MỤC LỤC

MỤC LỤC 1

1 PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN 3

§1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN . . . 3

1.1 Các ví dụ mở đầu . . . 3

1.2 Không gian $\mathbb{R}^n$ . . . 4

1.3 Định nghĩa hàm nhiều biến . . . 5

1.4 Đồ thị hàm hai biến . . . 5

§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN . . . 7

2.1 Sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ . . . 7

2.2 Giới hạn của hàm nhiều biến . . . 8

2.3 Một số phương pháp tìm giới hạn hàm hai biến . . . 8

§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC . . . 9

3.1 Khái niệm liên tục . . . 9

3.2 Liên tục theo từng biến . . . 10

§4 ĐẠO HÀM RIÊNG . . . 11

4.1 Đạo hàm riêng . . . 11

4.2 Tính khả vi . . . 12

4.3 Đạo hàm hàm hợp . . . 14

§5 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO . . . 15

5.1 Đạo hàm cấp cao . . . 15

5.2 Vi phân cấp cao . . . 16

5.3 Công thức Taylor . . . 16

§6 CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN . . . 17

6.1 Cực trị địa phương . . . 17

6.2 Cực trị có điều kiện . . . 20

Bài Tập Chương 1 23

2 TÍCH PHÂN BỘI 26

§1 ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KÉP VÀ TÍNH CHẤT . . . 26

1.1 Bài toán mở đầu và định nghĩa tích phân kép . . . 26

1.2 Tính chất của tích phân kép . . . 28

§2 TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC . . . 28

2.1 Miền lấy tích phân là hình chữ nhật ($D = [a, b] \times [c, d]$) . . . 29

2.2 Miền lấy tích phân là miền bị chặn . . . 31

§3 ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TÍCH PHÂN KÉP . . . 33

3.1 Công thức đổi biến số 33
3.2 Tích phân kép trong hệ tọa độ cực 37
§4 TÍCH PHÂN BA LỚP 41
4.1 Khái niệm tích phân ba lớp 42
4.2 Cách tính tích phân ba lớp 43
§5 ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BA LỚP 45
5.1 Đổi biến trong tọa độ trụ 45
5.2 Đổi biến trong tọa độ cầu 47

Bài Tập Chương 2 **49**

3 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG **51**

§1 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I 51
1.1 Phương trình của một đường cong phẳng (nếu được giới hạn gọi là cung phẳng) 51
1.2 Định nghĩa tích phân đường loại I 52
1.3 Công thức tính tích phân đường loại I 53
§2 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II 57
2.1 Định nghĩa và công thức tính tích phân đường loại II . 57
2.2 Định lý Green 59
2.3 Điều kiện để tích phân đường loại II không phụ thuộc vào đường lấy tích phân 60

Bài Tập Chương 3 **61**

4 TÍCH PHÂN MẶT **65**

§1 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I 65
1.1 Định nghĩa tích phân mặt loại I 65
1.2 Đưa tích phân mặt loại I về tích phân hai lớp thông thường 65
§2 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II 67
2.1 Mặt định hướng và mặt tham số 67
2.2 Đưa tích phân mặt loại II về tích phân hai lớp 68
2.3 Công thức Ostrogradsky 70
2.4 Công thức Stokes 72

Bài Tập Chương 4 **75**

CHƯƠNG 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Chúng ta đã nghiên cứu về hàm một biến $y = f(x)$, với y là đại lượng phụ thuộc vào biến độc lập x. Trong thực tế, ta thường gặp những đại lượng không chỉ phụ thuộc vào một mà phụ thuộc vào nhiều biến độc lập. Đây chính là dạng của hàm nhiều biến được trình bày trong chương này.

§1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 Các ví dụ mở đầu

Trong quá trình tính toán, để xác định một dữ kiện nào đó, ta thường phải xác định nhiều thông số.

Ví dụ 1.1.1. Thể tích của hình trụ có bán kính r và chiều cao h là

$$V = \pi r^2 h.$$

Như vậy, để tính được thể tích của hình trụ, ta cần xác định hai thông số đó là r và h. Ta có thể biểu diễn thể tích V như sau

$$V : (r, h) \mapsto V = f(r, h) = \pi r^2 h.$$

Ứng với mỗi cặp số (r, h), biểu thức $V = f(r, h) = \pi r^2 h$ xác định một giá trị thực (thuộc $\mathbb{R}$), người ta có thể xem V là một hàm hai biến r, h.

