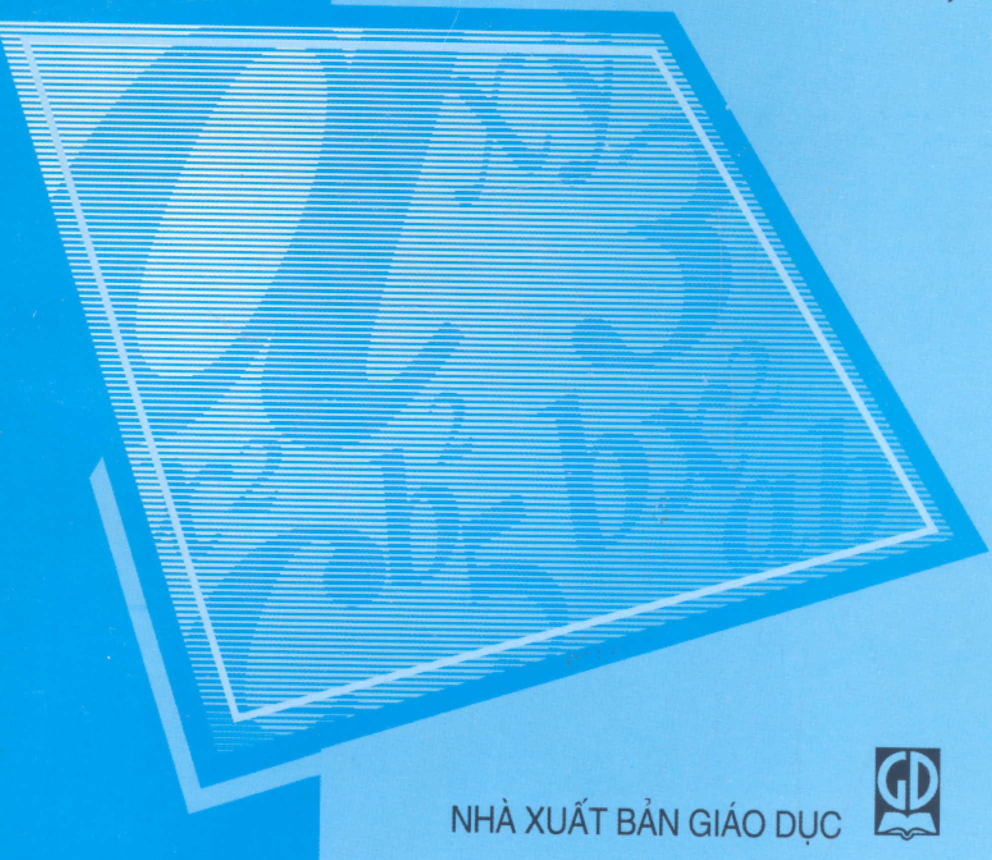
NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH - DƯƠNG THỦY VỸ

Giáo trình TOÁN HỌC CAO CẤP

Tập 2

(DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH – DƯƠNG THỦY VỸ

Giáo trình
TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP 2

(Sách dùng cho sinh viên các trường Cao đẳng)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Sinh viên mới vào năm học thứ nhất các trường Đại học, Cao đẳng thường gặp khó khăn do phương pháp dạy, phương pháp học ở bậc học này có nhiều điều khác biệt so với ở bậc Trung học. Toán học cao cấp lại là một môn học khó với thời lượng lớn của năm thứ nhất ở các trường Đại học, Cao đẳng kỹ thuật; nhằm rèn luyện tư duy khoa học, cung cấp công cụ toán học để sinh viên học các môn khoa học kỹ thuật khác và xây dựng tiềm lực để tiếp tục tự học sau này.

*Bộ giáo trình "**Toán học cao cấp**" này được biên soạn căn cứ vào chương trình khung đã được ban hành và thực tế giảng dạy ở hệ cao đẳng của một số trường Đại học kỹ thuật và căn cứ vào chương trình môn Toán hiện nay của các trường Trung học Phổ thông, nhằm giúp cho sinh viên hệ Cao đẳng học tốt môn học này.*

Do yêu cầu đào tạo hiện nay của hệ Cao đẳng, một số phần của Toán học cao cấp như cấu trúc đại số, dạng toàn phương, tích phân phụ thuộc tham số, tích phân ba lớp, tích phân mặt, chuỗi Fourier,... không được đưa vào giáo trình này. Những khái niệm Toán học cơ bản, những phương pháp cơ bản, những kết quả cơ bản của các chương đều được trình bày đầy đủ. Một số định lý không được chứng minh, nhưng ý nghĩa của những định lý quan trọng được giải thích rõ ràng, nhiều ví dụ minh hoạ được đưa ra. Nhiều ứng dụng của lý thuyết vào tính gần đúng được trình bày ở đây. Riêng với những kiến thức về giải tích mà sinh viên được học ở Trung học phổ thông, giáo trình này chỉ nhắc lại một cách hệ thống các điểm chính và trình bày các kiến thức nâng cao. Phần câu hỏi ôn tập ở cuối mỗi chương nhằm giúp sinh viên học tập và tự kiểm tra kết quả học tập của mình. Làm những bài tập đề ra ở cuối mỗi chương sẽ giúp người học hiểu sâu sắc hơn các khái niệm Toán học, rèn luyện kỹ năng tính toán và khả năng vận dụng các khái niệm ấy. Các bài tập đó sẽ được giải trong bộ bài tập kèm theo bộ giáo trình này.

Bộ giáo trình này được viết thành hai tập và là công trình tập thể của ba nhà giáo : Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Lê Trọng Vinh và Dương Thủy Vỹ. Ông Lê Trọng Vinh viết các chương I, II, IV, V; ông Dương Thủy Vỹ viết các chương III, VI, VIII, IX; ông Nguyễn Đình Trí viết các chương VII, X, XI.

Khi xây dựng đề cương cho bộ giáo trình này cũng như khi biên soạn giáo trình, chúng tôi đã tham khảo kinh nghiệm của nhiều nhà giáo đã giảng dạy nhiều năm môn Toán học cao cấp cho hệ Cao đẳng ở các trường Đại học kỹ thuật. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu.

Bộ giáo trình này được viết lần đầu, chắc không tránh khỏi những khiếm khuyết. Chúng tôi chân thành cảm ơn mọi ý kiến đóng góp của bạn đọc. Thư góp ý xin gửi về Công ty Cổ phần Sách Đại học - Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Chương VII
HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Mục đích yêu cầu

- Trình bày những khái niệm cơ bản và kết quả cơ bản về phép tính vi phân của hàm số nhiều biến số : định nghĩa hàm số nhiều biến số, miền xác định, cách biểu diễn hình học, giới hạn và tính liên tục của hàm số nhiều biến số, đạo hàm riêng và vi phân toàn phần, đạo hàm cấp cao, đạo hàm theo hướng, cực trị của hàm số nhiều biến số và một số ứng dụng của phép tính vi phân vào hình học.
- Sinh viên cần hiểu rõ các khái niệm trên, nắm vững các kết quả trên, hiểu được ý nghĩa của đạo hàm riêng và vi phân toàn phần, cần lưu ý đến sự khác biệt giữa hàm số một biến số và hàm số nhiều biến số.
- Sinh viên cần tính toán thành thạo đạo hàm và vi phân của hàm số nhiều biến số cho dưới các dạng khác nhau, tìm được cực trị của hàm số nhiều biến số, viết phương trình của tiếp tuyến, pháp diện của đường cong tại một điểm, phương trình của pháp tuyến, tiếp diện của mặt cong tại một điểm.

§1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số

D là một tập hợp trong $\mathbb{R}^2$. Người ta gọi ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$, tức là một quy tắc cho ứng với mỗi cặp số thực $(x, y) \in D$ một số thực duy nhất z, ký hiệu là f(x, y), là *hàm số hai biến số*. x và y là hai *biến số độc lập*. Ta ký hiệu

$$f : (x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

D được gọi là *miền xác định* của hàm số f. Tập hợp

$$f(D) = \{z \in \mathbb{R} \mid z = f(x, y), \forall (x, y) \in D\}$$

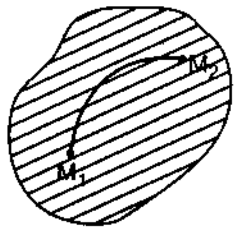
gọi là *miền giá trị* của hàm số f.

Hàm số n biến số $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ được định nghĩa tương tự.

1.2. Miền xác định

Nếu người ta cho hàm số hai biến số bởi biểu thức $z = f(x, y)$ mà không nói gì về miền xác định của nó thì miền xác định của hàm số đó được hiểu là tập hợp những cặp (x, y) sao cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa. Nếu xem (x, y) là toạ độ của điểm M trong mặt phẳng thì miền xác định của hàm số $f(x, y)$ là tập hợp những điểm M sao cho biểu thức $f(M)$ có nghĩa. Đó thường là một tập hợp D *liên thông* trong $\mathbb{R}^2$, tức là một tập hợp mà hai điểm M_1, M_2 bất kỳ của nó luôn có thể nối với nhau bởi một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong D (hình 7.1). Trừ trường hợp miền xác định $D = \mathbb{R}^2$, D thường được giới hạn bởi một đường cong L kín hay không. Miền D được gọi là *mở* nếu những điểm của biên L đều không thuộc D, là *đóng* nếu mọi điểm của biên L đều thuộc D.

Miền liên thông D được gọi là *đơn liên* nếu nó bị giới hạn bởi một đường cong kín, *đa liên* nếu nó bị giới hạn bởi nhiều đường cong kín rời nhau từng đôi một.

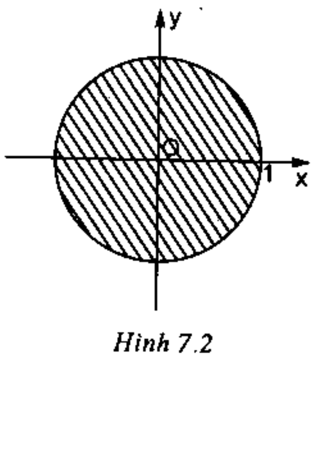


Hình 7.1

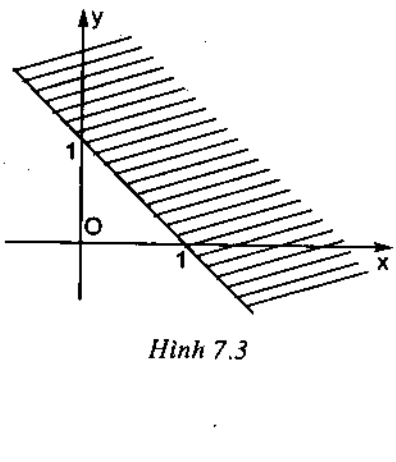
Ví dụ 1. Hàm số $z = 2x - 3y + 5$ xác định $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, miền xác định của nó là toàn bộ mặt phẳng.

Ví dụ 2. Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ xác định khi $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 \leq 1$. Miền xác định của nó là hình tròn đóng, tâm O, bán kính 1 (hình 7.2).

Ví dụ 3. Hàm số $z = \ln(x + y - 1)$ xác định khi $x + y - 1 > 0$ hay $x + y > 1$. Miền xác định của nó là nửa mặt phẳng mở nằm ở phía trên đường thẳng $x + y = 1$ (hình 7.3).



Hình 7.2

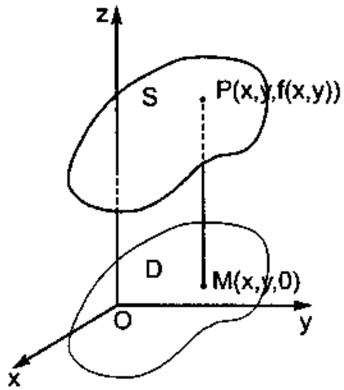


Hình 7.3

Sau này các khái niệm sẽ được trình bày cho trường hợp n = 2 hay n = 3. Các khái niệm ấy cũng được mở rộng cho trường hợp n nguyên dương bất kỳ.

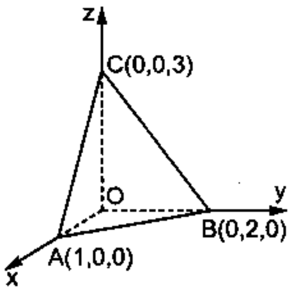
1.3. Biểu diễn hình học của hàm số hai biến số

Giả sử z = f(x, y) là hàm số xác định trong miền D của mặt phẳng xOy. Qua điểm M(x, y, 0) trong miền D, dựng đường thẳng song song và cùng hướng với trục Oz và lấy điểm P trên đó sao cho $\overline{MP} = f(x, y) = z$. Khi điểm M biến thiên trong miền D thì điểm P biến thiên trong $\mathbb{R}^3$ và sinh ra một mặt S nào đó, gọi là *đồ thị* của hàm số z = f(x, y). Ta nói rằng z = f(x, y) là phương trình của mặt S. Mỗi đường thẳng song song với trục Oz cắt mặt S ở không quá một điểm (hình 7.4).



Hình 7.4

Ví dụ 4. Hàm số $z = 3 - 3x - \frac{3}{2}y$ xác định trên toàn mặt phẳng xOy. Đồ thị của nó là mặt phẳng cắt ba trục toạ độ theo thứ tự ở ba điểm A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3). Phần của đồ thị của hàm số đó nằm trong góc phần tám thứ nhất (hình 7.5).



Hình 7.5

1.4. Mặt bậc hai

Mặt bậc hai là những mặt mà phương trình của chúng là bậc hai đối với x, y, z.

1.4.1. Mặt elipxôit

Mặt elipxôit là mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{7.1}$$

trong đó a, b, c là những số dương. Vì x, y, z có mặt trong phương trình (7.1) với số mũ chẵn nên mặt elipxôit nhận các mặt phẳng toạ độ làm mặt phẳng đối xứng, nhận gốc O làm tâm đối xứng.

Cắt mặt elipxôit bởi các mặt phẳng toạ độ xOy, yOz, zOx, các giao tuyến theo thứ tự là các đường elip :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0\,;$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad x = 0\,;$$

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad y = 0.$$

Cắt mặt elipxôit bởi mặt phẳng z = k, k là hằng số, giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},\ z = k. \tag{7.2}$$

Nếu $k < -c$ hoặc $k > c$, phương trình (7.2) vô nghiệm, mặt phẳng $z = k$ không cắt mặt elipxôit.

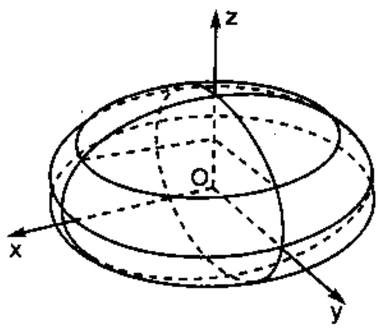
Nếu $k = \pm c$, giao tuyến thu về điểm $(0, 0, \pm c)$.

Nếu $-c < k < c$, phương trình (7.2) có thể viết

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)} = 1,\ z = k.$$

Đó là phương trình của đường elip có tâm tại điểm (0, 0, k), có các bán trục là

$$a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}, \qquad b\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}.$$



Hình 7.6

Khi k tăng từ 0 đến c, các bán trục nhỏ dần tới 0. Khi k tăng từ –c đến c, giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt elipxôit (hình 7.6). a, b, c gọi là các *bán trục* của elipxôit.

Nếu hai trong ba bán trục bằng nhau, chẳng hạn a = c, ta có mặt elipxôit tròn xoay, sinh bởi đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$ quay quanh trục Oz. Nếu $a = b = c$, mặt elipxôit trở thành mặt cầu tâm O bán kính a.

1.4.2. Mặt hypebôlôit một tầng

Đó là mặt bậc hai có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (7.3)$$

trong đó a, b, c là những hằng số dương. Mặt đó nhận các mặt phẳng toạ độ làm mặt phẳng đối xứng, nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng. Nó cắt mặt phẳng toạ độ xOy theo đường elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0,$$

cắt các mặt phẳng toạ độ yOz, zOx lần lượt theo các đường hypebôn :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0,$$

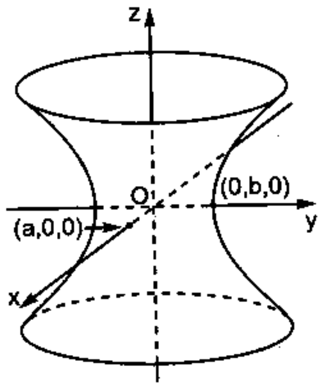
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0.$$

Giao tuyến của mặt hypecbôlôit với mặt phẳng z = k là đường elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2},\ z = k. \qquad (7.4)$$

Khi $|k|$ tăng từ 0 đến $+\infty$, các bán trục của elip đó theo thứ tự tăng từ a đến $+\infty$ và từ b đến $+\infty$. Khi k biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$ giao tuyến đó dịch chuyển và sinh ra mặt hypebôlôit một tầng (hình 7.7).

Nếu a = b, ta có mặt hypebôlôit một tầng tròn xoay, do hypebôn $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, y = 0 quay quanh trục Oz sinh ra.



Hình 7.7

1.4.3. Mặt hypebôlôit hai tầng

Đó là mặt bậc hai có phương trình

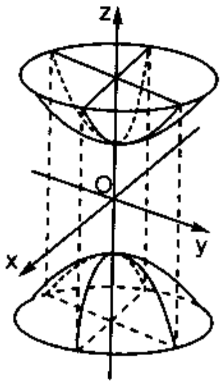
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad (7.5)$$

trong đó a, b, c là những hằng số dương. Nó nhận các mặt phẳng toạ độ làm mặt phẳng đối xứng, nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Cắt mặt (7.5) bởi mặt phẳng $z = k$, giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1,\ z = k. \tag{7.6}$$

Nếu $|k| < c$, mặt (7.5) không cắt mặt phẳng $z = k$. Nếu $k = \pm c$, mặt phẳng $z = k$ tiếp xúc với mặt (7.5) tại điểm (0, 0, c) hoặc (0, 0, −c). Nếu $|k| > c$, giao tuyến (7.6) là đường elip có bán trục $a\sqrt{\frac{k^2}{c^2} - 1}$ và $b\sqrt{\frac{k^2}{c^2} - 1}$. Khi $|k|$ tăng từ c tới $+\infty$, các bán trục ấy lớn dần từ 0 tới $+\infty$, giao tuyến (7.6) di chuyển và sinh ra mặt hypebôlôit hai tầng (hình 7.8).



Hình 7.8

Nếu $a = b$, ta có mặt hypebôlôit hai tầng tròn xoay, do hypebôn $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = -1$, $z = 0$ quay quanh trục Oz sinh ra.

1.4.4. Mặt parabôlôit eliptic

Đó là mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{7.7}$$

trong đó p, q là các hằng số dương.

Vì x, y tham gia vào phương trình (7.7) với số mũ chẵn, nên mặt (7.7) nhận các mặt phẳng yOz và zOx làm mặt phẳng đối xứng.

Mặt (7.7) cắt các mặt phẳng $x = 0$ và $y = 0$ theo các đường parabôn nhận Oz làm trục :

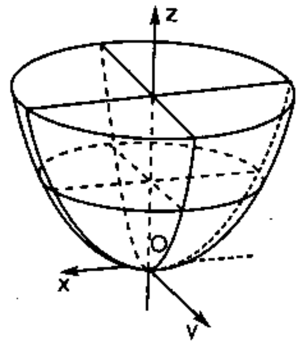
$$y^2 = 2qz,\ x = 0\ ;$$
$$x^2 = 2pz,\ y = 0.$$

Giao tuyến của mặt (7.7) với mặt phẳng $z = k$ là đường elip có các bán trục $\sqrt{2pk}, \sqrt{2qk}$:

$$\frac{x^2}{2pk} + \frac{y^2}{2qk} = 1,\ z = k \tag{7.8}$$

nếu $k > 0$, là gốc toạ độ nếu $k = 0$. Khi k tăng từ 0 đến $+\infty$ các bán trục cũng tăng từ 0 đến $+\infty$, giao tuyến (7.8) di chuyển và sinh ra mặt parabôlôit eliptic (hình 7.9).

Nếu $p = q$, ta có mặt parabôlôit tròn xoay, do parabôn $x^2 = 2pz$, $y = 0$ quay quanh trục Oz sinh ra.



Hình 7.9

1.4.5. Mặt parabôlôit hypebôlic

Đó là mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad (7.9)$$

trong đó p, q là những hằng số dương.

Nó nhận các mặt phẳng yOz và zOx làm mặt phẳng đối xứng.

Cắt nó bởi mặt phẳng zOx, giao tuyến là đường parabôn

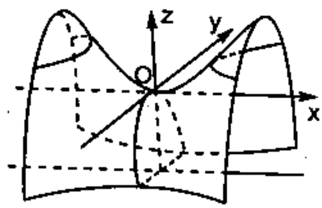
$$x^2 = 2pz, \ y = 0, \qquad (7.10)$$

parabôn này nhận Oz làm trục.

Cắt mặt (7.9) bởi mặt phẳng $x = k$ song song với mặt phẳng yOz, ta được đường

$$y^2 = -2q\left(z - \frac{k^2}{2p}\right), \ x = k. \qquad (7.11)$$

Đó là đường parabôn có tham số q, có trục song song với Oz, quay bề lõm về phía $z < 0$, có đỉnh nằm trên đường (7.10). Khi k biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$, giao tuyến (7.11) di chuyển và sinh ra mặt parabôlôit hypebôlic (hình 7.10).



Hình 7.10

Cắt mặt (7.9) bởi mặt phẳng $z = k$, ta được đường

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2k, \ z = k. \qquad (7.12)$$

Nếu $k > 0$, đó là đường hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng zOx và song song với Ox, có bán trục thực $\sqrt{2pk}$, bán trục ảo $\sqrt{2qk}$. Nếu

$k < 0$, đó là đường hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng yOz và song song với Oy, có bán trục thực $\sqrt{-2qk}$, bán trục ảo $\sqrt{-2pk}$.

Nếu $k = 0$, phương trình (7.12) trở thành

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0, \ z = 0.$$

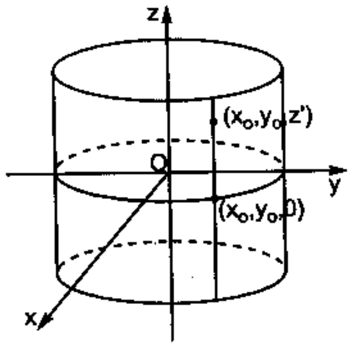
Vậy giao tuyến của mặt (7.9) với mặt phẳng $z = 0$ là cặp đường thẳng giao nhau $y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$ trong mặt phẳng xOy.

1.4.6. Mặt trụ bậc hai

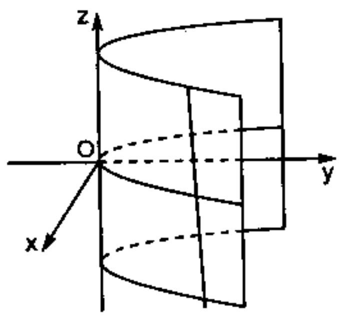
Nếu một trong ba biến số không có mặt trong phương trình của một mặt nào đó thì mặt đó là *mặt trụ*. Chẳng hạn, mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a, b là các hằng số dương, là mặt trụ elip. Nếu điểm $(x_0, y_0, 0)$ thuộc mặt đó thì mọi điểm (x_0, y_0, z') với z' bất kỳ cũng thuộc mặt đó. Vậy đường sinh của mặt trụ song song với trục Oz (hình 7.11). Còn phương trình $y = x^2$ biểu diễn mặt trụ parabôn có đường sinh song song với trục Oz (hình 7.12).



Hình 7.11



Hình 7.12

1.4.7. Mặt nón bậc hai

Xét mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \tag{7.13}$$

trong đó a, b, c là các hằng số dương. Nó cắt mặt phẳng xOy tại gốc toạ độ, cắt mặt phẳng yOz theo đường

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},\ x = 0 \quad \text{hay} \quad z = \pm\frac{c}{b}y,\ x = 0,$$

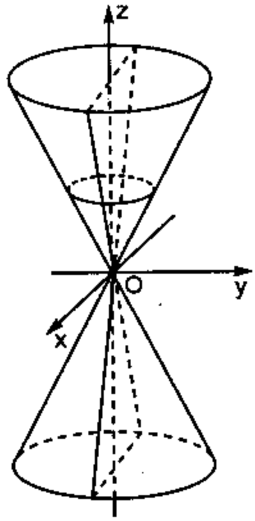
tức là theo cặp đường thẳng giao nhau trong mặt phẳng yOz và cắt mặt phẳng zOx theo cặp đường thẳng giao nhau $z = \pm\frac{c}{a}x$.

Giao tuyến của mặt (7.13) với mặt phẳng z = k, k là hằng số, có phương trình

$$\frac{x^2}{\frac{a^2k^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2k^2}{c^2}} = 1,\ z = k. \qquad (7.14)$$

Giao tuyến đó là đường elip có các bán trục $\frac{ak}{c}, \frac{bk}{c}$. Khi k biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$, giao tuyến đó di chuyển và sinh ra mặt (7.13) (hình 7.13).

Dễ kiểm tra rằng nếu điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nằm trên mặt (7.13), thì mọi điểm nằm trên đường thẳng OM_0 cũng nằm trên mặt (7.13), vì mọi điểm trên đường thẳng OM_0 đều có toạ độ $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$, λ là một số nào đó. Vậy mặt (7.13) là một mặt nón có đỉnh ở gốc toạ độ. Nếu a = b, ta được một mặt nón tròn xoay.



Hình 7.13

1.5. Giới hạn của hàm số hai biến số

Ta nói rằng dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ dần tới điểm $M_0(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ (hay $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$) khi $n \to \infty$ nếu

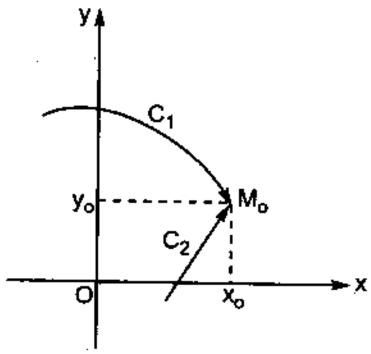
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0.$$

Cho hàm số f(M) = f(x, y) xác định trong một miền D chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$, có thể trừ điểm M_0. Ta nói rằng L là giới hạn của f(x, y) khi điểm M(x, y) dần tới điểm M_0 nếu với mọi dãy $M_n(x_n, y_n)$ (khác M_0) thuộc miền D dần tới M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L.$$

Ký hiệu : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ hay $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = L.$

Từ định nghĩa trên suy ra rằng nếu khi dãy M_n dần tới M_o trên hai đường C_1, C_2 khác nhau (hình 7.14) mà dãy $\{f(x_n, y_n)\}$ dần tới hai giới hạn khác nhau L_1, L_2 thì $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ không tồn tại.



Hình 7.14

Ví dụ 5. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, với

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Hàm số f(x, y) xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Vì $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le 1, \forall (x, y) \ne (0, 0)$ nên

$$|f(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}|y| \le |y|, \ \forall (x, y) \ne (0, 0).$$

Do đó với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\}$ dần tới (0, 0), ta đều có $\lim\limits_{(x_n,y_n)\to(0,0)} f = 0.$ Vậy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ với $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Hàm số g(x, y) xác định trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Với dãy $\{(x_n, y_n)\}$ dần tới (0, 0) trên trục Ox, ta có $y_n = 0$, do đó $g(x_n, 0) = 0$, $\forall x_n \ne 0$. Vậy $\lim\limits_{x_n\to 0} g(x_n, 0) = 0.$

Với dãy $\{(x_n, y_n)\}$ dần tới (0, 0) trên đường $y = x$, ta có $y_n = x_n$, do đó $g(x_n, x_n) = \frac{x_n^2}{2x_n^2} = \frac{1}{2} \quad \forall x_n \neq 0$. Vậy

$$\lim_{x_n \to 0} g(x_n, x_n) = \frac{1}{2}.$$

Vì $0 \neq \frac{1}{2}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

1.6. Tính liên tục của hàm số hai biến số

Cho hàm số f(x, y) xác định trong miền D. $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm thuộc D. Ta nói rằng hàm số f(x, y) *liên tục tại M_0* nếu :

1. Tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$;
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$. (7.15)

Hàm số f(x, y) được gọi là *liên tục trong miền D* nếu nó liên tục tại mọi điểm của miền D. Hàm số nhiều biến số liên tục trong một miền đóng giới nội cũng có những tính chất như hàm số một biến số liên tục trong một khoảng đóng giới nội : nó giới nội, đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trong miền ấy.

Ví dụ 7. Xét tính liên tục của hàm số

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\quad, \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

G(x, y) xác định trên toàn $\mathbb{R}^2$. Nó liên tục tại mọi điểm $(x, y) \neq (0, 0)$ vì nó là thương của hai hàm số liên tục với mẫu số khác 0. Chỉ còn phải xét tính liên tục của G(x, y) tại (0, 0). Vì không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (xem ví dụ 6) nên G(x, y) không liên tục tại (0, 0). Tóm lại, G(x, y) liên tục tại mọi điểm $(x, y) \neq (0, 0)$.

Chú thích. Nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, ta có

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Lại đặt $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Khi đó công thức (7.15) có thể viết là

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \Delta f = 0. \tag{7.16}$$

Nói cách khác, hàm số $f(x, y)$ liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu hệ thức (7.16) được thoả mãn.

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG. VI PHÂN TOÀN PHẦN

2.1. Đạo hàm riêng

2.1.1. Định nghĩa. $z = f(x, y)$ là một hàm số xác định trong miền D, (x_0, y_0) là một điểm thuộc D. Nếu cho $y = y_0$, y_0 là hằng số, mà hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì đạo hàm đó gọi là *đạo hàm riêng đối với x* của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) và được ký hiệu là

$$f_x(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Vậy theo định nghĩa của đạo hàm hàm số một biến số, ta có

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Tương tự, *đạo hàm riêng đối với y* của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) ký hiệu là

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Như vậy khi tính đạo hàm riêng đối với x của f, chỉ việc xem y là hằng số và lấy đạo hàm của f đối với x ; khi tính đạo hàm riêng đối với y của f, chỉ việc xem x là hằng số và lấy đạo hàm của f đối với y.

Ví dụ 1. Tính các đạo hàm riêng của $z = x^4 - 5x^3y^2 + 2y^4$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 15x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -10x^3y + 8y^3.$$

Ví dụ 2. Tính các đạo hàm riêng của $z = x^y$ $(x > 0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Ví dụ 3. Tính các đạo hàm riêng của $z = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ $(y \neq 0)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\left(\frac{x}{y}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right).\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\left(\frac{x}{y}\right).\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \sin\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x}{y^2}.$$

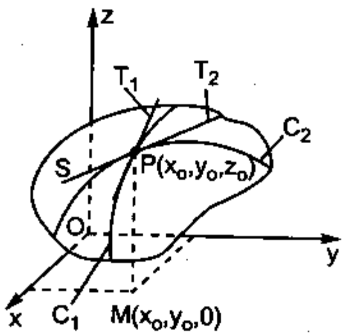
Chú thích 1 : Đạo hàm riêng của hàm số n (> 2) biến số được định nghĩa tương tự. Khi tính đạo hàm riêng của f đối với một biến số nào đó, ta xem các biến số khác là hằng số và tính đạo hàm của f đối với biến số ấy.

Ví dụ 4. Tính các đạo hàm riêng của hàm số $u = e^{x^2y}\cos z$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2y}2xy\cos z,\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2y}x^2\cos z,\ \frac{\partial u}{\partial z} = -e^{x^2y}\sin z.$$

2.1.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

Gọi S là đồ thị của hàm số $z = f(x, y)$, C_1 là giao tuyến của S và mặt phẳng $y = y_0$. C_1 chính là đồ thị của hàm số một biến số $f(x, y_0)$ trên mặt phẳng $y = y_0$. Do đó đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ là hệ số góc của đường tiếp tuyến T_1 của C_1 tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$, trong đó $z_0 = f(x_0, y_0)$ (hình 7.15). Còn đạo hàm riêng $f_y(x_0, y_0)$ là hệ số góc của đường tiếp tuyến T_2 của giao tuyến C_2 của mặt S với mặt phẳng $x = x_0$ tại $P(x_0, y_0, z_0)$.



Hình 7.15

Đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ cũng biểu diễn vận tốc biến thiên của hàm số f(x, y) theo hướng x tại (x_0, y_0), còn $f_y(x_0, y_0)$ biểu diễn vận tốc biến thiên của f(x, y) theo hướng y tại (x_0, y_0).

2.1.3. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đạo hàm riêng f_x, f_y gọi là *đạo hàm riêng cấp một* của hàm số $z = f(x, y)$. Chúng cũng là những hàm số của x, y. Vì vậy có thể xét các đạo hàm riêng của chúng : $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$, gọi là *đạo hàm riêng cấp hai* của f(x, y). Ta dùng các ký hiệu sau :

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ví dụ 5. $f(x, y) = x^2e^y + x^3y^2 - y^5$

$f_x = 2xe^y + 3x^2y^2$, $\qquad f_y = x^2e^y + 2x^3y - 5y^4$,

$f_{xx} = 2e^y + 6xy^2$, $\qquad f_{xy} = 2xe^y + 6x^2y$,

$f_{yx} = 2xe^y + 6x^2y$, $\qquad f_{yy} = x^2e^y + 2x^3 - 20y^3$.

Các đạo hàm riêng cấp cao hơn được định nghĩa tương tự. Chẳng hạn

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

Ta thừa nhận mà không chứng minh định lý quan trọng sau.

Định lý 7.1 (Schwarz). *Nếu hàm số $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f_{xy} và f_{yx} trong một miền D và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Ta đã thấy kết quả này ở ví dụ 5.

Từ định lý Schwarz dễ dàng suy ra rằng $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ nếu chúng liên tục.

Đạo hàm riêng cấp cao của hàm số n (> 2) biến số được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 6. $u = z^2e^{x-yz}$:

$$u_x = z^2e^{x-yz},$$
$$u_{xx} = z^2e^{x-yz},$$
$$u_{xxy} = z^2e^{x-yz}.(-z) = -z^3e^{x-yz},$$
$$u_{xxyz} = -3z^2e^{x-yz} - z^3e^{x-yz}.(-y) = -3z^2e^{x-yz} + yz^3e^{x-yz}.$$

2.2. Vi phân toàn phần

2.2.1. Định nghĩa. Ta biết rằng nếu hàm số một biến số f(x) xác định trong khoảng $I \subset \mathbb{R}$ và nếu tồn tại đạo hàm $f'(x_0)$, $x_0 \in I$ thì số gia $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, trong đó $x_0 + \Delta x \in I$, có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x, \qquad (7.17)$$

trong đó $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Biểu thức $f'(x_0)\Delta x$, phần chính của $\Delta f(x_0)$ khi $\Delta x \to 0$, gọi là *vi phân* của f(x) tại x_0. Vậy *nếu đạo hàm $f'(x_0)$ tồn tại thì f(x) khả vi tại x_0.*

Bây giờ xét hàm số hai biến số f(x, y) xác định trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$. $M_0(x_0, y_0)$ và $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ là hai điểm thuộc D. Nếu số gia $\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (7.18)$$

trong đó A, B là những số không phụ thuộc Δx, Δy; còn $\alpha \to 0$ và $\beta \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ (tức là khi $M \to M_0$) thì ta nói rằng *hàm số f(x, y) khả vi tại M_0*, biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ gọi là *vi phân toàn phần* của hàm số f(x, y) tại (x_0, y_0) ứng với các số gia Δx, Δy và được ký hiệu là $df(x_0, y_0)$.

Nếu hàm số f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì nó liên tục tại đó, vì từ công thức (7.18) suy ra $\Delta f(x_0, y_0) \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ (xem chú thích §1).

Hàm số f(x, y) gọi là *khả vi trong miền D* nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc D.

Chú thích 2. Nếu f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì tồn tại các đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$. Thật vậy, từ công thức (7.18) ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x,$$

trong đó $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Do đó

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A.$$

Cũng như vậy

$$f_y(x_0, y_0) = B.$$

Như vậy nếu hàm số f(x, y) khả vi tại (x_0, y_0) thì vi phân toàn phần của nó tại (x_0, y_0) được cho bởi

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Chú thích 3. Khác với hàm số một biến số, nếu hàm số hai biến số f(x, y) có các đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ thì chưa chắc nó đã khả vi tại (x_0, y_0). Xét hàm số sau

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Theo định nghĩa của đạo hàm riêng, ta có

$$G_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{G(h,0) - G(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{G(h,0)}{h} = 0,$$

vì G(h, 0) = 0, $\forall h \neq 0$. Tương tự, ta có $G_y(0, 0) = 0$. Vậy tồn tại các đạo hàm riêng $G_x(0, 0)$, $G_y(0, 0)$, nhưng hàm số G(x, y) không liên tục tại (0, 0) (xem ví dụ 6 §1) nên không khả vi tại (0, 0). ■

2.2.2. Điều kiện khả vi của hàm số nhiều biến số

Định lý 7.2. *Nếu hàm số f(x, y) có các đạo hàm riêng trong một miền D chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì hàm số f(x, y) khả vi tại M_0, vi phân toàn phần của f(x, y) tại M_0 được tính bởi công thức*

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + y_0)\Delta y \tag{7.19}$$

Chứng minh: Giả sử $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Ta có

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 - y_0)].$$

Áp dụng công thức Lagrange cho hàm số một biến số (xem công thức (3.2), tập 1), ta được :

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \Delta x f_x(\overline{x}, y_0 + \Delta y),$$

trong đó $\overline{x}$ là một giá trị nào đó nằm giữa x_0 và $x_0 + \Delta x$;

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta y f_y(x_0, \overline{y}),$$

trong đó $\overline{y}$ là một giá trị nào đó nằm giữa y_0 và $y_0 + \Delta y$. Vậy

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta x f_x(\overline{x}, y_0 + \Delta y) + \Delta y f_y(x_0, \overline{y})$$

Nhưng vì f_x và f_y liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ nên

$$f_x(\overline{x}, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \alpha,$$

$$f_y(x_0, \overline{y}) = f_y(x_0, y_0) + \beta,$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Do đó

$$\Delta f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \qquad (7.20)$$

$\Delta f(x_0, y_0)$ được biểu diễn dưới dạng (7.18), trong đó $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$. Do đó hàm số $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ và vi phân toàn phần $df(x_0, y_0)$ được cho bởi

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y. \blacksquare$$

Chú thích 4. Cũng như đối với hàm số một biến số, vì x, y là biến số độc lập nên ta có $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, do đó công thức (7.19) còn được viết là

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)\,dy.$$

Ví dụ 7. Tính vi phân toàn phần của hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hàm số xác định trên toàn $\mathbb{R}^2$. Vì các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

liên tục tại mọi $(x, y) \neq (0, 0)$ nên z khả vi trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ và

$$dz = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Chú thích 5. Đối với hàm số n (> 2) biến số, định nghĩa hàm số khả vi, điều kiện khả vi của hàm số, công thức của vi phân toàn phần cũng tương tự như hàm số hai biến số.

Ví dụ 8. Tính vi phân toàn phần của hàm số $u = xe^{yz}$.

Hàm số xác định trên toàn $\mathbb{R}^3$. Các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{yz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xze^{yz}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{yz}$$

liên tục trên toàn $\mathbb{R}^3$ nên hàm số u khả vi trên toàn $\mathbb{R}^3$ và

$$du = e^{yz}dx + xze^{yz}dy + xye^{yz}dz = e^{yz}(dx + xzdy + xydz).$$

2.2.3. Ứng dụng vi phân toàn phần vào tính gần đúng

Từ vế phải của công thức (7.20) ta thấy rằng $f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ là vô cùng bé bậc nhất đối với $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ khi $\rho \to 0$, còn $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ là vô cùng bé cấp cao đối với ρ. Vì vậy khi Δx, Δy khá nhỏ, ta có thể xem $\Delta f(x_0, y_0)$ xấp xỉ bằng $df(x_0, y_0)$, tức là

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx f(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

hay

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y. \qquad (7.21)$$

Ví dụ 9. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$. Tính Δf(x, y) và df(x, y) nếu $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = -0{,}02$.

$df(x, y) = (2x + 2y)\Delta x + (2x - 2y)\Delta y.$

$df(2, 3) = (2.2 + 2.3).(0{,}03) + (2.2 - 2.3).(-0{,}02) = 0{,}34,$

$\Delta f(2, 3) = f(2{,}03 ; 2{,}98) - f(2, 3)$

$= [(2{,}03)^2 + 2.2{,}03.2{,}98 - (2{,}98)^2] - [2^2 + 2.2.3 - 3^2] = 0{,}3434.$

Ta thấy $df(2, 3) \approx \Delta f(2, 3)$, nhưng tính df(2, 3) dễ hơn.

Ví dụ 10. Tính gần đúng $\text{arctg}\,\frac{1{,}02}{0{,}95}$.

Ta cần tính $z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, trong đó $z = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}02$.

Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Theo công thức (7.21)

$$z(1-0{,}05\ ;\ 1+0{,}02) \approx z(1,1) + z_x(1,1)\Delta x + z_y(1,1)\Delta y$$

hay

$$\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95} \approx \operatorname{arctg}1 + \frac{1.0{,}05+1.0{,}02}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}35 = 0{,}785 + 0{,}035$$

$$= 0{,}82 \text{ radian.}$$

Ví dụ 11. Khi đo bán kính đáy và chiều cao của một hình nón tròn xoay ta được 10cm và 25cm. Biết rằng sai số mỗi lần đo có thể tới 0,1cm. Hãy tính sai số tuyệt đối lớn nhất khi tính thể tích của hình nón.

Thể tích V của hình nón tròn xoay có bán kính đáy R và chiều cao H được cho bởi

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Do đó vi phân của V là

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H = \frac{2\pi RH}{3}\Delta R + \frac{\pi R^2}{3}\Delta H.$$

Vì $|\Delta R| \le 0{,}1$, $|\Delta H| \le 0{,}1$ nên sai số lớn nhất khi tính V là

$$\frac{2.\pi.10.25}{3}.(0{,}1) + \frac{\pi.100}{3}.(0{,}1) = 20\pi \text{cm}^3 \approx 63\text{cm}^3.$$

2.2.4. Điều kiện để biểu thức P(x, y)dx + Q(x, y)dy là một vi phân toàn phần

Ta biết rằng vi phân toàn phần của hàm số khả vi f(x, y) là

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Bây giờ cho hai hàm số P(x, y), Q(x, y). Định lý sau đây cho ta biết khi nào biểu thức P(x, y)dx + Q(x, y)dy là vi phân toàn phần của một hàm số f(x, y) nào đó.

Định lý 7.3. Giả sử các hàm số P(x, y), Q(x, y) có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền D nào đó. Biểu thức P(x, y)dx + Q(x, y)dy là một vi phân toàn phần khi và chỉ khi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \forall (x, y) \in D. \tag{7.22}$$

Chứng minh: Nếu P(x, y)dx + Q(x, y)dy là vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) thì

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Do đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Nhưng $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ vì chúng cũng liên tục trong miền D (do định lý 7.1) nên ta có điều kiện (7.22). Vậy (7.22) là điều kiện cần để P(x, y)dx + Q(x, y)dy là một vi phân toàn phần.