Ví dụ 1.1.2. Tốc độ phân hủy của một chất bán rã tỉ lệ thuận với khối lượng của nó tại mỗi thời điểm. Khối lượng của chất bán rã còn lại sau thời gian t được xác định bởi

$$m = m_0 \mathrm{e}^{-kt},$$

trong đó m_0 là khối lượng ban đầu, k là hệ số phân rã và t là thời gian. Vậy để tính được khối lượng của chất bán rã còn lại sau thời gian t, ta phải xác định được 3 thông số. Ta có thể biểu diễn điều đó như sau

$$m : (m_0, k, t) \mapsto m = g(m_0, k, t) = m_0 \mathrm{e}^{-kt}.$$

Tương tự trên, ta có thể xem $m = g(m_0, k, t) = m_0\mathrm{e}^{-kt}$ là một hàm ba biến m_0, k, t. Từ đó, rất tự nhiên đưa đến không gian $\mathbb{R}^n$ và khái niệm hàm nhiều biến.

1.2 Không gian $\mathbb{R}^n$

Không gian $\mathbb{R}^n$ là một ví dụ rất đặc biệt của không gian $n-$chiều. Nếu nắm bắt được các phương pháp làm việc trên $\mathbb{R}^n$ thì người đọc sẽ không gặp khó khăn trong việc mở rộng nó trong trường hợp tổng quát hơn. Trong giáo trình này, chủ yếu trình bày đối với không gian $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$. Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, đặt

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}.$$

Ta gọi x_i $(i = 1, ..., n)$ là tọa độ thứ i của x. Trên $\mathbb{R}^n$ ta xác định *phép cộng* và *phép nhân vô hướng* bởi các công thức:

- Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

- Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$

Cho hai điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Khoảng cách* giữa hai điểm x và y được cho bởi công thức

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}. \tag{1.1}$$

Hình cầu, lân cận trong $\mathbb{R}^n$

Cho a là một điểm của $\mathbb{R}^n$ và r là một số dương.

Định nghĩa 1.2.1. Ta định nghĩa *hình cầu mở* tâm a bán kính r là tập

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ d(x, a) < r\}.$$

Hình cầu đóng tâm a bán kính r là tập

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ d(x, a) \leq r\}.$$

Định nghĩa 1.2.2. Tập U được gọi là *lân cận* của điểm a nếu tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a, r) \subset U$. Lân cận của điểm a thường được ký hiệu là $U(a)$.

Định nghĩa 1.2.3. Tập G được gọi là *tập mở* trong $\mathbb{R}^n$ nếu với mọi $x \in G$, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x, r) \subset G$.
Tập F được gọi là *tập đóng* nếu $\mathbb{R}^n \setminus F$ là tập mở.

1.3 Định nghĩa hàm nhiều biến

Định nghĩa 1.3.1. Cho $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Một *hàm n biến f* xác định trên A là một biểu thức (qui tắc toán học), ứng với mỗi phần tử $(x_1, x_2, ..., x_n)$ của A xác định một giá trị thực $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Kí hiệu

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

Lưu ý rằng *biến số* ở đây là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ nên nó có n thành phần (tọa độ) và mỗi thành phần có thể xem như một *biến độc lập*. Do đó người ta gọi hàm xác định trên $A \subseteq \mathbb{R}^n$ là hàm nhiều biến.

Tập tất cả các điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ làm cho biểu thức f có nghĩa được gọi là *miền xác định* của hàm số f, kí hiệu là D_f.

Ví dụ 1.3.1. Trong $\mathbb{R}^3$, ta có thể xác định một hàm số ba biến bằng phép ứng mỗi điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ với một số bằng $\dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2}$. Một cách ngắn gọn hơn, ta nói hàm được cho bằng công thức $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2}$. Tập xác định của f là

$$D_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \text{ và } y \neq 0\right\}.$$

Ví dụ 1.3.2. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

là hàm hai biến xác định trên $\mathbb{R}^2$.

Nếu tương ứng cặp giá trị (x, y) với một điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy thì miền xác định của hàm số chính là tập hợp các điểm trong mặt phẳng sao cho tại những điểm đó hàm số được xác định. Vì vậy, miền xác định của hàm số hai biến thường được *biểu diễn hình học*.

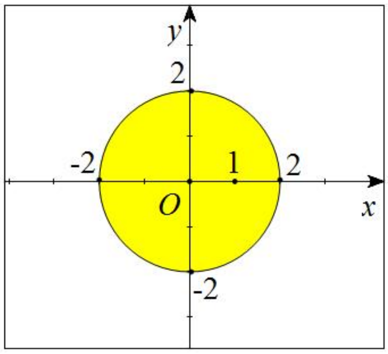
Ví dụ 1.3.3. Tìm miền xác định của hàm số $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
Ta có miền xác định

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Đó là những điểm nằm trong hình tròn tâm O, bán kính 2.
Việc tìm miền xác định của một hàm nhiều biến thường được qui về việc giải hệ bất phương trình (nhiều ẩn).

1.4 Đồ thị hàm hai biến

Khi đưa một khung dây vào nước xà phòng, ta thấy một điều thú vị là có một màng bong bóng được căng ra từ khung dây đó. Màng bong bóng đó được gọi là một phần

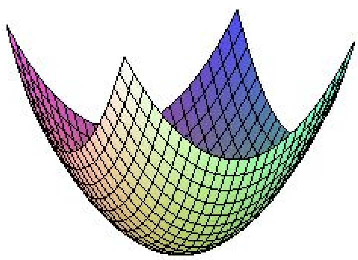


của mặt và nó là đồ thị của một hàm hai biến $z = f(x, y)$ nào đó nếu ta xét mặt đó trong không gian ba chiều với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$.
Giả sử hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên miền D. Ta thấy cặp (x, y) biểu diễn một điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy nên có thể xem hàm hai biến $f(x, y)$ là hàm của điểm $M(x, y)$. Như vậy, với điểm $M(x, y)$ trong miền D của mặt phẳng Oxy cho ứng với một điểm P trong không gian có tọa độ là $P(x, y, f(x, y))$. Quỹ tích của điểm P khi M chạy trong miền D được gọi là *đồ thị của hàm hai biến* $z = f(x, y)$. Vậy *đồ thị* của một hàm hai biến $z = f(x, y)$ là tập

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f\}.$$

Đồ thị của hàm hai biến thường gọi là *mặt* trong không gian mà hình chiếu của nó trên mặt phẳng Oxy là miền xác định của hàm.

Ví dụ 1.4.1. Mặt Paraboloid elliptic: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

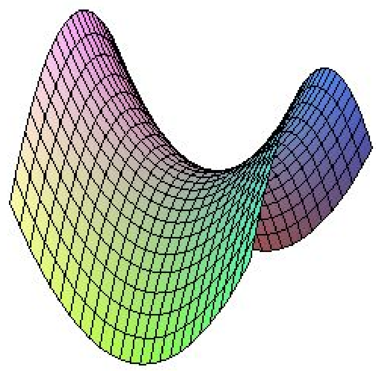


Hình 1.1: *Mặt Paraboloid elliptic* $z = x^2 + y^2$.

Mặt Paraboloid hyperbolic (Mặt yên ngựa): $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

Ví dụ 1.4.2. Một ví dụ chúng ta đã được làm quen là mặt phẳng, là đồ thị của hàm hai biến được cho bởi công thức

$$z = f(x, y) = ax + by + c.$$



Hình 1.2: *Mặt yên ngựa* $z = x^2 - y^2$.

Thật vậy, nếu ta biến đổi công thức này ta sẽ thấy phương trình mặt phẳng quen thuộc

$$ax + by - z + c = 0.$$

§2 GIỚI HẠN CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

2.1 Sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 2.1.1 (Dãy trong $\mathbb{R}^n$)**.** Một ánh xạ $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cho tương ứng mỗi $k \in \mathbb{N}^*$ với một điểm $x(k) = x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là một *dãy trong* $\mathbb{R}^n$ kí hiệu là $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ hay gọn hơn (x_k).

Bây giờ ta hãy xét trong $\mathbb{R}^n$ một điểm $a = (a_1, \dots, a_n)$ và một dãy (x_k).

Định nghĩa 2.1.2. Dãy (x_k) được gọi là hội tụ đến a nếu

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, a) = 0$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ hay gọn hơn $x_k \to a$.

Định lí 2.1.1. *Dãy (x_k) hội tụ về a khi và chỉ khi với mọi $i = 1, \dots, n$ dãy (x_i^k) hội tụ về a_i.*

Nhận xét. Sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ là sự hội tụ theo từng thành phần.

Ví dụ 2.1.1. Dãy $x_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$ có giới hạn là $(0, 0)$, vì mỗi thành phần của dãy đều có giới hạn là 0.

2.2 Giới hạn của hàm nhiều biến

Cho $A \subset \mathbb{R}^n$, f là hàm n biến xác định trong một lân cận V nào đó của $a \in A$, có thể trừ tại a và $l \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 2.2.1. Ta nói rằng f *có giới hạn là* l khi x dần tới a, và viết là $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (hay $f(x) \to l$ khi $x \to a$) nếu **với mọi** dãy điểm (x_k) thuộc lân cận V dần đến a ta đều có

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = l.$$

Mệnh đề 2.2.1. *Nếu f có giới hạn là l khi $x \to a$ thì giới hạn này là duy nhất.*

Nhận xét 2.2.1. Nếu **tồn tại** hai dãy (x_k) và (y_k) thuộc lân cận V khác nhau và khác a, cùng hội tụ về a nhưng $f(x_k) \to p$ và $f(y_k) \to q$ với $p \neq q$ thì không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Định lí 2.2.2. *Giả sử f và g là hai hàm xác định trong một lân cận V nào đó của a và tồn tại các giới hạn*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ và } \lim_{x \to a} g(x) = r.$$

Khi đó

1. $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = l \pm r.$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = lr.$
3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{r}$ *nếu* $g(x) \neq 0$ *và* $r \neq 0.$