Đảo lại, nếu điều kiện (7.22) được thoả mãn thì P(x, y)dx + Q(x, y)dy là một vi phân toàn phần. Ta thừa nhận kết quả này. ■

Chú thích 6. Nếu điều kiện (7.22) được thoả mãn, ta có thể tìm được hàm số f(x, y) sao cho df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. Việc tìm hàm số f(x, y) được trình bày trong ví dụ sau.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng các biểu thức sau đây là vi phân toàn phần :

a) $\omega_1 = (2x - 5y^2)dx + (6y^2 - 10xy)dy$,

b) $\omega_2 = 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$, với $y > 0$.

Tìm các hàm số $f_i(x, y)$ sao cho $df_i = \omega_i$, $i = 1, 2$.

Giải: a) Ta có $P(x, y) = 2x - 5y^2$, $Q(x, y) = 6y^2 - 10xy$. Do đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -10y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy ω_1 là một vi phân toàn phần. Ta phải tìm hàm số $f_1(x, y)$ sao cho $df_1 = \omega_1$, do đó

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 5y^2, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 6y^2 - 10xy. \qquad (**)$$

Lấy nguyên hàm theo x hai vế của (*), ta được

$$f_1(x, y) = x^2 - 5y^2x + \varphi(y), \qquad (***)$$

trong đó $\varphi(y)$ là một hàm số khả vi bất kỳ của biến số y, $\varphi(y)$ được xem là hằng số tuỳ ý đối với x vì x, y là hai biến số độc lập. Lấy đạo hàm đối với y hai vế của (***), ta được

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -10xy + \varphi'(y) \qquad (****)$$

So sánh (**) và (****), ta được $\varphi'(y) = 6y^2$. Do đó $\varphi(y) = 2y^3 + C$, C là hằng số tuỳ ý. Thay $\varphi(y)$ vào (***), ta được

$$f_1(x, y) = x^2 - 5xy^2 + 2y^3 + C.$$

Lưu ý rằng ta cũng có thể bắt đầu tính bằng cách lấy nguyên hàm theo y hai vế của (**) như trong phần b) dưới đây.

b) Ta có $P(x, y) = 3x^2(1 + \ln y)$, $Q(x, y) = \frac{x^3}{y} - 2y$. Do đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3x^2}{y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy ω_2 là một vi phân toàn phần. Ta phải tìm hàm số $f_2(x, y)$ sao cho $df_2 = \omega_2$, do đó

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2(1 + \ln y), \qquad (i)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^3}{y} - 2y. \qquad (ii)$$

Lấy nguyên hàm theo y hai vế của (ii), ta được

$$f_2(x, y) = x^3\ln y - y^2 + \varphi(x), \qquad (iii)$$

trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số khả vi bất kỳ của x. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (iii), ta được

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2\ln y + \varphi'(x). \qquad \text{(iv)}$$

So sánh (iv) với (i), ta được $\varphi'(x) = 3x^2$. Do đó $\varphi(x) = x^3 + C$, C là hằng số tuỳ ý. Thay $\varphi(x)$ vào (iii), ta được

$$f_2(x, y) = x^3(1 + \ln y) - y^2 + C.$$

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ ẨN

3.1. Đạo hàm của hàm số hợp

3.1.1. Cho hàm số $z = f(u, v)$, trong đó $u = u(x)$, $v = v(x)$ là những hàm số của x. Ta nói rằng $z = f(u(x), v(x))$ là hàm số hợp của x qua các biến số trung gian u, v. Định lý sau đây cho ta quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp $z = f(u(x), v(x))$.

Định lý 7.4. *Nếu $z = f(u, v)$ là hàm số khả vi của u, v và nếu $u = u(x)$, $v = v(x)$ là những hàm số khả vi của x thì z là hàm số khả vi của x và ta có*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (7.23)$$

Chứng minh: Cho biến số độc lập x số gia Δx; u, v có số gia tương ứng là Δu, Δv ; hàm z có số gia tương ứng là Δz. Vì $z = f(u, v)$ là hàm số khả vi của u, v nên Δz có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v,$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$. Chia hai vế cho Δx, ta được

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta v}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Cho $\Delta x \to 0$, vì $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta = 0$, ta được

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \blacksquare$$

Ví dụ 1. Tính $\frac{dz}{dx}$ nếu $z = u^2 - uv + 2v^2$, $u = e^{-x}$, $v = \sin x$.

Theo công thức (7.23), ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (2u - v)(-e^{-x}) + (-u + 4v)\cos x$$

$$= -(2e^{-x} - \sin x)e^{-x} + (4\sin x - e^{-x})\cos x.$$

Chú thích 1. Nếu $z = f(x, y)$ là hàm số khả vi của x, y và nếu $y = y(x)$ là hàm số khả vi của x thì $z = f(x, y(x))$ là hàm số hợp của x, khả vi đối với x và ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{7.24}$$

Đạo hàm $\frac{dz}{dx}$ ở vế trái gọi là *đạo hàm toàn phần* của z đối với x, còn đạo hàm $\frac{\partial z}{\partial x}$ ở vế phải là đạo hàm riêng của $z = f(x, y)$ đối với x.

Ví dụ 2. Tính $\frac{dz}{dx}$ nếu $z = \ln(x^2 + y^2)$, $y = \sin^2 x$.

Theo công thức (7.24), ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + y^2}2\sin x\cos x = \frac{2x + 4\sin^3 x\cos x}{x^2 + \sin^4 x}.$$

3.1.2. Bây giờ xét hàm số $z = f(u, v)$, trong đó $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ là những hàm số của hai biến số độc lập x, y. Khi đó $z = f(u(x, y), v(x, y))$ là hàm số hợp của x, y thông qua các biến số trung gian u, v.

Để tính đạo hàm riêng đối với x của hàm số z, ta xem y không đổi, khi đó $z = f(u(x, y), v(x, y))$ là hàm số hợp của một biến số độc lập x thông qua hai biến số trung gian u, v. Do định lý 7.4, ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cũng lập luận như vậy khi tính $\frac{\partial z}{\partial y}$, ta được định lý sau.

Định lý 7.5. *Nếu hàm số $z = f(u, v)$ là hàm số khả vi của u, v và các hàm số $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ có các đạo hàm riêng u_x, u_y, v_x, v_y thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ và ta có*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{7.25}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \blacksquare$$

Ví dụ 3. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ nếu $z = e^u \cos v$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^u \cos v,\ \frac{\partial z}{\partial v} = -e^u \sin v,\ \frac{\partial u}{\partial x} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = x, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Do đó:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}\cos\left(\frac{x}{y}\right)y - e^{xy}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} = e^{xy}\left[y\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}\cos\left(\frac{x}{y}\right)x - e^{xy}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) = e^{xy}\left[x\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right].$$

Chú thích 2. Quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp cũng được mở rộng cho trường hợp hàm số f phụ thuộc nhiều biến số trung gian hơn và các biến số trung gian phụ thuộc nhiều biến số độc lập hơn.

3.2. Đạo hàm của hàm số ẩn

3.2.1. Giả sử hai biến số x, y được ràng buộc với nhau bởi phương trình

$$F(x, y) = 0. \tag{7.26}$$

Nếu $y = f(x)$ là một hàm số xác định trong một khoảng nào đó sao cho khi thế $y = f(x)$ vào phương trình (7.26), ta được một đồng nhất thức thì ta nói rằng $y = f(x)$ là *hàm số ẩn* xác định bởi phương trình (7.26). Chẳng hạn phương trình

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \tag{7.27}$$

xác định hai hàm số ẩn $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ và $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ trong khoảng $-a \le x \le a$, vì khi thế chúng vào phương trình (7.27) ta được đồng nhất thức

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0,\ \forall x \in [-a, a].$$

Chú ý rằng không phải mọi hàm số ẩn đều có thể biểu diễn được dưới dạng $y = f(x)$. Chẳng hạn, hàm số ẩn xác định bởi phương trình

$$xy - e^x + e^y = 0$$

không thể biểu diễn được dưới dạng $y = f(x)$.

Người ta chứng minh được rằng nếu hàm số $F(x, y)$ khả vi trừ một số điểm, hàm số $y = f(x)$ khả vi. Lấy đạo hàm hai vế phương trình (7.26) theo x, công thức (7.24) cho ta

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0.$$

Do đó nếu $F_y(x, y) \neq 0$, ta có

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{7.28}$$

Ví dụ 4. Tính y' nếu $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Vì $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ khả vi trên toàn $\mathbb{R}^2$ nên theo công thức (7.28), ta có

$$y' = \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax} \text{ nếu } y^2 - ax \neq 0.$$

Ví dụ 5. Tính y' nếu $xy - e^x + e^y = 0$.

Vì $F(x, y) = xy - e^x + e^y$ khả vi trên $\mathbb{R}^2$ nên

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{y - e^x}{x + e^y} \text{ nếu } x + e^y \neq 0.$$

3.2.2. Ta nói rằng hàm số hai biến số $z = f(x, y)$ là hàm số ẩn xác định bởi phương trình

$$F(x, y, z) = 0 \tag{7.29}$$

nếu

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$

với mọi (x, y) thuộc miền xác định của f. Cũng như trong trường hợp trước, nếu $F(x, y, z)$ khả vi thì trừ tại một số điểm đặc biệt, hàm số $f(x, y)$ khả vi. Lấy đạo hàm hai vế phương trình (7.29) đối với x và đối với y, ta được lần lượt :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Do đó nếu $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$, ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}. \qquad (7.30)$$

Ví dụ 6. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ nếu $xyz = \cos(x + y + z)$.

Vì $F(x, y, z) = xyz - \cos(x + y + z)$ khả vi trên $\mathbb{R}^3$ nên công thức (7.30) cho ta :

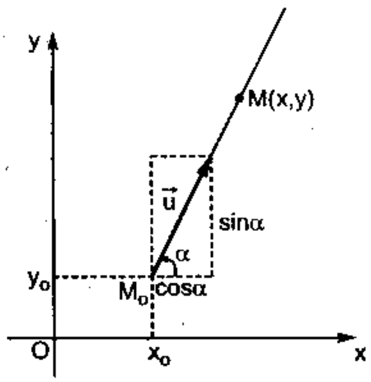
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{yz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(z + y + z)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{xz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}.$$

§4. ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG. VECTƠ GRAĐIÊN

4.1. Đạo hàm theo hướng

4.1.1. Ta biết rằng các đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ biểu diễn vận tốc biến thiên của hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ theo hướng của các trục Ox, Oy. Bây giờ ta muốn tính vận tốc biến thiên của hàm số ấy tại M_0 theo một hướng bất kỳ xác định bởi vectơ đơn vị $\vec{u}$ của nó. Gọi α là góc giữa trục Ox và vectơ $\vec{u}$. Khi đó vectơ $\vec{u}$ có các thành phần $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Qua M_0 dựng một đường thẳng có hướng của $\vec{u}$, trên đường thẳng ấy lấy điểm M(x, y) sao cho $\overrightarrow{M_oM} = \rho\vec{u}$ (hình 7.16), ρ là độ dài đại số của $\overrightarrow{M_0M}$. Giới hạn nếu có của tỷ số



Hình 7.16

$$\frac{\Delta z}{\rho} = \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\rho}$$

khi $\rho \to 0$ gọi là đạo hàm của hàm z theo hướng $\vec{u}$ tại M_0, được ký hiệu là

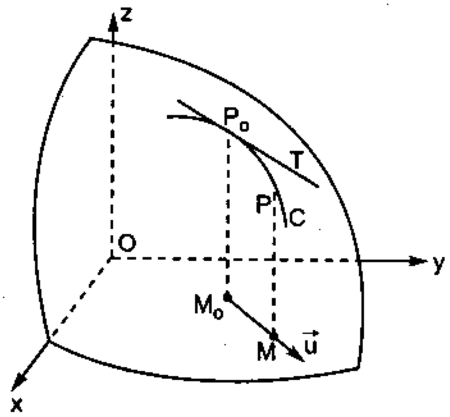
$$D_{\vec{u}}z(M_0) \text{ hay } \frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(M_0).$$

Nếu $\vec{u}$ trùng với vectơ đơn vị $\vec{i}$ của trục Ox thì

$$D_{\vec{u}}z(M_0) = \lim_{\rho\to 0}\frac{z(x_0+\rho, y_0) - z(x_0,y_0)}{\rho} = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Vậy đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}$ là đạo hàm của z theo hướng của trục Ox, còn $\frac{\partial z}{\partial y}$ là đạo hàm của z theo hướng của trục Oy.

Trên hình 7.17, $D_{\vec{u}}z(M_0)$ biểu diễn hệ số góc của đường tiếp tuyến T của giao tuyến C của mặt $z = f(x, y)$ với mặt phẳng đi qua M_0P_0 và vectơ $\vec{u}$. $D_{\vec{u}}z(M_0)$ cũng biểu diễn vận tốc biến thiên của hàm số $z = f(x, y)$ tại M_o theo hướng $\vec{u}$.



Hình 7.17

Định lý 7.6. *Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì tại đó nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{u}$ và*

$$D_{\vec{u}}z(M_0) = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\sin\alpha, \qquad (7.31)$$

α là góc mà $\vec{u}$ tạo với trục Ox.

Chứng minh: Vì hàm số f(x, y) khả vi tại M_0 nên số gia

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) - f(x_0, y_0)$$

có thể viết dưới dạng

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\rho\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\rho\sin\alpha + \alpha\rho\cos\alpha + \beta\rho\sin\alpha,$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $\rho \to 0$. Do đó

$$\frac{\Delta z}{\rho} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha + \alpha\cos\alpha + \beta\sin\alpha.$$

Vậy

$$D_{\vec{u}}z(M_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\sin\alpha. \blacksquare$$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $z = x^2 - 5xy + 3y^3$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ tại điểm (2, −1).

Vectơ đơn vị $\vec{u}$ ứng với $\vec{v}$ có các thành phần $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Theo công thức (7.31) :

$$D_{\vec{u}}z(x,y) = z_x(x,y)\cos\alpha + z_y(x,y)\sin\alpha = (2x - 5y)\frac{3}{5} + (-5x + 9y^2)\frac{4}{5},$$

$$D_{\vec{u}}z(2,-1) = (2.2 + 5.1)\frac{3}{5} + (-10 + 9)\frac{4}{5} = \frac{23}{5}.$$

4.1.2. Đạo hàm của hàm số ba biến số $w = f(x, y, z)$ theo hướng xác định bởi vectơ đơn vị $\vec{u}$ tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ được định nghĩa tương tự như trên. Giống như chứng minh định lý 7.6 ta có :

Định lý 7.7. *Nếu hàm số $w = f(x, y, z)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thì tại đó nó có đạo hàm theo mọi hướng xác định bởi vectơ đơn vị $\vec{u}$ và*

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta +$$
$$+ f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma, \qquad (7.32)$$

trong đó α, β, γ là những góc mà $\vec{u}$ tạo với ba trục Ox, Oy, Oz.

4.2. Vectơ građiên

Nếu hàm số hai biến số f(x, y) có các đạo hàm riêng f_x, f_y tại điểm M(x, y), người ta gọi *građiên* của f tại M là vectơ có các thành phần $(f_x(x, y), f_y(x, y))$, ký hiệu $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y)$ hay $\vec{\nabla}f(x,y)$. Vậy

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}. \qquad (7.33)$$

Ví dụ 2. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ nếu $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $M(3, -4)$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) = \frac{2x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(3,-4) = \frac{6}{25}\vec{i} - \frac{8}{25}\vec{j}.$$

Nếu hàm số ba biến số $f(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng f_x, f_y, f_z tại $M(x, y, z)$, người ta gọi *gradiên* của f tại M là vectơ có các thành phần

$$(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

và ký hiệu là $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z)$.

Định lý 7.8. *Nếu hàm số f khả vi tại điểm M thì giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng $D_{\vec{u}}f(M)$ bằng $\left|\overrightarrow{grad} f(M)\right|$ và đạt được khi $\vec{u}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{grad}\, f(M)$.*

Chứng minh: Ta chứng minh cho hàm số ba biến số $f(x, y, z)$. Vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ có các thành phần $(f_x(M), f_y(M), f_z(M))$, còn vectơ đơn vị $\vec{u}$ có các thành phần $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Do đó tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ và $\vec{u}$ được tính theo công thức

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M).\vec{u} = f_x(M)\cos\alpha + f_y(M)\cos\beta + f_z(M)\cos\gamma = D_{\vec{u}}f(M).$$

Theo định nghĩa của tích vô hướng, ta có

$$D_{\vec{u}}f(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M).\vec{u} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)\right| |\vec{u}| \cos\theta,$$

θ là góc giữa $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$ và $\vec{u}$. Do đó $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M).\vec{u}$ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos\theta = 1$, tức là khi $\theta = 0$, hay khi hướng của $\vec{u}$ trùng với hướng của $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$. Khi đó

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M).\vec{u} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)\right| \blacksquare$$

Ví dụ 3. Nếu $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$, tính $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ và tính đạo hàm của f tại $M(1, 2, -1)$ theo hướng của vectơ $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Giải: Ta có

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} = 3(x^2 + yz)\vec{i} + 3(y^2 + zx)\vec{j} + 3(z^2 + xy)\vec{k},$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M) = 3(-\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}).$$

Ba cosin chỉ hướng của $\vec{w}$ là $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, đó là ba thành phần của vectơ đơn vị $\vec{u}$ ứng với $\vec{w}$. Do đó

$$D_{\vec{u}}f(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f(M).\vec{u} = (-3)\left(-\frac{1}{3}\right) + 9.\frac{2}{3} + 9\left(-\frac{2}{3}\right) = 1.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

a) Tính vận tốc biến thiên của f tại A(2, 0) theo hướng từ A đến B(5, 4).

b) Theo hướng nào thì vận tốc biến thiên ấy lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất ấy.

Giải: a) $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = (f_x, f_y) = (2x - y, -x + 2y)$,

$\overrightarrow{\text{grad}}\,f(A) = (4, -2)$.

Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có các thành phần (3, 4), vectơ đơn vị $\vec{u}$ ứng với nó là $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Do đó

$$D_{\vec{u}}f(A) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f(A).\vec{u} = 4.\frac{3}{5} - 2.\frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

b) Theo định lý 7.8, vận tốc biến thiên của f tại A đạt giá trị lớn nhất khi $\vec{u}$ cùng hướng với $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(A) = (4, -2)$. Giá trị lớn nhất ấy bằng

$$\left|\overrightarrow{\text{grad}}\,f(A)\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}.$$

4.3. Trường vectơ

Người ta gọi *trường vectơ* xác định trên một miền $D \subset \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ cho ứng với mỗi điểm $M(x, y, z) \in D$ một vectơ duy nhất $\vec{F}(M)$ có gốc tại M, các thành phần P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z). Nếu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên ba trục toạ độ, ta có

$$\vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}. \qquad (*)$$

Chẳng hạn, nếu f(x, y, z) là một hàm số xác định, có các đạo hàm riêng cấp một trong miền $D \subset \mathbb{R}^3$ thì $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$ là một trường vectơ xác định trong D.

Trường vectơ $\vec{F}(M)$ cho bởi công thức (*) gọi là *trường thế* nếu tồn tại một hàm số u(x, y, z) sao cho

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z),\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y, z),\ \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z),$$

tức là sao cho $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = du$. Hàm số u(x, y, z) gọi là *hàm số thế vị* của trường $\vec{F}$.

Tương tự như vậy, trường vectơ xác định trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ cho ứng với mỗi điểm $M(x, y) \in D$ một vectơ duy nhất $\vec{F}(M)$ có gốc tại M, các thành phần P(x, y), Q(x, y). Ta có

$$\vec{F}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}. \qquad (**)$$

Trường vectơ xác định bởi công thức (**) gọi là *trường thế* nếu tồn tại một hàm số u(x, y) gọi là *hàm số thế vị* của trường $\vec{F}$, sao cho

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y),$$

tức là sao cho

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du.$$

Theo định lý 7.3, biểu thức Pdx + Qdy là một vi phân toàn phần khi và chỉ khi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (***)$$

Vậy trường $\vec{F}$ cho bởi (**) là trường thế khi và chỉ khi điều kiện (***) được thoả mãn. Khi đó có thể tìm được hàm số u(x, y) theo P(x, y) và Q(x, y) (xem mục 2.2.4).

Ví dụ 5. Các trường vectơ sau có là trường thế không. Tìm hàm số thế vị của trường nếu đó là trường thế.

1) $\vec{F_1} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$.

2) $\vec{F_2} = (3x^2 + y^2)\vec{i} + (2xy - 3)\vec{j}$.

Giải: 1) Ta có

$$P(x, y) = x^2 + y^2,\ Q(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy F_1 không là trường thế.

2) Ta có

$$P(x,y) = 3x^2 + y^2, \quad Q(x,y) = 2xy - 3,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy $\vec{F}_2$ là trường thế. Ta tìm hàm số u(x, y) sao cho

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - 3.$$

Từ phương trình sau suy ra

$$u = xy^2 - 3y + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ là một hàm số khả vi bất kỳ. Do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 + \varphi'(x)$$

So sánh với biểu thức của $\frac{\partial u}{\partial x}$ ở trên, ta được

$$\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3 + C,$$

C là hằng số tùy ý. Vậy hàm số vị thế của trường $\vec{F}_2$ là

$$u(x, y) = xy^2 - 3y + x^3 + C.$$

§5. CỰC TRỊ

5.1. Cực trị của hàm số hai biến số

5.1.1. Định nghĩa. Ta nói rằng hàm số $z = f(x, y)$ đạt *cực trị* tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu với mọi điểm $M(x, y)$ khá gần M_0 nhưng khác M_0 hiệu $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi ; nếu $f(M) - f(M_0) > 0$ thì $f(M_0)$ là *cực tiểu* ; nếu $f(M) - f(M_0) < 0$ thì $f(M_0)$ là *cực đại*. Cực đại và cực tiểu được gọi chung là *cực trị*, điểm M_0 được gọi là *điểm cực trị*.

Ví dụ 1. Hàm số $z = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu tại (0, 0) vì $x^2 + y^2 > 0$, $\forall(x, y) \neq (0, 0)$.

5.1.2. Điều kiện cần của cực trị

Định lý 7.9. *Nếu hàm số f(x, y) đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tại đó các đạo hàm riêng tồn tại thì*

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0. \tag{7.34}$$

Chứng minh: Vì $f(x, y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$ nên nếu cố định $y = y_0$ thì hàm số một biến số $x \mapsto f(x, y_0)$ đạt cực trị tại $x = x_0$. Vì đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ tồn tại, nó phải bằng 0 theo định lý Fermat. Cũng như vậy $f_y(x_0, y_0) = 0$. ■

Điều kiện (7.34) là điều kiện cần của cực trị, nó không là điều kiện đủ vì tại những điểm mà các đạo hàm riêng cấp một bằng 0 chưa chắc hàm số đạt cự trị. Tuy nhiên định lý 7.9 cho phép ta chỉ tìm cực trị tại những điểm ở đó các đạo hàm riêng cấp một đều bằng không, gọi là *điểm dừng*.

5.1.3. Điều kiện đủ của cực trị

Ta thừa nhận kết quả sau.

Định lý 7.10. *Giả sử rằng $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $f(x, y)$ và hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp hai ở lân cận điểm M_0. Đặt*

$r = f_{xx}(x_0, y_0)$, $s = f_{xy}(x_0, y_0)$, $t = f_{yy}(x_0, y_0)$. Khi đó :

1) Nếu $s^2 - rt < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0. Đó là cực tiểu nếu $r > 0$, là cực đại nếu $r < 0$;

2) Nếu $s^2 - rt > 0$ thì $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_0 ;

3) Nếu $s^2 - rt = 0$ thì chưa kết luận được $f(x, y)$ đạt cực trị hay không đạt cực trị tại M_0 (trường hợp nghi ngờ).

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8$.

Ta có

$$z_x = 2x + 4,\ z_y = 2y - 2.$$

Toạ độ của điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Vậy điểm dừng duy nhất là điểm $(-2, 1)$.

Vì $z_{xx} = 2$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = 2$ nên $s^2 - rt = -4 < 0$, còn $r = 2 > 0$, vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(-2, 1)$ và $z_{min} = 2^2 + 1^2 + 4.(-2) - 2.1 + 8 = 3$.

Nếu viết lại $z = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + 3$, ta thấy $z \geq 3\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -2$, $y = 1$, ta thấy lại kết quả trên.

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Ta có

$$z_x = 3x^2 - 3y,\ z_y = 3y^2 - 3x.$$

Toạ độ của điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

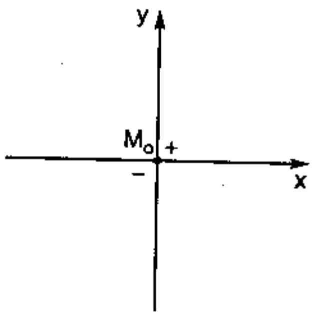
Đó là một hệ phương trình đối xứng. Thế $y = x^2$ từ phương trình đầu vào phương trình sau, ta được

$$0 = x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Phương trình ấy có hai nghiệm $x = 0$, $x = 1$. Vậy có hai điểm dừng $M_0(0, 0)$, $M_1(1, 1)$. Vì $z_{xx} = 6x$, $z_{xy} = -3$, $z_{yy} = 6y$ nên tại $M_0(0, 0)$ ta có $s^2 - rt = 9 > 0$, điểm M_0 không là điểm cực trị. Tại $M_1(1, 1)$ ta có $s^2 - rt = 9 - 36 = -27 < 0$, $r = 6 > 0$, M_1 là điểm cực tiểu, $z_{min} = 1 + 1 - 3 = -1$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3$.

Ta có $z_x = 3x^2$, $z_y = 3y^2$, vậy chỉ có một điểm dừng $M_0(0, 0)$. Vì $z_{xx} = 6x$, $z_{xy} = 0$, $z_{yy} = 6y$, nên tại M_0 ta có $s^2 - rt = 0$. Vậy chưa kết luận ngay được. Chú ý rằng $z(M_0) = z(0, 0) = 0$, $z(x, y) - z(0, 0) = x^3 + y^3$. Hiệu ấy dương nếu điểm $M(x, y)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất, âm nếu M nằm trong góc phần tư thứ ba. Do đó dấu của hiệu $z(M) - z(M_0)$ thay đổi ở lân cận điểm M_0 (hình 7.18) nên M_0 không là điểm cực trị.



Hình 7.18

Ví dụ 5. Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $(1, -2, 0)$ đến mặt phẳng $3x - 2y + z = 1$.

Khoảng cách từ điểm $(1, -2, 0)$ đến điểm (x, y, z) bằng

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2}.$$

Vì điểm cực trị của d trùng với điểm cực trị của d^2, ta tìm cực trị của

$$d^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 := f(x, y, z). \tag{7.35}$$

Vì điểm (x, y, z) nằm trên mặt phẳng $3x - 2y + z = 1$ nên các biến số x, y, z trong (7.35) thoả mãn điều kiện

$$3x - 2y + z = 1. \tag{7.36}$$

Thế $z = 1 - 3z + 2y$ rút ra từ (7.36) vào (7.35) ta được

$$d^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (1 - 3x + 2y)^2 := F(x, y).$$

Bài toán trở thành tìm cực tiểu của hàm số hai biến số F(x, y). Ta có

$$F_x = 2(x-1) - 6(1 - 3x + 2y) = 4(5x - 3y - 2),$$

$$F_y = 2(y+2) + 4(1 - 3x + 2y) = 2(-6x + 5y + 4).$$

Toạ độ của điểm dừng là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - 3y - 2 = 0 \\ -6x + 5y + 4 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được một điểm dừng duy nhất là $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}\right)$. Vì $F_{xx} = 20$, $F_{xy} = -12$, $F_{yy} = 10$ nên $s^2 - rt = 144 - 200 = -56 < 0$, $r = 20 > 0$ nên M_0 là điểm cực tiểu. Hơn nữa ta biết rằng trên mặt phẳng $3x - 2y + z = 1$ có một điểm mà khoảng cách tới điểm A(1, −2, 0) bé nhất, đó là chân của đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng đó. Khoảng cách đó là

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (1 - 3x + 2y)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{6}{\sqrt{14}}.$$

Chú thích. Cực trị của hàm số ba biến số (7.35), trong đó các biến số x, y, z thoả mãn điều kiện (7.36) gọi là *cực trị có điều kiện* (hay *cực trị tương đối*). Trong ví dụ 5 ta đã thấy bài toán tìm cực trị có điều kiện của hàm số ba biến số f(x, y, z) vào điều kiện $z = \varphi(x, y)$ được đưa về bài toán tìm cực trị của hàm số hai biến số $f(x, y, \varphi(x, y)) := F(x, y)$.

Cũng vậy, bài toán tìm cực trị tương đối của hàm số hai biến số f(x, y) với điều kiện $y = \varphi(x)$ được đưa về bài toán tìm cực trị của hàm số một biến số $f(x, \varphi(x)) := F(x)$.

Ví dụ 6. Trong các hình chữ nhật nội tiếp trong hình tròn bán kính R, hình nào có diện tích lớn nhất.

Gọi x, y là chiều dài hai cạnh của hình chữ nhật. Diện tích của hình chữ nhật là $S = xy$. Vì hình chữ nhật nội tiếp trong hình tròn bán kính R nên theo định lý Pythagore, ta có $x^2 + y^2 = 4R^2$ (hình 7.19). Vậy ta cần tìm cực đại của hàm số

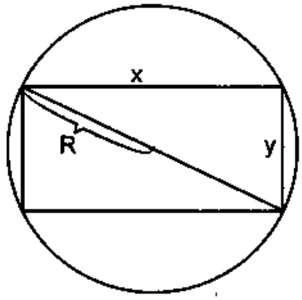
$$S = xy \tag{7.37}$$

với điều kiện

$$x^2 + y^2 = 4R^2. \tag{7.38}$$

Vì $x > 0$, $y > 0$ nên từ (7.38) rút ra $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, y có nghĩa khi $x^2 \le 4R^2$ $\Leftrightarrow x \le 2R$. Vậy cần tìm cực đại của hàm số một biến số

$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2}, 0 \le x \le 2R.$$



Hình 7.19

Ta có

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}},$$

$\frac{dS}{dx} = 0$ khi $x = R\sqrt{2}$. Từ bảng biến thiên

x	0		$R\sqrt{2}$		2R
$\frac{dS}{dx}$		+	0	−	‖
S	0	↗	$2R^2$	↘	0

ta thấy S đạt cực đại khi $x = R\sqrt{2}$, khi đó $y = R\sqrt{2}$. Vậy hình chữ nhật nội tiếp trong hình tròn có diện tích lớn nhất khi nó là hình vuông.

Chú thích. • Ta có thể tham số hoá điều kiện (7.38) bằng cách đặt $x = 2R\cos t$, $y = 2R\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ vì $x > 0$, $y > 0$. Khi đó

$$S = 4R^2\sin t\cos t = 2R^2\sin 2t,$$

nó đạt giá trị lớn nhất khi $\sin 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = y$. Ta đi đến kết quả nhanh hơn.

• Theo bất đẳng thức Cauchy, $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$, dấu bằng xảy khi x = y. Do đó nếu dùng bất đẳng thức ấy ta được ngay kết quả.

5.2. Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số hai biến số trong một miền đóng giới nội

Cực trị mà chúng ta định nghĩa ở mục trước chỉ có tính chất địa phương. Chúng lớn hơn hay bé hơn những giá trị khác của hàm số ở lân cận điểm cực trị. Người ta thường gọi đó là những *cực trị địa phương*. Bây giờ ta muốn tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trong toàn bộ một miền nào đó. Ta biết rằng nếu hàm số f(x, y) liên tục trong một miền đóng giới nội D thì nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của nó trong miền ấy. Nếu các giá trị ấy đạt được tại những điểm ở bên trong miền D thì những điểm ấy phải là điểm cực trị, do đó là điểm dừng của hàm số. Nhưng các giá trị ấy cũng có thể đạt được trên biên của miền D. Do đó muốn tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số f(x, y) trong miền đóng giới nội D ta thực hiện các bước :

1) Tính giá trị của f tại các điểm dừng của f nằm trong miền D ;

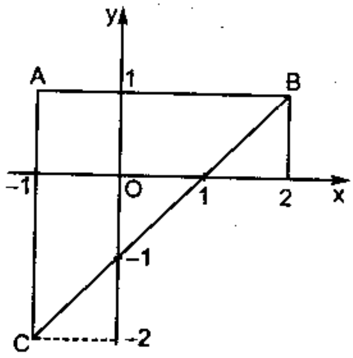
2) Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của f trên biên của miền D ;

3) Số lớn (bé) nhất trong các giá trị tính ở 1) và 2) là giá trị lớn (bé) nhất phải tìm.

Ví dụ 7. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ trong miền D đóng hình tam giác có các đỉnh A(−1, 1), B(2, 1), C(−1, −2).

Hàm số f(x, y) liên tục trong miền D. Để tìm điểm dừng ta giải hệ

$$\begin{cases} f_x = 2x + 2y = 0 \\ f_y = 2x + 6y = 0. \end{cases}$$



Hình 7.20

Đó là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có định thức khác không, nên nó chỉ có nghiệm tầm thường, vậy chỉ có một điểm dừng là điểm (0, 0) nằm trong D (hình 7.20), f(0, 0) = 0. Trên cạnh AB, y = 1, $f(x, 1) = x^2 + 2x + 3$, $-1 \le x \le 2$. Tam thức bậc hai ấy đạt cực tiểu tại x = −1, f(−1, 1) = 2, còn

$f(2, 1) = 11$. Trên cạnh AC, $x = -1$, $f(-1, y) = 3y^2 - 2y + 1$, $-2 \le y \le 1$, nó đạt cực tiểu tại $y = \frac{1}{3}$, $f\left(-1, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, $f(-1, -2) = 17$, $f(-1, 1) = 2$. Trên cạnh BC, $x - y = 1$, do đó $y = x - 1$, $f(x, x-1) = x^2 + 2x(x-1) + 3(x-1)^2 = 6x^2 - 8x + 3$, $-1 \le x \le 2$, nó đạt cực tiểu tại $x = \frac{2}{3}$, $f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $f(-1, -2) = 17$, $f(2, 1) = 11$. So sánh các giá trị đã tính, ta thấy

$$f_{min} = 0, f_{max} = 17.$$

§6. VÀI ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

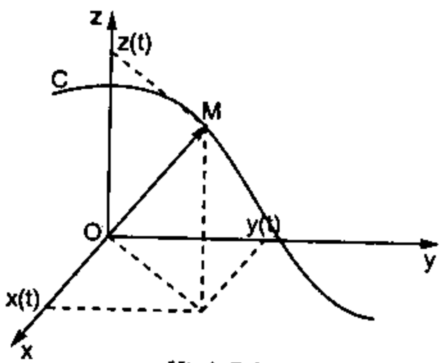
6.1. Hàm vectơ. Đường cong trong không gian

6.1.1. Định nghĩa và ví dụ

I là một khoảng trong $\mathbb{R}$, ánh xạ cho ứng với mỗi số thực $t \in I$ một vectơ trong $\mathbb{R}^n$ duy nhất $\vec{r}(t)$ gọi là một *hàm vectơ*. Ta sẽ xét với $n = 3$, Nếu $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ là ba thành phần của vectơ $\vec{r}(t)$, ta viết

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \text{ hay } \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Đặt $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$, điểm M có toạ độ $(x(t), y(t), z(t))$ (hình 7.21). Giả sử các hàm số $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ liên tục trên I. Khi t biến thiên trong I, điểm M vạch thành một đường cong C liên tục trong $\mathbb{R}^3$. Ta nói rằng $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ là các *phương trình tham số* của đường cong C. $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ là phương trình vectơ của đường cong C.



Hình 7.21

Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z_0$, người ta định nghĩa

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0,$$

trong đó $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Ví dụ 1. Mô tả đường cong biểu diễn bởi phương trình vectơ

$$\vec{r}(t) = (2 - t, 1 + 3t, -4 + 5t).$$

Phương trình tham số của đường cong là

$$x = 2 - t,\ y = 1 + 3t,\ z = -4 + 5t.$$

Từ ba phương trình trên, rút ra

$$t = 2 - x,\ t = \frac{y-1}{3},\ t = \frac{z+4}{5}.$$

Vậy

$$2 - x = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{5}.$$

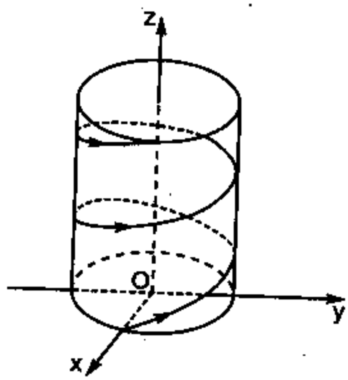
Đó là phương trình của đường thẳng đi qua điểm (2, 1, –4) song song với vectơ (–1, 3, 5).

Ví dụ 2. Mô tả đường cong có phương trình tham số

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t.$$

Vì $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ nên đường cong nằm trên mặt trụ tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

Vì $z = t$ nên đường cong xoắn trên mặt trụ (hình 7.22). Đường cong gọi là *đường xoắn ốc*. Cũng có thể xem đường xoắn ốc là quỹ đạo của hợp hai chuyển động : chuyển động quay tròn đều trong mặt phẳng Oxy quanh gốc toạ độ và chuyển động thẳng đều theo trục Oz.



Hình 7.22

6.1.2. Phương trình của tiếp tuyến, pháp diện của đường cong tại một điểm

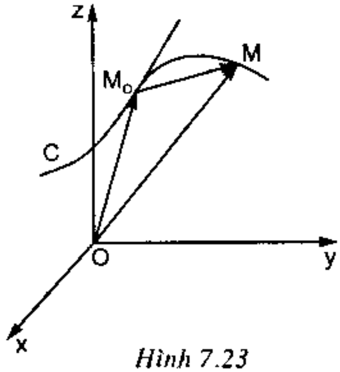
Giả sử $t_0 \in I$ và $t_0 + h \in I$, các điểm $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in C$ và $M(x(t_0 + h), y(t_0 + h), z(t_0 + h)) \in C$. Vectơ

$$\Delta\vec{r}(t_o) = \vec{r}(t_o + h) - \vec{r}(t_o) = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_o} = \overrightarrow{M_oM}$$

có các thành phần $(x(t_0 + h) - x(t_0), y(t_0 + h) - y(t_0), z(t_0 + h) - z(t_0))$.

Do đó

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_o)}{h} = \left(\frac{x(t_o + h) - x(t_o)}{h}, \frac{y(t_o + h) - y(t_o)}{h}, \frac{z(t_o + h) - z(t_o)}{h}\right).$$



Hình 7.23

Nếu các hàm số thành phần x(t), y(t), z(t) khả vi tại t_0 thì tồn tại

$$\lim_{h\to o}\frac{\Delta\vec{r}(t_o)}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\vec{r}(t_o + h) - \vec{r}(t_o)}{h}.$$

Giới hạn đó gọi là *đạo hàm của hàm vectơ* $\vec{r}(t)$ tại t_0, ký hiệu là $\vec{r}\,'(t_o)$. Vậy

$$\vec{r}\,'(t_o) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)). \qquad (7.39)$$

Mặt khác, vị trí giới hạn của đường cát tuyến M_0M khi M dần tới M_0 trên đường cong C nếu tồn tại là tiếp tuyến của C tại M_0. Vậy nếu vectơ $\vec{r}\,'(t_o) \neq 0$, phương của vectơ $\vec{r}\,'(t_o)$ trùng với phương của tiếp tuyến của đường cong C tại M_0. Điểm $P(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ nằm trên đường tiếp tuyến của C tại M_0 khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{M_oP}$ cùng phương với vectơ $\vec{r}\,'(t_o)$, nghĩa là

$$\frac{X - x(t_o)}{x'(t_o)} = \frac{Y - y(t_o)}{y'(t_o)} = \frac{Z - z(t_o)}{z'(t_o)}. \qquad (7.40)$$

Đó là phương trình tiếp tuyến của đường cong C tại M_0.

Mặt phẳng đi qua M_0 vuông góc với tiếp tuyến của đường cong C tại M_0 gọi là *pháp diện* của đường cong C tại M_0. Điểm $P(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ nằm trên pháp diện của đường cong C tại M_0 khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{M_oP} \perp \vec{r}\,'(t_o) \text{ hay } \overrightarrow{M_oP}\,.\,\vec{r}\,'(t_o) = 0,$$

nghĩa là

$$[X - x(t_0)]x'(t_0) + [Y - y(t_0)]\,y'(t_0) + [Z - z(t_0)]\,z'(t_0) = 0. \qquad (7.41)$$

Đó là phương trình của pháp diện của đường cong C tại M_0.

Ví dụ 3. 1) Viết phương trình đường tiếp tuyến và pháp diện của đường xoắn ốc

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$$

tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Chứng minh rằng đường tiếp tuyến với đường xoắn ốc đó luôn tạo với trục Oz một góc không đổi.

Giải:

1) Ta có :

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a,\ \ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}b,$$

$$x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = a\cos t,\ z'(t) = b,$$

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a,\ \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \ z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = b.$$

Vậy phương trình của tiếp tuyến với đường xoắn ốc tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$ là

$$\frac{X}{-a} = \frac{Y-a}{0} = \frac{Z - \frac{\pi}{2}b}{b},$$

hay

$$Y = a,\ bX = a\left(\frac{\pi}{2}b - Z\right).$$

Phương trình pháp diện của đường xoắn ốc tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$ là

$$-aX + b\left(Z - \frac{\pi}{2}b\right) = 0.$$

2) Vì $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = b$ nên các cosin chỉ phương của đường tiếp tuyến của đường xoắn ốc là

$$-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cosin chỉ phương thứ ba không phụ thuộc t, nên đường tiếp tuyến với đường xoắn ốc làm với trục Oz một góc không đổi.

6.1.3. Vi phân cung

Tương tự như trong đường cong phẳng, vi phân cung của đường cong trong không gian có phương trình tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

được cho bởi

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt. \qquad (7.42)$$

6.2. Mặt cong

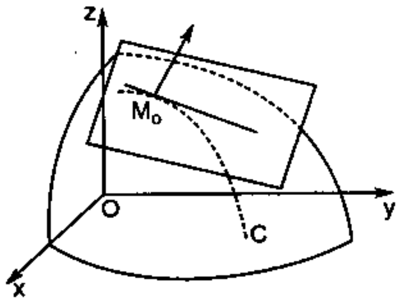
Cho mặt cong S có phương trình

$$f(x, y, z) = 0.$$

Điểm M_0 trên mặt S gọi là *điểm chính quy* nếu tại đó các đạo hàm riêng f_x, f_y, f_z đều tồn tại và không đồng thời triệt tiêu. Một điểm không chính quy gọi là *điểm kỳ dị*.

M_0 là điểm chính quy trên mặt S. Đường thẳng M_0T gọi là *đường tiếp tuyến* của mặt S tại M_0 nếu nó là tiếp tuyến tại M_0 của một đường cong nào đó nằm trên mặt S đi qua M_0. Nói chung có vô số đường cong trên mặt S đi qua M_0, do đó có vô số đường tiếp tuyến của mặt S đi qua M_0.

Định lý 7.11. *Mọi đường tiếp tuyến với mặt cong tại một điểm chính quy M_0 của nó đều nằm trên cùng một mặt phẳng.*



Hình 7.24

Chứng minh: Gọi L là một đường cong nào đó trên mặt S đi qua M_0, các phương trình tham số của nó là

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Điểm M_0 thuộc L, các toạ độ của nó là (x_0, y_0, z_0), trong đó

$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0).$$

với một giá trị xác định t_0 nào đó. Phương trình vectơ của đường L là

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Vectơ $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ cùng phương với tiếp tuyến của L tại M_0. Mặt khác, vì đường L nằm trên mặt S nên các hàm số x(t), y(t), z(t) phải thoả mãn phương trình của mặt S, tức là

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Lấy đạo hàm hai vế đối với t, ta được

$$f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) = 0.$$

Với $t = t_0$, ta có

$$f_x(M_0)x'(t_0) + f_y(M_0)y'(t_0) + f_z(M_0)z'(t_0) = 0. \qquad (7.43)$$

Vectơ $(f_x(M_0), f_y(M_0), f_z(M_0))$ chính là vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_o) \neq \vec{O}$ (xem mục 4.2) vì M_0 là điểm chính quy của mặt S. Vectơ đó không phụ thuộc đường cong L, còn $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ là vectơ $\vec{r}\,'(t_o)$. Do đó phương trình (7.43) có thể viết là

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_o) . \vec{r}\,'(t_o) = 0.$$

Vậy mọi đường tiếp tuyến của mặt S tại M_0 đều vuông góc với vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_o)$. Chúng cùng nằm trên mặt phẳng đi qua M_0 vuông góc với vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_o)$.

Mặt phẳng chứa mọi đường tiếp tuyến của mặt S tại M_0 gọi là *tiếp diện* của mặt S tại M_0. Đường thẳng đi qua M_0 cùng phương với $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_o)$ gọi là *pháp tuyến* của mặt S tại M_0.

Điểm $M(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ nằm trên tiếp diện của mặt S tại M_0 khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{M_oM} . \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_o) = 0$$

hay

$$f_x(M_0)(X - x_0) + f_y(M_0)(Y - y_0) + f_z(M_0)(Z - z_0) = 0. \qquad (7.44)$$

Đó là phương trình của tiếp diện của mặt S tại M_0.

Điểm $M(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ nằm trên pháp tuyến của mặt S tại M_0 khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{M_oM}$ cùng phương với vectơ $\vec{r}\,'(M_o)$ hay

$$\frac{X - x_o}{f_x(M_o)} = \frac{Y - y_o}{f_y(M_o)} = \frac{Z - z_o}{f_z(M_o)}. \qquad (7.45)$$

Ví dụ 4. Viết phương trình của tiếp diện và pháp tuyến của mặt nón $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tại điểm (3, 4, 5).

Ta có

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

do đó

$$f_x = 2x, f_y = 2y, f_3 = -2z.$$

Phương trình của tiếp diện của mặt nón tại điểm (3, 4, 5) là

$$6(X - 3) + 8(Y - 4) - 10(Z - 5) = 0$$

hay

$$3X + 4Y - 5Z = 0.$$

Phương trình của pháp tuyến của mặt nón tại điểm (3, 4, 5) là

$$\frac{X-3}{6} = \frac{Y-4}{8} = \frac{Z-5}{-10}.$$

Chú thích. Nếu phương trình của mặt S có dạng $z = F(x, y)$, ta đặt

$$f(x, y, z) := F(x, y) - z.$$

Khi đó

$$f_x(x, y, z) = F_x(x, y), f_y(x, y, z) = F_y(x, y), f_z(x, y, z) = -1.$$

Vậy ba hệ số chỉ phương của pháp tuyến của mặt S tại điểm (x_0, y_0) là

$$F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0), -1.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Phát biểu định nghĩa hàm số ba biến số, miền xác định của hàm số ba biến số. Tìm miền xác định của hàm số $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
2. Cách biểu diễn hình học của hàm số hai biến số. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ có phải là đồ thị của một hàm số hai biến số nào không ?
3. Định nghĩa giới hạn của hàm số f(x, y) khi $(x, y) \to (a, b)$.
4. Định nghĩa hàm số f(x, y) liên tục tại điểm (a, b). Khi nào thì hàm số f(x, y) không liên tục tại điểm (a, b).
5. Định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số f(x, y) tại điểm (a, b). Ý nghĩa hình học của nó.

6. Định nghĩa hàm số f(x, y) khả vi tại điểm (a, b). Nếu f(x, y) khả vi tại điểm (a, b) thì các đạo hàm riêng $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ có tồn tại không ? Vì sao ?

7. Nếu tồn tại các đạo hàm riêng $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ thì hàm số f(x, y) có khả vi tại (a, b) không ? Với điều kiện nào hàm số f(x, y) khả vi tại (a, b).

8. Vì sao có thể ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng biểu thức $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ khi biết $f(x_0, y_0)$.

9. Định nghĩa đạo hàm riêng cấp hai, cấp ba của hàm số f(x, y). Khi nào thì ta có $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$

10. Có bao nhiêu đạo hàm riêng cấp ba của hàm số f(x, y). Nếu chúng đều liên tục thì có bao nhiêu đạo hàm riêng cấp ba khác nhau của f(x, y).

11. Với điều kiện nào thì P(x, y)dx + Q(x, y)dy là một vi phân toàn phần.

12. Định nghĩa hàm số hợp. Quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp.

13. Định nghĩa hàm số ẩn. Quy tắc tính đạo hàm của hàm số ẩn. Phương trình f(x, y, z) = 0 xác định bao nhiêu hàm số ẩn.

14. Định nghĩa đạo hàm theo hướng của hàm số f(x, y, z), định nghĩa građiên của hàm số f(x, y, z), quan hệ giữa chúng.

15. Vì sao hàm f(x, y) tại điểm (a, b) tăng nhanh nhất theo hướng của vectơ $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a, b)$.

16. Định nghĩa cực trị của hàm số f(x, y), cho ví dụ. Hàm số $f(x, y) = x^2 - y^2$ có đạt cực trị tại điểm (0, 0) không ?

17. Quy tắc tìm cực trị của hàm số f(x, y).

18. Định nghĩa cực trị có điều kiện của hàm số f(x, y). Quy tắc tìm cực trị có điều kiện của hàm số f(x, y).

19. Cách tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số f(x, y) liên tục trong một miền đóng giới nội D.

20. Phương trình của tiếp tuyến và pháp diện của đường cong tại một điểm.

21. Phương trình của tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong tại một điểm.

22. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

1) Hàm số f(x, y) = sinx + tgy xác định trên toàn $\mathbb{R}^2$.

2) Nếu khi $(x, y) \to (0, 0)$ dọc theo cả hai trục Ox, Oy mà hàm số $f(x, y)$ dần tới cùng một giới hạn L thì $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$.

3) Hàm số $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ liên tục tại điểm (0, 0).

4) $f_x(a, b) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$.

5) Nếu tồn tại các đạo hàm riêng $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ thì hàm số $f(x, y)$ khả vi tại (a, b).

6) Có hàm số $f(x, y)$ nào thoả mãn các đẳng thức sau không ?

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2,\ f_y(x, y) = 3x^2 + 3y^2.$$

7) Nếu $f(x, y, z) = e^{-x^2}$ thì $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = -2xe^{-x^2}$.

8) Nếu $f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) thì $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_o, y_o) = \vec{0}$.

9) Hàm số $f(x, y)$ tại điểm (a, b) giảm nhanh nhất theo hướng của $-\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a,b)$.

BÀI TẬP

1. Cho $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$. Tính $f(2, 1)$, $f(-1, 3)$, $f(x, 2x^2)$, $f(x + h, y + k)$.

2. Cho $g(x, y, z) = x^2 \ln y \sin z$. Tính $g\left(-1, e^2, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $g(t, t, t)$, $g(x + y, x, x - y)$.

3. Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y + 1}$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$;

c) $f(x, y) = x^2\ln(4 - x^2 - 4y^2)$;

d) $f(x, y) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{y - 1}$;

e) $f(x, y) = \sqrt{x}\ln(x + y)$;

f) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x + y}$;

g) $f(x, y) = \arccos\dfrac{x}{y}$;

h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$;

i) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$;

j) $f(z, y, z) = \ln\left(\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} - 1\right)$.

4. Mô tả các mặt bậc hai sau :

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; b) $z = 4x^2 + y^2 + 1$;

c) $4(x^2 + y^2) - z^2 - 4 = 0$; d) $y - x^2 - 1 = 0$;

e) $y^2 - x^2 - 1 = 0$; f) $y^2 - x^2 - z^2 = 0$.

5. Tìm giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ của các hàm số sau :

a) $f(x, y) = \dfrac{5xy^2 - 3x^2y + 1}{2xy - 1}$; b) $f(x, y) = \dfrac{2x^2 - 3y^2}{3x^2 + 2y^2}$;

c) $f(x, y) = \dfrac{2 + x^2 + y^2}{2y}\sin y$; d) $f(x, y) = \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$;

e) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

6. Tính các đạo hàm riêng cấp một của các hàm số sau :

a) $f(x, y) = x^2y^2(x^3 + y^3)$; b) $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

c) $f(x, y) = y\ln(x^2 - y^2)$; d) $f(x, y) = -y\sqrt{x} + 4x\sqrt[3]{y^2}$;

e) $f(x, y) = e^{2x^2 - xy + y^2}$; f) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{y}{x}$;

g) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1 + x^2}$; h) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

i) $f(x, y) = e^{xy}\operatorname{tg}(x - 2y)$; j) $f(x, y) = x^{y^2}$ $(x > 0)$;

k) $f(x, y, z) = e^{xyz}\sin\dfrac{y}{x}$; l) $f(x, y, z) = z\sin\dfrac{y}{x + z}$.

7. Tính vi phân toàn phần của các hàm số :

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

c) $f(x, y) = ye^{xy}$;

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y^2 + 1)$;

e) $f(x, y) = e^{x+y}\sin(x - y)$;

f) $f(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^3}$;

g) $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

h) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^{-x}$.

8. Tính gần đúng các số sau :

a) $\sqrt{9.(1,95)^2 + (8,1)^2}$;

b) $\ln[(0,09)^3 + (0,99)^3]$;

c) $\sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$;

d) $\sqrt{5e^{0,02} + (2,03)^2}$;

e) $\dfrac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98}\,.\sqrt[4]{(1,05)^3}}$

f) $\sqrt{(3,02)^2 + (1,99)^2 + (5,98)^2}$.

9. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau :

a) $f(x, y) = x^3y^2 + 2x\sqrt{y}$;

b) $f(x, y) = \cos^2(2x - 3y)$;

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$;

d) $f(x, y) = \sin(x - y) + \cos(x + y)$.

10. Tính các đạo hàm riêng cấp cao của các hàm số sau :

a) $f(x, y) = x^3y^2 - 5x^4y$, tính f_{xxx} ;

b) $f(x, y) = e^{xy^2}$, tính f_{xxy} ;

c) $f(x, y) = \cos(ax + e^y)$, tính f_{xyy} ;

d) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, tính f_{yzy} ;

e) $f(x, y, z) = e^{xy}\sin z$, tính f_{zyx} ;

f) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, tính f_{xyz}.

11. Trong các hàm số sau, hàm số nào thoả mãn phương trình $u_{xx} + u_{yy} = 0$?

a) $u(x, y) = x^2 + y^2$;

b) $u(x, y) = x^2 - y^2$;

c) $u(x, y) = x^3 + 3xy^2$;

d) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$;

e) $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

f) $u(x, y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.

12. Chứng minh rằng các hàm số sau thoả mãn phương trình $u_{tt} = a^2u_{xx}$:

a) $u(x, t) = \sin(kx)\sin(akt)$;

b) $u(x, t) = (x - at)^4 + (x + at)^4$;

c) $u(x, t) = \sin(x - at) + \ln(x + at)$.

13. a) Tìm hàm số $u(x, y)$ thoả mãn phương trình $u_x = 0$;

b) Tìm hàm số $u(x, y)$ thoả mãn phương trình $u_{xy} = 0$.

14. Nếu biểu thức nào trong các biểu thức ω dưới đây là vi phân toàn phần, hãy tìm hàm số $f(x, y)$ để cho $df = \omega$:

a) $\omega = (3x^2 + y)dx + (x - 4y^2)dy$;

b) $\omega = (5xy + 3)dx + (2y^2 - x^2 + 1)dy$;

c) $\omega = (3x^2y^2 - 4xy + 3)dx + (2x^3y - 2x^2)dy$;

d) $\omega = (6x + \sin y)dx + (x\cos y + y^2 + \sin y)dy$;

e) $\omega = (x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx$;

f) $\omega = (y + e^x\cos y + x^2)dx + (x - e^x\sin y + e^y)dy$;

g) $\omega = x^2\ln y dx - (x + y^2\ln x)dy$ $(x > 0, y > 0)$

h) $\omega = \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{2y}{x^3}\right)dx - \left(\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{x^2}\right)dy$.

15. Dùng quy tắc lấy đạo hàm của hàm số hợp, tính $\dfrac{dz}{dx}$:

a) $z = u^3 + v^3$, trong đó $u = x^2$, $v = 1 - e^x$;

b) $z = u\sqrt{1 + v^2}$, trong đó $u = xe^{-x}$, $v = \cos x$;

c) $z = \ln(u + v^2)$, trong đó $u = \sqrt{1 + x}$, $v = 1 + \sqrt{x}$.

16. Dùng quy tắc lấy đạo hàm của hàm số hợp, tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$:

a) $z = u^2\sin v$, trong đó $u = x^2 + y^2$, $v = 2xy$;

b) $z = \sin u\cos v$, trong đó $u = (x - y)^2$, $v = x^2 - y^2$;

c) $z = u^2 - 3u^2v^3$, trong đó $u = xe^y$, $v = xe^{-y}$;

d) $z = \operatorname{arctg}(uv)$, trong đó $u = x^2$, $v = xe^y$;

e) $z = e^{u - 3v}$, trong đó $u = x^2y$, $v = xy^2$.

17. a) Chứng minh rằng hàm số $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ thoả mãn phương trình

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{2}{u}.$$

b) Chứng minh rằng hàm số $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thoả mãn phương trình

$$\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = \frac{z}{y^2}.$$

c) Chứng minh rằng hàm số $u = xf(x + y) + yg(x + y)$, trong đó f, g là hai hàm số khả vi, thoả mãn phương trình

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

18. Tính đạo hàm của các hàm số ẩn :

a) $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 9$, tính y' ;

b) $y^3 + (x^2 + 1)y + x^4 = 0$, tính y' ;

c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, tính y', y'' ;

d) $x\cos y + y\cos x = 1$, tính y' ;

e) $1 + xe^y - ye^x = 0$, tính y' ;

f) $xy^2 - \sin(x + y) + y = 0$, tính y' ;

g) $xy + yz - zx = 0$, tính z_x, z_y ;

h) $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y + z)$, tính z_x, z_y ;

i) $yx^4 + x^2y^3 = e^{xyz}$, tính z_x, z_y ;

j) $xe^y + yz + ze^x = 0$, tính z_x, z_y ;

k) $\ln(1 + y - z) - z - x = 0$, tính z_x, z_y.

19. Tính građiên của các hàm số f tại điểm P và đạo hàm của hàm số f theo hướng $\vec{u}$:

a) $f(x, y) = x^2y^3 + 4xy^5$, $P(1, -1)$, $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

b) $f(x, y) = e^x\sin y$, $P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

c) $f(x, y) = xy^2z^3$, $P(1, -2, 1)$, $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

d) $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$, $P(1, 2, 3)$, $\vec{u}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

20. Tính giá trị lớn nhất của vận tốc biến thiên của hàm số f tại điểm M, giá trị lớn nhất ấy đạt được theo hướng nào ?

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $M(3, 4)$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^3 + 2y}$, $M(2, 4)$;

c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $M(4, 2, 1)$;

d) $f(x, y, z) = \cos(2x - 3y + 3z)$, $M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$.

21. Chứng minh rằng nếu $u(x, y)$, $v(x, y)$ là các hàm số khả vi; a, b là hằng số thì :

a) $\overrightarrow{\text{grad}}(au + bv) = a\overrightarrow{\text{grad}}\,u + b\overrightarrow{\text{grad}}\,v$;

b) $\overrightarrow{\text{grad}}(uv) = u\overrightarrow{\text{grad}}\,v + v\overrightarrow{\text{grad}}\,u$;

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\overrightarrow{\text{grad}}\,u - u\overrightarrow{\text{grad}}\,v}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

d) $\overrightarrow{\text{grad}}(u^n) = nu^{n-1}\overrightarrow{\text{grad}}\,u$, $n \in \mathbb{N}^*$.

22. Tìm cực trị của các hàm số :

a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y$;

b) $f(x, y) = x\sin y$;

c) $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3}\right)$;

d) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$;

e) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$;

f) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$;

g) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$;

h) $f(x, y) = x[(\ln x)^2 + y^2]$;

i) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y), 0 \le x, y \le \dfrac{\pi}{4}$;

j) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$.

23. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số :

a) $f(x, y) = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$;

b) $f(x, y) = x^2 + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$;

24. a) Điểm nào trên mặt $z^2 = xy + 1$ gần gốc toạ độ nhất ?

b) Điểm nào trên đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ gần điểm $(3, -1)$ nhất ?

c) Điểm nào trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 4$ gần gốc toạ độ nhất ?

d) Trong các hình hộp chữ nhật mà ba mặt nằm trên ba mặt phẳng toạ độ, một đỉnh nằm trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$, hình nào có thể tích lớn nhất.

25. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số f trên miền D :

a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, D là miền tròn đóng $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le 1$;

b) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1$, $y = 1$ và $x + y = 1$;

c) $f(x, y) = 1 + xy - x - y$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 4$;

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ và $y = -1$;

e) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, D là miền đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \dfrac{\pi}{2}$.

26. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong tại điểm P :

a) $x = t,\ y = \dfrac{t^2}{2},\ z = \dfrac{t^3}{3},\ P\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$;

b) $x = 2t,\ y = 2\sqrt{2}\cos t,\ z = 2\sqrt{2}\sin t,\ P\left(\dfrac{\pi}{2}, 2, 2\right)$;

c) $x = t\sin t + \cos t$, $y = t\cos t - \sin t$, $z = 2t$, $P\left(\frac{\pi}{2}, -1, \pi\right)$;

d) $x = \cos t$, $y = 3e^t$, $z = 3e^{-t}$, $P(1, 3, 3)$.

27. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt tại điểm P :

a) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $P(1, 1, 1)$;

b) $4x^2 + y^2 + z^2 = 24$, $P(2, 2, 2)$;

c) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $P(2, 2, 3)$;

d) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $P(1, 0, 0)$.

Đáp số

1. $f(2, 1) = \frac{2}{3}$; $f(-1, 3) = -\frac{6}{19}$; $f(x, 2x^2) = \frac{4x}{1 + 8x^2}$;

$$f(x + h, y + k) = \frac{2xy + 2(kx + hy) + 2hk}{x^2 + 2y^2 + 2hx + 4ky + h^2 + 2k^2}.$$

2. $g\left(-1, e^2, \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $g(t, t, t) = t^2 \ln t \sin t$;

$g(x + y, x, x - y) = (x + y)^2 \ln x \sin(x - y)$.

3. a) $\{(x, y) \mid x + y + 1 \neq 0\}$;

b) $\{(x, y) \mid y \leq x^2\}$;

c) $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 < 4\}$;

d) $\{x, y) \mid x \geq -1\} \cap \{x, y) \mid y \geq 1\}$;

e) $\{(x, y) \mid x > 0\} \cap \{(x, y) \mid x + y > 0\}$;

f) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \cap \{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$;

g) $\{(x, y) \mid y \neq 0\} \cap \{(x, y) \mid \left|\frac{x}{y}\right| \leq 1\}$.

h) $\{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$;

i) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

j) $(x, y, z) \mid \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} < 1\}$.

4. a) Mặt cầu tâm tại (1, 1, 0), bán kính 1.

b) Mặt parabôlôit eliptic, đỉnh tại (0, 0, 1), nhận Oz làm trục.

c) Mặt hypebôlôit một tầng tròn xoay, do đường hypebôn $y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, $x = 0$ quay quanh trục Oz sinh ra.

d) Mặt trụ có đường sinh song song với Oz, cắt mặt phẳng $z = 0$ theo đường parabôn $y = x^2 + 1$.

e) Mặt trụ có đường sinh song song với Oz, cắt mặt phẳng $z = 0$ theo đường hypebôn $y^2 - x^2 = 1$.

f) Mặt nón có đỉnh ở gốc toạ độ nhận Oy làm trục đối xứng.

5. a) 1 ; b) Không tồn tại giới hạn ;

c) 1 ; d) không tồn tại giới hạn ; e) 2.

6. a) $f_x = 5x^4y^2 + 2xy^5$, $f_y = 2x^5y + 5x^2y^4$;

b) $f_x = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $f_y = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

c) $f_x = \frac{2xy}{x^2-y^2}$, $f_y = \ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}$;

d) $f_x = -\frac{y}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{y^2}$, $f_y = -\sqrt{x} + \frac{8}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{y}}$;

e) $f_x = (4x - y)e^{2x^2-xy+y^2}$, $f_y = (-x + 2y)e^{2x^2-xy+y^2}$;

f) $f_x = \frac{3x^2}{y^3} - \frac{y}{x^2}$, $f_y = -\frac{3x^3}{y^4} + \frac{1}{x}$;

g) $f_x = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$, $f_y = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$;

h) $f_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$

i) $f_x = ye^{xy}\operatorname{tg}(x-2y) + e^{xy}\frac{1}{\cos^2(x-2y)}$,

$$f_y = xe^{xy}\text{tg}(x-2y) - 2e^{xy}\frac{1}{\cos^2(x-y)}$$

j) $f_x = y^2x^{y^2-1}$, $\quad f_y = x^{y^2}.2y\ln x$;

k) $f_x = e^{xyz}yz\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}e^{xyz}\cos\frac{y}{x}$,

$$f_y = e^{xyz}xz\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}e^{xyz}\cos\frac{y}{x},\ f_z = e^{xyz}xy\sin\frac{y}{x};$$

l) $f_x = -\frac{zy}{(x+z)^2}\cos\frac{y}{x+z}$, $\quad f_y = \frac{z}{x+y}\cos\frac{y}{x+z}$,

$$f_z = \sin\frac{y}{x+z} - \frac{zy}{(x+z)^2}\cos\frac{y}{x+z}.$$

7. a) $df = 3(x^2 - y)dx + 3(y^2 - x)dy$;

b) $df = \dfrac{(y^2 - x^2)dx - 2xydy}{(x^2 + y^2)^2}$;

c) $df = e^{xy}[y^2dx + (1 + xy)dy]$;

d) $df = \dfrac{2xdx + 6ydy}{x^2 + 3y^2 + 1}$;

e) $df = e^{x+y}\{[\sin(x-y) + \cos(x-y)]dx + [\sin(x-y) - \cos(x-y)]dy\}$;

f) $df = \sqrt{y^2 + z^3}\,dx + \dfrac{xy}{\sqrt{y^2 + z^3}}dy + \dfrac{3xz^2}{2\sqrt{y^2 + z^3}}dz$;

g) $df = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$

h) $df = (e^y - ze^{-x})dx + (xe^y + e^z)dy + (ye^z - e^{-x})dz$.

8. a) 9,99 ; b) –0,03 ; c) 1,05 ;

d) 3,037 ; e) 1,027 ; f) 6,989.

9. a) $f_{xx} = 6xy^2$, $f_{xy} = 6x^2y + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $f_{yy} = 2x^3 - \dfrac{x}{2\sqrt{y^3}}$;

b) $f_{xx} = -8\cos(4x - 6y)$, $f_{xy} = 12\cos(4x - 6y)$, $f_{yy} = -\frac{18}{2}\cos(4x - 6y)$;

c) $f_{xx} = \frac{3(2x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_{xy} = \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_{yy} = \frac{3(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

d) $f_{xx} = -\sin(x - y) - \cos(x + y)$, $f_{xy} = \sin(x - y) - \cos(x + y)$,
$f_{yy} = -\sin(x - y) - \cos(x + y)$

10. a) $6y^2 - 120xy$; b) $(4y^3 + 2xy^5)e^{xy^2}$;

c) $-a\cos(ax + e^y)e^y + e^{2y}a\sin(ax + e^y)$; d) $e^{xyz}(2x^2z + x^3yz^2)$;

e) $e^{xy}(1 + xy)\cos z$; f) $\frac{96xyz^2}{(x + 2y^2 + 3z^3)^3}$.

11. Các hàm số b), d), e), f) thoả mãn phương trình đã cho.

13. a) $u(x, y) = f(y)$, f là hàm số bất kỳ.

b) $u(x, y) = f(x) + g(y)$, f và y là hai hàm số khả vi bất kỳ.

14. a) $x^3 + xy - \frac{4}{3}y^3 + C$; c) $x^3y^2 - 2x^2y + 3x + c$;

d) $3x^2 + x\sin y + \frac{y^3}{3} - \cos y + C$; f) $xy + e^x\cos y + \frac{x^3}{3} + e^y + C$;

h) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} + C$.

15. a) $6x^7 - 3e^x(1 - 2e^x + e^{2x})$;

b) $(1 - x)e^{-x}\sqrt{1 + \cos^2 x} - \frac{xe^{-x}\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{1 + x} + (1 + \sqrt{x})^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{1 + x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$.

16. a) $z_x = (x^2 + y^2)[4x\sin(xy) + 2y(x^2 + y^2)\cos(xy)]$,

$z_y = (x^2 + y^2)[4y\sin(xy) + 2x(x^2 + y^2)\cos(xy)]$;

b) $z_x = \cos(x - y)^2\cos(x^2 - y^2).2(x - y) - \sin(x - y)^2\sin(x^2 - y^2).2x$,

$z_y = -\cos(x - y)^2\cos(x^2 - y^2).2(x - y) + \sin(x - y)^2\sin(x^2 - y^2).2y$;

c) $z_x = 2xe^{2y} - 15x^4e^{-y}$, $\quad z_y = 2x^2e^{2y} + 3x^5e^{-y}$;

d) $z_x = \dfrac{x^2e^y(2+x)}{1+x^6e^{2y}}$, $\quad z_y = \dfrac{x^3e^y}{1+x^6e^{2y}}$;

e) $z_x = e^{x^2y-3xy^2}y(2x-3y)$, $\quad z_y = e^{x^2y-3xy^2}x(x-6y)$.

18. a) $-\dfrac{6xy^2+20x^3}{5y^4+6x^2y}$; $\quad$ b) $-\dfrac{2xy+4x^3}{3y^2+x^2+1}$;

c) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$, $y'' = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; $\quad$ d) $\dfrac{\cos y - y\sin x}{x\sin y - \cos x}$;

e) $\dfrac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$; $\quad$ f) $\dfrac{\cos(x+y) - y^2}{2xy - \cos(x+y) + 1}$;

g) $z_x = \dfrac{y-z}{x-y}$, $z_y = \dfrac{x+z}{x-y}$; $\quad$ h) $z_x = -\dfrac{x-(y+z)}{z-x}$, $z_y = -\dfrac{y-x}{z-x}$;

i) $z_z = -\dfrac{yze^{xyz} - 4x^3y - 2xy^2}{xye^{xyz}}$, $\quad z_y = \dfrac{xze^{xyz} - x^4 - 3x^2y^2}{xye^{xyz}}$;

j) $z_x = -\dfrac{e^y + ze^x}{y+e^x}$, $\quad z_y = -\dfrac{xe^y + z}{y+e^x}$;

k) $z_x = \dfrac{1+y-z}{2+y-z}$, $\quad z_y = \dfrac{1}{2+y-z}$.

19. a) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = (-6, 23)$, $D_{\vec{u}}f(P) = -\dfrac{22}{5}$;

b) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = \left(\dfrac{e}{\sqrt{2}}, \dfrac{e}{\sqrt{2}}\right)$, $D_{\vec{u}}f(P) = \dfrac{e}{\sqrt{10}}$;

c) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = (4, -4, 12)$, $D_{\vec{u}}f(P) = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$;

d) $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = \left(6, 1, \dfrac{1}{4}\right)$, $D_{\vec{u}}f(P) = \dfrac{25}{6}$.

20. a) $\dfrac{10}{25}, \left(\dfrac{6}{25}, \dfrac{8}{25}\right)$; b) $\dfrac{\sqrt{37}}{4}, \left(\dfrac{6}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$; c) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}, \left(\dfrac{1}{2}, 0, -2\right)$;

d) $\sqrt{22}, (2, -3, -3)$

22. a) Cực tiểu $f(0, -1) = -1$;

b) Không có cực trị ;

c) Cực đại $f(21, 20) = 282$;

d) Cực tiểu $f(1, 1) = f(-1, -1) = -1$;

e) Cực đại $f(0, 0) = 2$, cực tiểu $f(0, 2) = -2$;

f) Không có cực trị ;

g) Cực đại $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$;

h) Cực tiểu $f(1, 0) = 0$;

i) Cực đại $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$;

j) Không có cực trị.

23. a) cực đại $f\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$;

b) Cực tiểu $f(0, -1) = -1$, cực đại $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$.

24. a) $(0, 0, 1)$;

b) $\left(-\frac{6}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$;

c) $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right)$;

d) Hình mà đỉnh nằm trên mặt phẳng $x + 2y + 3z = 6$ có toạ độ $\left(2, 1, \frac{2}{3}\right)$.

25. a) $f_{min} = -2 - 2\sqrt{2}$, $\quad f_{max} = -2 + 2\sqrt{2}$;

b) $f_{min} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$, $\quad f_{max} = f(1, 1) = 4$;

c) $f_{min} = f(-2, 4) = -9$, $\quad f_{max} = f(2, 4) = 3$;

d) $f_{min} = f(0, 0) = 4$, $\quad f_{max} = f(\pm 1, 1) = 7$;

e) $f_{min} - f(0, 0) = 0$, $\quad f_{max} = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

26. a) $X - 1 = Y - \frac{1}{2} = Z - \frac{1}{3}$, $\quad X + Y + Z - \frac{11}{6} = 0$;

b) $X - \frac{\pi}{2} = 2 - Y = Z - 2$, $\quad X - Y + Z - \frac{\pi}{2} = 0$;

c) $X = \frac{\pi}{2}$, $\quad \frac{Y+1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{Z-\pi}{2}$, $\qquad -\frac{\pi}{2}Y + 2Z - \frac{5\pi}{2} = 0$;

d) $X - 1 = 0$, $Y - 3 = 3 - Z$, $\qquad Y - Z = 0$.

27. a) $1 - X = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z+1}{-1}$, $\qquad -X + 2Y - Z = 0$;

b) $\frac{X-2}{4} = Y - 2 = Z - 2$, $\qquad 4X + Y + Z - 12 = 0$;

c) $\frac{X-2}{2} = \frac{Y-2}{2} = \frac{Z-3}{-3}$, $\qquad 2X + 2Y - 3Z + 1 = 0$;

c) $\frac{X-1}{2} = \frac{Z}{-1}$, $Y = 0$, $\qquad 2(X-1) + Z = 0$.

Chương VIII

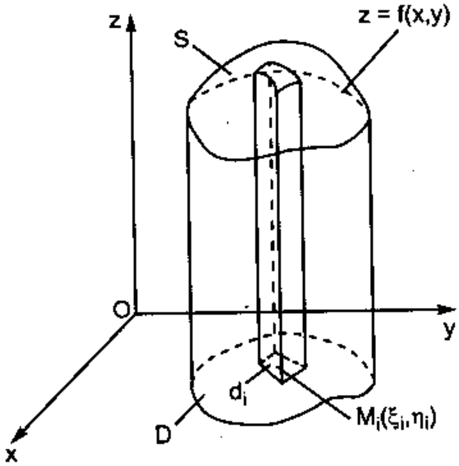
TÍCH PHÂN KÉP

Mục đích yêu cầu

- Chương này nghiên cứu về tích phân kép. Đó là sự mở rộng của tích phân xác định của hàm số một biến số sang tích phân của hàm số hai biến số, do đó có rất nhiều điểm tương tự với tích phân xác định.
- Khi học, sinh viên cần nắm vững định nghĩa, các tính chất và cách tính tích phân kép trong hệ toạ độ Đề-các và trong hệ toạ độ cực, cũng như các ứng dụng : tính thể tích vật thể, diện tích hình phẳng và diện tích mặt cong của tích phân kép.

§1. BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN KÉP : THỂ TÍCH VẬT THỂ HÌNH TRỤ CONG

Giả sử cần tính thể tích V của vật thể hình trụ cong, đáy dưới là miền hữu hạn D trong mặt phẳng Oxy (từ nay về sau ta hiểu miền hữu hạn D là miền đóng), đáy trên là mặt cong S, có phương trình z = f(x, y) và các đường sinh song song với Oz. Hàm số z = f(x, y) xác định, liên tục và không âm trong miền D (hình 8.1).



Hình 8.1

Chia miền D một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$, có các diện tích tương ứng là $\Delta\sigma_0, \Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_{n-1}$ và qua biên của các miền nhỏ ấy dựng các mặt trụ đường sinh song song với Oz. Như vậy, hình trụ cong đã cho được chia thành n hình trụ cong nhỏ. Để tính thể tích hình trụ cong nhỏ thứ i, lấy trong miền nhỏ d_i một điểm tuỳ ý

$M_i(\xi_i, \eta_i)$. Theo giả thết, hàm số f(x, y) liên tục trong miền D, nên trên miền nhỏ d_i giá trị của nó khác $f(M_i)$ rất ít. Vậy thể tích hình trụ cong nhỏ thứ i có thể xem gần đúng bằng thể tích hình trụ thẳng, có diện tích đáy là $\Delta\sigma_i$, chiều cao là $f(M_i)$ và thể tích V của vật thể hình trụ cong đã cho gần đúng bằng :

$$V_n = f(M_0)\Delta\sigma_0 + f(M_1)\Delta\sigma_1 + ... + f(M_{n-1})\Delta\sigma_{n-1}$$

hay

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Dễ thấy rằng khi tăng số phần chia n lên sao cho các mảnh nhỏ d_i có đường kính λ_i(*) nhỏ lại thì sự khác nhau giữa V và V_n càng ít. Do đó, hiển nhiên thể tích V của vật thể hình trụ cong đã cho được xem là giới hạn của V_n khi $n \to +\infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính λ_i của các miền nhỏ d_i tiến đến không (thường ký hiệu là $\max\lambda_i$). Vậy :

$$V = \lim_{\substack{\max\lambda_i \to 0 \\ (n\to+\infty)}} V_n = \lim_{\substack{\max\lambda_i \to 0 \\ (n\to+\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta\sigma_i.$$

§2. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KÉP

Cho hàm số hai biến số z = f(x, y), xác định trong miền hữu hạn D, nằm trong mặt phẳng Oxy. Thực hiện các bước sau :

1. Chia tuỳ ý miền D thành n miền nhỏ $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$, có các diện tích tương ứng là $\Delta\sigma_0, \Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_{n-1}$.

2. Trong mỗi miền nhỏ d_i lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i)$ và tính $f(M_i)\Delta\sigma_i = f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

3. Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Tổng I_n gọi là *tổng tích phân* của hàm số f(x, y) trong miền D.

(*) Đường kính λ_i của miền d_i theo định nghĩa là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm bất kỳ trên biên của d_i.

4. Tìm giới hạn của I_n khi $n \to +\infty$ sao cho $\max \lambda_i \to 0$. Nếu tổng I_n tiến đến một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm M_i trong mỗi miền nhỏ d_i, thì giới hạn I được gọi là *tích phân kép* của hàm số f(x, y) trong miền D, ký hiệu là $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$. Vậy

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\substack{\max \lambda_i \to 0 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta\sigma_i ,$$

f(x, y) gọi là *hàm số dưới dấu tích phân,* dσ gọi là *yếu tố diện tích,* D gọi là *miền lấy tích phân,* x và y gọi là các *biến số tích phân.* Nếu $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ tồn tại thì ta nói rằng hàm số f(x, y) *khả tích* trong miền D.

Người ta chứng minh được rằng : nếu hàm số f(x, y) liên tục trong miền hữu hạn D thì khả tích trong miền D.

Trở lại bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép và dựa vào định nghĩa tích phân kép vừa nêu, ta có

$$V = \lim_{\substack{\max \lambda_i \to 0 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$$

Cần lưu ý là bài toán tính thể tích của vật thể hình trụ cong chỉ là một trong rất nhiều bài toán thực tế dẫn đến khái niệm tích phân kép, do đó không nên hiểu tích phân kép chỉ là thể tích, mà phải hiểu rằng tích phân kép là một con số, con số ấy chỉ phụ thuộc vào hàm số dưới dấu tích phân f(x, y) và miền lấy tích phân D, mà không phụ thuộc vào ký hiệu của biến số tích phân, nghĩa là :

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(u,v)d\sigma.$$

§3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN KÉP

Dựa vào định nghĩa, ta thấy rằng cách xây dựng tích phân kép và tích phân xác định hoàn toàn giống nhau, do đó các tính chất của tích phân kép, cũng như cách chứng minh các tính chất ấy đều hoàn toàn tương tự như tích phân xác định. Ở đây ta chỉ phát biểu các tính chất mà không chứng minh.

Tính chất 1. $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ (k là hằng số).

Tính chất 2. $\iint\limits_D [f_1(x,y) + f_2(x,y) - f_3(x,y)]\, d\sigma =$

$$= \iint\limits_D f_1(x,y)d\sigma + \iint\limits_D f_2(x,y)d\sigma - \iint\limits_D f_3(x,y)d\sigma.$$

Tính chất 3. Nếu miền lấy tích phân D chia thành hai miền D_1 và D_2 rời nhau thì

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

Tính chất 4. Nếu tại mọi điểm thuộc miền D ta luôn có $f(x, y) \geq 0$ thì $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geq 0$, còn nếu $f(x, y) \leq 0$ tại mọi điểm thuộc miền D thì $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq 0$.

Tính chất 5. Nếu tại mọi điểm thuộc miền D ta luôn có $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)d\sigma.$$

Tính chất 6. Nếu m và M là các giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số f(x, y) trong miền D, nghĩa là : $m \leq f(x, y) \leq M$ tại mọi điểm $(x, y) \in D$ thì

$$mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq MS_D,$$

trong đó S_D là diện tích của miền D.

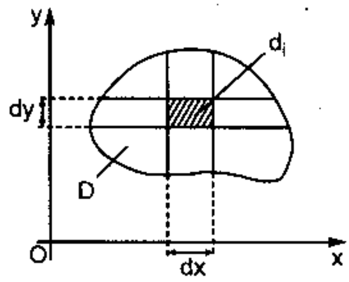
Tính chất 7 (còn gọi là định lí về giá trị trung bình). Nếu f(x, y) liên tục trong miền D thì trong miền đó tìm được ít nhất một điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$ sao cho :

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi_i, \eta_i)S_D.$$

Giá trị của hàm số f(x, y) tại điểm $M_i(\xi_i, \eta_i)$ gọi là *giá trị trung bình* của hàm số f(x, y) trong miền D.

§4. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TOẠ ĐỘ ĐỀ-CÁC

Như đã biết trong định nghĩa tích phân kép, giới hạn I không phụ thuộc cách chia miền D thành những miền nhỏ nên trong hệ toạ độ Đề-các, để cho tiện người ta chia miền D thành các miền nhỏ bởi các đường thẳng song song với các trục toạ độ Ox và Oy. Khi đó, mỗi miền nhỏ d_i nói chung là một hình chữ nhật, có các cạnh song song với các trục toạ độ và có chiều dài là dx, dy (hình 8.2). Bởi vậy, yếu tố diện tích $d\sigma = dxdy$ và ký hiệu tích phân kép thường viết dưới dạng



Hình 8.2

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

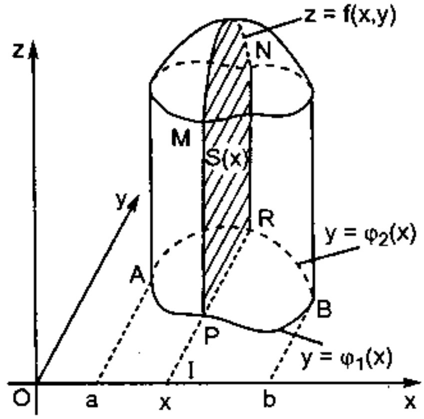
Để tính tích phân kép, chú ý rằng trường hợp $f(x, y) \geq 0$ trong miền D, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ bằng số đo thể tích V của vật thể hình trụ cong, đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, đáy trên là mặt cong S có phương trình $z = f(x, y)$ và các đường sinh song song với Oz. Do đó muốn tính tích phân kép trong trường hợp $f(x, y) \geq 0$ chỉ cần tính thể tích V của vật thể hình trụ cong. Thể tích V ấy được tính bằng công thức

$$V = \int_a^b S(x)dx, \tag{8.1}$$

trong đó S(x) là diện tích của thiết diện tạo nên bởi giao diện của mặt phẳng thẳng góc với trục hoành tại điểm x và vật thể, còn $x = a$ và $x = b$ là phương trình của những mặt phẳng giới hạn hai đầu của vật thể (xem công thức (6.20) mục 3.3 chương VI).

Giả sử miền D thoả mãn điều kiện sau : mọi đường thẳng song song với trục Oy cắt biên của miền D không quá hai điểm.

Trong mặt phẳng Oxy, vẽ hai đường thẳng song song với trục Oy và tiếp xúc với biên của miền D tại các điểm A và B, có hoành độ lần lượt là a và b. Hai điểm này chia biên của miền D thành hai đường cong APB và ARB, có phương trình lần lượt là $y = \varphi_1(x)$ và $y = \varphi_2(x)$. Cắt vật thể hình trụ cong đã cho bằng một mặt phẳng thẳng góc với trục hoành tại điểm x với $x \in (a, b)$. Thiết diện nhận được là hình thang cong PMNR (hình 8.3); phía trên giới hạn bởi đường cong MN có phương trình là $z = f(x, y)$, xem như hàm số một biến số y (vì đường cong MN là giao tuyến của mặt phẳng thẳng góc với trục hoành tại điểm x và mặt cong S có phương trình là $z = f(x, y)$); phía dưới là đoạn thẳng PR song song với trục Oy và hai cạnh bên là PM và RN. Ta có $\overline{IP} = \varphi_1(x)$ và $\overline{IR} = \varphi_2(x)$. Dùng công thức tính diện tích hình thang cong trong chương VI, ta có



Hình 8.3

$$S_{\text{thang cong PMNR}} = S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Thay biểu thức của S(x) vào công thức (8.1), ta có

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Nhưng

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy, \text{ nên}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Người ta thường viết dưới dạng

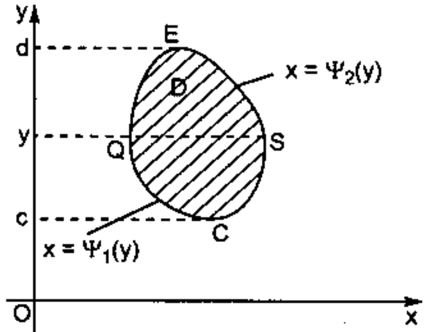
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (8.2)$$

Tóm lại, để tính tích phân kép ta chỉ cần tính lần lượt hai tích phân xác định. Đầu tiên, tính $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, xem x là hằng số, kết quả cho ta một hàm số của x. Tính tích phân hàm số ấy theo x từ a đến b ta được kết quả phải tìm.