2.3 Một số phương pháp tìm giới hạn hàm hai biến

Phương pháp 1: Đặt ẩn phụ, đưa về tính giới hạn hàm một biến

Ví dụ 2.3.1. Tính giới hạn $l = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{4 - \sqrt{xy + 16}}$.
Đặt $t = xy$. Khi $(x, y) \to (0, 0)$ thì $t \to 0$. Do đó

$$l = \lim_{t \to 0} \frac{t}{4 - \sqrt{t + 16}} = \lim_{t \to 0} \frac{t(4 + \sqrt{t + 16})}{(4 - \sqrt{t + 16})(4 + \sqrt{t + 16})} = \lim_{t \to 0} \frac{t(4 + \sqrt{t + 16})}{-t} = -8.$$

Phương pháp 2: Sử dụng giới hạn kẹp bằng cách đánh giá bất đẳng thức

Định lí 2.3.1 (Giới hạn kẹp)**.** *Giả sử $f(x, y), g(x, y)$ và $h(x, y)$ xác định trong lân cận V của điểm (x_0, y_0) thỏa mãn hai điều kiện*

1. $h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ *với mọi* (x, y) *thuộc lân cận* V.
2. $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} h(x, y) = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x, y) = l.$

Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l.$$

Ví dụ 2.3.2. Tính giới hạn $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Với $(x,y) \neq (0,0)$, ta có

$$0 \leq |\frac{xy^2}{x^2+y^2}| \leq |\frac{xy^2}{y^2}| = |x|.$$

Mặt khác $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, do đó $l = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

Phương pháp 3: Chứng minh hàm không tồn tại giới hạn

Để chứng minh một hàm số không tồn tại giới hạn, ta thường dùng phương pháp chọn dãy, tức là áp dụng Nhận xét 2.2.1.

Ví dụ 2.3.3. Xét hàm hai biến xác định bởi

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}; \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Hai dãy $u_k = (\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}) \to (0,0)$ và $v_k = (\dfrac{2}{k}, \dfrac{1}{k}) \to (0,0)$ khi $k \to \infty$, nhưng ta có

$$f(u_k) = f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \frac{1}{2}$$

$$f(v_k) = f(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{4}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{2}{5} \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \frac{2}{5}$$

Vậy hàm f không tồn tại giới hạn khi $(x,y) \to (0,0)$.

§3 HÀM SỐ LIÊN TỤC

3.1 Khái niệm liên tục

Định nghĩa 3.1.1. Giả sử $A \subseteq \mathbb{R}^n$ và $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Hàm f được gọi là *liên tục tại* $x_0 \in A$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b) Hàm f gọi là *liên tục trên* A nếu f liên tục tại mọi $x_0 \in A$

Mệnh đề 3.1.1. *Cho* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$*. Khi đó các điều sau đây là tương đương:*

(1) f *liên tục tại* x_0.

(2) $\forall (x_k) \subset A : x_k \to x_0 \in A \Longrightarrow f(x_k) \to f(x_0)$.

Nhận xét 3.1.1. Từ Mệnh đề này, ta có

$$f \text{ không liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \exists (x_k) \subset A\text{: } x_k \to x_0 \in A \text{ và } \lim_{k\to\infty} f(x_k) \neq f(x_0).$$

Mệnh đề 3.1.2. *Nếu f, g là hai hàm số liên tục tại x_0 thì các hàm số $f \pm g$, fg và $\dfrac{f}{g}(g(x_0) \neq 0)$ cũng liên tục tại x_0.*

Ví dụ 3.1.1. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Hàm số $f(x,y)$ liên tục tại mọi $(x,y) \neq (0,0)$ vì hàm số này là thương của hai hàm số liên tục và mẫu số khác 0. Do đó ta chỉ cần xét tính liên tục tại điểm $(0,0)$. Theo Ví dụ 2.3.2, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Vậy hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$, do đó hàm số đã cho liên tục.

3.2 Liên tục theo từng biến

Do đặc thù của không gian $\mathbb{R}^n$, người ta đưa thêm vào khái niệm liên tục theo từng biến. Ta sẽ thấy mối liên hệ của khái niệm này với khái niệm liên tục ở trên.

Định nghĩa 3.2.1. Ta nói hàm $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *liên tục theo biến x_i tại* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ nếu hàm một biến $h(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ liên tục tại a_i.
Nếu điều này xảy ra với mọi $i = 1, \ldots, n$ thì ta nói f liên tục theo từng biến tại a.

Mệnh đề 3.2.1. *Nếu hàm $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại $a \in A$ thì nó liên tục theo từng biến tại a.*

Nhận xét 3.2.1. Mệnh đề đảo của mệnh đề trên không đúng. Chẳng hạn hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

liên tục theo từng biến tại $O(0,0)$ vì $f(x,0) = f(0,y) = 0$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
Tuy nhiên, hàm số đã cho **không liên tục tại** $O(0,0)$ vì với dãy $(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}) \to (0,0)$, ta có

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

§4 ĐẠO HÀM RIÊNG

Trong giáo trình này, ta chỉ trình bày đối với hàm hai biến. Đối với hàm ba biến trở lên, các định nghĩa, tính chất và kết quả được suy ra một cách hoàn toàn tương tự.