Bây giờ giả sử mọi đường thẳng song song với trục Ox cắt biên của miền D không quá hai điểm. Nếu ta cắt vật thể hình trụ cong đã cho bằng một mặt phẳng thẳng góc với trục tung tại điểm y và lý luận tương tự như trên, ta có công thức tính tích phân kép sau

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \tag{8.3}$$

trong đó $x = \psi_1(y)$ là phương trình đường cong CQE; $x = \psi_2(y)$ là phương trình đường cong CSE; C và E là những điểm tiếp xúc giữa các đường thẳng song song với trục Ox và biên của miền D; c và d là tung độ của các điểm C và E (hình 8.4).



Hình 8.4

Chú ý rằng, nếu dùng công thức (8.3) để tính tích phân kép thì đầu tiên tính $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, xem y là hằng số, kết quả cho ta một hàm số của y. Tính tích phân hàm số ấy theo y từ c đến d ta được kết quả phải tìm.

Chú ý : 1. Trong trường hợp $f(x, y) < 0$ trong miền D, người ta chứng minh được rằng các công thức tính tích phân kép (8.2) và (8.3) vẫn đúng.

2. Khi tính tích phân kép bằng công thức (8.2) hoặc (8.3), vấn đề xác định cận tích phân đóng một vai trò rất quan trọng. Điều này sẽ được minh hoạ rõ trong những ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1. Xác định các cận tích phân trong tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$ với:

a) D là miền giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = 2$ (hình 8.5);

b) D là miền giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = x^2$ và $x + y = 2$ (hình 8.6);

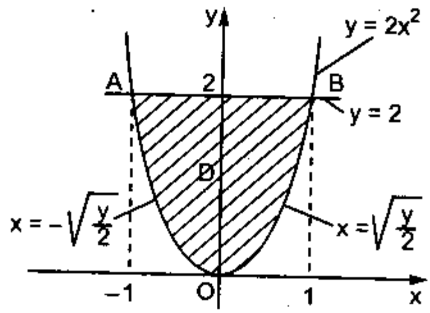
Giải:

a) Hoành độ của các giao điểm A và B được xác định bởi phương trình

$$2x^2 = 2 \ ; \ x = \pm 1.$$

Vậy

$$x_A = -1, \ x_B = 1.$$



Hình 8.5

Áp dụng công thức (8.2), tính tích phân theo y trước. Nhìn theo hướng dương của trục Oy, thấy rằng đường cong AOB giới hạn phía dưới của miền D có phương trình $y = 2x^2$; đường thẳng AB giới hạn phía trên của miền D có phương trình $y = 2$; còn x biến thiên từ $x_A = -1$ đến $x_B = 1$ (nghĩa là có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép : $-1 \le x \le 1$ và $2x^2 \le y \le 2$).

Do đó

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{2} f(x,y)dy.$$

Nếu dùng công thức (8.3) thì tính tích phân theo x trước. Nhìn theo hướng dương của trục Ox, thấy rằng đường cong OA giới hạn phía dưới của miền D có phương trình $x = -\sqrt{\frac{y}{2}}$; đường cong OB giới hạn phía trên của miền D có phương trình $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$; còn y biến thiên từ $y = 0$ đến $y = 2$ (nghĩa là có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép :

$$0 \le y \le 2 \text{ và } -\sqrt{\frac{y}{2}} \le x \le \sqrt{\frac{y}{2}}).$$

Vậy

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dx.$$

b) Hoành độ của giao điểm B được xác định bởi phương trình $x^2 = 2 - x$ hay $x^2 + x - 2 = 0$. Từ đó nhận được : $x_B = 1$, $y_B = 1$.

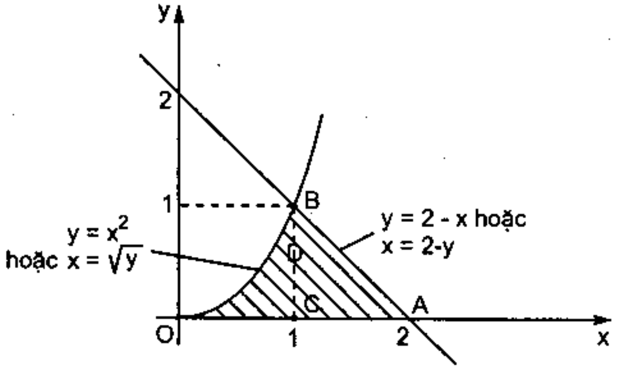
Áp dụng công thức (8.2), tính tích phân theo y trước. Nhìn theo hướng dương của trục Oy, thấy rằng đường cong OBA giới hạn phía trên của miền

D gồm hai đoạn OB và BA có phương trình khác nhau, nên phải chia miền D thành hai miền OCB và CAB. Ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{OCB} f(x,y)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{CAB} f(x,y)dxdy.$$



Hình 8.6

Miền OCB có thể biểu diễn bởi các bất đẳng thức kép :

$$0 \le x \le 1 \text{ và } 0 \le y \le x^2;$$

còn miền CAB có thể biểu diễn bởi các bất đẳng thức kép :

$$1 \le x \le 2 \text{ và } 0 \le y \le 2 - x.$$

Do đó

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

Nếu dùng công thức (8.3), ta tính tích phân theo x trước thì không cần phải chia miền D, vì nhìn theo hướng dương của trục Ox có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép :

$$0 \le y \le 1 \text{ và } \sqrt{y} \le x \le 2 - y.$$

Vậy

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

Qua trường hợp này, ta thấy rõ tầm quan trọng của việc phải căn cứ vào hình dạng của miền D mà quyết định dùng công thức (8.2) hoặc (8.3) để tính tích phân kép một cách đơn giản nhất.

Ví dụ 2. Tính tích phân kép $\iint\limits_D x^2ydxdy$, D là miền giới hạn bởi :

a) Các đường thẳng x = 0, x = 3, y = 0 và y = 2 (hình 8.7) ;

b) Các đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{2 - x^2}$ (hình 8.8) ;

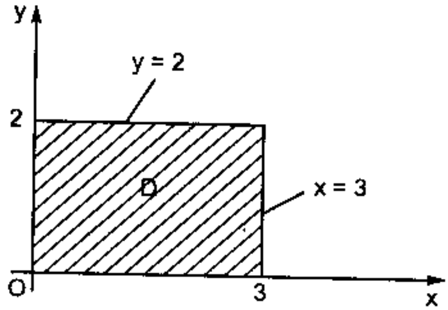
c) Các đường $y = -x$, $x = \sqrt{y}$ và $y = 2$ (hình 8.9).

Giải:

a) Áp dụng công thức (8.2), tính tích phân theo y trước. Nhìn theo hướng dương của trục Oy, có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép :

$$0 \le x \le 3 \text{ và } 0 \le y \le 2,$$

do đó



Hình 8.7

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^3 dx \int_0^2 x^2 y dy .$$

Đầu tiên, tính tích phân theo y, xem x là hằng số, ta có

$$\int_0^2 x^2 y dy = x^2 \int_0^2 y dy = x^2 . \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{x^2}{2}(2^2 - 0^2) = 2x^2.$$

Cuối cùng, ta có

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^3 2x^2 dx = 2.\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{2}{3}(3^3 - 0^3) = 18.$$

Nếu dùng công thức (8.3), tính tích phân theo x trước. Nhìn theo hướng dương của trục Ox, có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép :

$$0 \le y \le 2 \text{ và } 0 \le x \le 3.$$

Vậy

$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_0^2 dy \int_0^3 y x^2 dx.$$

Tính tích phân theo x, xem y là hằng số, ta có

$$\int_0^3 y x^2 dx = y \int_0^3 x^2 dx = y.\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{y}{3}(3^3 - 0^3) = 9y,$$

và

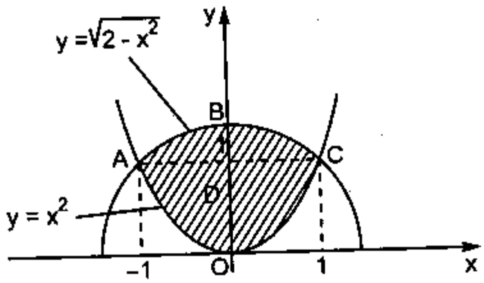
$$\int_D x^2 y dx dy = \int_0^2 9y dy = 9.\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{9}{2}(2^2 - 0^2) = 18.$$

b) Áp dụng công thức (8.2), tính tích phân theo y trước. Nhìn theo hướng dương của trục Oy, có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép :

$-1 \le x \le 1$ và $x^2 \le y \le \sqrt{2-x^2}$ (chú ý rằng hoành độ của các giao điểm A và C được xác định bởi phương trình :

$$\sqrt{2-x^2} = x^2,\ 2 - x^2 = x^4,$$
$$x^4 + x^2 - 2 = 0,\ x = \pm 1,$$

vậy hoành độ các giao điểm là : $x_A = -1$, $x_C = 1$). Do đó



Hình 8.8

$$\iint\limits_D x^2 y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 . \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}(2 - x^2 - x^4)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^4 - x^6)dx$$

$$= \int_{0}^{1}(2x^2 - x^4 - x^6)dx \text{ (do } 2x^2 - x^4 - x^6 \text{ là hàm số chẵn).}$$

$$= \left(2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{34}{105}.$$

Chú ý : 1. Đối với trường hợp trên, áp dụng công thức (8.2) là đơn giản nhất. Thật vậy, nếu dùng công thức (8.3), ta phải tính tích phân theo x trước. Khi đó, nhìn theo hướng dương của trục Ox, thấy rằng đường cong OAB giới hạn phía dưới của miền D gồm hai đoạn OA và AB có phương trình khác nhau (đoạn OA có phương trình $x = -\sqrt{y}$, đoạn AB có phương trình $x = -\sqrt{2-y^2}$); đường cong OCB giới hạn phía trên của miền D gồm hai đoạn OC và CB có phương trình lần lượt là : $x = \sqrt{y}$ và $x = \sqrt{2-y^2}$, hai điểm A và C có cùng tung độ bằng 1, nên phải chia miền D thành hai miền OAC và ABC.

2. Trong ví dụ này, miền lấy tích phân D đối xứng đối với trục Oy, hàm số dưới dấu tích phân x^2y là hàm số chẵn đối với x, nên có thể viết

$$\iint_D x^2ydxdy = 2\iint_{D_1} x^2ydxdy,$$

trong đó D_1 là miền "tam giác cong" OBC. Dùng công thức (8.2), ta có

$$\iint_D x^2ydxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2ydy = 2\int_0^1 x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 x^2(2 - x^2 - x^4)dx = \int_0^1 (2x^2 - x^4 - x^6)dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{34}{105}.$$

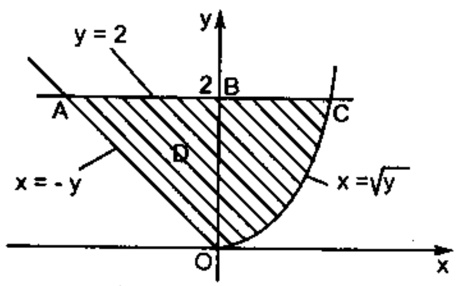
c) Đối với miền D đã cho, tính bằng công thức (8.3) là đơn giản nhất. Thật vậy, nếu dùng công thức (8.2), ta phải tính tích phân theo y trước. Khi đó, nhìn theo hướng dương của trục Oy, thấy rằng đường cong AOC giới hạn phía dưới của miền D gồm hai đoạn AO và OC có phương trình khác nhau (đoạn AO có phương trình y = −x, đoạn OC có phương trình $y = x^2$) nên phải chia miền D thành hai miền AOB và BOC.

Ta tính tích phân theo x trước. Nhìn theo hướng dương của trục Ox, có thể biểu diễn miền D bởi các bất đẳng thức kép :

$$0 \le y \le 2, -y \le x \le \sqrt{y}.$$

Do đó

$$\iint_D x^2ydxdy = \int_0^2 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} x^2ydx.$$



Hình 8.9

Đầu tiên, tính tích phân theo x, xem y là hằng số, ta có

$$\int_{-y}^{\sqrt{y}} x^2ydx = y\int_{-y}^{\sqrt{y}} x^2dx = y.\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-y}^{x=\sqrt{y}}$$

$$= \frac{y}{3}(y\sqrt{y} - (-y)^3) = \frac{1}{3}(y^{5/2} + y^4).$$

Cuối cùng, ta có

$$\iint_D x^2ydxdy = \int_0^2 \frac{1}{3}(y^{5/2} + y^4)dy = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{7}y^{7/2} + \frac{1}{5}y^5\right)\Big|_{y=0}^{y=2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{7}.2^{7/2} + \frac{1}{5}.2^5\right) = \frac{16}{105}(5\sqrt{2} + 14).$$

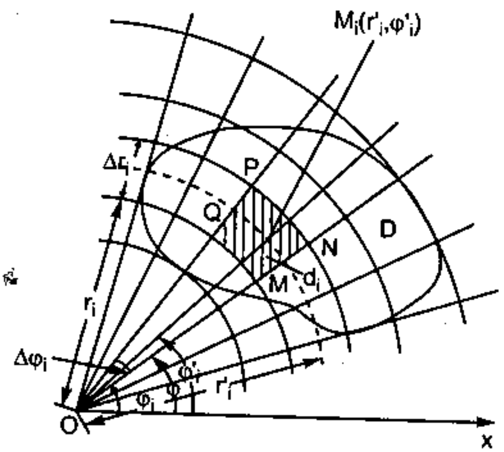
§5. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TOẠ ĐỘ CỰC

Giả sử cần tính tích phân kép $I = \iint_D f(x,y)d\sigma$ trong hệ toạ độ cực, trong đó miền D có tính chất là mọi tia xuất phát từ gốc cực O cắt biên của nó không quá hai điểm. Muốn thế, ta chia miền D thành các miền nhỏ d_i bởi :

– Các tia xuất phát từ gốc cực O, có phương trình trong hệ toạ độ cực φ = hằng số ;

– Các đường tròn đồng tâm O, có phương trình trong hệ toạ độ cực r = hằng số (hình 8.10).

Khi đó, mỗi miền nhỏ d_i nói chung là một hình "tứ giác cong" giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm O và hai bán kính của chúng. Diện tích $\Delta\sigma_i$ của miền nhỏ d_i bằng hiệu số diện tích hai hình quạt tròn có cùng góc ở tâm $\Delta\varphi_i$ và có bán kính lần lượt là $r_i + \Delta r_i$ và r_i :



Hình 8.10

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2\Delta\varphi_i - \frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i$$

$$= \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2}\right)\Delta r_i\Delta\varphi_i = r_i'\Delta r_i\Delta\varphi_i,$$

trong đó $r_i' = r_i + \dfrac{\Delta r_i}{2}$ là bán kính trung bình giữa r_i và $r_i + \Delta r_i$.

Để thành lập tổng tích phân I_n của hàm số f(x, y) trong miền D, ta giả thiết rằng hàm số f(x, y) liên tục trong miền D. Khi đó, trong mỗi miền nhỏ d_i có thể lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i)$, ở đây ta chọn $M_i(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm nằm trên đường tròn bán kính trung bình r_i' có toạ độ cực là r_i' và φ_i' (với $\varphi_i < \varphi_i' < \varphi_i + \Delta\varphi_i$).

Ta có

$$\xi_i = r_i' \cos\varphi_i', \quad \eta_i = r_i' \sin\varphi_i'$$

(tất nhiên ta chọn hệ toạ độ Đề-các có gốc tại cực O và trục hoành trùng với trục cực) và

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(r_i'\cos\varphi_i', r_i'\sin\varphi_i')r_i'\Delta r_i\Delta\varphi_i .$$

Vì vế phải là tổng tích phân của hàm số f(rcosφ, rsinφ)r theo các biến r và φ trong miền D, nên chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\lambda_i \to 0$, ta nhận được tích phân kép của hàm số f(rcosφ, rsinφ)r theo các biến r và φ trong miền D :

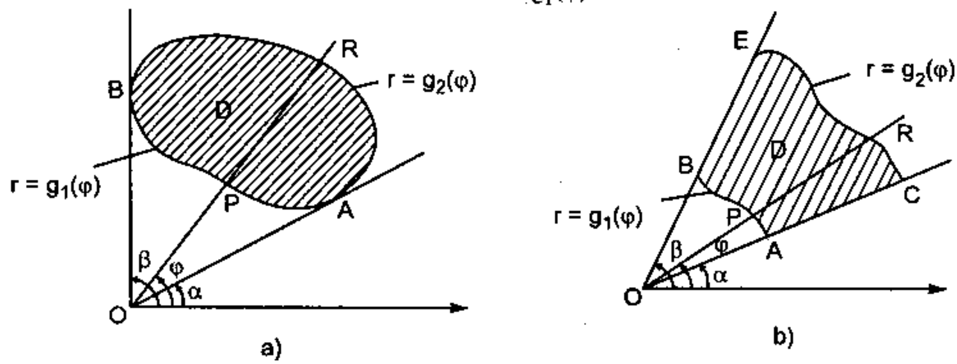
$$I = \iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi . \qquad (8.4)$$

Đó là công thức chuyển tích phân kép từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cực. Biểu thức $d\sigma = rdrd\varphi$ gọi là *yếu tố diện tích* trong hệ toạ độ cực.

Tóm lại, muốn chuyển tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$ từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cực, ta thay x và y trong hàm số dưới dấu tích phân bởi rcosφ và rsinφ, còn dxdy thay bằng rdrdφ. Đồng thời phương trình đường cong giới hạn miền lấy tích phân D cũng phải đổi sang hệ toạ độ cực bằng cách thay x = rcosφ, y = rsinφ. Sau đó tính $\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ hoàn toàn giống như trong hệ toạ độ Đề-các, nghĩa là cũng đưa về hai tích phân xác định liên tiếp đối với các biến r và φ. Để thấy rõ cách xác định cận lấy tích phân, ta phân biệt ba trường hợp sau:

1. Trường hợp gốc cực O nằm ngoài miền D. Giả sử miền D nằm giữa các tia $\varphi = \alpha$ và $\varphi = \beta$, mọi tia xuất phát từ gốc cực O cắt biên của D không quá hai điểm (hình 8.11a, b) và $r = g_1(\varphi)$, $r = g_2(\varphi)$ lần lượt là phương trình trong hệ toạ độ cực của các đoạn đường cong APB và ARB (hoặc CRE) (nếu nhìn từ gốc cực O về phía miền D thì APB là đoạn đường cong giới hạn phía dưới miền D, còn ARB (hoặc CRE) là đoạn đường cong giới hạn phía trên miền D). Khi đó, lấy tích phân theo r trước (xem φ là hằng số), sau đó lấy tích phân theo φ, ta có

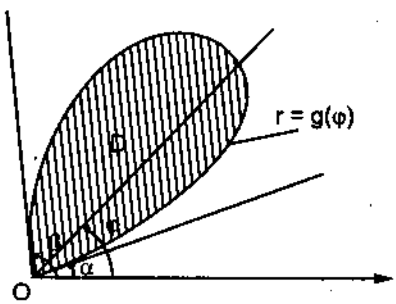
$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr. \quad (8.5)$$



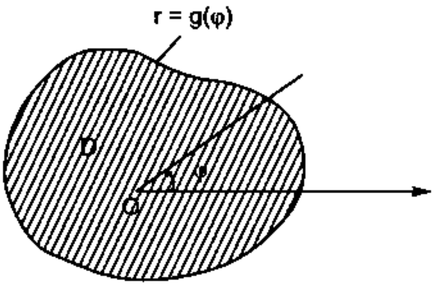
Hình 8.11

2. Trường hợp gốc cực O nằm trên biên của miền D. Giả sử mọi tia xuất phát từ gốc cực O cắt biên của miền D không quá một điểm (không kể điểm O) và phương trình của biên đó trong hệ toạ độ cực là $r = g(\varphi)$ với $\alpha \le \varphi \le \beta$ (hình 8.12). Khi đó, lấy tích phân theo r trước (xem φ là hằng số), sau đó lấy tích phân theo φ, ta có

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr. \quad (8.6)$$



Hình 8.12



Hình 8.13

3. Trường hợp gốc cực O nằm trong miền D. Giả sử mọi tia xuất phát từ gốc cực O cắt biên của miền D tại một điểm và phương trình của biên đó trong hệ toạ độ cực là $r = g(\varphi)$ với $0 \le \varphi \le 2\pi$ (hình 8.13). Khi đó, lấy tích phân theo r trước (xem φ là hằng số), sau đó lấy tích phân theo φ, ta có :

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{g(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \qquad (8.7)$$

Chú ý. Trong các công thức trên, tích phân theo thứ tự ngược lại, nghĩa là trước hết theo φ (xem r là hằng số), sau đó theo r thường không sử dụng.

Ví dụ 3. Chuyển tích phân kép $\iint_D f(x, y) dx dy$ từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cực, viết rõ các cận lấy tích phân theo r và theo φ, trong đó D là miền giới hạn bởi :

a) Đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ (hình 8.14) ;

b) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ (hình 8.15) ;

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ (hình 8.16) ;

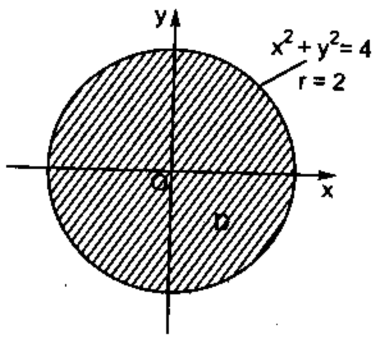
d) Các đường thẳng $y = x$, $y = -x$ và các đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ (hình 8.17).

Giải:

a) Đổi sang toạ độ cực, phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ có dạng : $r = 2$. Vì gốc cực O nằm trong miền D nên áp dụng công thức (8.7), ta có

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$



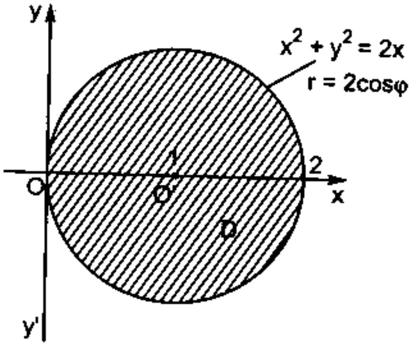
Hình 8.14

b) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ là đường tròn tâm O'(1, 0) bán kính 1, vì có thể viết dưới dạng : $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ hay $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Trong hệ toạ độ cực, phương trình đường tròn trên có dạng : $r = 2\cos\varphi$.

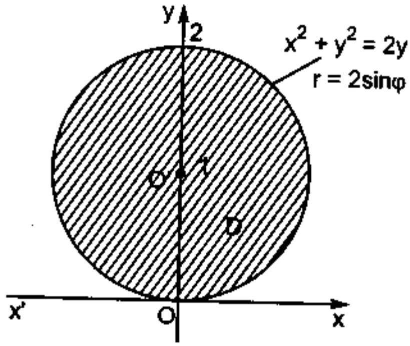
Các tia kẻ từ gốc cực O và tiếp xúc với đường tròn (biên của miền D) trùng với Oy' và Oy, do đó $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ và $\beta = \frac{\pi}{2}$. Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D nên áp dụng công thức (8.6), ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$



Hình 8.15



Hình 8.16

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ là đường tròn tâm O'(0, 1), bán kính 1, vì có thể viết dưới dạng : $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$ hay $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Trong hệ toạ độ cực, phương trình đường tròn trên có dạng : $r = 2\sin\varphi$.

Các tia kẻ từ gốc cực O và tiếp xúc với đường tròn (biên của miền D) trùng với Ox và Ox', do đó $\alpha = 0$ và $\beta = \pi$. Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D nên áp dụng công thức (8.6), ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

d) Giống trường hợp b) $x^2 + y^2 = 2x$ là phương trình đường tròn tâm $O_1(1, 0)$, bán kính 1 ; còn $x^2 + y^2 = 4x$ là phương trình đường tròn tâm $O_2(2, 0)$, bán kính 2. Đổi sang toạ độ cực, phương trình các đường biên của miền D có dạng :

$$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow r = 2\cos\varphi \text{ ;}$$

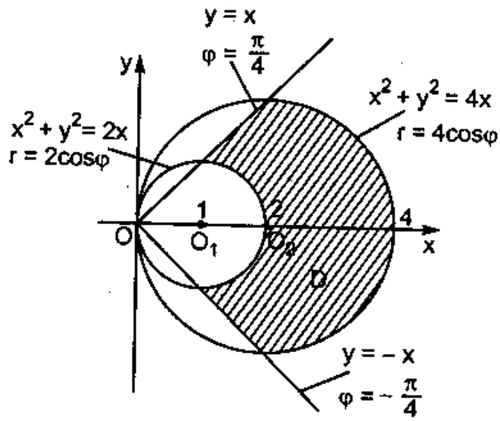
$x^2 + y^2 = 4x \to r = 4\cos\varphi$;

$y = -x \to r\sin\varphi = -r\cos\varphi$,

$\text{tg}\varphi = -1,\ \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$;

$y = x \to r\sin\varphi = r\cos\varphi$,

$\text{tg}\varphi = 1,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.



Hình 8.17

Vì gốc cực O nằm ngoài miền D nên áp dụng công thức (8.5), ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

Ví dụ 4. Chuyển sang toạ độ cực, tính :

a) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, D là miền giới hạn bởi cung tròn $y = \sqrt{2x - x^2}$ và trục Ox (hình 8.18) ;

b) $\displaystyle\iint_D \text{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, D là miền giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ và các đường thẳng $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = \sqrt{3}x$ (phần nằm trong góc phần tư thứ nhất (hình 8.19));

c) $\displaystyle\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)dy.$

Giải:

a) Thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ vào hàm số dưới dấu tích phân, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{4 - r^2}},$$

còn dxdy thay bằng $rdrd\varphi$. Theo (8.4), nhận được

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \iint\limits_D \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}}.$$

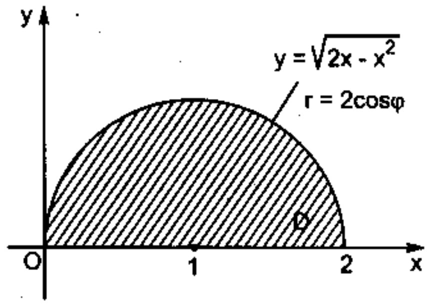
Đổi sang toạ độ cực, phương trình cung tròn $y = \sqrt{2x - x^2}$ có dạng :

$$r\sin\varphi = \sqrt{2r\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi},$$

$$r^2\sin^2\varphi + r^2.\cos^2\varphi = 2r\cos\varphi,$$

$$r^2 = 2r\cos\varphi,$$

$$r = 2\cos\varphi\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right).$$



Hình 8.18

Các tia kẻ từ gốc cực O và tiếp xúc với biên của miền D trùng với Ox và Oy, do đó $\alpha = 0$ và $\beta = \frac{\pi}{2}$. Theo công thức (8.6), ta có

$$\iint\limits_D \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}}.$$

Trước hết, tính $\int_0^{2\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}}$ bằng cách đổi biến số $4 - r^2 = t$, $-2rdr = dt$, $rdr = -\frac{dt}{2}$, r biến thiên từ 0 đến $2\cos\varphi$, do đó t biến thiên từ 4 đến $4\sin^2\varphi$. Vậy

$$\int_0^{2\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = -\int_4^{4\sin^2\varphi} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\sqrt{t}\Big|_4^{4\sin^2\varphi} = -2\sin\varphi + 2$$

(ở đây : $\sqrt{4\sin^2\varphi} = 2\sin\varphi$, vì φ biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\varphi > 0$).

Cuối cùng

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \iint\limits_D \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\sin\varphi)d\varphi$$

$$= 2\varphi + 2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} - 0 - 2\cos 0 = \pi - 2.$$

b) Thay x = rcosφ, y = rsinφ vào hàm số dưới dấu tích phân, ta có

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi.$$

Đổi sang toạ độ cực, phương trình các đường biên của miền D có dạng :

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow r = 1\ ;$$

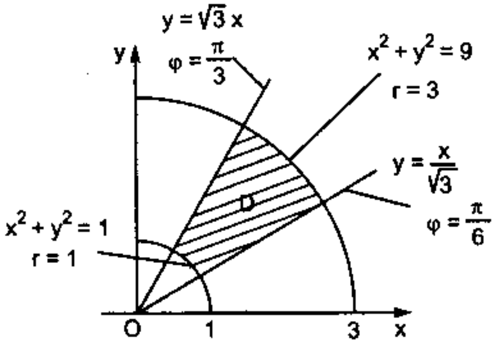
$$x^2 + y^2 = 9 \rightarrow r = 3\ ;$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \rightarrow r\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}r\cos\varphi\ ;$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}\ ;$$

$$y = \sqrt{3}x \rightarrow r\sin\varphi = \sqrt{3}r\cos\varphi$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$



Hình 8.19

Áp dụng công thức (8.5), ta có

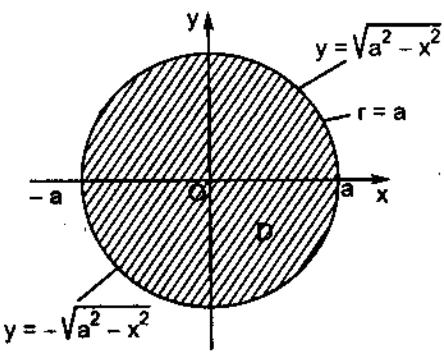
$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy = \iint_D \varphi r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi d\varphi\int_1^3 r dr$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi\frac{r^2}{2}\Big|_1^3 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\varphi.\frac{1}{2}.(9-1)d\varphi = 4\frac{\varphi^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) Theo đầu bài, y biến thiên từ $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ đến $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, còn x biến thiên từ –a đến a, vậy miền D giới hạn bởi đường tròn

$$y^2 = a^2 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

(hình 8.20). Trong hệ toạ độ cực, phương trình đường tròn trên có dạng : r = a. Vì gốc cực O nằm trong miền D, áp dụng công thức (8.7), ta có



Hình 8.20

$$\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x^2+y^2)dy=\iint_D(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)rdrd\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^a d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{a^4}{4}d\varphi=\frac{a^4}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Chú ý. Qua các ví dụ 3 và 4, thấy rằng người ta thường chuyển tích phân kép từ hệ toạ độ Đề-các sang hệ toạ độ cực trong trường hợp hàm số dưới dấu tích phân f(x, y) chứa biểu thức $x^2 + y^2$ hoặc trong trường hợp miền lấy tích phân D là một mặt tròn, một phần mặt tròn,...

§6. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN KÉP

6.1. Thể tích vật thể

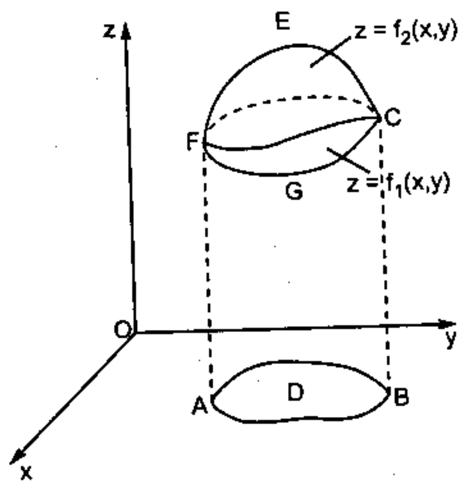
Như đã biết trong mục bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép, thể tích V của một vật thể hình trụ cong có đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy, đáy trên là mặt cong S có phương trình z = f(x, y) và các đường sinh song song với Oz (hàm số z = f(x, y) giả thiết liên tục và không âm trong miền D) được tính bằng công thức

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (8.8)$$

Nếu f(x, y) ≤ 0 trong miền D thì $\iint_D f(x,y)dxdy \le 0$ và

$$V=-\iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (8.9)$$

Trong trường hợp cần tính thể tích vật thể, giới hạn bởi các mặt cong $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$ và hình chiếu của vật thể đó lên mặt phẳng Oxy là miền D ($f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ liên tục và $f_2(x, y) \ge f_1(x, y)$ trong miền D) thì thể tích V phải tìm bằng hiệu số thể tích hai vật thể hình trụ cong ABCEF và ABCGF (hình 8.21) :



Hình 8.21

$$V = \iint_D f_2(x,y)dxdy - \iint_D f_1(x,y)dxdy = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dxdy. \quad (8.10)$$

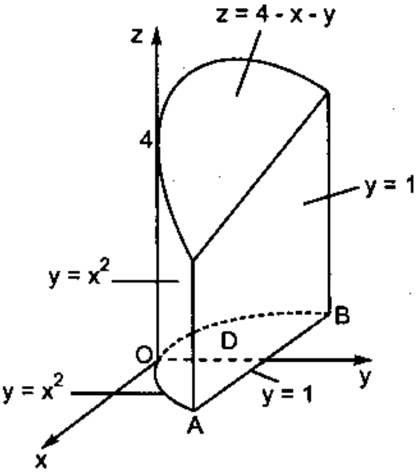
Ví dụ 5. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt :

a) $y = x^2$, $y = 1$, $x + y + z = 4$ và $z = 0$;

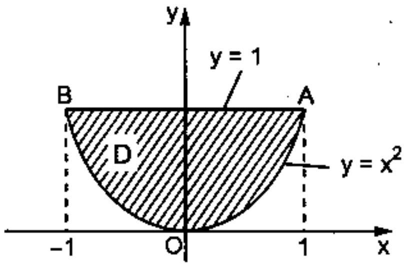
b) $z = 4 - x^2 - y^2$ và $z = x^2 + y^2$.

Giải:

a) Vật thể đã cho là một vật thể hình trụ cong, đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 1$; đáy trên là mặt phẳng $z = 4 - x - y$ (hình 8.22 và 8.23).



Hình 8.22



Hình 8.23

Áp dụng công thức (8.8) và (8.2), ta có

$$V = \iint_D (4 - x - y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (4 - x - y)dy = \int_{-1}^{1} \left[(4-x)y - \frac{y^2}{2} \right]\Bigg|_{y=x^2}^{y=1} dx$$

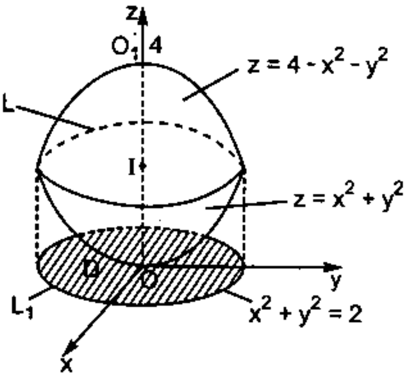
$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{7}{2} - x - 4x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{68}{15}.$$

b) Vật thể đã cho giới hạn bởi hai mặt parabôlôit tròn xoay có đỉnh tại $O_1(0, 0, 4)$ và $O(0, 0, 0)$ (hình 8.24). Đường cong L (giao tuyến của hai mặt parabôlôit) được xác định bởi hệ hai phương trình :

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Khử z trong hai phương trình, nhận được : $x^2 + y^2 = 2$. Đây chính là phương trình của đường tròn L_1 giới hạn miền D và là hình chiếu của đường cong giao tuyến L xuống mặt phẳng Oxy.

Vì tính đối xứng của vật thể đối với các mặt phẳng toạ độ Oxz và Oyz nên chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ thể tích nằm trong góc phần tám thứ nhất. Ta có



Hình 8.24

$$\frac{V}{4} = \iint_{D_1} (4 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2)dxdy,$$

trong đó D_1 là $\frac{1}{4}$ mặt tròn $x^2 + y^2 \le 2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy (hình 8.25).

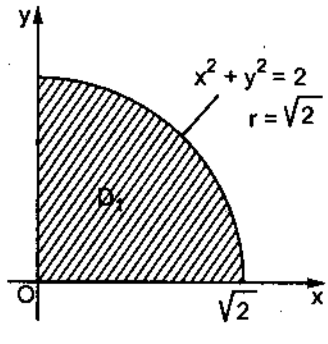
Để tính tích phân kép được đơn giản, ta chuyển sang toạ độ cực bằng cách thay x, y trong hàm số dưới dấu tích phân bởi rcosφ, rsinφ, còn dxdy thay bằng rdrdφ. Ta có

$$V = 4.2. \iint_{D_1} (2 - r^2) r dr d\varphi.$$

Phương trình đường tròn L_1 :

$$x^2 + y^2 = 2$$

khi đó có dạng $r = \sqrt{2}$. Vì gốc cực O nằm trên biên của miền D_1, áp dụng công thức (8.6), nhận được



Hình 8.25

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3)dr$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} d\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 8\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

6.2. Diện tích hình phẳng

Nếu trong tích phân kép $\iint_D f(x,y)dxdy$, hàm số dưới dấu tích phân $f(x, y) \equiv 1$ với mọi (x, y) thuộc miền D thì $\iint_D dxdy$ bằng số đo thể tích hình trụ thẳng có đáy là miền D, đường sinh song song với Oz và chiều cao bằng 1. Do đó $\iint_D dxdy$ cũng bằng số đo diện tích đáy, nghĩa là diện tích miền D. Vậy

$$S = \iint_D dxdy. \tag{8.11}$$

Trong hệ toạ độ cực, diện tích S của hình phẳng D là

$$S = \iint_D rdrd\varphi. \tag{8.12}$$

Ví dụ 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $y = 2 - x^2$ và $y = x$ (hình 8.26) ;

b) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ và $y = 0$ (hình 8.27).

Giải:

a) Trước hết, cần tìm toạ độ các giao điểm M_1 và M_2. Ta có

$$x = 2 - x^2 \,;\, x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = -2 \text{ và } x_2 = 1.$$

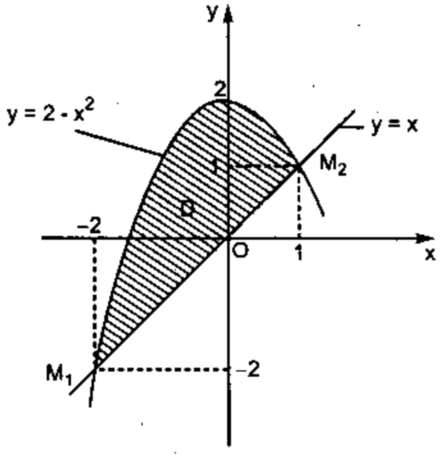
Vậy toạ độ các giao điểm là : $M_1(-2, -2)$ và $M_2(1, 1)$. Áp dụng công thức (8.11), ta có

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy$$

$$= \int_{-2}^{1} y\Big|_{y=x}^{y=2-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$



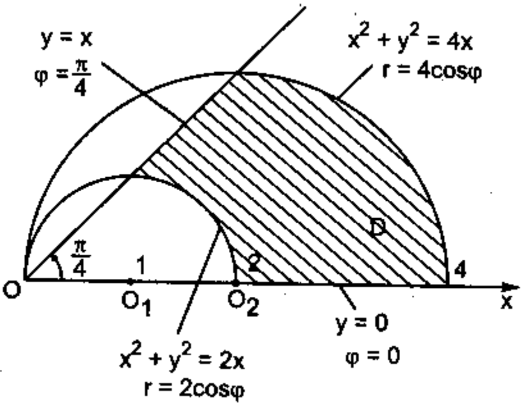
Hình 8.26

b) Đổi sang toạ độ cực phương trình các đường biên của miền D có dạng :

$$x^2 + y^2 = 2x \rightarrow r = 2\cos\varphi \text{ ; } x^2 + y^2 = 4x \rightarrow r = 4\cos\varphi \text{ ;}$$

$$y = x \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ ; } y = 0 \rightarrow \varphi = 0.$$

Áp dụng công thức (8.12), ta có



Hình 8.27

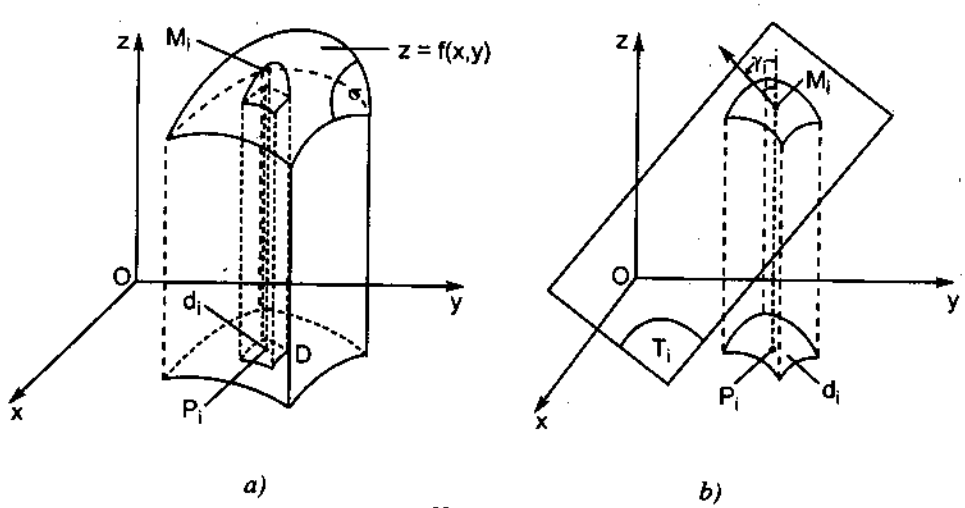
$$S = \iint_D r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=2\cos\varphi}^{r=4\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi) d\varphi$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi d\varphi = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right).$$

6.3. Diện tích mặt cong



Hình 8.28

Giả sử có một mặt cong σ giới hạn bởi một đường cong kín. Phương trình của mặt cong σ là $z = f(x, y)$, hàm số $f(x, y)$ giả thiết liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D (D là hình chiếu của mặt cong σ trên mặt phẳng Oxy). Chia miền D một cách tuỳ ý thành n miền nhỏ $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$, có các diện tích tương ứng là $\Delta\sigma_0, \Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_{n-1}$. Trong mỗi miền nhỏ d_i lấy một điểm tuỳ ý $P_i(\xi_i, \eta_i)$, ứng với nó là điểm $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ trên mặt cong σ (hình 8.28a). Dựng mặt phẳng T_i tiếp xúc với mặt cong σ tại điểm M_i. Gọi t_i là mảnh của mặt phẳng T_i mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy đúng bằng d_i. Diện tích của mảnh t_i ký hiệu là ΔT_i. Giới hạn nếu có của $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta T_i$ khi $n \to +\infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính λ_i của các miền nhỏ d_i tiến đến không (thường ký hiệu là $\max\lambda_i$) được gọi là *diện tích của mặt cong σ,* và được tính như sau :

Gọi γ_i là góc giữa mặt phẳng T_i và mặt phẳng Oxy, đó chính là góc giữa trục Oz và pháp tuyến tại M_i với mặt cong đã cho, ta có (hình 8.28b) :

$$\Delta\sigma_i = \Delta T_i \cos\gamma_i \; ; \; \Delta T_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}.$$

Như đã biết ở Chương VII, các hệ số chỉ phương của pháp tuyến tại M_i với mặt cong đã cho là

$$-p_i = -f'_x(M_i) \; ; \; -q_i = -f'_y(M_i) \text{ và } 1.$$

Do đó

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}} \; ; \; \Delta T_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}.\Delta\sigma_i \; ;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta T_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \,.\, \Delta\sigma_i.$$

Diện tích S của mặt cong đã cho là giới hạn của tổng trên khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\lambda_i \to 0$. Giới hạn ấy chắc chắn tồn tại vì các hàm số $p = f'_x(x, y)$, $q = f'_y(x, y)$ liên tục trong miền D. Do đó, theo định nghĩa tích phân kép, ta có :

$$S = \lim_{\substack{\max\lambda_i \to 0 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta T_i = \lim_{\substack{\max\lambda_i \to 0 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \, \Delta\sigma_i,$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dxdy. \qquad (8.13)$$

Ví dụ 7. Tính diện tích mặt cầu tâm O(0, 0, 0), bán kính R :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

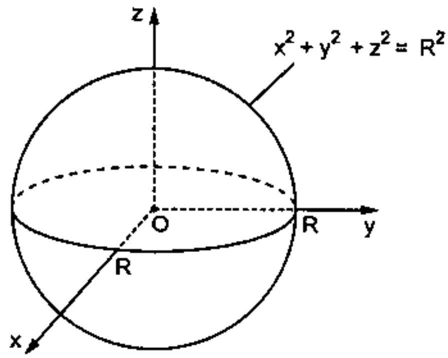
Vì tính chất đối xứng của mặt cầu đối với gốc O và đối với các mặt phẳng toạ độ, nên chỉ cần tính diện tích của phần mặt cầu nằm trong góc phần tám thứ nhất (hình 8.29). Khi đó :

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$p = z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$q = z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$



và $S = 8\iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$

Hình 8.29

trong đó D là $\frac{1}{4}$ mặt tròn $x^2 + y^2 \le R^2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy.

Chuyển sang toạ độ cực, ta có

$$S = 8\iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} rdrd\varphi = -8R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{-rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= -8R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - r^2}\Big|_{r=0}^{r=R} d\varphi = -8R\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-R)d\varphi$$

$$= 8R^2.\frac{\pi}{2} = 4\pi R^2.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Nêu bài toán dẫn đến khái niệm tích phân kép.

2. Định nghĩa và ý nghĩa hình học của tích phân kép.

3. Phát biểu và minh hoạ hình học các tính chất của tích phân kép.

4. Chứng minh công thức tính tích phân kép trong hệ toạ độ Đề-các. Nêu quy tắc xác định cận tích phân.

5. Nêu công thức tính tích phân kép trong hệ toạ độ cực và quy tắc xác định cận tích phân.

6. Nêu các ứng dụng của tích phân kép để tính thể tích vật thể, diện tích hình phẳng, diện tích mặt cong.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng :

1) $\int_0^2 dx \int_{-1}^1 f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 f(x,y)dx$;

2) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx$;

3) $\int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx$;

4) $\int_{-1}^1 dx \int_0^2 e^{-x^2-y^2} \sin x dy = 0$;

5) $\iint_D (x^2 + y^2 - 1)dxdy = 0$ nếu D là miền giới hạn bởi đường

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 ;$$

6) $\iint_D (2x^2 + y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 (2r^2\cos^2\varphi + r\sin\varphi)rdr$ nếu D là miền $\{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, (r, φ) là toạ độ cực của điểm có toạ độ Đề-các (x, y).

7) Nếu D là miền hình tam giác giới hạn bởi trục hoành và các đường thẳng $y = 1 + x$, $y = 1 - x$, thì để tính tích phân kép

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

ta tính tích phân theo y trước, theo x sau đơn giản hơn cách tính theo thứ tự ngược lại.

BÀI TẬP

Tính các tích phân :

1. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)dx.$

2. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy.$

3. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} rdr.$

4. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi dr.$

Tìm các cận của tích phân kép $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ ***khi đổi thành hai tích phân xác định liên tiếp :***

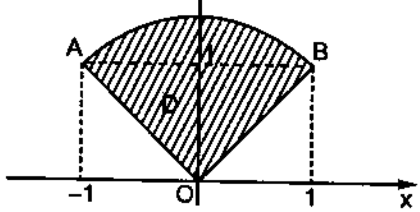
5. D là hình chữ nhật có các đỉnh : O(0, 0) ; A(2, 0) ; B(2, 1) ; C(0, 1).

6. D là hình tam giác có các đỉnh : O(0, 0) ; A(1, 0) ; B(1, 1).

7. D là hình thang có các đỉnh : O(0, 0) ; A(2, 0) ; B(1, 1) ; C(0, 1).

8. D là hình bình hành có các đỉnh : A(1, 2) ; B(2, 4) ; C(2, 7) ; D(1, 5).

9. D là hình quạt tròn OAB như hình BT 8.1.



Hình BT8.1

Dựa vào các cận đã cho, hãy viết phương trình các đường cong giới hạn miền lấy tích phân D và vẽ miền lấy tích phân ấy :

10. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy.$

11. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy.$

12. $\int\limits_{-6}^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx.$

Đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân kép sau :

13. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy.$

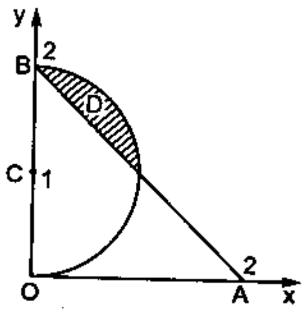
14. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

15. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy.$

Tính những tích phân kép sau :

16. $\iint\limits_D xdxdy$, D là miền như hình BT 8.2.

17. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, D là phần mặt tròn tâm O(0, 0), bán kính a, nằm trong góc phần tư thứ nhất.



Hình BT8.2

18. $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, D là miền giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{2}$ và $y = x$.

19. $\iint\limits_D e^{x/y}dxdy$, D là miền tam giác cong giới hạn bởi các đường $y^2 = x$, $x = 0$ và $y = 1$.

Chuyển những tích phân kép dưới đây sang hệ toạ độ cực và xác định các cận lấy tích phân theo r và theo φ :

20. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, D là miền tam giác, giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = -x$ và $y = 1$.

21. $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$ **22.** $\int_{0}^{2} dx \int_{0}^{x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$

Chuyển sang hệ toạ độ cực, tính những tích phân kép sau :

23. $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy,$ D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2ax$.

24. $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy,$ D là mặt tròn, tâm tại gốc O, bán kính 1.

25. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ D là miền vành khăn, nằm giữa hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

26. $\int_{0}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy.$

Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt :

27. $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6, z = 0.$

28. $z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1$ và các mặt toạ độ.

29. $x + y + z = a, 3x + y = a, \frac{3}{2}x + y = a, y = 0, z = 0\ (a > 0).$

Chuyển sang hệ toạ độ cực, tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt :

30. $2az = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\ (a > 0).$

31. $x^2 + y^2 = 2ax, z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0\ (a > 0).$

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

32. $y^2 = 4ax, x + y = 3a, y = 0\ (y \geq 0, a > 0).$

33. $y = 2^x, y = 2^{-2x}, y = 4.$

34. $r = a\sin 3\varphi.$

35. Tính diện tích phần mặt phẳng $6x + 3y + 2z = 12$ ở trong góc phần tám thứ nhất $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

36. Tính diện tích phần mặt parabôlôit $z = x^2 + y^2$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

37. Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = Rx$.

Đáp số

1. $\frac{14}{3}$. **2.** $\frac{9}{4}$. **3.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **4.** $\frac{12}{5}$.

5. $\int_0^1 dy \int_0^2 f(x,y)dx$ hoặc $\int_0^2 dx \int_0^1 f(x,y)dy$.

6. $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$ hoặc $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$.

7. $\int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$ hoặc $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.

8. $\int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy$ hoặc

$$\int_2^4 dy \int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_4^5 dy \int_1^2 f(x,y)dx + \int_5^7 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^{2} f(x,y)dx.$$

9. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$ hoặc

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

10. $y = x^2, y = x + 9, x = 1, x = 3$. **11.** $y = 0, y = \sqrt{25 - x^2}, x = 0, x = 3$.

12. $x = \frac{y^2}{4} - 1,\ x = 2 - y$. **13.** $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dx$.

14. $\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)dy.$

15. $\int_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int_{y}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx.$ 16. $\frac{1}{6}.$

17. $\frac{\pi a}{2}.$ 18. $\ln 2.$ 19. $\frac{1}{2}.$

20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$

21. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(\mathrm{tg}\,\varphi)d\varphi \int_{0}^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rdr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\mathrm{tg}\,\varphi)d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} rdr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f(\mathrm{tg}\,\varphi)d\varphi \int_{0}^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rdr.$

22. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)dr.$ 23. $\frac{3}{2}\pi a^4.$ 24. $\frac{2}{3}\pi.$

25. $2\pi.$ 26. $\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2].$

27. $\frac{48\sqrt{6}}{5}.$ 28. $\frac{3}{4}.$ 29. $\frac{a^3}{18}.$

30. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5).$ 31. $\frac{32}{9}a^3.$ 32. $\frac{10}{3}a^2.$

33. $12 - \frac{9}{2\ln 2}.$ 34. $\frac{\pi a^2}{4}.$ 35. $14.$

36. $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$ 37. $2R^2(\pi - 2).$

Chương IX

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Mục đích yêu cầu

- Chương này trình bày các kiến thức cơ bản về tích phân đường : định nghĩa, các tính chất, cách tính tích phân đường, quan hệ giữa tích phân đường dọc theo một đường cong kín với tích phân kép trong miền giới hạn bởi đường cong kín đó (công thức Green) và một số ứng dụng của tích phân đường.
- Sinh viên cần nắm vững các khái niệm ấy, tính được tích phân đường, vận dụng được một cách linh hoạt công thức Green trong tính tích phân đường và đặc biệt hiểu được sâu sắc điều kiện cần và đủ để tích phân đường dọc theo một cung AB ($\overset{\frown}{AB}$) không phụ thuộc vào $\overset{\frown}{AB}$ mà chỉ phụ thuộc hai mút A và B.

§1. BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN ĐƯỜNG : CÔNG CỦA MỘT LỰC BIẾN ĐỔI

Giả sử cần tính công A của một lực $\vec{F}$ tác dụng lên một chất điểm M chuyển động trên cung cong phẳng từ B đến C. Lực $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y)$ biến thiên liên tục dọc theo $\overset{\frown}{BC}$ và có các hình chiếu xuống hai trục Ox và Oy là P(x, y) và Q(x, y) (chúng là những hàm số liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$). Ta có

$$\vec{F}(M) = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

trong đó $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên hai trục Ox và Oy.

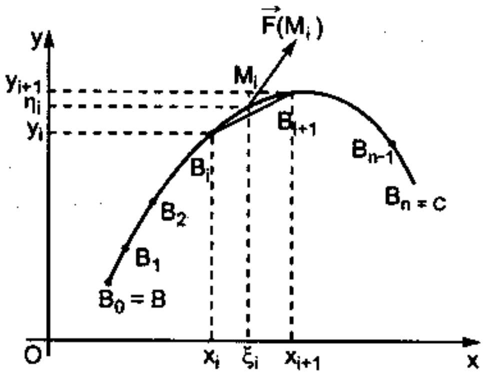
Chia $\overset{\frown}{BC}$ một cách tuỳ ý thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $B = B_0, B_1, B_2, ..., B_n = C$ có các độ dài tương ứng là $\Delta s_0, \Delta s_1, ... \Delta s_{n-1}$. Xét cung nhỏ thứ i : $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$. Trên cung đó, vì độ dài Δs_i khá bé nên có thể xem như lực $\vec{F}$ không đổi và bằng $\vec{F}(M_i)$ với $M_i(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm nào đó trên $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$.

Ngoài ra có thể coi $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ như trùng với dây cung $\overline{B_iB_{i+1}}$ và chất điểm M coi như chuyển động thẳng trên dây cung $\overline{B_iB_{i+1}}$ (hình 9.1). Do đó, công do lực $\vec{F}$ tạo nên khi chất điểm M chuyển động dọc theo $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ gần đúng bằng

$$\left|\vec{F}(M_i)\right|\left|\overrightarrow{B_iB_{i+1}}\right|\cos\alpha_i = \vec{F}(M_i).\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$$

$$= P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

trong đó α_i là góc giữa $\vec{F}(M_i)$ và $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ và $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ là các hình chiếu của $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ xuống hai trục Ox và Oy; công do lực $\vec{F}$ tạo nên khi chất điểm M chuyển động dọc theo cung cong phẳng từ B đến C gần đúng bằng



Hình 9.1

$$A_n = P(\xi_o, \eta_o)\Delta x_o + Q(\xi_o, \eta_o)\Delta y_o + ...$$

$$+ P(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})\Delta x_{n-1} + Q(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})\Delta y_{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right].$$

Dễ thấy rằng khi tăng số phần chia n lên, sao cho các $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ càng nhỏ lại thì sự khác nhau giữa A và A_n càng ít. Do đó, hiển nhiên công A do lực $\vec{F}$ tạo nên xem là giới hạn của A_n khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\Delta s_i \to 0$. Vậy

$$A = \lim_{\substack{\max\Delta s_i \to 0 \\ (n\to+\infty)}} A_n = \lim_{\substack{\max\Delta s_i \to 0 \\ (n\to+\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right].$$

§2. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Cho hai hàm số P(x, y), Q(x, y) xác định trên cung cong phẳng $\overset{\frown}{BC}$. Thực hiện các bước sau :

1. Chia tuỳ ý $\overset{\frown}{BC}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $B = B_o, B_1, B_2, \ldots, B_n = C$ có các độ dài tương ứng là $\Delta s_o, \Delta s_1, \ldots, \Delta s_{n-1}$.

2. Trên mỗi cung nhỏ thứ i ($\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$) lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i)$ và tính : $P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, trong đó $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ và $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ là các hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ lên hai trục Ox và Oy.

3. Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i\right].$$

4. Tìm giới hạn của I_n khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\Delta s_i \to 0$.

Nếu tổng I_n tiến đến một giới hạn xác định, không phụ thuộc vào cách chia $\overset{\frown}{BC}$ và cách chọn điểm M_i trên mỗi cung nhỏ $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ thì giới hạn đó được gọi là *tích phân đường* của hai hàm số P(x, y), Q(x, y) dọc theo cung cong phẳng từ B đến C, ký hiệu là $\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Vậy

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\substack{\max\Delta s_i \to 0 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Người ta chứng minh được rằng : nếu cung cong phẳng $\overset{\frown}{BC}$ trơn và nếu các hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$ thì tích phân đường tồn tại.

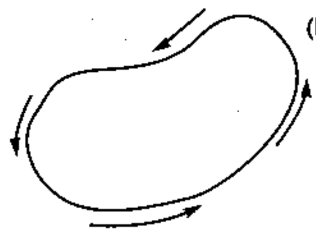
Trở lại bài toán dẫn đến khái niệm tích phân đường và dựa vào định nghĩa tích phân đường vừa nêu, ta có

$$A = \lim_{\substack{\max\Delta s_i \to 0 \\ (n \to +\infty)}} \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i = \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Chú ý : 1. Từ định nghĩa dễ thấy rằng : Nếu ta đổi chiều trên cung cong phẳng từ C đến B thì các hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ lên hai trục Ox và Oy đổi dấu, do đó

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\overset{\frown}{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2. Trong trường hợp $\overset{\frown}{BC}$ là đường cong kín L (nghĩa là hai điểm B và C trùng nhau), ta quy ước chọn chiều dương trên L là chiều sao cho một người đi dọc L theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở về bên trái; chiều ngược lại là chiều âm (hình 9.2).



Hình 9.2

Ta thường ký hiệu tích phân đường dọc theo đường cong kín L theo chiều dương là

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

3. Tích phân đường có các tính chất như tích phân xác định.

§3. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Để tính tích phân đường $\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, ta đưa về tích phân xác định. Giả sử $\overset{\frown}{BC}$ là một cung cong trơn, các hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$. Có hai trường hợp :

1. Cung cong $\overset{\frown}{BC}$ được cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, điểm B ứng với t_B, điểm C ứng với t_C, ta có công thức :

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{t_B}^{t_C} [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt. \qquad (9.1)$$

2. Cung cong $\overset{\frown}{BC}$ được cho bởi phương trình $y = f(x)$, điểm B ứng với x_B, điểm C ứng với x_C, ta có công thức

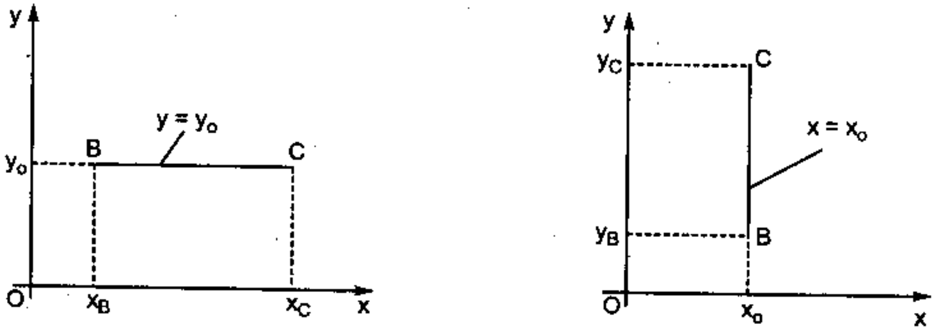
$$\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_B}^{x_C} [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]dx. \qquad (9.2)$$

Chú ý. Nếu cung cong $\overset{\frown}{BC}$ là một đoạn thẳng song song với trục Ox, có phương trình $y = y_0$, $x_B \le x \le x_C$ thì dọc theo đoạn thẳng ấy các Δy_i đều bằng không, do đó theo định nghĩa của tích phân đường, ta có (hình 9.3)

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_B}^{x_C} P(x,y_o)dx. \qquad (9.3)$$

Nếu cung cong $\overset{\frown}{BC}$ là một đoạn thẳng song song với trục Oy, có phương trình $x = x_0$, $y_B \le y \le y_C$ thì với lý do tương tự trên, ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{y_B}^{y_C} Q(x_o,y)dy. \qquad (9.4)$$

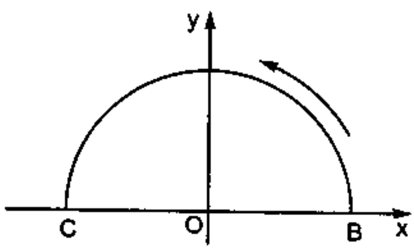


Hình 9.3

Ví dụ 1. Tính

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} ydx - xdy,$$

$\overset{\frown}{BC}$ là nửa đường tròn có phương trình tham số là : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.



Hình 9.4

Ta có : $dx = -a\sin t dt$, $dy = a\cos t dt$, $t_B = 0$, $t_C = \pi$ (hình 9.4), do đó theo công thức (9.1) :

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} ydx - xdy = \int\limits_0^{\pi}[a\sin t(-a\sin t) - a\cos t(a\cos t)]dt$$

$$= -a^2\int\limits_0^{\pi}dt = -a^2t\Big|_0^{\pi} = -\pi a^2.$$

Ví dụ 2. Tính

$$I = \int\limits_L xydx + (x + y)dy,$$

trong đó L là :

a) đoạn thẳng nối hai điểm O (0,0) và A(1,1) ;

b) cung parabol $y = x^2$ nối hai điểm đó ;

c) đường gấp khúc OBA (hình 9.5).

Giải:

a) Phương trình đoạn thẳng nối hai điểm O(0, 0) và A(1, 1) là y = x với $0 \le x \le 1$. Do đó dy = dx và theo (9.2) ta có

$$I = \int\limits_L xydx + (x + y)dy = \int\limits_0^1(x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

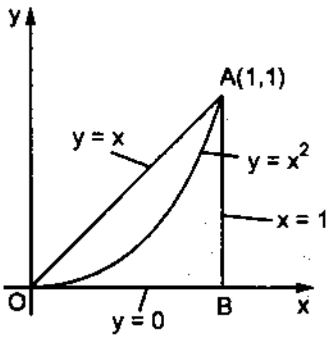
b) Phương trình cung parabol nối hai điểm O(0, 0) và A(1, 1) là $y = x^2$, với $0 \le x \le 1$. Do đó dy = 2xdx và theo (9.2) ta có

$$I = \int\limits_L xydx + (x + y)dy = \int\limits_0^1[x^3 + (x + x^2)2x]dx = \left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{17}{12}.$$

c) Đường gấp khúc OBA gồm hai đoạn $\overline{OB}$ và $\overline{BA}$ có phương trình khác nhau, do đó

$$I = \int\limits_L xydx + (x + y)dy$$

$$= \int\limits_{\overline{OB}} xydx + (x + y)dy + \int\limits_{\overline{BA}} xydx + (x + y)dy.$$



Hình 9.5

Phương trình đoạn thẳng $\overline{OB}$ là y = 0 với $0 \le x \le 1$, do đó theo (9.3) ta có

$$\int_{\overline{OB}} xydx + (x + y)dy = \int_0^1 x.0.dx = 0.$$

Phương trình đoạn thẳng $\overline{BA}$ là $x = 1$ với $0 \le y \le 1$, do đó theo (9.4) ta có

$$\int_{\overline{BA}} xydx + (x + y)dy = \int_0^1 (1 + y)dy = \frac{1}{2}(1 + y)^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Vậy

$$I = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3. Tính

$$I = \int_L 2xydx + x^2dy,$$

trong đó L là các đoạn đường cong cho trong ba trường hợp của ví dụ 2.

Giải:

a) Trên đoạn thẳng $y = x$ với $0 \le x \le 1$, ta có $dy = dx$ và

$$I = \int_0^1 (2x^2 + x^2)dx = x^3\Big|_0^1 = 1.$$

b) Trên đoạn parabol $y = x^2$ với $0 \le x \le 1$, ta có $dy = 2xdx$ và

$$I = \int_0^1 (2x^3 + 2x^3)dx = x^4\Big|_0^1 = 1.$$

c) Trên đoạn thẳng $\overline{OB}$ $y = 0$ với $0 \le x \le 1$, ta có

$$\int_{\overline{OB}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2x.0.dx = 0.$$

Trên đoạn thẳng $\overline{BA}$ $x = 1$ với $0 \le y \le 1$, ta có

$$\int_{\overline{BA}} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 1^2dy = \int_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1.$$

Vậy

$$I = \int_{\overline{OB}} 2xydx + x^2dy + \int_{\overline{BA}} 2xydx + x^2dy = 1.$$

Qua ví dụ trên, ta thấy nếu tính tích phân đường đã cho dọc theo mọi đoạn đường cong L khác nối liền điểm O và điểm A, giá trị của tích phân đường vẫn luôn bằng 1. Như vậy, tích phân đường đã cho không phụ thuộc đường cong lấy tích phân, mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu O và điểm cuối A.

Ví dụ 4. Tính

$$I = \int_L xydx,$$

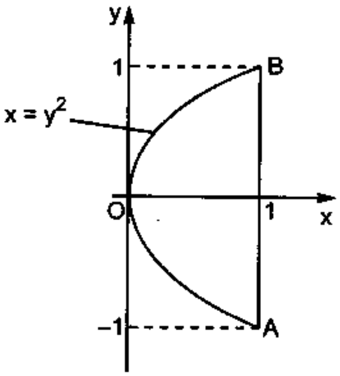
trong đó L là cung parabol $x = y^2$ nối hai điểm A(1, −1) và B(1, 1) (hình 9.6).

Giải:

Ta có : $x = y^2$, $dx = 2ydy$, $y_A = -1$, $y_B = 1$ và

$$I = \int_L xydx = \int_{-1}^{1} y^2.y.2ydy$$

$$= 2\int_{-1}^{1} y^4 dy = 2\frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$



Hình 9.6

Chú ý rằng trong ví dụ trên, ta đã dùng công thức tương tự công thức (9.2) đối với trường hợp cung cong $\overset{\frown}{BC}$ được cho bởi phương trình $x = g(y)$, điểm B ứng với y_B, điểm C ứng với y_C. Khi đó trong tích phân xác định ở vế phải, ta xem y là đối số và có

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_B}^{y_C} [P(g(y),y)g'(y) + Q(g(y),y)]dy. \quad (9.5)$$

Tất nhiên, trong ví dụ trên ta cũng có thể tính I bằng cách đưa về tính tích phân xác định theo x (công thức (9.2)), nhưng khi đó ta phải chia $\overset{\frown}{AB}$ thành hai cung $\overset{\frown}{AO}$ và $\overset{\frown}{OB}$ có phương trình lần lượt là $y = -\sqrt{x}$ và $y = \sqrt{x}$, và

$$I = \int_L xydx = \int_{\overset{\frown}{AO}} xydx + \int_{\overset{\frown}{OB}} xydx = -\int_1^0 x^{\frac{3}{2}}dx + \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}.$$

§4. CÔNG THỨC GREEN

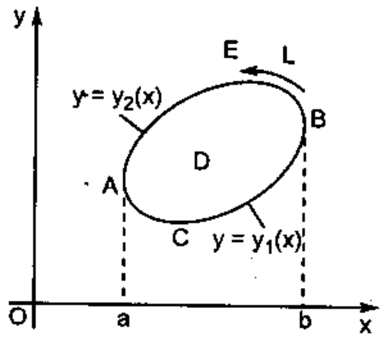
Công thức Green là công thức liên hệ giữa tích phân đường dọc theo một đường cong kín phẳng L và tích phân kép lấy trong miền D giới hạn bởi đường cong kín L.

Định lý 9.1. *Nếu các hàm số P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tụctrong miền D thì ta có công thức Green :*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy, \qquad (9.6)$$

trong đó L là đường cong kín, biên của miền D và chiều lấy tích phân trên đường cong L là chiều dương.

Chứng minh: Giả sử D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục toạ độ cắt L không quá hai điểm (hình 9.7).



Hình 9.7

Theo công thức tính tích phân kép trong miền D, ta có

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy,$$

trong đó $y = y_2(x)$ là phương trình cung cong $\overset{\frown}{AEB}$, $y = y_1(x)$ là phương trình cung cong $\overset{\frown}{ACB}$.

Tính tích phân ở vế phải, ta có

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx = \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx .$$

Nhưng theo cách tính tích phân đường :

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int_{\overset{\frown}{AEB}} P(x,y)dx ,$$

$$-\int_a^b P(x, y_1(x))dx = -\int_{\overset{\frown}{ACB}} P(x,y)dx = \int_{\overset{\frown}{BCA}} P(x,y)dx .$$

Do đó

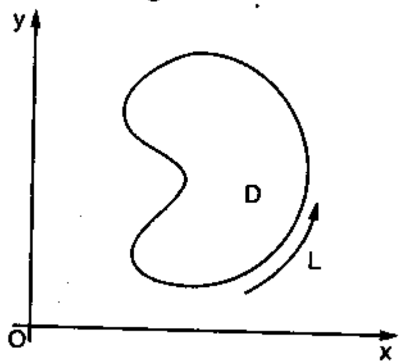
$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AEBCA}} P(x,y)dx = -\oint\limits_L P(x,y)dx.$$

Tương tự trên, ta có

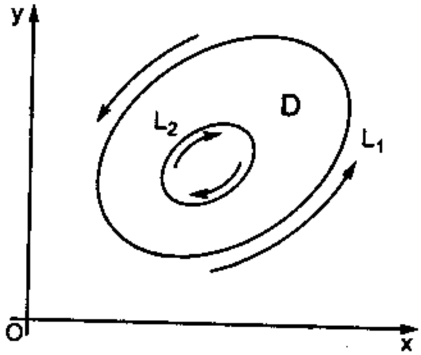
$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy.$$

Từ hai kết quả trên, suy ra công thức Green.

Người ta cũng chứng minh được rằng công thức Green vẫn đúng trong trường hợp D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục toạ độ cắt biên L của nó nhiều hơn hai điểm (hình 9.8), hoặc D là miền đa liên. Cần nhớ rằng trong trường hợp D là miền nhị liên như hình 9.9, vì biên L của miền D gồm hai đường cong kín L_1 và L_2 rời nhau nên chiều dương trên L phải chọn theo quy ước đã nêu trong chú ý 2 của §2, nghĩa là chiều dương trên L_1 là ngược chiều kim đồng hồ, còn chiều dương trên L_2 là thuận chiều kim đồng hồ.



Hình 9.8



Hình 9.9

Ví dụ 5. Dùng công thức Green tính

$$I = \oint\limits_L -x^2ydx + xy^2dy,$$

trong đó L là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ (hình 9.10).

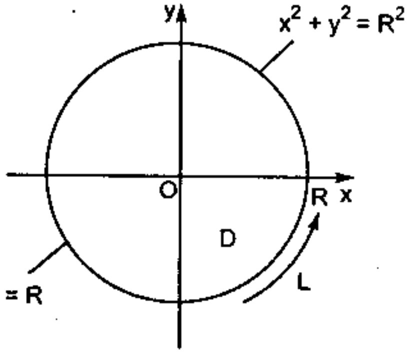
Ta có :

$$P(x, y) = -x^2y,\ Q(x, y) = xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

Áp dụng công thức Green (9.6), ta có

$$I = \oint_L -x^2ydx + xy^2dy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy.$$



Hình 9.10

Đổi sang toạ độ cực, thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, ta có

$$I = \iint_D r^3 drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R d\varphi = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^4}{4}\ \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

§5. ĐIỀU KIỆN ĐỂ TÍCH PHÂN ĐƯỜNG KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG CONG LẤY TÍCH PHÂN

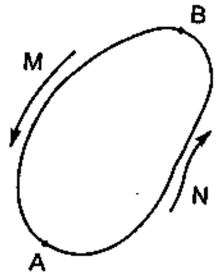
Qua các ví dụ 2, 3 của §3, một câu hỏi được đặt ra là : Các hàm số P và Q cần phải thoả mãn những điều kiện gì để tích phân đường $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong nối hai điểm A và B mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B ?

Trước hết ta nhận xét rằng : *$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong nối A, B mà chỉ phụ thuộc vào hai điểm A, B khi và chỉ khi $\oint_l Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong kín l đi qua hai điểm A, B.*

Thật vậy, giả sử $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong nối hai điểm A, B. Khi đó

$$\int_{\overset{\frown}{ANB}} Pdx + Qdy = \int_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx + Qdy \qquad (*)$$

trong đó $\overset{\frown}{AMB}$ và $\overset{\frown}{ANB}$ là hai đường cong bất kỳ nối A và B (hình 9.11). Suy ra



Hình 9.11

$$\int_{\overset{\frown}{ANB}} Pdx + Qdy - \int_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{ANB}} Pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{BMA}} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{\overset{\frown}{ANBMA}} Pdx + Qdy = \oint_{l} Pdx + Qdy = 0. \qquad (**)$$

Ngược lại, nếu $\oint_{l} Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong kín l thì từ (**) dễ dàng suy ra (*), nghĩa là $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong nối hai điểm A và B.■

Từ nhận xét trên, ta đi đến định lý sau.

Định lý 9.2. *Cho hai hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục và có đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một miền đơn liên D. Điều kiện cần và đủ để tích phân đường $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$, trong đó $\overset{\frown}{AB}$ là một đường cong nằm trong D, chỉ phụ thuộc vào hai điểm A, B mà không phụ thuộc vào đường cong nối A với B là*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \forall (x, y) \in D. \qquad (9.7)$$

Chứng minh: Từ nhận xét trên, ta chỉ việc chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tích phân đường $\oint_{l} Pdx + Qdy = 0$, trong đó l là một đường cong kín bất kỳ nằm trong miền D, là điều kiện (9.7) được thoả mãn trong miền D.

Điều kiện đủ. Giả sử điều kiện (9.7) được thoả mãn trong miền D. l là một đường cong kín bất kỳ nằm trong D. Gọi d là miền giới hạn bởi l. Áp dụng công thức Green (9.6), ta có

$$\oint_l Pdx + Qdy = \iint_d \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Vì $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ tại mọi điểm trong miền d nên tích phân kép ở vế phải bằng không, và do đó

$$\oint_l Pdx + Qdy = 0.$$

Điều kiện cần. Giả sử $\oint_l Pdx + Qdy = 0$, l là đường cong kín bất kỳ nằm trong miền D, cần chứng minh $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ tại mọi điểm trong miền D.

Dùng phản chứng, giả sử tại một điểm M trong miền D ta có $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ (trường hợp < 0, chứng minh tương tự). Vì $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ là một hàm số liên tục nên tồn tại một miền lân cận d của điểm M, trong đó $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$. Gọi l là đường cong kín giới hạn miền d, dùng công thức Green, ta có

$$\oint_l Pdx + Qdy = \iint_d \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

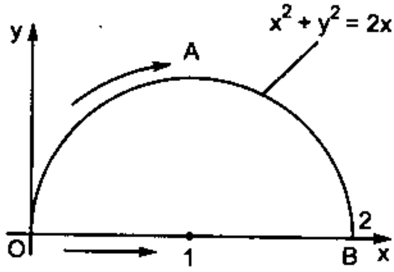
Vì trong miền d, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ nên tích phân kép ở vế phải dương, và do đó tích phân đường ở vế trái cũng dương. Điều này trái với giả thiết của điều kiện cần. Vậy, tại mọi điểm trong miền D, ta phải có

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \blacksquare$$

Ví dụ 6. Tính

$$\int_{\overset{\frown}{OAB}} x^2dx + y^2dy,$$

trong đó $\overset{\frown}{OAB}$ là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ nằm ở phía trên trục Ox (hình 9.12).



Hình 9.12

Ta có :

$$P(x, y) = x^2, Q(x, y) = y^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

tại $\forall (x, y) \in R^2$, và tích phân đường đã cho không phụ thuộc vào đường cong nối hai điểm O và B. Để tính tích phân đường đã cho được đơn giản, ta thay nó bằng tích phân đường lấy trên đoạn thẳng $\overline{OB}$ của trục Ox. Trên đoạn thẳng này $y = 0$, $0 \le x \le 2$, nên :

$$\int_{\overset{\frown}{OAB}} x^2dx + y^2dy = \int_{\overline{OB}} x^2dx + y^2dy = \int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

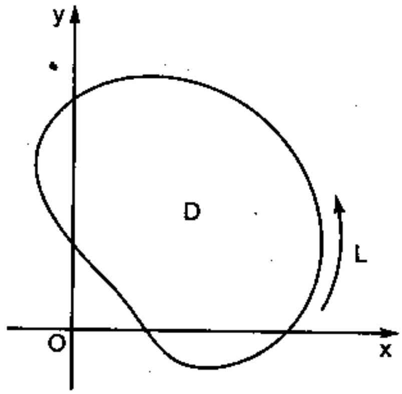
Ví dụ 7. Tính

$$\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

L là đường cong kín, trơn, trong hai trường hợp :

a) Gốc O nằm ngoài miền D giới hạn bởi L (hình 9.13)

b) L bao quanh gốc O.



Hình 9.13

Giải: a) Ta có

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

trong đó P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục và $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ tại mọi điểm $(x, y) \in D$. Do đó

$$\oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 0.$$

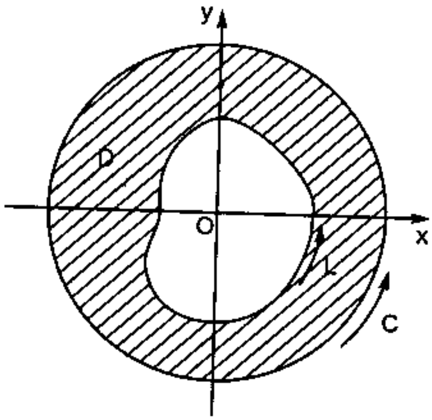
b) Nếu L bao quanh gốc O, ta không áp dụng định lý 9.2 được vì P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ gián đoạn tại gốc O. Ta vẽ một đường tròn C tâm tại gốc O, bán kính R đủ lớn để nó chứa L ở trong và không cắt L (hình 9.14). Phương trình tham số của đường tròn C là

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t\ (0 \le t \le 2\pi).$$

Các hàm số P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục và $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trong miền nhị liên D giới hạn bởi hai đường cong kín L và C. Áp dụng công thức Green vào miền D, ta có

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

$$= \oint_C Pdx + Qdy - \oint_L Pdx + Qdy.$$



Hình 9.14

Suy ra

$$\oint_L Pdx + Qdy = \oint_C Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{-R\sin t(-R\sin t) + R\cos t.R\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Chú thích: 1. Ta biết rằng điều kiện $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ là điều kiện cần và đủ để biểu thức Pdx + Qdy là một vi phân toàn phần (§2, chương VII). Vì vậy định lý 9.2 còn có thể phát biểu như sau :

Cho hai hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục và có đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một miền đơn liên D. Điều kiện cần và đủ để tích phân đường

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy,$$

trong đó $\overset{\frown}{AB}$ là một đường cong nằm trong D, chỉ phụ thuộc hai điểm A và B mà không phụ thuộc đường cong nối A với B là trong miền D biểu thức Pdx + Qdy là một vi phân toàn phần.

2. Nếu P(x, y), Q(x, y) liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong một miền đơn liên D, Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số f(x, y) trong miền D thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = f(B) - f(A),$$

$\overset{\frown}{AB}$ là một đường cong bất kỳ nằm trong D.

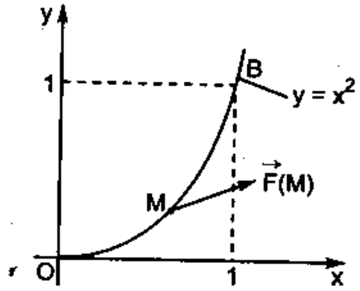
§6. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

6.1. Công của một lực biến đổi

Như đã biết trong §1, công A của một lực $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ tác dụng lên một chất điểm M chuyển động trên cung cong phẳng từ B đến C được tính bởi công thức :

$$A = \int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \quad (9.8)$$

Ví dụ 8. Tại mỗi điểm M(x, y) trong mặt phẳng Oxy có một lực $\vec{F}(x,y) = -xy\vec{i} + (x^2 + y)\vec{j}$. Tìm công A của lực $\vec{F}$ khi điểm đặt chuyển động trên parabol $y = x^2$ từ điểm O(0, 0) đến điểm B(1, 1) (hình 9.15).



Hình 9.15

Áp dụng công thức (9.8) ta có

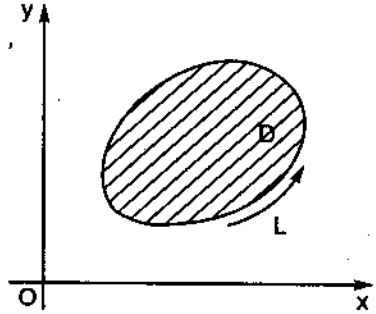
$$A = \int_{\overset{\frown}{OB}} -xydx + (x^2 + y)dy = \int_0^1 [-x.x^2 + (x^2 + x^2)2x]dx$$

$$= \int_0^1 3x^3 dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

6.2. Diện tích hình phẳng

Giả sử cần tính diện tích S của miền D, giới hạn bởi đường cong kín L trong mặt phẳng Oxy (hình 9.16). Muốn thế, ta áp dụng công thức Green cho miền D và có

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$



Hình 9.16

Nếu chọn P = – y, Q = x, từ đẳng thức trên, ta có

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx. \qquad (9.9)$$

Nếu chọn P = 0, Q = x, ta có công thức

$$S = \oint\limits_L xdy. \qquad (9.10)$$

Nếu chọn P = y, Q = 0, ta có công thức

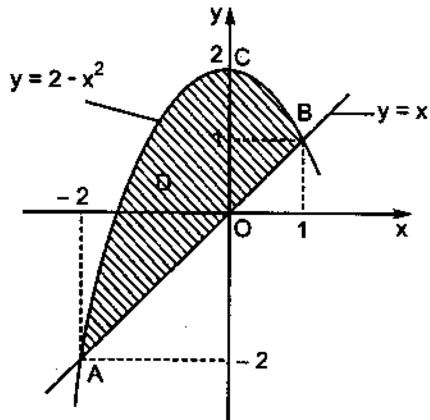
$$S = -\oint\limits_L ydx. \qquad (9.11)$$

Ví dụ 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = 2 - x^2$ và $y = x$ (hình 9.17).

Áp dụng công thức (9.11), ta có

$$S = -\oint\limits_L ydx$$

$$= -\int\limits_{\overline{AOB}} ydx - \int\limits_{\overset{\frown}{BCA}} ydx.$$



Hình 9.17

Phương trình đoạn thẳng AOB là $y = x$ với $x_A = -2$, $x_B = 1$; phương trình đoạn đường cong $\overset{\frown}{BCA}$ là $y = 2 - x^2$ với $x_B = 1$, $x_A = -2$, do đó

$$S = -\int_{-2}^{1} xdx - \int_{1}^{-2} (2 - x^2)dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{-2} = \frac{9}{2}.$$

Kết quả này ta đã tìm được khi dùng tích phân kép tính diện tích hình phẳng trên (xem lại ví dụ 6a, mục 6.2 chương VIII).

§7. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN

Tích phân đường trong không gian được định nghĩa như tích phân đường trong mặt phẳng. Cho ba hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) xác định trên cung đường cong $\overset{\frown}{BC}$ trong không gian. Chia $\overset{\frown}{BC}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $B = B_0, B_1, B_2, ..., B_n = C$. Trên mỗi cung nhỏ $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ lấy một điểm tuỳ ý $M_i(\xi_i, \eta_i, \xi_i)$. Lập tổng

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} [P(\xi_i, \eta_i, \xi_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \xi_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \xi_i)\Delta z_i],$$

trong đó $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ lần lượt là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ lên ba trục Ox, Oy, Oz. Nếu khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\Delta s_i \to 0$ (Δs_i = độ dài của cung $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$) mà I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia cung $\overset{\frown}{BC}$ và cách chọn điểm M_i trên mỗi cung $\overset{\frown}{B_iB_{i+1}}$ thì I gọi là *tích phân đường* của các hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) dọc theo cung $\overset{\frown}{BC}$. Ký hiệu là

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{9.9}$$

Người ta chứng minh được rằng nếu cung $\overset{\frown}{BC}$ trơn và nếu các hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$ thì tích phân đường (9.9) tồn tại.

Nếu $\overset{\frown}{BC}$ là một cung trơn trong không gian, có phương trình tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

điểm B ứng với giá trị t_B của tham số, điểm C ứng với t_C, các hàm số P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) liên tục trên $\overset{\frown}{BC}$, ta có công thức tính sau

$$\int_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_B}^{t_C} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt \tag{9.10}$$

Ví dụ 10. Tính $I = \int\limits_L yzdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz$, L là đường xoắn ố

trụ tròn xoay

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \frac{at}{2\pi}$$

từ giao điểm với mặt phẳng z = 0 tới giao điểm với mặt phẳng z = a.