4.1 Đạo hàm riêng

Định nghĩa 4.1.1. Cho f là một hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và (x_0, y_0) là một điểm trong D. Nếu hàm số một biến $h(x) = f(x, y_0)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì **đạo hàm đó** được gọi là *đạo hàm riêng của f đối với x* tại (x_0, y_0) và được kí hiệu là

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Như vậy,

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Tương tự, người ta định nghĩa đạo hàm riêng của f đối với y tại (x_0, y_0) và kí hiệu

$$f'_y(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Lúc đó

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Nhận xét 4.1.1.

1. Đạo hàm riêng của hàm n biến số ($n \geq 3$) được định nghĩa tương tự. Đạo hàm riêng của hàm f theo biến thứ i chính là đạo hàm của hàm một biến (biến thứ i) khi xem các biến còn lại cố định. Do đó các qui tắc tính đạo hàm riêng không có gì mới so với hàm một biến.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ chỉ là một kí hiệu chứ không phải là phân số.
3. **Hàm f có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) không nhất thiết là liên tục tại** (x_0, y_0). Từ Nhận xét 3.2.1, ta thấy f không liên tục tại $(0, 0)$. Tuy nhiên, ta dễ dàng kiểm tra được rằng, nếu cố định một biến thì hàm f khả vi theo biến còn lại, có nghĩa là hàm f có đạo hàm riêng tại mọi điểm.

Ví dụ 4.1.1.

1. Với hàm $f(x, y) = 2x^3y^2 + e^{xy} - x\sin y + 1;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2y + ye^{xy} - \sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4yx^3 + xe^{xy} - x\cos y.$$

2. Chứng minh hàm số $u(x,y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, với f là hàm khả vi thỏa mãn điều kiện:
$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x \cos y.$$
Thật vậy; ta có
$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(\sin y - \sin x)\cos y$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - f'(\sin y - \sin x)\cos x$$
từ đó suy ra đẳng thức cần phải chứng minh.

3. Cho hàm $h(x,y) = \ln\left[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}\right]$. Tính $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$, ta có
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}}\left(y^2 + 2xy + \frac{2(xy^2 + yx^2)(y^2 + 2xy)}{2\sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}}\right)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}}\left(2xy + x^2 + \frac{2(xy^2 + yx^2)(2xy + x^2)}{2\sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}}\right).$$

4.2 Tính khả vi

Cho hàm số f xác định trên tập mở $U \subseteq \mathbb{R}^2$ và điểm $(x_0, y_0) \in U$. Ta gọi
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
là *số gia* của hàm f tại điểm (x, y). Các số gia $\Delta x, \Delta y$ được lấy đủ bé sao cho $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$.

Định nghĩa 4.2.1. Hàm f được gọi là *khả vi tại điểm* (x_0, y_0) nếu **tồn tại hai số** A, B chỉ phụ thuộc vào (x_0, y_0) mà không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$ sao cho
$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

- Biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân* (hay vi phân toàn phần) của hàm f tại điểm (x_0, y_0) và kí hiệu
$$df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y.$$
- Hàm f được gọi là khả vi trên U nếu nó khả vi tại mọi điểm của U.

Định lí 4.2.1. *Nếu f khả vi tại $(x_0, y_0) \in D$ thì f liên tục tại (x_0, y_0) và có các đạo hàm riêng tại đó. Hơn nữa $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$.*

Nhận xét 4.2.1.

1. Theo định lý trên, nếu f khả vi tại (x_0, y_0) thì vi phân của f là duy nhất và
$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

2. Đối với hàm một biến, ta đã biết sự khả vi và sự tồn tại đạo hàm tại một điểm là tương đương. Đối với hàm hai biến, **từ sự tồn tại các đạo hàm riêng tại một điểm không suy ra được hàm đó khả vi tại điểm đó**, tức là điều ngược lại của Mệnh đề 4.2.1 không đúng. Chẳng hạn, xét hàm số

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}.$$

Ta có $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - 0}{\Delta x} = 0$ và tính tương tự ta được $f'_y(0,0) = 0$. Như vậy các đạo hàm riêng của f tại điểm $(0,0)$ đều tồn tại. Tuy nhiên, ta sẽ chứng minh f không khả vi tại $(0,0)$. Thật vậy, nếu f khả vi tại $(0,0)$ thì

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f(0,0) - (f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0,$$

hay $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \dfrac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$. Điều này không xảy ra, bởi vì khi chọn $\Delta x = \Delta y > 0$, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x^2|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta x^2}} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x}{\Delta x \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.\end{aligned}$$

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm f khả vi tại (x_0, y_0).