Giải:

Do $z = \frac{at}{2\pi}$, khi z biến thiên từ 0 đến a thì t biến thiên từ 0 đến 2π. Ta có

$$x = R\cos t \Rightarrow x'(t) = -R\sin t\ ;$$
$$y = R\sin t \Rightarrow y'(t) = R\cos t\ ;$$
$$z = \frac{at}{2\pi} \Rightarrow z'(t) = \frac{a}{2\pi}.$$

Theo công thức (9.10), ta có

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\frac{Ra}{2\pi}t\sin t(-R\sin t) + \frac{at}{2\pi}\sqrt{R^2\cos^2 t}.R\cos t + R^2\sin t\cos t.\frac{a}{2\pi}\right]dt$$

$$= \frac{R^2a}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-t\sin^2 t + t|\cos t|\cos t + \sin t\cos t)dt.$$

Vì $$|\cos t| = \begin{cases}\cos t \text{ khi } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \text{ hoặc } \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi \\ -\cos t \text{ khi } \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

nên ta được

$$\int_0^{2\pi}(-t\sin^2 t + t|\cos t|\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-t)(\sin^2 t + \cos^2 t)dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}tdt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}t\cos 2tdt.$$

Để tính các tích phân thứ nhất và thứ ba ở vế phải, ta dùng phương pháp tích phân từng phần. Đặt u = t, dv = cos2tdt, ta có du = dt, v = $\frac{1}{2}$sin2t. Do đó

$$\int_0^{2\pi}(-t\sin^2 t + t|\cos t|\cos t)dt = \frac{1}{2}(t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}t^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}(t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = -\frac{1}{2} - \pi^2 + \frac{1}{2} = -\pi^2.$$

Còn

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t dt = -\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Vậy

$$I = -\frac{\pi R^2 a}{2}.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa và ý nghĩa cơ học của tích phân đường.
2. Các tính chất của tích phân đường.
3. Cách tính tích phân đường :
   a) Trong trường hợp đường cong lấy tích phân có phương trình y = f(x), $a \le x \le b$;
   b) Trong trường hợp đường cong lấy tích phân có phương trình tham số x = x(t), y = y(t), $t_0 \le t \le t_1$;
   c) Trong trường hợp đường cong lấy tích phân là đường cong trong không gian.
4. Phát biểu và chứng minh công thức Green.
5. Điều kiện cần và đủ để tích phân đường không phụ thuộc đường cong lấy tích phân.
6. Các ứng dụng của tích phân đường.
7. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng ?

   1) Nếu $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số là x = cost, y = sint, $0 \le t \le \pi$, thì

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} xydx + e^{-x^2-y^2}dy = 0.$$

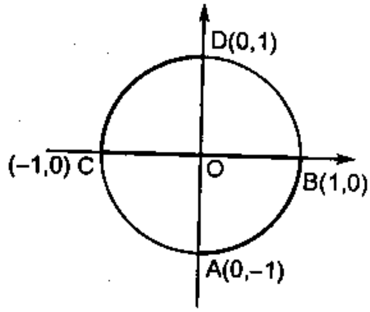
2) $\int_l (x^2 + y^2)dx + (2y + 1)xdy = S,$

S là diện tích của miền giới hạn bởi đường cong kín l.

3) Công của lực

$$\vec{F} = (4x + 3y)\vec{i} + (3x + 3y^2)\vec{j}$$

khi điểm đặt của nó chạy trên đường ABCD như ở hình vẽ bên bằng 0.



4) Nếu hàm số f(x, y) có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ thì tích phân đường

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,$$

trong đó $\overset{\frown}{AB}$ là một cung đường cong nằm trong D, không phụ thuộc đường nối A, B mà chỉ phụ thuộc A, B.

5) D là miền $\{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$. Nếu f(x, y) có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong D thì tích phân đường $\int_l f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = 0$, với l là một đường cong kín bất kỳ nằm trong D.

6) Nếu f(x, y) có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong $\mathbb{R}^2$ thì tích phân đường $\int_l f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = 0$ với l là một đường cong kín bất kỳ nằm trong $\mathbb{R}^2$.

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân đường sau :

a) $\int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, $\overset{\frown}{AB}$ là cung parabol $y = x^2$ từ điểm A(1, 1) đến điểm B(2, 4).

b) $\int\limits_L (xy - 1)dx + x^2ydy$, L từ điểm A(1, 0) đến điểm B(0, 2) trong các trường hợp sau :

α) theo đường thẳng $2x + y = 2$;

β) theo cung parabol $4x + y^2 = 4$;

γ) theo cung elip $x = \cos t$, $y = 2\sin t$.

c) $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dy$, L là chu vi của hình tứ giác có các đỉnh là A(0, 0), B(2, 0), C(4, 4) và D(0, 4).

d) $\oint\limits_L xdy$, L là chu vi của tam giác tạo nên bởi các trục toạ độ và đường thẳng $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

e) $\int\limits_L (2a - y)dx - (a - y)dy$, L là cung xyclôit từ $t = 0$ đến $t = 2\pi$:

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

g) $\oint\limits_L \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$.

h) $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, L là một phần tư đường hình sao $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$, từ điểm A(R, 0) đến điểm B(0, R).

2. Dùng công thức Green tính :

a) $\oint\limits_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$, L là chu vi của tam giác có các đỉnh A(1, 1), B(2, 2), C(1, 3). Tìm lại kết quả thu được bằng cách tính trực tiếp tích phân đường trên.

b) Hiệu của hai tích phân :

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy \text{ và } I_2 = \int\limits_{\overset{\frown}{AnB}} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy,$$

trong đó $\overline{AmB}$ là đoạn thẳng nối điểm A(0, 0) và điểm B(1, 1), $\overset{\frown}{AnB}$ là cung parabol $y = x^2$ nối hai điểm trên.

3. Cho $I = \oint\limits_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, L là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$. Tính :

a) Trực tiếp I ;

b) I bằng cách dùng công thức Green.

4. Dùng công thức Green tính

$$I = \oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy,$$

L là elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tìm lại kết quả thu được bằng cách tính trực tiếp tích phân đường trên.

5. Tính

$$I = \int\limits_C (x^2 + y\cos xy)dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x\cos xy\right)dy,$$

C là cung tròn x = acost, y = asint, lấy theo chiều tăng của tham số t : $0 \le t \le \pi$, $a > 0$.

6. Tính :

a) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x^2dx + y^2dy$, $\overset{\frown}{AB}$ là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ nằm phía trên trục Ox và lấy theo chiều kim đồng hồ.

b) $\oint\limits_L y\cos xdx + \sin xdy$, L là đường tròn $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

7. Tìm hằng số a để

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(x^2 + 2xy + ay^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x + y)^3}$$

không phụ thuộc vào đường cong lấy tích phân đối với các đường cong không cắt đường thẳng y = −x. Tính tích phân I với a tìm được và A(1, 0), B(0, 1).

8. Các hình chiếu của lực $\vec{F}$ xuống các trục toạ độ là $P = 2xy$, $Q = x^2$.

Chứng minh rằng công của lực $\vec{F}$ không phụ thuộc đường đi, mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối.

Tính công khi đi từ điểm B(1, 0) đến điểm C(0, 3).

9. Tại một điểm M của elip : $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ có tác dụng một lực $\vec{F}$, mà môđun bằng khoảng cách từ M tới tâm elip và hướng về tâm elip.

a) Tính công của lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động dọc theo cung elip, nằm trong góc phần tư thứ nhất, từ (a, 0) đến (0, b).

b) Tính công của lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động dọc theo toàn bộ đường elip theo chiều dương.

10. Dùng tích phân đường tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đường parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 1$;

b) Đường axtrôit $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

11. Tính tích phân đường trong không gian

$$\int_L xy^2dx + yz^2dy - zx^2dz$$

với :

a) L là đoạn thẳng nối điểm O(0, 0, 0) và điểm B (–2, 4, 5);

b) L là cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ trong không gian cho bởi phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 45 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

(cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ là một phần của đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm O(0, 0, 0), bán kính $\sqrt{45}$ với mặt phẳng $y = -2x$, nối điểm A(3, –6, 0) và điểm B(–2, 4, 5)).

Đáp số

1. a) $40\frac{19}{30}$; b) α) 1 ; β) $\frac{17}{15}$; γ) $\frac{4}{3}$;

c) $37\frac{1}{3}$; d) 3 ; e) πa^2 ;

g) -2π ; h) $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$.

2. a) $-\frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{3}$.

3. $\frac{\pi}{2}R^4$.

4. 0.

5. $\frac{a^2}{12}[3\pi(a^2-2)-8a]$.

6. a) $\frac{16}{3}$; b) 0.

7. -2.

8. 0.

9. a) $\frac{1}{2}(a^2-b^2)$; b) 0.

10. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{3}{8}\pi a^2$.

11. a) 91 ; b) $-271,25$.

Chương X

CHUỖI

Mục đích yêu cầu

Chương này trình bày các khái niệm cơ bản về chuỗi số như : chuỗi số hội tụ, phân kỳ, hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ, các quy tắc khảo sát sự hội tụ của chuỗi số, ứng dụng của chuỗi số vào tính gần đúng; trình bày những kiến thức cơ bản về chuỗi luỹ thừa như : bán kính hội tụ, miền hội tụ, sự khai triển thành chuỗi luỹ thừa của một số hàm số thông dụng, các ứng dụng của chuỗi luỹ thừa.

Sinh viên cần hiểu kỹ các khái niệm nêu trên, nắm vững các kết quả cơ bản để xét sự hội tụ của chuỗi số, tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa, vận dụng thành thạo các kết quả đó vào tính gần đúng.

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

1.1. Định nghĩa

Cho dãy số $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Biểu thức

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

gọi là *chuỗi số*. Các số $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ gọi là các *số hạng* của chuỗi số, u_n với n tổng quát gọi là *số hạng tổng quát*. Tổng của n số hạng đầu

$$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi số. Nếu s_n dần tới một giới hạn xác định s khi $n \to \infty$, ta nói rằng chuỗi số *hội tụ* và có tổng là s. Ta viết

$$s = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Hiệu $r_n = s - s_n$ gọi là *phần dư thứ n* của chuỗi số. Nếu chuỗi số hội tụ thì $r_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số gọi là *phân kỳ* nếu nó không hội tụ.

Ví dụ 1. Xét chuỗi số sau gọi là chuỗi nhân

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ..., \text{ với } a \neq 0.$$

Giải: Ta có

$$s_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1},$$

do đó

$$qs_n = aq + aq^2 + ... + aq^n.$$

Trừ hai đẳng thức trên từng vế một, ta được

$$s_n(1 - q) = a(1 - q^n).$$

Do đó nếu $q \neq 1$ thì

$$s_n = a\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Nếu $|q| < 1$ thì $q^n \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó $s_n \to \dfrac{a}{1-q}$, vậy chuỗi hội tụ và có tổng bằng $\dfrac{a}{1-q}$.

Nếu $|q| > 1$ thì $|q|^n \to \infty$ khi $n \to \infty$, do đó $s_n \to \infty$, vậy chuỗi phân kỳ.

Nếu $q = 1$ thì $s_n = a + a + ... + a = na \to \infty$ khi $n \to \infty$, chuỗi phân kỳ.

Nếu $q = -1$ thì $s_n = a - a + ... + (-1)^n a = \begin{cases} 0 \text{ nếu n lẻ,} \\ a \text{ nếu n chẵn} \end{cases}$

do đó s_n không dần tới một giới hạn xác định khi $n \to \infty$, chuỗi phân kỳ.

Tóm lại, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ hội tụ nếu $|q| < 1$, phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

Ví dụ 2. Xét chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n(n-1)} + ...$$

Giải: Ta có

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

do đó

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n-1}.$$

Khi $n \to \infty$ thì $s_n \to 1$, vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng 1.

1.2. Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ

Định lý 10.1. *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì số hạng tổng quát* u_n *dần tới 0 khi* $n \to \infty$.

Thật vậy, vì $s_n = s_{n-1} + u_n$ nên $u_n = s_n - s_{n-1}$. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì s_n và s_{n-1} cùng dần tới một giới hạn khi $n \to \infty$, do đó $u_n = s_n - s_{n-1} \to 0$ khi $n \to \infty$.■

Hệ quả. *Nếu* u_n *không dần tới 0 khi* $n \to \infty$ *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

Thật vậy, nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì theo định lý 10.1, u_n dần tới 0 khi $n \to \infty$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.■

Ví dụ 3. Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} = 1 + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{2n-1} + \ldots$$

Vì $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ nên chuỗi phân kỳ.

Chú thích. Mệnh đề đảo của định lý 10.1 không đúng, tức là nếu $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không nhất thiết hội tụ. Xét chuỗi sau đây, gọi là *chuỗi số điều hoà :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Rõ ràng số hạng tổng quát $\frac{1}{n}$ dần tới 0 khi $n \to \infty$, nhưng chuỗi điều hoà phân kỳ. Thật vậy, ta có

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Vì với mọi n ta có

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}, \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$$

nên

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Nếu chuỗi số điều hoà hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$, điều này mâu thuẫn với (*). Vậy chuỗi số điều hoà phân kỳ.

1.3. Vài tính chất đơn giản của chuỗi số hội tụ

a) *Nếu chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ và có tổng s thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ *, trong đó* α *là một hằng số, cũng hội tụ và có tổng* αs.

b) *Nếu các chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ và có tổng theo thứ tự là s, s'* *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ *cũng hội tụ và có tổng s + s'.*

c) *Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi ta bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên.*

Thật vậy, giả sử s_n là tổng riêng thứ n của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Khi đó tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ bằng $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha u_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \alpha s_n$, nó dần tới αs khi $n \to \infty$. Tính chất a) đã được chứng minh. Bạn đọc tự chứng minh các tính chất b) và c).

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

Chuỗi số dương là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n \ge 0$, $\forall n \ge 1$. Vì $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n$, $\forall n$ nên dãy $\{s_n\}$ đơn điệu tăng. Do đó nếu dãy số $\{s_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại $\lim_{n\to\infty} s_n$, tức là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Nếu dãy số $\{s_n\}$ không bị chặn trên, $s_n \to \infty$ khi $n \to \infty$, chuỗi số phân kỳ.

2.1. Các định lý so sánh

Các định lý sau giúp ta xét sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số dương bằng cách so sánh nó với một chuỗi số mà ta đã biết là hội tụ hay phân kỳ.

Định lý 10.2. *Cho hai chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *trong đó* $u_n \le v_n$, $\forall n \ge 1$.

a) *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ.*

b) *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *cũng phân kỳ.*

Chứng minh: Vì $u_n \le v_n$, $\forall n \ge 1$ nên $\sum_{k=1}^{n} u_k \le \sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng σ thì $\sum_{k=1}^{n} v_k \le \sigma$, $\forall n \ge 1$, do đó $\sum_{k=1}^{n} u_k \le \sigma$, $\forall n \ge 1$. Dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bị chặn trên nên chuỗi số ấy hội tụ.

b) Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{k=1}^{n} u_k \to \infty$ khi $n \to \infty$, do đó $\sum_{k=1}^{n} v_k \to \infty$ khi $n \to \infty$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ. ■

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ của các chuỗi số :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Giải: Các chuỗi số đã cho đều là chuỗi số dương. Ta có thể áp dụng định lý 10.2.

1) Vì $\frac{1}{n.3^n} \le \frac{1}{3^n}$, $\forall n \ge 1$, mà chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ vì là chuỗi nhân với $q = \frac{1}{3} < 1$ (xem ví dụ 1, §1). Do đó theo định lý 10.2 chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.3^n}$ cũng hội tụ.

2) Ta có $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, $\forall n \ge 2$, mà chuỗi số dương $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ hội tụ (xem ví dụ 2, §1). Do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

3) Ta có $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$, $\forall n \ge 1$, mà chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ vì là chuỗi số điều hoà. Do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

4) Vì $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, $\forall n \ge 3$, mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi số $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ phân kỳ.

Định lý 10.3. *Cho hai chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0 \qquad (10.1)$$

thì hai chuỗi số ấy cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Chứng minh: Từ (10.1) và từ định nghĩa giới hạn của dãy số, suy ra rằng nếu lấy $\varepsilon = \frac{k}{2}$ thì tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - k\right| < \frac{k}{2}, \forall n \geq n_0$$

hay
$$\frac{k}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3k}{2}, \forall n \geq n_0. \tag{10.2}$$

Từ bất đẳng thức sau của (10.2) ta suy ra $u_n < \frac{3k}{2}v_n$, $\forall n \geq n_0$. Do đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì từ phần a) của định lý 10.2 ta thấy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ. Còn từ bất đẳng thức đầu của (10.2) ta có $u_n > \frac{k}{2}v_n$, $\forall n \geq n_0$. Do đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì từ phần b) của định lý 10.2 suy ra rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ. ■

Chú thích. Ta nhắc lại rằng hai vô cùng bé u_n và v_n khi $n \to \infty$ gọi là tương đương với nhau nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Do đó khi xét một chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$, nếu tìm được một vô cùng bé v_n tương đương với u_n khi $n \to \infty$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ (phân kỳ) nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ (phân kỳ).

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số :

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Giải: Các chuỗi số đã cho đều dương.

1) Khi $n \to \infty$, $\sin\frac{\pi}{2^n}$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{\pi}{2^n}$ (xem công thức (2.5)). Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ, vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ hội tụ.

2) Khi $n \to \infty$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{n}$ (xem công thức (2.12)). Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ, vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ phân kỳ.

3) Khi $n \to \infty$, $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ (xem ví dụ 1), vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ phân kỳ.

4) Khi $n \to \infty$, $e^{\frac{1}{n}} - 1$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{n}$ (xem công thức (2.13)). Do đó $\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ là một vô cùng bé tương đương với $\frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ (xem ví dụ 1), vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ hội tụ.

2.2. Quy tắc D'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l \qquad (10.3)$$

thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ khi* $l < 1$, *phân kỳ khi* $l \geq 1$.

Chứng minh: Thật vậy, giả sử $l < 1$. Chọn số $\varepsilon > 0$ khá bé sao cho $l + \varepsilon < 1$. Từ (10.3) suy ra rằng tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Từ tính chất c) của chuỗi số hội tụ, có thể xem như $n_0 = 1$. Ta có:

$$\frac{u_2}{u_1} < l + \varepsilon;$$

$$\frac{u_3}{u_2} < l + \varepsilon;$$

...

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < l + \varepsilon.$$

Nhân các đẳng thức trên từng vế một, ta được

$$\frac{u_n}{u_1} < (l+\varepsilon)^{n-1} \text{ hay } u_n < (l+\varepsilon)^{n-1}u_1.$$

Vì $l + \varepsilon < 1$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1(l+\varepsilon)^n$ hội tụ. Theo định lý 10.2, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $l > 1$, có thể xem như $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \geq 1$. Do đó

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots$$

Vậy u_n không thể dần tới 0 khi $n \to \infty$. Theo hệ quả của định lý 10.2, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.■

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương :

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Giải: 1) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}.\frac{2^n}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2.\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ hội tụ.

2) Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n} = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\frac{1}{n} \to e > 1$$

khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ phân kỳ.

Chú thích. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ có thể hội tụ, cũng có thể phân kỳ. Chẳng hạn, ta biết rằng chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ. Nếu đặt

$u_n = \frac{1}{n}$ thì $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ khi $n \to \infty$. Còn với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, nếu đặt $u_n = \frac{1}{n^2}$ ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ cũng dần tới 1 khi $n \to \infty$. Nhưng ta đã biết $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (xem ví dụ 4).

2.4. Quy tắc Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \tag{10.4}$$

thì chuỗi hội tụ nếu $l < 1$, phân kỳ nếu $l > 1$.

Bạn đọc tự chứng minh quy tắc này.

Ví dụ 4. Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương

1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n\ln n)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)^n$.

Giải: 1) Đặt $u_n = \left(\frac{1}{n\ln n}\right)^n$, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n\ln n} \to 0 < 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n\ln n)^n}$ hội tụ.

2) Đặt $u_n = \left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)^n$, ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{4n+3}{3n+4} \to \frac{4}{3} > 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)^n$ phân kỳ.

2.5. Quy tắc tích phân

Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục, dương, giảm trên khoảng $[1, +\infty)$, $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$. Đặt $u_n = f(n)$, khi đó :

a) *Nếu* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ;*

b) *Nếu* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ.*

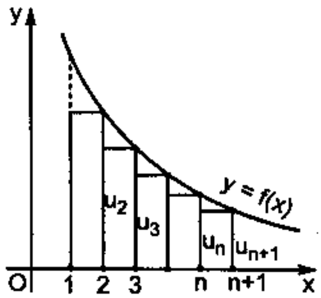
Chứng minh:

Vì $\int_1^{n+1} f(x)dx$ biểu diễn diện tích của hình giới hạn bởi trục Ox, đường y = f(x) và các đường x = 1, x = n + 1, từ các hình 10.1 và 10.2 suy ra rằng

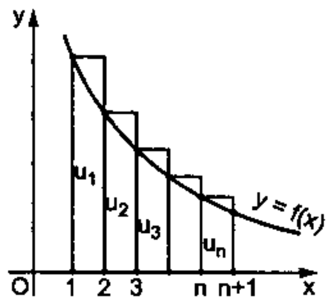
$$u_2 + ... + u_{n+1} \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le u_1 + ... + u_n.$$

Gọi s_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, bất đẳng thức kép trên có thể viết

$$s_{n+1} - u_1 \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le s_n. \tag{10.5}$$



Hình 10.1



Hình 10.2

a) Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, từ bất đẳng thức đầu của (10.5), ta có

$$s_{n+1} \le u_1 + \int_1^{n+1} f(x)dx \le u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

$u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx$ là một hằng số không phụ thuộc n, s_{n+1} bị chặn trên nên $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

b) Nếu $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ, $\int_1^{n+1} f(x)dx \to +\infty$ khi $n \to \infty$, từ bất đẳng thức sau của (10.5) suy ra rằng $s_n \to \infty$ khi $n \to \infty$, vậy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ. ■

Ví dụ 5. Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, α là hằng số. Nếu $\alpha < 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty$; nếu $\alpha = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$; trong cả hai trường hợp đó $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ nên chuỗi phân kỳ.

Xét trường hợp $\alpha > 0$, hàm số $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ thoả mãn các giả thiết của quy tắc tích phân. Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \leq 1$, nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$. Tóm lại, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, α là hằng số, gọi là *chuỗi Riemann* hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$.

§3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KỲ

3.1. Hội tụ tuyệt đối. Bán hội tụ

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, các số hạng u_n có thể dương, hoặc âm. Dãy các tổng riêng thứ n của nó không là một dãy số tăng, vì vậy nếu dãy số ấy bị chặn trên thì chưa chắc đã tồn tại $\lim_{n\to\infty} s_n$, tức là chưa chắc chuỗi số ấy đã hội tụ. Thường khi gặp chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ấy, người ta trước hết xét tính hội tụ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Định lý 10.4. *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ.*

Chứng minh: Gọi s_n và σ_n là tổng riêng thứ n của các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Đặt s_n', s_n'' theo thứ tự là tổng các số hạng dương và tổng các trị tuyệt đối của các số hạng âm trong n số hạng đầu của $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Ta có

$$s_n = s_n' - s_n'', \ \sigma_n = s_n' + s_n''.$$

Theo giả thiết, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ nên tổng riêng σ_n của nó dần tới một giới hạn xác định σ khi $n \to \infty$, với $\sigma_n \le \sigma$; do đó $s_n' \le \sigma_n \le \sigma$, $s_n'' \le \sigma_n \le \sigma$. Các dãy số $\{s_n'\}, \{s_n''\}$ tăng và bị chặn trên bởi σ, do đó tồn tại các giới hạn :

$$s' = \lim_{n \to \infty} s_n', \ s'' = \lim_{n \to \infty} s_n''.$$

Vì vậy tồn tại giới hạn

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} s_n' - \lim_{n \to \infty} s_n'' = s' - s''.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. ■

Ví dụ 1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ hội tụ, vì $\frac{|\cos n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $\forall n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (chuỗi Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Định nghĩa. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ; là *bán hội tụ* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

Chú thích: 1. Điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ là một điều kiện đủ để $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ chứ không là điều kiện cần. Ta sẽ thấy có thể $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ mà $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

2. Nếu dùng quy tắc D'Alembert hay quy tắc Cauchy mà xác định được rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì có thể khẳng định được rằng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ, vì khi ấy $|u_n|$ không dần tới 0 khi $n \to \infty$, nên u_n cũng không dần tới 0 khi $n \to \infty$.

3.2. Chuỗi đan dấu

Xét chuỗi có dạng sau đây gọi là *chuỗi đan dấu :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \qquad (10.6)$$

trong đó $u_n > 0, \forall n \geq 1$.

Định lý 10.5 *(định lý Leibniz). Nếu :*

a) $0 < u_{n+1} \leq u_n, \ \forall n \geq 1,$

b) $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

thì chuỗi đan dấu (10.6) hội tụ và có tổng $s \leq u_1$.

Chứng minh: Nếu n là số chẵn, n = 2m ta có

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Do a) tổng trong các dấu ngoặc đều dương, nên s_{2m} tăng khi m tăng. Mặt khác

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Cũng do a) ta có $s_{2m} < u_1$, $\forall m \geq 1$. Dãy số $\{u_{2m}\}$ tăng và bị chặn trên, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2m} = s$, với $s \leq u_1$.

Nếu n lẻ, $n = 2m + 1$, ta có

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Do b) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2m+1} = 0$, nên

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2m} = s.$$

Vậy chuỗi đan dấu hội tụ và có tổng $s \leq u_1$. ■

Ví dụ 2. Chuỗi đan dấu điều hoà

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

hội tụ vì nó thoả mãn các điều kiện của định lý 10.5. Vì

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},\ \forall n \geq 1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Chú ý rằng chuỗi điều hoà đan dấu hội tụ, nhưng chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ nên chuỗi điều hoà đan dấu bán hội tụ.

Ví dụ 3. Chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ không thoả mãn điều kiện b) của định lý 10.5. Vì

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

nên nó phân kỳ.

3.3. Vài tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối

Ta biết rằng tổng của một số hữu hạn số hạng có tính giao hoán và tính kết hợp : nó không đổi khi ta đổi thứ tự của các số hạng của nó hay khi ta nhóm một số số hạng lại một cách tuỳ ý trước khi cộng. Nhưng điều đó không còn đúng đối với tổng của một số vô hạn các số hạng có dấu bất kỳ.

Ví dụ 4. Xét chuỗi đan dấu điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Nó hội tụ, gọi s là tổng của nó.

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \qquad (*)$$

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}(-1)^{n-1}$ cũng hội tụ và có tổng $\frac{s}{2}$:

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Chèn thêm số 0 vào giữa các số hạng của chuỗi này ta được

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots \qquad (**)$$

Cộng hai đẳng thức (*) và (**) từng vế một, ta được

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \qquad (***)$$

Để ý rằng chuỗi ở (***) cũng chứa những số hạng của chuỗi ở (*) nhưng được sắp xếp lại sao cho một số hạng âm nằm giữa hai số hạng dương. Tuy nhiên tổng của hai chuỗi ấy khác nhau. Riemann đã chứng minh được rằng, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ thì có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để chuỗi số thu được hội tụ và có tổng bằng một số bất kỳ cho trước.

Nhưng đối với chuỗi số hội tụ tuyệt đối, người ta đã chứng minh được các tính chất sau.

Tính chất 1. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng s thì chuỗi số suy từ nó bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng và bằng cách nhóm tuỳ ý một số số hạng lại cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng s.

Định nghĩa. Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ, người ta gọi *tích* của chúng là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, trong đó $w_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k}$.

Tính chất 2. Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng s và s' thì tích của chúng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng ss'.

§4. CHUỖI LUỸ THỪA

4.1. Định nghĩa

Người ta gọi *chuỗi luỹ thừa* là chuỗi mà số hạng tổng quát của nó là hàm số có dạng $a_n x^n$, trong đó a_n là hằng số.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (10.7)$$

a_n gọi là *hệ số* của chuỗi luỹ thừa. Nếu cho $x = x_0$ mà chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ, ta nói rằng chuỗi luỹ thừa (10.7) hội tụ tại x_0, x_0 là *điểm hội tụ* của chuỗi luỹ thừa. Tập hợp tất cả các điểm hội tụ của chuỗi luỹ thừa được gọi là *miền hội tụ* của nó. Vấn đề cơ bản đầu tiên khi xét một chuỗi luỹ thừa là tìm miền hội tụ của nó.

Ví dụ 1. Chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

là một chuỗi nhân công bội x. Nếu $|x| < 1$, nó hội tụ và có tổng $\frac{1}{1-x}$; nếu $|x| \geq 1$, nó phân kỳ. Vậy miền hội tụ của nó là khoảng mở $(-1, 1)$.

Chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (10.8)$$

gọi là *chuỗi luỹ thừa theo $(x - x_0)$* hay *chuỗi luỹ thừa ở lân cận x_0*. Bằng cách đặt $x - x_0 = X$, chuỗi luỹ thừa (10.8) được đưa về dạng (10.7): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$.

4.2. Bán kính hội tụ. Miền hội tụ

4.2.1. Bán kính hội tụ

Định lý 10.6 (Abel). *a) Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x với $|x| < |x_0|$.*

b) Nếu nó phân kỳ tại $x = x_1$ thì nó phân kỳ tại mọi x với $|x| > |x_1|$.

Chứng minh: a) Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại x_0, chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ, do đó số hạng tổng quát $a_n x_0^n$ dần tới 0 khi $n \to \infty$, vì vậy dãy số $\{a_n x_0^n\}$ bị chặn, tức là tồn tại một số dương M nào đó sao cho

$$|a_n x_0^n| \le M, \forall n \ge 0.$$

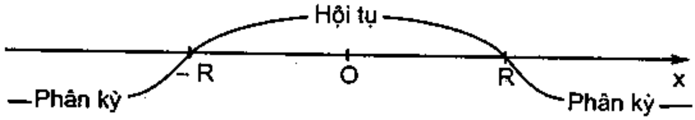
Ta viết

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |a_n x_0^n| . \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \ \forall n \ge 0.$$

Chuỗi $M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ nếu $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, tức là $|x| < |x_0|$. Do đó theo định lý so sánh 10.2, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ hội tụ, vậy chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi x với $|x| < |x_0|$.

b) Giả sử chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_1. Nếu nó hội tụ tại x_2 với $|x_2| > |x_1|$ thì theo a) nó hội tụ tại mọi x mà $|x| < |x_2|$, đặc biệt tại x_1, điều này trái với giả thiết, vậy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại mọi x mà $|x| > |x_1|$. ■

Rõ ràng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại x = 0. Từ định lý Abel suy ra rằng tồn tại một số $R \ge 0$ sao cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trong khoảng (− R, R) và phân kỳ trong các khoảng $(-\infty, -R)$ và $(R, +\infty)$. Số R đó gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi luỹ thừa, khoảng (−R, R) gọi là *khoảng hội tụ* của chuỗi luỹ thừa. Tại x = −R và x = R chuỗi có thể hội tụ, cũng có thể phân kỳ.



Hình 10.3

4.2.2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa

Định lý 10.7. *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$, *hoặc* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, *thì bán kính hội tụ R của chuỗi luỹ thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *được cho bởi công thức*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty, \\ 0 & \text{nếu } \rho = +\infty, \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases} \tag{10.9}$$

Chứng minh: Áp dụng quy tắc D'Alembert vào chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.|x| = \rho|x|.$$

Nếu $0 < \rho < +\infty$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $\rho|x| < 1$, tức là $|x| < \dfrac{1}{\rho}$. Còn khi $\rho|x| > 1$, tức là $|x| > \dfrac{1}{\rho}$, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ phân kỳ, vì vậy chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng phân kỳ (xem chú thích 2 mục 3.1). Vậy $R = \dfrac{1}{\rho}$.

Nếu $\rho = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = +\infty, \forall x \neq 0$, vậy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại mọi $x \neq 0$. Do đó $R = 0$.

Nếu $\rho = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = 0 < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $R = +\infty$.

Trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ được chứng minh tương tự. ■

4.2.3. Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

Muốn tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa, ta tìm bán kính hội tụ R để xác định khoảng hội tụ (–R, R) của nó, rồi xét sự hội tụ của nó tại hai điểm $x = \pm R$.

Ví dụ 2. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n}$.

Ta có $a_n = \frac{1}{n2^n}$, do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.2^n}{(n+1).2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}.\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Vậy R = 2. Chuỗi hội tụ trong khoảng (–2, 2). Tại x = –2, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, đó là một chuỗi đan dấu, thoả mãn cả hai điều kiện của định lý Leibniz nên nó hội tụ. Tại x = 2, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, đó là chuỗi điều hoà, nó phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là khoảng [–2, 2).

Ví dụ 3. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Do đó $R = +\infty$, chuỗi luỹ thừa đã cho hội tụ trên toàn $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (x+3)^n$.

Đặt x + 3 = X, ta được chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n X^n$.

Vì $$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \text{ nên } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Do đó R = 1. Khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n X^n$ là (−1, 1), do đó chuỗi luỹ thừa đã cho hội tụ trong khoảng (−4, −2). Khi x = −2, ta được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, số hạng tổng quát của nó có thể viết là $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, nó dần tới $\frac{1}{e} \neq 0$ khi $n \to \infty$, nên chuỗi số đó phân kỳ. Khi x = −4, ta được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, số hạng tổng quát của nó cũng không dần tới 0 khi $n \to \infty$, chuỗi số ấy cũng phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là khoảng (−4, −2).

4.3. Các tính chất của chuỗi luỹ thừa

Ta thừa nhận định lý sau đây :

Định lý 10.8. *Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ R, có tổng f(x) thì hàm số*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

khả vi, do đó liên tục trong khoảng (−R, R) và :

$$a)\ f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} ;$$

$$b)\ \int f(x)dx = C + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + ... + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + ... = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

C là hằng số tuỳ ý. Bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa ở a) và b) đều bằng R.

Chú thích. Các đẳng thức a) và b) có thể viết :

a') $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n) ;$$

b') $$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n dx .$$

Ta nói rằng có thể lấy đạo hàm và tích phân từng số hạng một chuỗi luỹ thừa.

Muốn xác định miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa ở vế phải của a) và b), còn phải xét sự hội tụ của chúng tại các mút x = R và x = –R.

Ví dụ 5. Chuỗi nhân $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ hội tụ khi $|x| < 1$ và có tổng $\frac{1}{1-x}$. Ta có

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..., \quad |x| < 1.$$

Lấy đạo hàm hai vế, áp dụng công thức a), ta được

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ..., \quad |x| < 1.$$

Lấy tích phân hai vế, áp dụng công thức b), ta được

$$-\ln(1-x) = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{n+1}}{n+1} + ..., \quad |x| < 1$$

Muốn xác định C, thay x = 0 vào hai vế của đẳng thức trên, ta được

$$-\ln 1 = C, \text{ do đó } C = 0$$

Vậy

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^{n+1}}{n+1} - ..., \quad |x| < 1.$$

Cho $x = \frac{1}{2}$, vì $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, ta được

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + ... + \frac{1}{n.2^n} + ...$$

4.4. Khai triển một hàm số thành chuỗi luỹ thừa

• Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của một chuỗi luỹ thừa trong lân cận ấy, tức là

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ..., \qquad (10.10)$$

Theo các tính chất của chuỗi luỹ thừa, ta có

$$\begin{cases} f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + ... + na_n(x-x_0)^{n-1} + ... \\ f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x-x_0) + ... + n(n-2)a_n(x-x_0)^{n-2} + ... \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = n!.a_n + ... \\ \vdots \end{cases} \qquad (10.11)$$

Thế $x = x_0$ vào các đẳng thức trên, ta được

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

Vậy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{10.12}$$

Chuỗi luỹ thừa đó gọi là *chuỗi Taylor* của hàm số f(x) ở lân cận x_0. Nếu $x_0 = 0$, ta có

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{10.13}$$

Chuỗi luỹ thừa này gọi là *chuỗi Mac Laurin* của hàm số f(x).

Như vậy, nếu hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp và có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của một chuỗi luỹ thừa trong một lân cận nào đó của điểm x_0 thì chuỗi luỹ thừa đó phải là chuỗi Taylor của hàm số đó trong lân cận ấy.

• Bây giờ vấn đề cần xem xét là với điều kiện nào chuỗi Taylor của hàm số f(x) hội tụ và có tổng đúng bằng f(x). Khi đó ta nói rằng hàm số f(x) đã được khai triển thành chuỗi Taylor. Vậy ta cần tìm điều kiện để có thể khai triển hàm số f(x) thành chuỗi Taylor.

Theo công thức Taylor (công thức (3.5), chương III), hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp ở lân cận x_0 có thể khai triển thành

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

trong đó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{10.14}$$

ξ là một điểm nào đó giữa x và x_0. Do đó nếu

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{10.15}$$

thì

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

tức là hàm số f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0.

Định lý 10.9. *Nếu trong một lân cận nào đó của x_0, hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp và trong lân cận ấy*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M,\ \forall n \ge 0, \tag{10.16}$$

M là một số dương nào đó, thì hàm số $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.

Chứng minh: Từ (10.16), ta có

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}.$$

Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ tuyệt đối trên toàn $\mathbb{R}$, nên $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó $\frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Theo nhận xét trên, f(x) có thể khai triển được thành chuỗi Taylor. ■

Ví dụ 6. Xét hàm số $f(x) = e^x$. Tại mọi $x \in \mathbb{R}$, hàm số e^x đều có đạo hàm mọi cấp, $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \ge 0$, do đó

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1.$$

Vậy chuỗi Mac Laurin của hàm số $f(x) = e^x$ có dạng

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Giả sử A là một số dương bất kỳ. Ta có $\forall x \in (-A, A)$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^A,\ \forall n \ge 0.$$

Do đó theo định lý 10.9, hàm số $f(x) = e^x$ khai triển được thành chuỗi Mac Laurin trong khoảng $(-A, A)$. Vì A là một số dương bất kỳ, nên hàm số có thể khai triển thành chuỗi Mac Laurin trên toàn $\mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{10.17}$$

Ví dụ 7. Xét hàm số f(x) = sinx. Nó xác định trên toàn $\mathbb{R}$, có đạo hàm mọi cấp

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \ge 1.$$

Vậy hàm số sinx có thể khai triển được thành chuỗi Mac Laurin trên $\mathbb{R}$. Vì $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$..., ta được

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (10.18)$$

Ví dụ 8. Xét hàm số f(x) = cosx. Có thể khai triển trực tiếp như ở ví dụ 7, nhưng đơn giản hơn ta lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi luỹ thừa (10.18) theo tính chất của chuỗi luỹ thừa, ta được

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (10.19)$$

Ví dụ 9. Xét hàm số $f(x) = (1 + x)^\alpha$, α là một số thực bất kỳ. Ta có: f(0) = 1,

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha,$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha - 1),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n} \qquad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Do đó chuỗi Mac Laurin của hàm số $(1 + x)^\alpha$ là

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Để tìm bán kính hội trụ của chuỗi luỹ thừa đó, ta tính

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1.$$

Vậy khoảng hội tụ của nó là (−1, 1). Người ta chứng minh được rằng, trong khoảng ấy tổng của chuỗi Mac Laurin của hàm số $(1+x)^\alpha$ đúng bằng $(1+x)^\alpha$. Vậy

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+... \quad (10.20)$$

Ví dụ 10. Xét hàm số $f(x)=\ln(1+x)$. Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}.$$

Áp dụng công thức (10.20), ta được

$$f'(x)=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+...,\quad -1<x<1.$$

Lấy tích phân từng số hạng chuỗi luỹ thừa trên, ta được

$$\ln(1+x)=C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...,\quad -1<x<1,$$

C là hằng số tuỳ ý. Để xác định C, cho x = 0 trong hai vế của đẳng thức trên, ta được $\ln 1=0=C$. Vậy

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...,\quad -1<x<1.$$

Khi x = +1, ta có chuỗi số $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^n\frac{1}{n}+...$, đó là một chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lý Leibniz, nó hội tụ.

Khi x = −1, ta có chuỗi số $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}...$, nó phân kỳ. Vậy

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+...,-1<x\le 1. \quad (10.21)$$

4.5. Công thức Euler

Công thức (10.17) khai triển hàm số mũ $f(x)=e^x$ cho phép ta mở rộng định nghĩa hàm số mũ với biến số độc lập là số phức.

Chuỗi hàm số

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+...$$

hội tụ tại mọi $z \in \mathbb{C}$, tổng của nó theo định nghĩa là hàm số e^z. Nếu $z = x \in \mathbb{R}$, ta được hàm số mũ thực e^x. Nếu $z = ix$ với $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1+\frac{ix}{1!}+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+...+\frac{i^nx^n}{n!}+... \\ &= \left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...\right]+ \\ &\qquad +i\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...\right] \end{aligned}$$

Vậy

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x. \tag{10.22}$$

Do đó

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x. \tag{10.23}$$

Cộng vế với vế hai công thức (10.22), (10.23) rồi chia cho 2, ta được

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \tag{10.24}$$

Trừ vế với vế hai đẳng thức (10.22) và (10.23) rồi chia cho 2i, ta được

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{10.25}$$

Các công thức (10.22), (10.23), (10.24), (10.25) gọi là *công thức Euler*.

4.6. Ứng dụng chuỗi luỹ thừa để tính gần đúng

4.6.1. Tính giá trị gần đúng của hàm số tại một điểm

Giả sử hàm số f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm x_0

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

Khi đó với mọi x thuộc lân cận đó, ta có thể xấp xỉ f(x) bởi tổng riêng

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Tổng riêng ấy là một đa thức đối với $(x - x_0)$. Việc tính toán với các đa thức rõ ràng là rất đơn giản so với các hàm số khác. Sai số phạm phải có thể ước lượng bởi giá trị tuyệt đối của phần dư

$$|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Nếu chuỗi Taylor của hàm số f(x) tại một điểm x nào đó là một chuỗi đan dấu thì ta có thể ước lượng sai số bởi định lý Leibniz.

Ví dụ 11. Tính gần đúng $\sqrt[4]{e}$ với độ chính xác 0,0001.

Vì $\sqrt[4]{e} = e^{\frac{1}{4}}$, ta khai triển hàm e^x ở lân cận điểm $x_0 = 0$. Ta có

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

trong đó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

ξ nằm giữa 0 và x. Lấy $x = \frac{1}{4}$, ta có

$$e^\xi < e^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} < 2.$$

Do đó

$$\left|R_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{2}{(n+1)!4^{n+1}} = \frac{1}{2.4^n.(n+1)!}.$$

Vậy cần tìm n sao cho

$$\frac{1}{2.4^n(n+1)!} < 0{,}0001$$

Thử trực tiếp ta thấy với n = 4, ta có

$$\left|R_4\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{1}{2.4^4.5!} = \frac{1}{61440} < 0{,}00002 < 0{,}0001.$$

và

$$\sqrt[4]{e} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2.2!} + \frac{1}{4^3.3!} + \frac{1}{4^4.4!} \approx 1{,}28402.$$

Ví dụ 12. Tính gần đúng $f(x) = \sqrt[3]{x}$ bằng tổng riêng thứ 2 của chuỗi Taylor ở lân cận điểm x = 8 của nó, ước lượng sai số phạm phải nếu $x \in [7, 9]$.

Ta có:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \qquad f(8) = 2,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad f'(8) = \frac{1}{12},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \qquad f''(8) = -\frac{1}{144},$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}.$$

Do đó

$$\sqrt[3]{x} = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 + R_2(x)$$

$$= 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + R_2(x),$$

trong đó

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-8)^3 = \frac{10}{27}\xi^{-\frac{8}{3}}\frac{(x-8)^3}{3!} = \frac{5(x-8)^3}{81.\xi^{\frac{8}{3}}},$$

ξ là một số nằm giữa 8 và x. Vì $7 \le x \le 9$ nên $|x-8| \le 1$, do đó $|x-8|^3 < 1$. Hơn nữa $\xi > 7$ nên

$$\xi^{\frac{8}{3}} > 7^{\frac{8}{3}} > 179$$

Vậy

$$|R_2(x)| = \frac{5|x-8|^3}{81.\xi^{\frac{8}{3}}} < \frac{5.1}{81.179} < 0{,}004.$$

Đó là sai số phạm phải khi tính gần đúng với $x \in [7, 9]$.