Định lí 4.2.2. *Nếu f có đạo hàm riêng tại điểm (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng liên tục tại (x_0, x_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).*

Nhận xét 4.2.2.

1. Cũng như đối với hàm một biến, nếu hàm $f(x, y)$ khả vi ta có thể viết vi phân của nó dưới dạng

$$df = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

2. Định lý trên chỉ là điều kiện đủ mà không phải là điều kiện cần, nghĩa là **có những hàm số có đạo hàm riêng và những đạo hàm riêng này không liên tục tại một điểm nào đó nhưng hàm vẫn khả vi tại điểm đó**. Chẳng hạn, chúng ta có thể xét hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{nếu } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Ta tính được $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$ và $f(0,0) = 0$. Với $(x, y) \neq (0,0)$, ta có

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Lấy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{\sqrt{n\pi}}) \to (0,0)$ khi $n \to \infty$, ta có

$$\lim_{(n\to\infty} f'_x(x_n, y_n) = \lim_{(n\to\infty} (-4\sqrt{n\pi}) = -\infty.$$

Điều này chỉ ra $f'_x(x, y)$ không liên tục tại $(0, 0)$. Tuy nhiên hàm f lại khả vi tại $(0, 0)$ vì

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f(0,0) - (f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$
$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Bằng cách sử dụng giới hạn kẹp qua đánh giá

$$0 \le |\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}| \le \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

ta kết luận giới hạn này bằng 0, do đó hàm khả vi tại $(0, 0)$.

4.3 Đạo hàm hàm hợp

Mệnh đề 4.3.1. *Cho hàm $f(x, y)$ là hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $x = x(t), y = y(t)$ là các hàm theo biến $t \in (a, b)$ khả vi trên (a, b) sao cho $(x(t), y(t)) \in D$.*
Xét hàm hợp $u = f(x(t), y(t))$ xác định trên (a, b). Giả sử $f(x, y)$ khả vi trên D. Khi đó $u = f(x(t), y(t))$ khả vi tại mọi điểm $t \in (a, b)$ và

$$u'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t.$$

Ví dụ 4.3.1. Cho hàm $u = f(x, y) = e^{x-2y}$ với x, y là hàm theo t: $x = \sin t, y = t^3$. Tính u'_t. Ta có

$$u'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t = e^{x-2y} \cos t - 2e^{x-2y} \cdot 3t^2.$$

Nhận xét 4.3.1. Trường hợp f là hàm n biến ta có công thức tương tự

$$u'_t = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \cdot (x_i)'_t.$$

Mệnh đề 4.3.2. *Cho hàm f là hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $x = x(u, v), y = y(u, v)$ là các hàm hai biến xác định trên tập mở $E \subseteq \mathbb{R}^2$ sao cho với mọi $(u, v) \in E$ thì $(x(u, v), y(u, v)) \in D$. Khi đó ta có hàm hợp $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Nếu các hàm $x(u, v), y(u, v)$ khả vi tại (u, v) và $f(x, y)$ khả vi tại (x, y) thì $z(u, v)$ khả vi tại (u, v) và*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Ví dụ 4.3.2. Cho $z = x^2y - y^2x$; với $x = u\cos v, y = u\sin v$. Tính $\frac{\partial z}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial v}$.
Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^2)\cos v + (x^2 - 2xy)\sin v$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = (2xy - y^2)(-u\sin v) + (x^2 - 2xy)u\cos v.$$

§5 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

5.1 Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa 5.1.1. Các đạo hàm riêng f'_x, f'_y của hàm hai biến $f(x, y)$ cũng là các hàm hai biến, do đó ta cũng có thể xét đạo hàm riêng của f'_x, f'_y (nếu tồn tại) và gọi là *đạo hàm riêng cấp hai* của $f(x, y)$. Ta có 4 đạo hàm riêng cấp hai của f được kí hiệu như sau

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$
$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ví dụ 5.1.1. 1. Cho $f(x, y) = x\ln(xy)$. Tính $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$.
Ta có $f'_x = \ln(xy) + 1$; $f'_y = x.\frac{x}{xy} = \frac{x}{y}$.
Khi đó $f''_{x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$; $f''_{y^2} = -\frac{x}{y^2}$.
Dễ dàng tính được rằng $f''_{yx} = \frac{1}{y}$; $f''_{xy} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$.

2. Với hàm $f(x, y) = x^3\sin y + y^3\sin x$, ta có

$$f'_y = x^3\cos y + 3y^2\sin x; f''_{y^2} = -x^3\sin y + 6y\sin x.$$

Cũng dễ dàng tính được

$$f''_{xy} = 3x^2\cos y + 3y^2\cos x; f''_{yx} = 3x^2\cos y + 3y^2\cos x.$$

Từ ví dụ này, phải chăng f''_{xy} và f''_{yx} luôn bằng nhau? Điều này không phải lúc nào cũng xảy ra, nhưng định lý sau cho ta thấy rằng trong thực tế các đạo hàm riêng cấp hai này thường hay bằng nhau.