4.6.2. Tính gần đúng tích phân

Nếu hàm số f(x) có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa trong một khoảng nào đó thì $\int f(x)dx$ cũng có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa trong khoảng ấy.

Ví dụ 13. Tính gần đúng $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$ với độ chính xác 0,001.

Giải: Vì nguyên hàm của hàm số e^{-x^2} không phải là một hàm số sơ cấp nên không thể dùng công thức Newton Leibniz để tính tích phân này. Nhưng hàm số ấy có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa trên $\mathbb{R}$. Từ công thức (10.17) ta suy ra

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Do đó

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots$$

Vì vậy

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{1!3.2^3} + \frac{1}{2!5.2^5} - \frac{1}{3!7.2^7} + \dots$$

Vế phải là một chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lý Leibniz. Nếu ta tính xấp xỉ bởi tổng riêng thứ 3 thì sai số phạm phải nhỏ hơn trị tuyệt đối của số hạng thứ tư

$$\frac{1}{3!.7.2^7} = \frac{1}{5370} < 0{,}001.$$

Vậy

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{2.5.2^5} \approx 0{,}4644$$

với độ chính xác 0,001.

Ví dụ 14. Tính gần đúng $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ với độ chính xác 0,001.

Giải: Vì $x \geq 2$ nên $x^3 \geq 8$, do đó không thể áp dụng công thức (10.20) để khai triển $\frac{1}{1+x^3} = (1+x^3)^{-1}$ thành chuỗi luỹ thừa, công thức ấy chỉ đúng khi $x^3 < 1$. Ta có

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1}.$$

Vì $\frac{1}{x^3}\le\frac{1}{8}$, ta có thể khai triển $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1}$ thành chuỗi luỹ thừa đối với $\frac{1}{x^3}$. Ta được

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{x^3}\left[1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6}-...+(-1)^n\frac{1}{x^{3n}}+...\right]$$

$$=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^9}-...+(-1)^n\frac{1}{x^{3n+3}}+...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{3n+3}}.$$

Do đó

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)x^{3n+2}}\Bigg|_{+\infty}^{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2).2^{3n+2}}.$$

Vì chuỗi ở vế phải là chuỗi đan dấu thoả mãn điều kiện của định lý Leibniz nên nếu ta tính gần đúng bằng tổng của k số hạng đầu thì sai số phạm phải nhỏ hơn

$$\frac{1}{(3k+5).2^{3k+5}}.$$

Sai số ấy nhỏ hơn 0,001 nếu $k\ge 1$. Do đó

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}\approx\frac{1}{8}-\frac{1}{160}=0,118.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa chuỗi số, chuỗi số hội tụ, chuỗi số phân kỳ, tổng của chuỗi số.
2. Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ là gì ? Hệ quả của nó.

3. Định nghĩa chuỗi số dương. Vì sao nếu một chuỗi số dương phân kỳ thì tổng riêng thứ n của nó dần tới $+\infty$ khi $n \to \infty$.

4. Phát biểu các định lý so sánh. Vì sao các định lý so sánh chỉ đúng với các chuỗi số dương.

5. Phát biểu các quy tắc D'Alembert, Cauchy và tích phân đối với các chuỗi số dương và nêu các ví dụ ứng dụng của chúng.

6. Định nghĩa chuỗi số đan dấu. Phát biểu định lý Leibniz và hệ quả của nó khi tính gần đúng tổng của một chuỗi số đan dấu hội tụ bằng tổng riêng thứ n của nó.

7. Quy tắc để xét sự hội tụ một chuỗi số có dấu bất kỳ. Định nghĩa chuỗi số hội tụ tuyệt đối, chuỗi số bán hội tụ.

8. Định nghĩa chuỗi luỹ thừa. Phát biểu và chứng minh định lý Abel. Định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa và phát biểu quy tắc tìm bán kính hội tụ.

9. Phát biểu quy tắc tìm miền hội tụ của một chuỗi luỹ thừa. Cho một ví dụ tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

10. Phát biểu các tính chất của chuỗi luỹ thừa.

11. Thế nào là một hàm số khai triển được thành chuỗi luỹ thừa. Điều kiện để một hàm số khai triển được thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận một điểm.

12. Trình bày các khai triển thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận gốc 0 của một số hàm số sơ cấp.

13. Nêu một số ứng dụng của chuỗi luỹ thừa.

14. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đúng ?

1) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

2) Nếu $0 \le a_n \le b_n$ và nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

3) Có thể xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}$ bằng quy tắc D'Alembert.

4) Có thể xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ bằng quy tắc D'Alembert.

5) Có thể khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(\ln n)^n}$ bằng quy tắc Cauchy.

6) Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ phân kỳ.

7) $a_0 + a_1\sin x + a_2\sin^2 x + ... + a_n\sin^n x + ...$ là một chuỗi luỹ thừa đối với x.

8) Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 4^n$ hội tụ thì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n$ cũng hội tụ.

9) Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ cũng hội tụ.

10) Nếu hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp trên $\mathbb{R}$ thì nó có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa trên $\mathbb{R}$.

11) Nếu chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ cũng hội tụ.

12) Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$ thì chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ có bán kính hội tụ R^2.

BÀI TẬP

1. Xét sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây. Nếu chuỗi nào hội tụ, hãy tính tổng của nó.

1) $u_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $(n \geq 1)$; 2) $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$, $(n \geq 1)$;

3) $u_n = 4^{-n}.9^{n+2}, (n \geq 1)$;

4) $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 3}, (n \geq 1)$;

5) $u_n = \dfrac{2}{n^2 + n}, (n \geq 1)$;

6) $u_n = \dfrac{3n}{2n + 1}, (n \geq 1)$;

7) $u_n = \dfrac{1}{4n^2 - 1}, (n \geq 1)$;

8) $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{5^n}, (n \geq 1)$;

9) $u_n = \dfrac{3^n + 4^n}{6^n}, (n \geq 1)$;

10) $u_n = \dfrac{2n + 1}{n^2(n + 1)^2}, (n \geq 1)$.

2. Áp dụng các định lý so sánh, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n^5}$;

2) $u_n = \dfrac{1}{n^2 2^n}$;

3) $u_n = \dfrac{2 + 5^n}{3^n}$;

4) $u_n = \dfrac{1}{n(n + 2)}$;

5) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^4 + 3}}$;

6) $u_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$;

7) $u_n = \dfrac{n}{2n^2 - 1}$;

8) $u_n = \dfrac{4}{(n + 1)(2n - 1)}$;

9) $u_n = \dfrac{1 + 3^n}{2 + 5^n}$;

10) $u_n = \dfrac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}} - 1)$;

11) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

12) $u_n = \dfrac{2n^2 + n + 1}{n^3 + n^2 + 1}$;

13) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1 + n^3}$;

14) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$;

15) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}, (n \geq 3)$;

16) $u_n = \dfrac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

3. Áp dụng các quy tắc D'Alembert, Cauchy và tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{n^3}{3^n}$;

2) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

3) $u_n = \left(\dfrac{1+2n}{3n-2}\right)^n$;

4) $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}$; $(n \geq 3)$;

5) $u_n = \left(\dfrac{4n^2-1}{5n^2+2}\right)^{n^2}$;

6) $u_n = \dfrac{n.4^n}{(n+1)5^{n+1}}$;

7) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

8) $u_n = \sin^n\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{n}\right)$, $(n \geq 2)$;

9) $u_n = e^{-n^2}$;

10) $u_n = (n+1)e^{-n^2}$;

11) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n+2n}$;

12) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$;

13) $u_n = \mathrm{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2n^2}\right)$;

14) $u_n = \dfrac{4.7.10...(3n+1)}{2.6.10...(4n-2)}$;

15) $u_n = \dfrac{1}{(3n+1).3^{3n+1}}$;

16) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$, $(n \geq 2)$.

4. Xét sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối hay bán hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{n\sqrt{n}}$;

2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ (α là hằng số dương) ;

3) $u_n = \dfrac{\cos\left(n.\dfrac{\pi}{3}\right)}{n!}$;

4) $u_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2}$;

5) $u_n = (-1)^n\dfrac{2n^2-1}{3n^2+1}$;

6) $u_n = \dfrac{1}{2^n}\sin n\theta$, ($\theta$ là hằng số) ;

7) $u_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$;

8) $u_n = (-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$, $(n \geq 3)$;

9) $u_n = (-1)^n\dfrac{n^2}{n^3+1}$;

10) $u_n = \dfrac{(-10)^{n-1}}{n!}$;

11) $u_n = (-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}$;

12) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

5. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

1) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^2 + 3}$;   2) $u_n = \sin n$;

3) $u_n = \dfrac{(2n)^n}{n^{2n}}$;   4) $u_n = \dfrac{1}{2 + \left(\dfrac{2}{e}\right)^n}$;

5) $u_n = n^3 e^{-n^4}$;   6) $u_n = (\sqrt[n]{2} - 1)^n$;

7) $u_n = \dfrac{n^2 + 3}{2.3^n}$;   8) $u_n = (-1)^n \dfrac{7^n}{3^{2n+1}}$;

9) $u_n = \dfrac{(n+3)!}{n!3^n}$;   10) $u_n = \dfrac{3^3 - n^3}{3^n}$;

11) $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2 + 4n}$;   12) $u_n = \dfrac{\sqrt[4]{n} + 4}{n(\sqrt[3]{n} + 2)}$;

13) $u_n = \dfrac{(-3)^n n^3}{(n+3)!}$.

6. Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

1) $u_x(x) = nx^n$;   2) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$;

3) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$;   4) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n2^n}$;

5) $u_n(x) = \dfrac{3^n x^n}{(n+1)^2}$;   6) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{\ln n}$, $(n \geq 3)$;

7) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n-1)}$, $(n \geq 2)$;   8) $u_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$;

9) $u_n(x) = \dfrac{(-x)^n}{n^\alpha}$ (α là hằng số dương) ;

10) $u_n(x) = \dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$;   11) $u_n(x) = \dfrac{(x-2)^n}{n^n}$;

12) $u_n(x) = \dfrac{1}{n(x+2)^n}$.

7. Tìm chuỗi Taylor của hàm số f(x) ở lân cận $x = x_0$:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;   2) $f(x) = \dfrac{1}{x},\quad x_0 = 1$;

3) $f(x) = \ln x,\quad x_0 = 2$.

8. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận $x_0 = 0$ các hàm số sau :

1) $f(x) = x\cos^2 x$;   2) $f(x) = xe^{-x}$;

3) $f(x) = x\sin\dfrac{x}{3}$;   4) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

5) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $(x \geq -1)$;

9. Tính các số sau với độ chính xác 0,0001 :

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$;   2) $\cos 18^0$;

3) ln(1,04).

10. Tính các tích phân sau với độ chính xác 0,001

1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$;   2) $\int_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Đáp số

1. 1) 8 ; 2) 4 ; 3) phân kỳ ; 4) phân kỳ ; 5) 2 ;

6) phân kỳ ; 7) $\dfrac{1}{2}$; 8) $\dfrac{5}{4}$; 9) $\dfrac{5}{2}$; 10) 1.

2. 1) hội tụ ; 2) hội tụ ; 3) phân kỳ ; 4) hội tụ ; 5) hội tụ ;

6) hội tụ ; 7) phân kỳ ; 8) hội tụ ; 9) hội tụ ; 10) hội tụ ;

11) phân kỳ ; 12) phân kỳ ; 13) hội tụ ;
14) hội tụ ; 15) phân kỳ ; 16) phân kỳ.

3. 1) hội tụ ; 2) hội tụ ; 3) hội tụ ;
4) phân kỳ ; 5) hội tụ ; 6) hội tụ ;
7) hội tụ ; 8) phân kỳ ; 9) hội tụ ;
10) hội tụ ; 11) hội tụ ; 12) hội tụ ;
13) hội tụ ; 14) hội tụ ; 15) hội tụ ;
16) hội tụ.

4. 1) hội tụ tuyệt đối ; 2) hội tụ tuyệt đối nếu $\alpha > 1$, bán hội tụ nếu $\alpha \le 1$;
3) hội tụ tuyệt đối ; 4) phân kỳ ; 5) phân kỳ ;
6) hội tụ tuyệt đối ; 7) bán hội tụ ; 8) bán hội tụ ;
9) bán hội tụ ; 10) hội tụ tuyệt đối ; 11) bán hội tụ ;
12) phân kỳ.

5. 1) hội tụ ; 2) phân kỳ ; 3) hội tụ ;
4) hội tụ ; 5) hội tụ ; 6) hội tụ ;
7) hội tụ ; 8) hội tụ tuyệt đối ; 9) hội tụ ;
10) hội tụ ; 11) hội tụ tuyệt đối ; 12) hội tụ ;
13) hội tụ tuyệt đối.

6. 1) $(-1, 1)$; 2) $[-1, 1]$; 3) $[-1, 1)$;
4) $(-2, 2]$; 5) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$; 6) $[-1, 1)$;
7) $[-1, 1]$; 8) $[-2, 0)$;
9) $(-1, 1]$ nếu $0 < \alpha \le 1$; $[-1, 1]$ nếu $\alpha > 1$;
10) $x > 0$; 11) $(-\infty, +\infty)$; 12) $(-\infty, -3] \cup (-1, +\infty)$.

7. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$;

3) $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.2^n}(x-2)^n$.

8. 1) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$; 4) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$;

5) $1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2^n n!}x^n$;

9. 1) 0,8187 ; 2) 0,9511 ; 3) 0,0392.

10. 1) 0,747 ; 2) 0,098.

Chương XI

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mục đích yêu cầu

- Chương này trình bày những khái niệm cơ bản về phương trình vi phân : định nghĩa phương trình vi phân, cấp, nghiệm riêng và nghiệm tổng quát, tích phân riêng và tích phân tổng quát, đường cong tích phân của phương trình vi phân, phương pháp giải một số phương trình vi phân cấp một và các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số không đổi, một số ứng dụng của phương trình vi phân, phương pháp tìm nghiệm của một số phương trình vi phân dưới dạng chuỗi lũy thừa.
- Sinh viên cần hiểu rõ các khái niệm cơ bản đó, nhận dạng được các phương trình đã học, giải được các phương trình đó, hiểu được ý nghĩa hình học hay thực tiễn của các bài toán đặt ra.

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Người ta gọi *phương trình vi phân* là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{11.1}$$

trong đó x là biến số độc lập; $y = y(x)$ là hàm số phải tìm; $y', y'', ..., y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

Cấp cao nhất của các đạo hàm của y có mặt trong phương trình gọi là *cấp* của phương trình. Chẳng hạn, $yy' = e^{xy}\sin x$ là phương trình vi phân cấp một, $x^2y'' - 3xy' + 2y = e^x$ là phương trình vi phân cấp hai, còn (11.1) là phương trình vi phân cấp n.

Phương trình vi phân (11.1) được gọi là *tuyến tính* nếu biểu thức F là bậc nhất đối với $y, y', ..., y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{11.2}$$

trong đó $a_1(x), ..., a_n(x), f(x)$ là những hàm số cho trước.

Người ta gọi *nghiệm* của phương trình vi phân là mọi hàm số thoả mãn phương trình ấy, tức là mọi hàm số sao cho khi thế chúng vào phương trình ta được một đồng nhất thức. Chẳng hạn, các hàm số $y = C_1\cos x + C_2\sin x$, trong đó C_1, C_2 là những hằng số tuỳ ý, đều là nghiệm của phương trình

$$y'' + y = 0.$$

Thật vậy, ta có

$$y' = -c_1\sin x + c_2\cos x,$$

$$y'' = -c_1\cos x - c_2\sin x.$$

Do đó

$$y'' + y = C_1\cos x + C_2\sin x - C_1\cos x - C_2\sin x = 0.$$

Cho C_1, C_2 lấy những giá trị khác nhau, ta được những nghiệm khác nhau của phương trình ấy. Vậy phương trình vi phân $y'' + y = 0$ có vô số nghiệm.

Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học, mỗi nghiệm của phương trình vi phân xác định một đường cong, gọi là *đường cong tích phân* của phương trình. Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các đường cong tích phân của nó. Các đường cong ấy được xác định bởi phương trình $y = \varphi(x)$, hoặc bởi phương trình $\Phi(x, y) = 0$, hoặc bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Trong chương này, một số phương trình vi phân cấp một được xét ở §2, còn các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số không đổi được xét ở §3. Phương pháp tìm nghiệm của một số phương trình vi phân dưới dạng chuỗi luỹ thừa được trình bày ở cuối §3.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp một

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là :

$$F(x, y, y') = 0. \tag{11.3}$$

Nếu giải được phương trình (11.3) đối với y', phương trình ấy có dạng

$$y' = f(x, y). \tag{11.4}$$

Chẳng hạn, $y' + xy = xe^x$ và $yy' + x^2 + y^2 = 0$ là những phương trình vi phân cấp một, mà phương trình đầu là tuyến tính.

Xét phương trình

$$y' - y = 0. \tag{11.5}$$

Ta dễ dàng thấy rằng các hàm số

$$y = Ce^x, \tag{11.6}$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý, là nghiệm của phương trình (11.5). Nếu muốn tìm một nghiệm xác định của phương trình (11.5), ta phải đặt thêm một điều kiện, chẳng hạn y lấy giá trị bằng 2 khi x = 0. Điều kiện này thường được viết là

$$y\big|_{x=0} = 2 \quad \text{hay} \quad y(0) = 2. \tag{11.7}$$

Thế điều kiện (11.7) vào (11.6), ta được

$$2 = Ce^0 = C.$$

Vậy nghiệm của phương trình (11.5) thoả mãn điều kiện (11.7) là $y = 2e^x$.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (11.5) thoả mãn điều kiện (11.7) gọi là *bài toán giá trị ban đầu* (hay *bài toán Cauchy*) đối với phương trình (11.5). Điều kiện (11.7) gọi là *điều kiện ban đầu.*

Nghiệm (11.6) gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình (11.5). Nếu cho hằng số tuỳ ý C trong nghiệm tổng quát lấy một giá trị xác định C_0 thì nghiệm tương ứng gọi là *nghiệm riêng* của phương trình.

Đôi khi ta không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà chỉ tìm được một hệ thức có dạng $\Phi(x, y, C) = 0$, nó xác định nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn. Hệ thức ấy gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân. Nếu cho hằng số tuỳ ý C lấy một giá trị xác định C_0 thì biểu thức $\Phi(x, y, C_0)$ gọi là *tích phân riêng* của phương trình.

Người ta đã chứng minh được rằng, nếu f và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trong một miền D đóng, bị chặn của mặt phẳng xOy và nếu $(x_0, y_0) \in D$ thì tồn tại một nghiệm duy nhất $y = y(x)$ của phương trình

$$y' = f(x, y)$$

thoả mãn điều kiện

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0.$$

Nghiệm ấy được xác định trong một khoảng nào đó trên trục Ox, chứa điểm x_0.

2.2. Phương trình vi phân biến số phân ly

Phương trình biến số phân ly là phương trình (11.4), trong đó vế phải f(x, y) có dạng p(x).q(y)

$$y' = p(x).q(y). \tag{11.8}$$

Phương trình ấy có thể viết là $\dfrac{dy}{dx} = p(x).q(y)$, hay nếu $q(y) \neq 0$

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)dx. \tag{11.9}$$

Vế trái chỉ phụ thuộc y, vế phải chỉ phụ thuộc x, nên người ta gọi (11.8) là *phương trình biến số phân li*.

Gọi Q(y) là một nguyên hàm của $\dfrac{1}{q(y)}$, P(x) là một nguyên hàm của p(x). Bằng cách lấy nguyên hàm hai vế của (11.9), ta được

$$Q(y) = P(x) + C,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Hệ thức ấy là tích phân tổng quát của phương trình (11.8).

Ví dụ 1. Tìm nghiệm của phương trình $y' = e^{x-y}$, thoả mãn điều kiện $y(1) = 1$.

Giải: Phương trình có thể viết lại là $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{e^y}$ hay $e^x dx = e^y dy$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$e^y = e^x + C,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Đó là tích phân tổng quát của phương trình. Thế x = 1 vào hai vế, do y(1) = 1, ta có

$$e = e + C \quad \text{hay} \quad C = 0.$$

Ta được tích phân riêng $e^y = e^x$, do đó được nghiệm riêng là

$$y = x.$$

Ví dụ 2. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0,\ y(0) = 1.$$

Giải: Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}$, ta được

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C,$$

C là hằng số tuỳ ý. Đó là tích phân tổng quát của phương trình. Trong hai vế cho x = 0, ta được

$$1 + \sqrt{2} = C.$$

Vậy tích phân riêng của phương trình là

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{2} + 1.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$(x^3 + 1)y' = x^2y + x^2.$$

Giải: Phương trình có thể viết là

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(y+1)}{x^3+1},$$

nó có dạng biến số phân ly. Vì $y + 1 = 0$ không thể thoả mãn phương trình nên từ phương trình đó suy ra

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{x^2dx}{x^3+1}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln|y+1| = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + \ln|C| = \ln\left|C\sqrt[3]{x^3+1}\right|,$$

trong đó C là một hằng số tuỳ ý. Do đó

$$y = -1 + C\sqrt[3]{x^3+1}.$$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình.

Ví dụ 4. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$y' = \frac{2x+1}{2(y-1)} \ (y \neq 1),\ y(0) = -1.$$

Giải: Phương trình có thể viết

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2(y-1)} \quad \text{hay} \quad 2(y-1)dy = (2x+1)dx.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$(y-1)^2 = x^2 + x + C \text{ hay } y = 1 \pm \sqrt{x^2 + x + C}.$$

Thế $x = 0$ vào hai vế, ta có

$$-1 = 1 \pm \sqrt{C} \text{ hay } -2 = \pm\sqrt{C}$$

Điều này chỉ xảy ra khi $-2 = -\sqrt{C}$, chỉ lấy dấu – trước căn thức. Do đó $C = 4$.
Vậy

$$y = 1 - \sqrt{x^2 + x + 4}.$$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$$

Giải: Ta viết

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x-y) - \sin(x+y) = -2\sin y\cos x.$$

Nếu $\sin y \neq 0$, tức là $y \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ta suy ra

$$\frac{dy}{\sin y} + 2\cos x dx = 0.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + 2\sin x = C,$$

C là hằng số tuỳ ý. Đó là tích phân tổng quát của phương trình.

Chú ý rằng $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cũng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$y' = \cos(x - y).$$

Giải: Phương trình này không có dạng biến số phân ly, nhưng nếu đặt $z = x - y$, ta có $z' = 1 - y'$, phương trình trở thành

$$1 - z' = \cos z \text{ hay } z' = \frac{dz}{dx} = 1 - \cos z = 2\sin^2\frac{z}{2}.$$

Ta được một phương trình biến số phân ly. Nếu $\sin\frac{z}{2} \neq 0$, tức là $\frac{z}{2} \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$$dx = \frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$x = -\cot g\frac{z}{2} + C,$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Do đó

$$x + \cot g\frac{x - y}{2} = C$$

là tích phân tổng quát.

Nếu $\sin\frac{z}{2} = 0$, ta có $\frac{z}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $z = 2k\pi$ hay $y = x - 2k\pi$. Dễ dàng thấy rằng $y = x - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cũng là nghiệm của phương trình.

2.3. Phương trình vi phân cấp một thuần nhất

Phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$ gọi là *thuần nhất* nếu vế phải $f(x, y)$ của nó có thể viết dưới dạng $g\left(\frac{y}{x}\right)$. Chẳng hạn, phương trình vi phân

$$y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x + 2y}{x + y}$$

là phương trình vi phân thuần nhất vì nó có thể viết thành

$$y' = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)},$$

nhưng phương trình vi phân

$$y' = \frac{x - xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

không phải là phương trình thuần nhất vì không thể viết vế phải của nó dưới dạng $g\left(\frac{y}{z}\right)$.

Để giải phương trình vi phân cấp 1 thuần nhất

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{11.10}$$

ta đặt $y = ux$, trong đó u là một hàm số của x. Khi đó

$$y' = xu' + u.$$

Thế vào phương trình (11.10), ta được

$$xu' + u = g(u) \quad \text{hay} \quad x\frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Đó là một phương trình biến số phân ly. Giải phương trình đó ta tìm được u(x). Khi đó nghiệm của phương trình (11.10) là $y = xu(x)$.

Ví dụ 7. Giải phương trình vi phân

$$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2 - xy}.$$

Giải: Đó là phương trình thuần nhất, vì có thể viết vế phải của nó dưới dạng

$$\frac{2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Đặt $y = ux$, ta được

$$u'x + u = \frac{2u - u^2}{1 - u}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{2u - u^2}{1 - u} - u = \frac{2u - u^2 - u + u^2}{1 - u} = \frac{u}{1 - u}.$$

Do đó

$$\frac{(1-u)du}{u} = \frac{dx}{x} \quad \text{hay} \quad \frac{du}{u} - du = \frac{dx}{x}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln|u| - u = \ln|Cx|,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý, vậy

$$\ln\left|\frac{u}{Cx}\right| = u \quad \text{hay} \quad \frac{u}{Cx} = e^u$$

hay

$$\frac{y}{Cx^2} = e^{\frac{y}{x}} \quad \text{hay} \quad y = Cx^2 e^{\frac{y}{x}}.$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 8. Giải phương trình vi phân

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

Giải: Phương trình có thể viết là

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Dễ thấy rằng đó là phương trình thuần nhất. Đặt $y = xu$. Với $x > 0$ ta được

$$x\left(x\frac{du}{dx} + u\right) = x\sqrt{1 + u^2} + xu$$

hay

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Do đó

$$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx \quad \text{hay} \quad \sqrt{1 + u^2} = Cx - u$$

Bình phương hai vế, ta được

$$1 = C^2x^2 - 2Cxu \quad \text{hay} \quad 1 + 2Cy - C^2x^2 = 0.$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình. Nếu $x < 0$, ta cũng được kết quả ấy.

Ví dụ 9. Giải phương trình vi phân

$$xy^2dy = (x^3 + y^3)dx.$$

Giải: Đó là một phương trình vi phân cấp một thuần nhất, vì có thể viết nó dưới dạng

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right).$$

Đặt $y = ux$, ta được

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{1}{u^2} + u \text{ hay } u^2du = \frac{dx}{x}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\frac{u^3}{3} = \ln|Cx| \quad \text{hay} \quad u^3 = 3\ln|Cx|,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = x\sqrt[3]{3\ln|Cx|}.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Đó là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{11.11}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là những hàm số liên tục trong một khoảng $I \subset \mathbb{R}$. Phương trình tuyến tính (11.11) gọi là *thuần nhất* nếu $q(x) \equiv 0$ trong I, là *không thuần nhất* trong trường hợp trái lại. Chẳng hạn,

$$y'' + 4xy' - 5x^2y = xe^x$$

là phương trình tuyến tính không thuần nhất ;

$$y'' - 2y' + y = 0$$

là phương trình tuyến tính thuần nhất ; nhưng

$$y'' - 3y' + 2\sqrt{y} = 5$$

không phải là phương trình vi phân tuyến tính.

Để giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (11.11), trước hết ta hãy giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$y' + p(x)y = 0. \tag{11.12}$$

Rõ ràng đó là phương trình biến số phân ly. Dễ thấy rằng $y = 0$ cũng là một nghiệm của phương trình (11.12). Bây giờ xét $y \neq 0$, từ phương trình (11.12) suy ra

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Do đó lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi, ,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý, x_o là một điểm nào đó thuộc I. Suy ra

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}, \tag{11.13}$$

đó là nghiệm tổng quát của phương trình (11.12). Chú ý rằng nghiệm $y = 0$ nhận xét ở trên cũng là một nghiệm của (11.12), nó được suy ra từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C = 0$.

Bây giờ ta sẽ cho hằng số tuỳ ý C trong biểu thức (11.13) biến thiên, tức là ta tìm hàm số C(x) sao cho

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} \tag{11.14}$$

thoả mãn phương trình không thuần nhất (11.11). Từ (11.14), ta có

$$y' = C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} - C(x)p(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

Thế vào phương trình (11.11) ta được

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} = q(x).$$

Do đó

$$C'(x) = q(x).e^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

Gọi $\varphi(x)$ là một nguyên hàm của $q(x).\, e^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}$, ta được

$$C(x) = \varphi(x) + K,$$

trong đó K là một hằng số tuỳ ý. Thế vào (11.14), ta được

$$y = (\varphi(x) + K)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} = \varphi(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + Ke^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}, \quad (11.15)$$

đó là nghiệm tổng quát của phương trình (11.11).

Phương pháp giải trên gọi là *phương pháp biến thiên hằng số*.

Ta nhận xét rằng, số hạng thứ hai trong vế phải của (11.15) chính là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (11.12), còn số hạng đầu là một nghiệm riêng của phương trình (11.11) được suy ra từ nghiệm tổng quát (11.15) bằng cách cho K = 0. Vậy *nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.*

Ví dụ 10. Giải phương trình vi phân tuyến tính

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

Giải: Trước hết ta giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \ \text{ hay } \ \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln|C| \quad \text{hay} \quad \ln|yx| = \ln|C|.$$

Do đó

$$yx = C \text{ hay } y = \frac{C}{x},$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Đó là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Bây giờ ta tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Thế vào phương trình, ta được

$$\frac{C'(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{hay} \quad C'(x) = \sin x.$$

Suy ra $C(x) = -\cos x + K$, K là hằng số tuỳ ý. Vậy

$$y = \frac{-\cos x + K}{x} = -\frac{\cos x}{x} + \frac{K}{x}.$$

Ví dụ 11. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2} \ (x \neq -1).$$

Giải: Viết phương trình thuần nhất tương ứng dưới dạng

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x+1}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln(x+1)^2 \quad \text{hay} \quad y = C(x+1)^2,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Bây giờ tìm hàm số $C(x)$ sao cho $y = C(x).(x+1)^2$ là nghiệm của phương trình không thuần nhất. Ta có

$$y' = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1).$$

Thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$C'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3 \quad \text{hay} \quad C'(x) = x + 1.$$

Do đó $C(x) = \frac{x^2}{2} + x + K$, K là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + K\right)(x+1)^2.$$

Cho $x = 0$ vào hai vế, ta được $\frac{1}{2} = K$. Vậy ta được nghiệm riêng

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right)(x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2}.$$

Ví dụ 12. Một vật có khối lượng m rơi từ một độ cao nào đó dưới tác dụng của trọng lực. Biết rằng gia tốc của trọng trường là g, lực cản của không khí tỷ lệ với vận tốc rơi của vật, tức là bằng $-kv(t)$, trong đó k là một hằng số dương, v(t) là vận tốc rơi của vật ở thời điểm t, vận tốc ban đầu bằng 0, hãy tìm v(t).

Giải: Vật rơi chịu tác dụng của hợp lực mg −kv(t). Theo định luật thứ hai của Newton, ta có

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad \text{hay} \quad m\frac{dv}{dt} + kv = mg.$$

Đó là một phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với hàm phải tìm v(t), t là biến số độc lập. Giải phương trình thuần nhất tương ứng, ta được

$$m\frac{dv}{dt} + kv = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\ln\left|\frac{v}{C}\right| = -\frac{k}{m}t \quad \text{hay} \quad v = Ce^{-\frac{k}{m}t},$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Bây giờ ta tìm hàm C(t) sao cho $v = C(t)e^{-\frac{k}{m}t}$ thoả mãn phương trình không thuần nhất. Thế vào phương trình đó, ta được

$$C'(t)^{-\frac{k}{m}t} = g \quad \text{hay} \quad C'(t) = ge^{\frac{k}{m}t}.$$

Vậy

$$C(t) = \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t} + K,$$

trong đó K là hằng số tuỳ ý. Vậy nghiệm tổng quát là

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ke^{-\frac{k}{m}t}.$$

Do v(0) = 0, ta được $K = -\frac{mg}{k}$. Vậy

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Ví dụ 13. Giải phương trình vi phân cấp một

$$(x + y^2)dy = ydx.$$

Giải: Nếu xem y là hàm số phải tìm, x là biến số độc lập, phương trình được viết là

$$(x + y^2)y' = y,$$

thì nó không là phương trình tuyến tính. Nhưng nếu xem x là hàm số phải tìm, y là biến độc lập thì có thể viết phương trình là

$$y\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{hay} \quad y\frac{dx}{dy} - x = y^2.$$

Nó có dạng phương trình vi phân tuyến tính đối với x, còn y được xem là biến số độc lập. Giải phương trình thuần nhất tương ứng ta được

$$y\frac{dx}{dy} - x = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Nghiệm tổng quát của nó là $x = Cy$, C là hằng số tuỳ ý. Bây giờ xem C là hàm số của biến số độc lập y, tìm C(y) để $x = C(y).y$ thoả mãn phương trình không thuần nhất. Ta được

$$y(C'(y).y + C(y)) - C(y).y = y^2 \quad \text{hay} \quad C'(y) = 1.$$

Do đó $C(y) = y + K$, K là hằng số tuỳ ý. Vậy

$$x = Ky + y^2$$

là nghiệm tổng quát của phương trình.

Chú thích. Phương trình

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{11.16}$$

trong đó α là hằng số khác 0 và khác 1, không phải là phương trình vi phân tuyến tính, nhưng có thể dễ dàng đưa về dạng phương trình tuyến tính bằng cách đặt $z = y^{1-\alpha}$. Phương trình (11.16) được gọi là *phương trình Bernoulli.*

Ví dụ 14. Giải phương trình

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}, \ (x \neq 0).$$

Giải: Dễ thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình. Nếu $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^3, ta được

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Đặt $z = y^{-2}$, ta được $z' = -2y^{-3}y'$, do đó phương trình trở thành

$$-\frac{1}{2}z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}.$$

Đó là phương trình vi phân tuyến tính đối với z. Giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=0 \quad \text{hay} \quad \frac{dz}{z}=4\frac{dz}{dx},$$

ta được nghiệm tổng quát

$$z=Cx^4,$$

C là hằng số tuỳ ý. Cho hằng số C biến thiên, thế vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$C'(x)\frac{x^4}{2}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow C'(x)=-\frac{2}{x^6}\Rightarrow C(x)=\frac{2}{5x^5}+K,$$

K là hằng số tuỳ ý. Thế vào $z = Cx^4$, ta được

$$z=\frac{1}{y^2}=Kx^4+\frac{2}{5}x\Rightarrow y^2=\left(Kx^4+\frac{2}{5}x\right)^{-1}.$$

2.5. Phương trình vi phân toàn phần

Người ta gọi *phương trình vi phân toàn phần* là phương trình vi phân có dạng

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{11.17}$$

trong đó $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số nào đó.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{11.18}$$

(xem định lý 7.3). Khi điều kiện (11.18) được thoả mãn, ta có thể tìm được hàm số $f(x, y)$ sao cho $df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Vậy phương trình (11.17) có thể viết là

$$df(x, y) = 0.$$

Do đó tích phân tổng quát của nó là

$$f(x, y) = C,$$

C là hằng số tuỳ ý.

Tóm lại, nếu điều kiện (11.18) được thực hiện thì phương trình (11.17) là phương trình vi phân toàn phần. Khi đó chỉ cần tìm một hàm số $f(x, y)$ sao cho $df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Tích phân tổng quát của phương trình (11.17) là $f(x, y) = C$, C là hằng số tuỳ ý.

Ví dụ 15. Giải phương trình vi phân cấp một

$$(2xy - \cos y)y' + e^x + y^2 = 0.$$

Giải: Phương trình có thể viết là

$$(e^x + y^2)dx + (2xy - \cos y)dy = 0.$$

Đặt $P(x, y) = e^x + y^2$, $Q(x, y) = 2xy - \cos y$, ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Điều kiện (11.18) được thoả mãn. Phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Ta chỉ cần tìm hàm số $f(x, y)$ sao cho

$$df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

tức là

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y^2 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \cos y \qquad (**)$$

Lấy nguyên hàm theo x hai vế của phương trình (*), ta được

$$f(x, y) = e^x + y^2x + \varphi(y), \qquad (***)$$

trong đó φ là một hàm số khả vi bất kỳ của một biến số độc lập y. Lấy đạo hàm theo y hai vế của (***), ta được

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y). \qquad (****)$$

So sánh (**) và (****), ta được $\varphi'(y) = -\cos y$, do đó $\varphi(y) = -\sin y + C$, C là hằng số tuỳ ý. Cho $C = 0$ vì ta chỉ cần tìm một hàm số $f(x, y)$ thoả mãn (*) và (**). Vậy

$$f(x, y) = e^x + xy^2 - \sin y.$$

Do đó tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$e^x + xy^2 - \sin y = K,$$

K là hằng số tuỳ ý.

Chú thích. Giả sử phương trình

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (11.19)$$

không phải là phương trình vi phân toàn phần. Nếu tìm được một hàm số $\alpha(x, y)$ sao cho

$$\alpha(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần, tức là sao cho

$$\frac{\partial}{\partial y}(\alpha P) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha Q)$$

thì $\alpha(x, y)$ được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình (11. 19).

Ví dụ 16. Giải phương trình

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0 \qquad (*)$$

bằng cách tìm một thừa số tích phân có dạng $\alpha(x)$.

Giải: Dễ dàng thấy rằng phương trình đã cho không phải là phương trình vi phân toàn phần. Hàm số $\alpha(x)$ là thừa số tích phân của phương trình đó khi và chỉ khi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha(x)\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(x)(x^2 + y^2)\right]$$

hay

$$\alpha(x)(2x + x^2 + y^2) = \alpha'(x)(x^2 + y^2) + \alpha(x).2x$$

hay

$$\alpha'(x) = \alpha(x).$$

Do đó $\alpha(x) = Ce^x$. Chọn $C = 1$, ta được $\alpha(x) = e^x$. Vậy

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0 \qquad (**)$$

là một phương trình vi phân toàn phần. Ta tìm hàm số $f(x, y)$ sao cho vế trái của (**) là vi phân toàn phần của f, tức là sao cho

$$f_x = e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right),$$

$$f_y = e^x(x^2 + y^2).$$

Lấy nguyên hàm hai vế của đẳng thức sau, ta được

$$f(x, y) = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + \varphi(x),$$

trong đó φ là một hàm số khả vi bất kỳ của biến số độc lập x. Do đó

$$f_x = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) + e^x2xy + \varphi'(x).$$

So sánh với biểu thức f_x ở trên, ta được $\varphi'(x) = 0$. Do đó $\varphi(x) = C$, C là hằng số tuỳ ý. Ta chọn C = 0 vì chỉ cần tìm một hàm số f(x, y) nhận vế trái của (**) làm vi phân toàn phần, ta được

$$f(x, y) = e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right).$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình (**) là

$$e^x\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) = C,$$

C là hằng số tuỳ ý. Đó cũng là tích phân tổng quát của phương trình (*) vì $\alpha(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.6. Quỹ đạo trực giao

$\mathscr{C}$ là một họ đường cong phẳng phụ thuộc một tham số C, có phương trình là

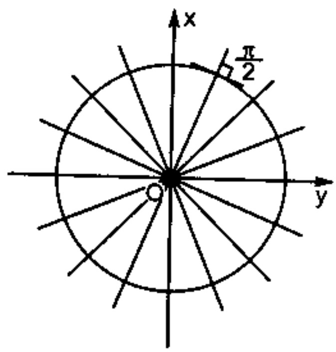
$$F(x, y, C) = 0. \tag{11.20}$$

Người ta gọi quỹ đạo trực giao của họ $\mathscr{C}$ là những đường cong cắt tất cả các đường cong của họ $\mathscr{C}$ dưới góc $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Chẳng hạn những đường tròn tâm O là những quỹ đạo trực giao của họ đường thẳng y = Cx đi qua gốc toạ độ (hình 11.1).

Muốn tìm phương trình của các quỹ đạo trực giao của họ $\mathscr{C}$, trước hết ta lập phương trình vi phân của họ $\mathscr{C}$ bằng cách khử tham số C từ hai phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{d}{dx}F(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Ta sẽ được một phương trình liên hệ ba biến số x, y và y'



Hình 11.1

$$f(x, y, y') = 0. \tag{11.21}$$

Đạo hàm y' trong phương trình đó biểu diễn hệ số góc của đường tiếp tuyến của các đường cong của họ $\mathscr{C}$ tại điểm M(x, y). Vì quỹ đạo trực giao của $\mathscr{C}$ đi qua M cắt các đường cong của $\mathscr{C}$ dưới góc $\alpha = \frac{\pi}{2}$, nên hệ số góc các đường tiếp tuyến của nó tại M là $y_1' = -\frac{1}{y'}$, do đó $y' = -\frac{1}{y_1'}$. Vậy phương trình vi phân của họ các quỹ đạo trực giao của $\mathscr{C}$ được suy từ phương trình (11.21) bằng cách thay y' bởi $-\frac{1}{y'}$. Đó là phương trình

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0, \qquad (11.22)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (11.22) sẽ cho ta phương trình của họ quỹ đạo trực giao của $\mathscr{C}$.

Ví dụ 17. Tìm quỹ đạo trực giao của họ đường parabôn $y = Cx^2$.

Giải: Lấy đạo hàm theo x hai vế của phương trình trên, ta được $y' = 2Cx$. Khử C giữa hai phương trình:

$$y = Cx^2,$$
$$y' = 2Cx$$

ta được phương trình vi phân của họ đường parabôn là

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

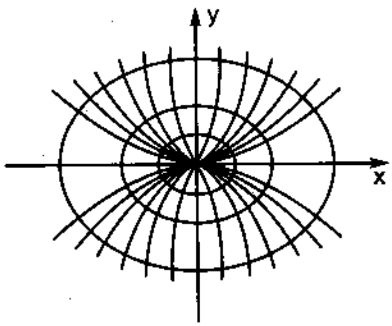
Do đó phương trình vi phân của quỹ đạo trực giao của họ parabôn là

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x} \quad \text{hay} \quad ydy = -\frac{xdx}{2}.$$

Đó là một phương trình vi phân biến số phân ly. Tích phân tổng quát của nó là

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = K^2.$$

Vậy các quỹ đạo trực giao phải tìm là họ các đường elip có các bán trục là 2K và $K\sqrt{2}$ (hình 11.2).



Hình 11.2

§3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI TUYẾN TÍNH

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp hai tuyến tính là

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (11.23)$$

trong đó p(x), q(x), f(x) là những hàm số liên tục trong một khoảng I nào đó. p(x), q(x) gọi là *hệ số của phương trình*, còn f(x) là vế phải của phương trình. Phương trình (11.23) được gọi là *thuần nhất* nếu $f(x) = 0, \forall x \in I$; là không *thuần nhất* trong trường hợp trái lại.

Phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (11.24)$$

được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (11.23).

3.1. Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất

Định lý 11.1. *Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (11.24) thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, trong đó C_1 và C_2 là những hằng số, cũng là nghiệm của phương trình đó.*

Chứng minh: Đặt $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Ta có

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = C_1 y_1''(x) + C_2y_2''(x) + p(x)\,[C_1 y_1'(x) + C_2y_2'(x)] + $$
$$+ q(x)\,[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]$$
$$= C_1[\,y_1''(x) + p(x)\,y_1'(x) + q(x)y_1(x)] +$$
$$+ C_2[\,y_2''(x) + p(x)\,y_2'(x) + q(x)y_2(x)] = C_1.0 + C_2.0 = 0. \ \blacksquare$$

Ta nhắc lại định nghĩa sau.

Định nghĩa. Hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tỷ số $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$, k là hằng số, $\forall x \in I$; gọi là độc lập tuyến tính trong trường hợp ngược lại. Chẳng hạn hai hàm số $-2x^3$ và $5x^3$ là phụ thuộc tuyến tính, còn hai hàm số cosx và sinx là độc lập tuyến tính vì $\frac{\cos x}{\sin x} \neq k$, k là hằng số.

Định lý 11.2. *Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (11.24) thì mọi nghiệm của phương trình đó đều có dạng*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \qquad (11.25)$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý.

Ta thừa nhận định lý này.

Theo định lý 11.2 chỉ cần biết hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (11.24), ta sẽ biết mọi nghiệm của nó. Biểu thức (11.25) gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình (11.24). Nếu cho C_1, C_2 trong (11.25) lấy các giá trị xác định, ta sẽ được một nghiệm xác định, gọi là *nghiệm riêng* của phương trình (11.24). Chẳng hạn, $y_1 = \cos x$ và $y_2 = \sin x$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $y'' + y = 0$, vậy nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + y = 0$ là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý.

Tuy nhiên, khi các hệ số của phương trình thuần nhất (11.24) biến thiên theo x thì không có phương pháp tổng quát để tìm các nghiệm riêng của nó. Nhưng sẽ thấy ở mục 3.3, ta có thể tìm được các nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (11.24) nếu các hệ số của nó là những hằng số.

3.2. Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính không thuần nhất

Định lý 11.3 (về cấu trúc nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất). *Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (11.23) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (11.24) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất (11.23).*

Chứng minh: Giả sử ta đã biết một nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất (11.23). Ta chỉ việc thử lại rằng nếu y là một nghiệm bất kỳ của phương trình đó thì hiệu $y - Y$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (11.24). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}(y - Y)'' + p(x)(y - Y)' + q(x)(y - Y) &\\ &= [y'' + p(x)y' + q(x)y] - (Y'' + p(x)Y' + q(x)Y)\\ &= f(x) - f(x) = 0,\end{aligned}$$

vì y và Y cùng là nghiệm của phương trình (11.23) ■

Định lý 11.4 (nguyên lý chồng nghiệm). *Nếu Y_1 là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

Y_2 là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x),$$

thì $Y_1 + Y_2$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Chứng minh: Ta có

$$(Y_1 + Y_2)'' + p(x)(Y_1 + Y_2)' + q(x)(Y_1 + Y_2)$$

$$= (Y_1'' + p(x)Y_1' + q(x)Y_1) + (Y_2'' + p(x)Y_2' + q(x)Y_2)$$

$$= f_1(x) + f_2(x),$$

vì theo giả thiết, $Y_1'' + p(x)Y_1' + q(x)Y_1 = f_1(x)$, $Y_2'' + p(x)Y_2' + q(x)Y_2 = f_2(x)$ ■

Phương pháp sau đây cho ta cách tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (11.23) khi biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (11.24).

Phương pháp biến thiên hằng số. Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (11.24). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình đó là

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{11.26}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Bây giờ xem C_1, C_2 là hai hàm số, ta tìm C_1, C_2 để biểu thức (11.26) là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (11.23). Ta có

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2.$$

Chọn C_1, C_2 sao cho

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \tag{11.27}$$

Khi đó:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2',$$

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'$$

Thế vào phương trình (11.23), ta được

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + p(x)(C_1y_1' + C_2y_2')$$
$$+ q(x)(C_1y_1 + C_2f_2) = f(x)$$

hay

$$C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1') + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

Nhưng $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$, $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$ vì y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (11.24), do đó

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \tag{11.28}$$

Như vậy, hàm số (11.26) là một nghiệm của phương trình (11.23) nếu C_1, C_2 là hai hàm số thoả mãn hai phương trình (11.27), (11.28).

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Xem hệ trên là hệ hai phương trình đại số tuyến tính để tìm C_1' và C_2'. Định thức của hệ là

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Người ta đã chứng minh được rằng định thức trên khác 0, vì các nghiệm y_1 và y_2 độc lập tuyến tính với nhau. Do đó hệ có một nghiệm duy nhất. Giả sử đó là $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$. Nếu $\Phi_1(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ là một nguyên hàm của $\varphi_2(x)$, thì ta được một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (11.23) là

$$Y = \Phi_1(x).y_1(x) + \Phi_2(x).y_2(x).$$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Giải: Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng y" + y = 0 là

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Biểu thức ấy là nghiệm của phương trình không thuần nhất đã cho nếu C_1, C_2 là những hàm số thoả mãn hệ

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được

$$C_1' = -\frac{\sin x}{\cos x},\ C_2' = 1.$$

Do đó

$$C_1 = \ln|\cos x|,\ C_2 = x.$$

Chú ý rằng ta chỉ cần tìm một nguyên hàm của $C_1' = -\frac{\sin x}{\cos x}$, một nguyên hàm của $C_2' = 1$, nên không cần cộng thêm hằng số tuỳ ý. Vậy một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho là

$$Y = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x.$$

Nghiệm tổng quát của nó là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

Bài toán giá trị ban đầu

Vì nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai tuyến tính (11.23) hay (11.24) phụ thuộc hai bằng số tuỳ ý C_1, C_2, nên để xác định một nghiệm riêng ta phải đặt hai điều kiện để xác định hai hằng số đó. Bài toán tìm nghiệm của phương trình (11.23) hay (11.24) thoả mãn các điều kiện

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \tag{11.28}$$

trong đó x_0 là một điểm trong khoảng I ; y_0, y_1 là hai hằng số ; gọi là *bài toán giá trị ban đầu.*

Người ta đã chứng minh được rằng, bài toán giá trị ban đầu đối với phương trình vi phân cấp hai tuyến tính (11.23) hay (11.24) luôn có một nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Giải: Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là (xem ví dụ 1)

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x.$$

Thế các điều kiện ban đầu vào, ta được :

$$y(0) = C_1 = 1,$$

$$y'(0) = C_2 = -1.$$

Vậy nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$y = \cos x - \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x.$$

3.3. Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất hệ số không đổi

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{11.30}$$

trong đó p, q là các hằng số.

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình đó dưới dạng $y = e^{rx}$, trong đó r là một hằng số. Ta có

$$y' = re^{rx},$$
$$y'' = r^2e^{rx}.$$

Thế vào phương trình (11.30), ta được

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0.$$

Vì $e^{rx} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên từ phương trình ấy suy ra

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{11.31}$$

Phương trình (11.31) gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình (11.30). Đó là một phương trình đại số bậc hai, suy từ phương trình (11.30) bằng cách thay y" bởi r^2, thay y' bởi r và thay y bởi 1. Có ba trường hợp có thể xảy ra tuỳ theo dấu của biệt thức $p^2 - 4q$.

Trường hợp 1 : $p^2 - 4q > 0$. Phương trình đặc trưng (11.31) có hai nghiệm thực phân biệt r_1 và r_2. Khi đó phương trình (11.30) có hai nghiệm riêng $y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = e^{r_2x}$. Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính vì $\frac{y_1}{y_2} = e^{(r_1-r_2)x} \not\equiv$ hằng số. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (11.30) là

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x},$$

C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý.

Ví dụ 3. Giải các phương trình vi phân:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0,$

b) $y'' + 2y' - 5y = 0.$

Giải: a) Phương trình đặc trưng là $r^2 - 5r + 6 = 0$, nó có hai nghiệm thực $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát là

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

b) Phương trình đặc trưng là $r^2 + 2r - 5 = 0$, nó có hai nghiệm thực $r = -1 \pm \sqrt{6}$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = C_1\,e^{(-1-\sqrt{6})x} + C_2e^{(-1+\sqrt{6})x}.$$

Trường hợp 2 : $p^2 - 4q = 0$. Phương trình đặc trưng (11.31) có một nghiệm kép

$$r = -\frac{p}{2}, \text{ do đó } 2r + p = 0.$$

Vậy phương trình (11.30) có một nghiệm riêng $y_1 = e^{rx}$. Ta có thể thử lại rằng $y_2 = xe^{rx}$ cũng là một nghiệm của phương trình (11.30). Thật vậy, ta có

$$y_2' = e^{rx} + xre^{rx},$$
$$y_2'' = 2re^{rx} + r^2xe^{rx}.$$

Do đó

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = e^{rx}[2r + r^2x + p(1 + xr) + qx]$$
$$= e^{rx}\,[(2r + p) + x(r^2 + pr + q)]$$

Nhưng $2r + p = 0$ vì $r = -\frac{p}{2}$; $r^2 + pr + q = 0$ vì r là nghiệm của (11. 31). Vậy

$$y_2'' + p_2' + qy_2 = 0.$$

Tóm lại, phương trình (11.30) có hai nghiệm riêng $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = xe^{rx}$, chúng độc lập tuyến tính với nhau. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (11.30) là

$$y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx} = (C_1 + C_2x)e^{rx}.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình vi phân

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Giải: Phương trình đặc trưng là $r^2 + 6r + 9 = 0$, nó có nghiệm kép $r = -3$. Vậy phương trình vi phân đã cho có nghiệm tổng quát là

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}.$$

Trường hợp 3 : $p^2 - 4q < 0$. Phương trình đặc trưng (11.31) có hai nghiệm phức liên hợp $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, trong đó α, β là những số thực. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (11.30) là

$$y = K_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + K_2 e^{(\alpha-i\beta)x},$$

trong đó K_1, K_2 là hằng số tuỳ ý. Nhưng theo các công thức Euler (10.22) và (10.23) ta có:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x,$$

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$$

Do đó

$$y = K_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + K_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

$$= e^{\alpha x}[(K_1 + K_2)\cos\beta x + i(K_1 - K_2)\sin\beta x]$$

Đặt $C_1 = K_1 + K_2$, $C_2 = i(K_1 - K_2)$, ta được nghiệm tổng quát của phương trình (11.30) là

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Ví dụ 5. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$y'' - 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$$

Giải: Phương trình đặc trưng là $r^2 - 4r + 29 = 0$. Biệt thức $\Delta' = 4 - 29 = -25$. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp là $r = 2 \pm 5i$. Vậy nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x).$$

Do đó

$$y' = 2e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) + e^{2x}(-5C_1\sin 5x + 5C_2\cos 5x).$$

Thế các điều kiện ban đầu vào, ta được:

$$y(0) = C_1 = 0,$$

$$y'(0) = 5C_2 = 5.$$

Do đó $C_2 = 1$, vậy nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$y = e^{2x}\sin 5x.$$

Lưu ý rằng ta đã giải được các phương trình vi phân cấp hai tuyến tính hệ số không đổi mà không phải làm một phép tính tích phân nào.

Bảng tóm tắt về nghiệm tổng quát của phương trình (11.30)

Nghiệm của phương trình (11.31)	*Nghiệm của phương trình (11.30)*
r_1, r_2 thực, $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$
$r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$, α, β thực	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

3.4. Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính không thuần nhất với hệ số không đổi

Bây giờ xét phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{11.32}$$

trong đó p, q là các hằng số.

Trong mục 3.3 ta đã tìm được nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (11.30). Theo định lý 11.3, nếu tìm được một nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất (11.32) thì nghiệm tổng quát của nó bằng tổng của Y với nghiệm tổng quát của phương trình (11.30).

Phương pháp chung để tìm một nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất (11.32) là phương pháp biến thiên hằng số đã trình bày ở mục 3.2 (xem ví dụ 2). Nhưng đối với một số dạng đặc biệt của vế phải f(x) ta có thể tìm được Y mà không cần một phép tính tích phân nào.

Xét hai dạng đặc biệt sau của vế phải f(x).

3.4.1. $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$, trong đó α là một hằng số, $P_n(x)$ là một đa thức bậc n.

• Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (11.31), ta tìm một nghiệm riêng của phương trình (11.32) có dạng

$$Y = e^{\alpha x} Q_n(x), \tag{11.33}$$

trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n. Ta có:

$$Y' = \alpha Q_n(x) e^{\alpha x} + Q_n'(x) e^{\alpha x},$$

$$Y'' = \alpha^2 Q_n(x) e^{\alpha x} + 2\alpha Q_n'(x) e^{\alpha x} + Q_n''(x) e^{\alpha x}.$$

Thế vào phương trình (11.32), ta được

$$e^{\alpha x}\,[Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)] = e^{\alpha x}P_n(x).$$

Do đó

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x). \qquad (11.34)$$

Vì α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (11.31), nên $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, do đó vế trái của (11.34) cũng là một đa thức bậc n, cùng bậc với đa thức ở vế phải. Bằng cách đồng nhất các hệ số cùng bậc ở hai vế của đẳng thức (11.34), ta được (n + 1) phương trình bậc nhất của (n + 1) ẩn là các hệ số của đa thức $Q_n(x)$. Phương pháp tìm các hệ số của $Q_n(x)$ nêu trên gọi là *phương pháp hệ số bất định*.

• Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, $2\alpha + p \neq 0$, vế trái của đẳng thức (11.34) là một đa thức bậc (n – 1), trong khi vế phải của nó là một đa thức bậc n. Trong trường hợp này ta tìm Y có dạng

$$Y = x\,e^{\alpha x}Q_n(x), \qquad (11.35)$$

Khi đó vế trái của (11.34) là một đa thức bậc n, trong khi số hệ số ở hai vế vẫn chỉ là (n + 1).

• Nếu α là một nghiệm kép của phương trình đặc trưng, thì $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, $2\alpha + p = 0$. Lập luận tương tự như trên, ta sẽ tìm nghiệm riêng Y có dạng

$$Y = x^2 e^{\alpha x}Q_n(x). \qquad (11.36)$$

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$y'' + y' - 2y = 1 - x$$

Giải: Vế phải có dạng $f(x) = e^{\alpha x}P_1(x)$, trong đó $\alpha = 0$, $P_1(x) = -x + 1$. Phương trình đặc trưng là $r^2 + r - 2 = 0$, có hai nghiệm $r = 1$ và $r = -2$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' + y' - 2y = 0$ là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình không thuần nhất đã cho dưới dạng $Y = e^{0x}Q_1(x) = Q_1(x)$, $Q_1(x)$ là một đa thức bậc một, $Y = Ax + B$, trong đó A, B là các hằng số mà ta sẽ xác định. Do đó: $Y' = A$, $Y'' = 0$.

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$Y'' + Y' - 2Y = A - 2(Ax + B) = -2Ax + A - 2B = -x + 1.$$

Đồng nhất các hệ số của các số hạng cùng bậc ở hai vế của đẳng thức trên, ta được

$$-2A = -1,\ A - 2B = 1.$$

Do đó

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{4}.$$

Vậy

$$Y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$y'' - 4y' + 3y = e^x(x + 2).$$

Giải: Vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$, trong đó $\alpha = 1$, $P_1(x)$ là đa thức bậc một. Phương trình đặc trưng có hai nghiệm $r = 1$ và $r = 3$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' - 4y' + 3y = 0$ là

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

Vì $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, ta tìm nghiệm riêng Y của phương trình đã cho dưới dạng

$$Y = e^x.x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Do đó:

$$Y' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) = e^x[Ax^2 + (B + 2A)x + B],$$

$$Y'' = e^x[Ax^2 + (B + 2A)x + B] + e^x[2Ax + B + 2A]$$

$$= e^x\,[Ax^2 + (B + 4A)x + 2B + 2A].$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$e^x[-4Ax + 2A - 2B] = e^x(x + 2).$$

Do đó

$$-4A = 1,\ 2A - 2B = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{4},\ B = -\frac{5}{4}.$$

Vậy

$$Y = -e^x x\left(\frac{x+5}{4}\right).$$

Nghiệm tổng quát phải tìm là

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{x^2+5x}{4}e^x.$$

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Giải: Vế phải có dạng $e^{\alpha x}P_1(x)$, trong đó $\alpha = 1$, $P_1(x) = x$. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép r = 1 nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = e^x(C_1 + C_2x).$$

Vì $\alpha = 1$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, ta tìm một nghiệm riêng Y của phương trình đã cho dưới dạng

$$Y = e^x x^2(Ax + B) = e^x(Ax^3 + Bx^2).$$

Do đó:

$$Y' = e^x(Ax^3 + Bx^2) + e^x(3Ax^2 + 2Bx) = e^x\,[Ax^3 + (B + 3A)x^2 + 2Bx],$$

$$Y'' = e^x[Ax^3 + (B + 3A)x^2 + 2Bx] + e^x[3Ax^2 + 2(B + 3A)x + 2B].$$

$$= e^x[Ax^3 + (B + 6A)x^2 + 2(2B + 3A)x + 2B].$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$e^x(6Ax + 2B) = e^x x.$$

Do đó

$$6Ax + 2B = x \Rightarrow A = \frac{1}{6},\ B = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{6}e^x x^3.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + \frac{1}{6}e^x x^3.$$

3.4.2. $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$, trong đó $P_m(x)$, $P_n(x)$ lần lượt là các đa thức bậc m, n, còn β là hằng số.

Người ta đã chứng minh rằng :

• Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (11.31) thì tìm một nghiệm riêng của phương trình (11.32) có dạng

$$Y = Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x, \tag{11.36}$$

trong đó $Q_l(x)$, $R_l(x)$ là những đa thức bậc $l = \max(m, n)$.

• Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (11.31) thì tìm một nghiệm riêng của phương trình (11.32) có dạng

$$Y = x[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]. \tag{11.37}$$

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = 2\sin x.$$

Giải: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm $r = 1$, $r = 2$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_0(x)\sin\beta x$, trong đó $P_0(x) = 2$, $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng

$$Y = A\cos x + B\sin x.$$

Do đó:

$$Y' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$Y'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x.$$

Do đó

$$\begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3}{5},\ B = \frac{1}{5} \Rightarrow Y = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Ví dụ 10. Giải phương trình

$$y'' + y = x\cos x.$$

Giải: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm $r = \pm i$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Vế phải của phương trình đã cho có dạng $P_1(x)\cos\beta x$, với $P_1(x) = x$, $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$
$$= (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x.$$

Do đó:

$$Y' = [Cx^2 + (D + 2A)x + B]\cos x + [-Ax^2 + (2C - B)x + D]\sin x,$$
$$Y'' = [-Ax^2 + (4C - B)x + 2D + 2A]\cos x + [-Cx^2 - (D + 4A)x + 2C - 2B]\sin x.$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$(4Cx + 2D + 2A)\cos x + (-4Ax + 2C - 2B)\sin x = x\cos x.$$

Do đó

$$4C = 1,\ A + D = 0,\ 4A = 0,\ C - B = 0.$$

Suy ra

$$B = C = \frac{1}{4},\ A = D = 0 \Rightarrow Y = \frac{x}{4}(x\sin x + \cos x).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}(x\sin x + \cos x).$$

Ví dụ 11. Giải bài toán giá trị ban đầu

$$y'' + 4y = 2\sin^2 x,\ y(0) = \frac{1}{4},\ y'(0) = \frac{9}{4}.$$

Giải: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm $r = \pm 2i$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Vì $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, nên vế phải của phương trình đã cho có dạng $f_1(x) + f_2(x)$, với $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = -\cos 2x$. Theo nguyên lý chồng nghiệm (định lý 11.4), ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $Y_1 + Y_2$, trong đó Y_1, Y_2 theo thứ tự là nghiệm riêng của các phương trình

$$y'' + 4y = 1 \qquad (*)$$

$$y'' + 4y = -\cos 2x \qquad (**)$$

Vế phải của (*) có dạng $e^{\alpha x}p_0(x)$, trong đó $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, $P_0(x) = 1$. Vậy Y_1 có dạng $Y_1 = A$. Thế vào phương trình (*), ta được $A = \frac{1}{4}$. Vậy $Y_1 = \frac{1}{4}$.

Vế phải của (**) có dạng $P_0(x)\cos\beta x$, trong đó $P_0(x) = -1$, $\beta = 2$, nhưng $\pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Vậy:

$$Y_2 = x(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$Y_2' = x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + A\cos 2x + B\sin 2x,$$

$$Y_2'' = x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - 4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Thế vào phương trình (**), ta được

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x = -\cos 2x.$$

Do đó

$$-4A = -1, -4B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4},\ B = 0 \Rightarrow Y_2 = \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Suy ra

$$y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}x\sin 2x.$$

Để tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu, chỉ việc thay $x = 0$ vào biểu thức của y và y' rồi áp dụng các điều kiện ban đầu, ta được:

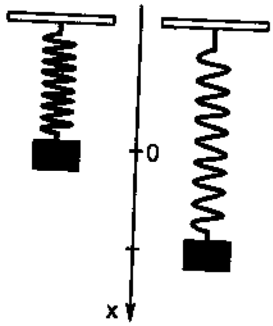
$$y(0) = C_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$y'(0) = 2C_2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow C_2 = 1.$$

Vậy nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$y = \sin 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

Ví dụ 12. Xét chuyển động của một vật có khối lượng m đặt vào một lò xo đàn hồi thẳng đứng (hình 11.3). Chọn trục Ox thẳng đứng hướng từ trên xuống, gốc O đặt ở trọng tâm của vật ở vị trí cân bằng. Gọi x là độ dời của trọng tâm của vật tính từ vị trí cân bằng. Giả sử lực kéo vật về vị trí cân bằng tỷ lệ với độ dời, tức là bằng $-kx$, $k > 0$ là hệ số đàn hồi của lò xo. Nếu không tính đến sức cản của không khí thì theo định luật Newton phương trình chuyển động của vật là



Hình 11.3

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{hay} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Đó là một phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất hệ số hằng. Phương trình đặc trưng của nó là $mr^2 + k = 0$, nó có hai nghiệm $r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Đặt $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, nghiệm tổng quát của nó là

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

Ta có thể dễ dàng biến đổi

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta),$$

trong đó $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\cos\delta = \frac{C_1}{A}$, $\sin\delta = -\frac{C_2}{A}$. Chuyển động đó gọi là dao động điều hoà, A là biên độ, ω là tần số, δ là góc pha.

Bảng tóm tắt về dạng của nghiệm riêng của phương trình (11.32) theo dạng của vế phải của nó

Dạng của vế phải f(x)	*Dạng của nghiệm riêng Y*
$e^{\alpha x}P_n(x)$	a) $e^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α không là nghiệm của (11.31) b) $xe^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α là nghiệm đơn của (11.31) c) $x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$ nếu α là nghiệm kép của (11.31)
$P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$	a) $Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x$, $l = \max(m, n)$ nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của (11.31) b) $x[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x]$, $l = \max(m, n)$ nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của (11.31)

3.5. Nghiệm khai triển được thành chuỗi luỹ thừa

Ta đã giải được trọn vẹn các phương trình vi phân cấp hai tuyến tính hệ số không đổi. Nhưng như đã trình bày ở trên, không có phương pháp tổng quát để tìm một nghiệm riêng của những phương trình có hệ số biến thiên như

$$y'' - 2xy' - 4y = 0.$$

Trong trường hợp này, có thể nghĩ đến việc tìm nghiệm của phương trình khai triển được dưới dạng chuỗi luỹ thừa. Nội dung của phương pháp được trình bày trong hai ví dụ sau. Ta bắt đầu từ một ví dụ rất đơn giản.

Ví dụ 13. Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi luỹ thừa của phương trình

$$y'' - y' = 0.$$

Giải: Giả sử phương trình đã cho có nghiệm viết dưới dạng chuỗi luỹ thừa

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...,$$

trong đó $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ là những hằng số mà ta sẽ xác định. Ta có

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1} + ...,$$

$$y'' = 2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 + ... + (n-1)na_nx^{n-2} + ...$$

Thế vào phương trình đã cho, sắp xếp theo thứ tự luỹ thừa tăng của x, ta được

$$(2a_2 - a_1) + 2(3a_3 - a_2)x + 3(4a_4 - a_3)x^2 + ...$$
$$+ (n-1)[na_n - a_{n-1}]x^{n-2} + ... = 0.$$

Đẳng thức đó đúng với mọi x, do đó các hệ số ở vế trái phải bằng 0. Suy ra

$$a_2 = \frac{a_1}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3},$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}.$$

Nhân các đẳng thức trên từng vế một, ta được

$$a_n = \frac{a_1}{n!}, \text{ với } n \geq 2.$$

Hai hệ số a_0, a_1 không chịu sự ràng buộc nào, đó là các hệ số tự do. Vậy ta được

$$y = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_1}{2!}x^2 + ... + \frac{a_1}{n!}x^n + ...$$
$$= a_0 + a_1\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...\right)$$
$$= (a_0 - a_1) + a_1\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...\right)$$

Chuỗi luỹ thừa ở vế phải hội tụ trên toàn $\mathbb{R}$ và là khai triển thành chuỗi luỹ thừa của hàm số e^x. Đặt $C_1 = a_0 - a_1$, $C_2 = a_1$ khi đó C_1 và C_2 là hai hằng số tuỳ ý vì a_0 và a_1 cũng là hai hằng số tuỳ ý. Vậy

$$y = C_1 + C_2e^x.$$

Dễ thấy rằng đó chính là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 14. Tìm nghiệm khai triển được thành chuỗi luỹ thừa của bài toán giá trị ban đầu

$$y'' - 2xy' - 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Giải: Giả sử phương trình đã cho có nghiệm dạng

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...$$

Do điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, ta được $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Vậy:

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...,$$
$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ...,$$
$$y'' = 2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 + ... + (n-1)na_nx^{n-2} + ...$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$2a_2 + 3(2a_3 - 2)x + 4(3a_4 - 2a_2)x^2 + ... + n[(n-1)a_n - 2a_{n-2}]x^{n-2} + ... = 0.$$

Do đó

$$a_2 = 0,\ a_3 = 1,\ ...,$$
$$a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1},\ n \geq 2, \qquad (*)$$

Vì $a_2 = 0$, do đẳng thức (*), ta có

$$a_4 = a_6 = ... = a_{2k} = ... = 0$$

Vì $a_1 = 1$, do đẳng thức (*), ta được:

$$a_3 = \frac{2a_1}{2} = 1,\ a_5 = \frac{2a_3}{4} = \frac{1}{2!},\ a_7 = \frac{2a_5}{6} = \frac{2}{2!6} = \frac{1}{3!},$$

$$a_9 = \frac{2a_7}{8} = \frac{2}{8}.\frac{1}{3!} = \frac{1}{4!}, \ldots, a_{2k+1} = \frac{1}{k!}.$$

Vậy

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \ldots$$

$$= x\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{k!} + \ldots\right). \qquad (**)$$

Dễ thấy rằng chuỗi luỹ thừa ở vế phải hội tụ tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và là khai triển thành chuỗi luỹ thừa của hàm số e^{x^2}. Có thể kiểm tra trực tiếp rằng biểu thức (**) đúng là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu đã cho.

Ta cũng thấy rằng, trong trường hợp này phương pháp chuỗi luỹ thừa đã giúp ta tìm được một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số biến thiên.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa phương trình vi phân, cấp của phương trình vi phân, phương trình vi phân tuyến tính. Phân biệt nghiệm của phương trình vi phân với tích phân của phương trình vi phân.
2. Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp một là gì ? Thế nào là bài toán giá trị ban đầu đối với phương trình vi phân cấp một.
3. Trình bày dạng của phương trình vi phân biến số phân ly, phương trình vi phân cấp một thuần nhất, phương trình vi phân cấp một tuyến tính và cách giải chúng.
4. Nếu biết hai nghiệm riêng y_1 và y_2 của phương trình vi phân cấp một tuyến tính

$$y' + p(x)y = q(x),$$

thì có thể biết được tất cả các nghiệm của nó không ?

5. Trình bày dạng của phương trình vi phân toàn phần và cách giải.

6. Cách giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai với hệ số không đổi.

7. Trình bày các dạng đặc biệt của vế phải f(x) để có thể giải được phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

p, q là hằng số, mà không phải làm một phép tính tích phân nào.

8. Trình bày phương pháp biến thiên hằng số.

9. Trình bày nguyên lý chồng nghiệm.

10. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng:

a) Phương trình $y' = 4x - y - 2 + 2xy$ là phương trình vi phân biến số phân ly.

b) Phương trình $(xy + y^2)y' = x^2y$ là phương trình vi phân cấp một thuần nhất.

c) Phương trình $x^2y' - e^xy^2 + 1 = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính.

d) Phương trình $(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)y' = 0$ là phương trình vi phân toàn phần.

e) Một thừa số tích phân của phương trình $2x + y^2 + xyy' = 0$ là x.

f) Một phương trình vi phân cấp một có thể vừa là phương trình biến số phân ly, vừa là phương trình thuần nhất, vừa là phương trình tuyến tính, vừa là phương trình vi phân toàn phần.

g) Nếu y_1 và y_2 là nghiệm của phương trình $y'' + 6y' + 5y = x$ thì $C_1y_1 + C_2y_2$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý, cũng là nghiệm của phương trình ấy.

h) Nếu biết hai nghiệm y_1 và y_2 của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, trong đó p(x), q(x), f(x) liên tục trong khoảng I thì có thể biết được mọi nghiệm của phương trình ấy trong khoảng I.

i) Có thể tìm được một nghiệm riêng của phương trình $y'' + py' + q(y) = e^xx^2$ dưới dạng $Y = e^xQ_2(x)$, trong đó $Q_2(x)$ là một đa thức bậc hai của x.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình biến số phân ly :

1) $x(1+y^2)^2dx + y(1+x^2)^2dy = 0$; 2) $(x^2+1)y' = xy$;

3) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$; 4) $(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

5) $ydx = (x^2 - a^2)dy$.

2. Giải các bài toán giá trị ban đầu :

1) $y' = \dfrac{xy + 3x}{x^2 + 1}$, $y(2) = 2$;

2) $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0$, $y = (0) = 1$;

4) $e^{1+x^2}\operatorname{tg}y dx - \dfrac{e^{2x}}{x-1}dy = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Trong các phương trình vi phân cấp một sau đây, phương trình nào là thuần nhất ?

1) $2x^2 - y^2 + yy' = 0$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2}dx + ydy = 0$;

3) $(x^2 + y^2)y' = xy - x^2e^y$; 4) $y' = \ln x - \ln y$;

5) $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$; 6) $xy' = x + y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4. Giải các phương trình vi phân cấp một thuần nhất :

1) $y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$; 2) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$;

3) $y' = -\dfrac{x + y}{x}$; 4) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;

5) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$; 6) $xy'\sin\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x$;

7) $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$.

5. Giải các phương trình vi phân cấp một tuyến tính :

1) $(x^2 + 1)y' + xy = -2$;

2) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x \quad (x > 0), \quad y(e) = \dfrac{e^2}{2}$;

3) $y' + 2xy = x$;

4) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$, $y(1) = 2$;

5) $y' - 1 = y\mathrm{tg}x\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) $x^2y' + 2xy = \cos x$, $y(\pi) = 0$;

7) $\cos^2 x y' + y = \mathrm{tg}x\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y(0) = 0$;

8) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;

9) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, $y(1) = 0$;

10) $xy' + y'\ln y = y$ $(y > 0)$;

11) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$.

6. Giải các phương trình cho dưới đây nếu đó là phương trình vi phân toàn phần :

1) $2x + y^2 + xyy' = 0$;

2) $(3x^2 - 3y + 1)dx - (3x - 1)dy = 0$;

3) $e^{-x}\left[\dfrac{1}{x + y} - \ln(x + y)\right]dx + e^{-x}\dfrac{dy}{x + y} = 0 \quad (x + y > 0)$;

4) $3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0 \quad (y > 0)$;

5) $x\sin y + (y\cos x)y' = 0$;

6) $(\cos y + y\cos x)dx - (\sin x - x\sin y)dy = 0$;

7) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$;

8) $(y^2 - x)y' = y$;

9) $3xy - 2 + (3y^2 - x^2)y' = 0$;

10) $(3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy + 4y^3)dy = 0$;

11) $x\ln y dx - (x + y\ln x)dx = 0 \quad (x > 0, y > 0)$;

12) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$;

13) $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$.

7. Giải các phương trình vi phân sau bằng cách tìm thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x hoặc chỉ phụ thuộc y :

1) $ydx - xdy + \ln x dx = 0$, $\alpha = \alpha(x)$;

2) $(x^2\cos x - y)dx + xdy = 0$, $\alpha = \alpha(x)$;

3) $ydx - (x + y^2)dy = 0$, $\alpha = \alpha(y)$;

4) $y\sqrt{1 - y^2}dx + (x\sqrt{1 - y^2} + y)dy = 0$, $\alpha = \alpha(y)$.

8. Giải các phương trình vi phân cấp một sau :

1) $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$;

2) $x^2y' + xy = 1$, $x > 0$, $y(1) = 2$;

3) $e^{-x} - 2\cos^2 x + 3y^2y' = 0$;

4) $x(1 + 2y)y' + x^2 + y^2 + y + e^yy' = 0$, $y(0) = 0$;

5) $xy' = x^2\cos x + y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

6) $y' = \dfrac{y + y^2}{x - 1}$;

7) $y'(x + y^2) = y$;

8) $(3y^2 - 4y^3)y' = xe^x$.

9. Tìm quỹ đạo trực giao của các họ đường cong sau :

1) $x = Cy^2$; 2) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = C^2$;

3) $x^2 - 2y^2 = C$; 4) $y = \dfrac{1}{x + C}$.

10. Giải các bài toán giá trị ban đầu sau :

1) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

3) $y'' - 2y' + 10y = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$;

4) $y'' + 3y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

5) $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$;

6) $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

11. Giải các phương trình hay bài toán giá trị ban đầu sau :

1) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

2) $y'' - 2y' + 2y = x^2$;

3) $y'' + y = \sin x \sin 2x$;

4) $y'' + y = \sin x$;

5) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos^2 x$;

6) $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$;

7) $y'' + y = 4x\sin x$;

8) $y'' - 2y' + y = 1 + x + 2(3x^2 - 2)e^x$;

9) $y'' - y = x\cos^2 x$;

10) $y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x)$;

11) $y'' + y' + y = -13\sin 2x$;

12) $y'' + y = x\cos x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{3}{4}$;

13) $y'' + y' - 2y = e^{mx}$, m là hằng số dương ;

14) $y'' + m^2 y = \cos x - \sin x$;

15) $y'' - (m + 1)y' + my = x - 1$.

12. Giải các phương trình vi phân sau bằng phương pháp biến thiên hằng số :

1) $y'' + 4y = x$;

2) $y'' - y' = e^x$;

3) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}\ (0 < x < \dfrac{\pi}{2})$;

4) $y'' + y = \mathrm{tg}x\ (0 < x < \dfrac{\pi}{2})$.

13. Dùng phương pháp chuỗi luỹ thừa để giải phương trình và bài toán giá trị ban đầu sau :

1) $y'' + y = 0$;

2) $y'' - 2xy' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

14. Giải các phương trình vi phân sau :

1) $yy' + y^2 = \dfrac{e^{-2x}}{2}$;

2) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0,\ y(1) = 0$;

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x-1)$;

4) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$;

5) $yy' = x\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$;

6) $2(x + yy') + e^y(1 + xy') = 0$;

7) $y'' + y = \sin^3 x$;

8) $3y^2y' + \mathrm{tg}x - e^{-2x} = 0$.

Đáp số

1. 1) $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2} = C$;

2) $y = C\sqrt{x^2+1}$;

3) $\ln\left|\dfrac{y}{C}\right| - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 0$;

4) $\ln\left|1-x^2\right| + \ln\left|1-y^2\right| = C$;

5) $y = C\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|^{\frac{1}{2a}}$.

2. 1) $y + 3 = \sqrt{5(x^2+1)}$;

2) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{y}{2}\right| = 2 - 2\cos x$;

3) $3\mathrm{arctg}x^2 + 2\mathrm{arctg}y^3 = \dfrac{\pi}{2}$;

4) $2\ln\left|\sin y\right| = e^{(x-1)^2} - 1$.

3. Các phương trình 2), 4), 5), 6) là thuần nhất.

4. 1) $y = -\dfrac{x}{\ln|x| + C}$, $y = 0$;

2) $y^2 + 2xy - x^2 = C$;

3) $x^2 + 2xy = C$;

4) $y^2 = x^2\ln Cx^2$;

5) $x = \mathrm{tg}\dfrac{y}{2x}$;

6) $x = Ce^{\cos\frac{y}{x}}$;

7) $y = -x\ln(C - \ln|x|)$.

5. 1) $y = \dfrac{C - 2\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$;

2) $y = \dfrac{x^2}{2}\ln x$;

3) $y = \dfrac{1}{2} + Ce^{-x^2}$;

4) $y = \dfrac{2 + \ln x}{x}$;

5) $y = \dfrac{C + \sin x}{\cos x}$;

6) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$;

7) $y = \mathrm{tg}x - 1 + e^{-\mathrm{tg}x}$;

8) $y = (x + C)(1 + x^2)$;

9) $y = (x^2 - 1)e^{x^2}$;

10) $x = Cy - 1 - \ln y$;

11) $y = \dfrac{C - \cos x}{x}$.

6. 2) $x^3 - 3xy + x - y = C$;

3) $e^{-x}\ln(x + y) = C$;

4) $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$;

7) $\dfrac{x^3}{3} + xy - y^2 = C$;

8) $y^4 = 4xy + C$;

10) $x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + y^4 = C$;

12) $\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{1}{y} = C$;

13) $e^x + xy + x\sin y + e^y = C$.

7. 1) $\alpha = \dfrac{1}{x^2}$, $y = Cx - \ln x - 1$;

2) $\alpha = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x(C - \sin x)$;

3) $\alpha = \dfrac{1}{y^2}$, $x = y(C + y)$;

4) $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$, $xy - \sqrt{1 - y^2} = C$.

8. 1) $\ln|x + y| + \dfrac{x}{x + y} = C$;

2) $y = \dfrac{\ln x + 2}{x}$;

3) $y^3 = x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + e^{-x} + C$;

4) $\dfrac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = 1$;

5) $y = x(\sin x - 1)$;

6) $y = \dfrac{x - 1}{C - x}$;

7) $x = cy + y^2$;

8) $y^3 - y^4 = xe^x - e^x + C$.

9. 1) $\dfrac{x^2}{C^2} + \dfrac{y^2}{2C^2} = 1$;

2) $y - 1 = C(x - 1)$;

3) $y = \dfrac{C}{x^2}$;

4) $y^3 = 3(x + C)$.

10. 1) $y = \dfrac{1}{3}e^{2x} - \dfrac{1}{3}e^{-x}$;

2) $y = xe^{5x}$;

3) $y = -\dfrac{1}{3}e^x\cos 3x$;

4) $y = \dfrac{1}{3}(5 - 2e^{-3x})$;

5) $y = \sin 3x$;

6) $y = e^x(\cos x + \sin x)$

11. 1) $y = e^x + \sin x$;

2) $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2$;

3) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{4}x\sin x$;

4) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos x$;

5) $y = e^{2x}(C_1 + C_2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x)$;

6) $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x - 1 + \frac{1}{5}(2\cos x - \sin x)$;

7) $y = x(\sin x - x\cos x) + C_1\cos x + C_2\sin x$;

8) $y = e^x(C_1 + C_2x) + x + 3 + x^2(\frac{1}{2}x^2 - 2)e^x$;

9) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x\cos 2x + \frac{2}{25}\sin 2x$;

10) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x)$;

11) $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + 2\cos 2x + 3\sin 2x$;

12) $y = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x^2}{4}\sin x + \frac{x}{4}\cos x$;

13) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + Y$, trong đó $Y = \frac{1}{m^2 + m - 2}e^{mx}$ nếu $m \neq 1$, $m \neq -2$; $Y = \frac{1}{3}xe^x$ nếu $m = 1$; $Y = -\frac{1}{3}xe^{-2x}$ nếu $m = -2$.

14) $y = C_1\cos mx + C_2\sin mx + Y$, trong đó $Y = \frac{1}{m^2 - 1}(\cos x - \sin x)$ nếu $m^2 \neq 1$, $Y = \frac{1}{2}x(\cos x + \sin x)$ nếu $m^2 = 1$;

15) $y = C_1e^x + C_2e^{mx} + Y$, trong đó $Y = \frac{1}{m}(x - 1)$ nếu $m \neq 0$,

$Y = x(-x + 2)$ nếu $m = 0$.

12. 1) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{x}{4}$;

2) $y = C_1 + C_2e^x + e^x(x-1)$;

3) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln(\sin x)$;

4) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\dfrac{1-\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}$.

13. 1) $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) +$

$$+a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right);$$

2) $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1.5.9\ldots(4n-3)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

14. 1) $y^2 = (x+C)e^{-2x}$;

2) $x^2 + y^2 = e^{-y}$;

3) $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + x^2e^{2x}\left(\dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{2}\right)$;

4) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) + e^{-3x}(-e^{-x} + \mathrm{arctg}e^x)$;

5) $\sqrt{1+y^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$;

6) $x^2 + y^2 + xe^y = C$;

7) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{3}{8}x\cos x + \dfrac{1}{32}\cos 3x$;

8) $y^3 = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} - \ln|\cos x| + C.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Đình Trí – Tạ Văn Đĩnh – Nguyễn Hồ Quỳnh.
Toán học cao cấp (Tập 1, 2, 3).
Nhà xuất bản Giáo dục, 2000.

[2] James Stewart.
Calculus.
Brooks/Cole Publishing Company, 1991.

[3] Elie Azoulay.
Jean Avignant (Tome 1, 2, 3, 4).
Mc Graw Hill, 1991.

[4] J. M. Monier.
Analyse (Tome 1, 2).
Duned Université, 1990.

[5] P.E. Đankô, A.G. Pôpôp, I. Ia Côgiepnhicôva.
Bài tập toán học cao cấp (Phần 1, 2; bản dịch tiếng Việt).
Nhà xuất bản Mir Maxcơva, 1983.

Kieu Ngoc Bich

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập và sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
BÙI QUANG TUẤN

Chế bản :
CAO LAN PHƯƠNG

Giáo trình TOÁN HỌC CAO CẤP - TẬP 2
Mã số: 7K614M6 - DAI
In 2.000 bản, khổ 16 x 24 cm, tại Công ty In và Văn hoá phẩm.
Số in: 180. Số xuất bản: 04 - 2006/CXB/165 - 1860/GD.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2006.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 HànThuyên, Hà Nội

TÌM ĐỌC GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. Giáo trình Toán học cao cấp – T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
2. Giáo trình Toán học cao cấp – T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
3. Bài tập Toán học cao cấp – T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
4. Bài tập Toán học cao cấp – T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
5. Giáo trình Vật lý đại cương – T1	Lương Duyên Bình
6. Giáo trình Vật lý đại cương – T2	Lương Duyên Bình
7. Bài tập Vật lý đại cương – T1	Lương Duyên Bình
8. Bài tập Vật lý đại cương – T2	Lương Duyên Bình
9. Hoá học đại cương	Lê Mậu Quyền
10. Vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn
11. Bài tập vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách – Thiết bị trường học ở địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

8934980686010

Giá : 19.500 đ