Định lí 5.1.1 (Định lí Schwarzt)**.** *Cho f là hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$, giả sử các đạo hàm riêng cấp hai f''_{xy} và f''_{yx} tồn tại và liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$.*

Khi đó

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Nhận xét 5.1.1. Định nghĩacác đạo hàm riêng cấp $3, 4$ được phát biểu tương tự. Chẳng hạn:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

là đạo hàm riêng cấp 3 của f theo các biến x_i, x_j, x_k.
Tổng quát ta cố định nghĩa:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_i^{i_n - 1}}\right); k = i_1 + i_2 + \cdots + i_n.$$

Chẳng hạn hàm $u = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}; \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}; \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}; \cdots$$

5.2 Vi phân cấp cao

Định nghĩa 5.2.1. Xét hàm hai biến $f(x, y)$ khả vi trong tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Lúc đó vi phân của f

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

cũng là một hàm hai biến của x, y. Vi phân của df nếu tồn tại, được gọi là *vi phân cấp hai* của f.
Khi lấy vi phân df, ta xem dx, dy là các hằng số, lúc đó vi phân cấp hai của f là

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) \\ &= \left(f''_{x^2} dx + f''_{yx} dy\right) dx + \left(f''_{xy} dx + f''_{y^2} dy\right) dy \\ &= f''_{x^2} dx^2 + f''_{yx} dx dy + f''_{xy} dx dy + f''_{y^2} dy dy \end{aligned}$$

5.3 Công thức Taylor

Công thức Taylor đối với hàm một biến cho ta xấp xỉ một hàm với một đa thức. Đối với hàm nhiều biến, cụ thể là hàm hai biến công thức Taylor cũng cho ta xấp xỉ một hàm với một đa thức. Tuy nhiên, công thức Taylor của hàm hai biến có thể được xây dựng từ công thức Taylor của hàm một biến.
Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$, có **các đạo hàm riêng liên tục đến cấp** n tại mọi điểm của $(x, y) \in D$. Khi đó, với mọi $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ sao

cho $(x+h, y+k) \in D$, ta có

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}) + \frac{1}{2!}(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r h^{n-1-r}k^r \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1-r}\partial y^r} +$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n} C_n^r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n f(x+\theta h, y+\theta k)}{\partial x^{n-r}\partial y^r}; \quad 0 < \theta < 1$$

Công thức này được gọi là **công thức Taylor của hàm hai biến f tại điểm** (x, y). Lưu ý các đạo hàm riêng được lấy tại điểm (x, y).
Số hạng

$$\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n} C_n^r h^{n-r}k^r \frac{\partial^n f(x+\theta h, y+\theta k)}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$$

được gọi là phần dư dạng Lagrange.
Nếu sử dụng kí hiệu hình thức

$$\sum_{r=0}^{q} C_q^r h^{q-r}k^r \frac{\partial^q f}{\partial x^{q-r}\partial y^r} = (h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^q f$$

thì công thức Taylor trở thành

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \sum_{q=1}^{n-1}\frac{1}{q!}(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^q f(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{n!}(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y})^n f(x+\theta h, y+\theta y),\ 0 < \theta < 1.$$

Nếu $x = y = 0$, ta có công thức Mac-Laurin.

Ví dụ 5.3.1. Viết công thức Taylor đối với hàm $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$, tại điểm $(x, y) = (1, -2)$.
Ta có

$$f'_x = 4x - y - 6; f''_{x^2} = 4; f''_{xy} = -1;$$
$$f'_y = -x - 2y - 3; f''_{y^2} = -2; f'_x(1,-2) = 0 = f'_y(1,-2).$$

Vậy $f(1+h, -2+k) = 5 + (4h^2 - 2hk - 2k^2)\frac{1}{2!}$ hay

$$f(x+1, y-2) = 2(x+1)^2 - (x+1)(y-2) - (y-2)^2 - 6(x+1) - 3(y-2) + 5$$
$$= 2x^2 - xy - y^2 + 5.$$

§6 CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

6.1 Cực trị địa phương

Định nghĩa 6.1.1. Cho $f(x, y)$ là hàm hai biến xác định trên tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$.

- Hàm f *đạt cực đại địa phương tại* (x_0, y_0) nếu tồn tại lân cận U của (x_0, y_0) sao cho với mọi $(x, y) \in U \setminus \{(x_0, y_0)\} : f(x, y) < f(x_0, y_0)$.
- Hàm f *đạt cực tiểu địa phương tại* (x_0, y_0) nếu tồn tại lân cận U của (x_0, y_0) sao cho với mọi $(x, y) \in U \setminus \{(x_0, y_0)\} : f(x, y) > f(x_0, y_0)$.
- Hàm f đạt cực đại hay cực tiểu tại (x_0, y_0) được gọi chung là *đạt cực trị tại* (x_0, y_0).

Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Định lí 6.1.1. *Nếu f có cực trị địa phương tại điểm (x_0, y_0)* ***và*** *có các đạo hàm riêng tại (x_0, y_0) thì các đạo hàm riêng đó bằng 0. Lúc đó (x_0, y_0) được gọi là* điểm dừng.

Nhận xét 6.1.1. Nếu hàm đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0) vẫn chưa thể kết luận (x_0, y_0) là điểm dừng. Bởi vì có những hàm đạt cực trị địa phương tại (x_0, y_0) nhưng tại đó các đạo hàm riêng không tồn tại. Chẳng hạn, hàm $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ đạt cực tiểu địa phương tại $(0, 0)$ nhưng tại điểm này f không có các đạo hàm riêng.

Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Đối với điều kiền cần để hàm có cực trị tại (x_0, y_0), chưa có sự xuất hiện của các đạo hàm riêng cấp 2 tại (x_0, y_0). Các đạo hàm riêng cấp hai này sẽ tham gia để xác định điều kiện đủ để hàm f có cực trị tại (x_0, y_0). Ta kí hiệu chúng như sau

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{y^2}(x_0, y_0).$$

Định lí 6.1.2. *Giả sử $f(x, y)$ có* ***các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục*** *trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Khi đó, ta có các kết luận tại điểm (x_0, y_0) được thể hiện qua bảng sau*

Điều kiện	**Kết luận**
$B^2 - AC < 0$	$A > 0$: f đạt cực tiểu tại (x_0, y_0) $A < 0$: f đạt cực đại tại (x_0, y_0)
$B^2 - AC = 0$	Chưa có kết luận
$B^2 - AC > 0$	f không có cực trị tại (x_0, y_0)

Cách tìm cực trị của hàm hai biến

- **Bước 1**: Tìm các điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 bằng cách giải hệ phương trình
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

- **Bước 2**: Nếu hệ vô nghiệm, ta kết luận hàm số không có cực trị. Nếu hệ có nghiệm là (x_0, y_0), ta tính các giá trị
$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{y^2}(x_0, y_0).$$

- **Bước 3**: Dựa vào bảng ở định lý trên, ta kết luận các cực trị của hàm f.

Ví dụ 6.1.1. Tìm cực trị của hàm số
$$f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$$

Ta có
$$\begin{aligned} &f'_x = e^{2x}(1 + 2x + 2y^2 + 4y);\ f'_y = e^{2x}(2y + 2) \\ &f''_{x^2} = 2e^{2x} + 2e^{2x}(1 + 2x + 2y^2 + 4y);\ f''_{xy} = 2e^{2x}(2y + 2);\ f''_{y^2} = 2e^{2x}. \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 2x + 2y^2 + 4y &= 0 \\ 2y + 2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \dfrac{1}{2} \\ y &= -1. \end{cases}$$

Tại điểm $(\frac{1}{2}, -1)$, ta tính được $A = 2e; B = 0; C = 2e$. Do đó $B^2 - AC = -4e^2 < 0$. Vì $A = 2e > 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $(\frac{1}{2}, -1)$ và
$$f_{\min} = -\frac{1}{2}e.$$

Ví dụ 6.1.2. Tìm cực trị của hàm số sau, nếu có:
$$f(x, y) = x + y - xe^y.$$

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - e^y &= 0 \\ 1 - xe^y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0. \end{cases}$$

Tại điểm $(1, 0)$, ta tính được $A = 0; B = -1; C = -1$. Do đó $B^2 - AC = 1 > 0$. Vì vậy, hàm f không đạt cực trị.

6.2 Cực trị có điều kiện

Định nghĩa

Cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ được gọi là cực trị có điều kiện.

Phương pháp thế

Giả sử từ điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ ta giải ra được $y = g(x)$. Bằng cách thay $y = g(x)$ vào hàm $z = f(x, y)$, việc tìm cực trị có điều kiện của $z = f(x, y)$ trở thành tìm cực trị của hàm một biến $z = f(x, g(x))$.

Ví dụ 6.2.1. Tìm cực trị của hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$

Giải

Từ điều kiện $x + y - 1 = 0$ ta rút ra được $y = 1 - x$. Thay vào $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ta được

$$z = \sqrt{1 - x^2 - (1 - x)^2} = \sqrt{2(x - x^2}.$$

Đây là hàm một biến x xác định với $0 \leq x \leq 1$. Khảo sát hàm này ta có z đạt cực đại tại $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Phương pháp nhân tử Lagrange

Xét cực trị của hàm $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $F(x, y) = 0$. Hàm

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y),$$

được gọi là *hàm Lagrange* và λ gọi là *nhân tử Lagrange*.
Điểm dừng của hàm Lagrange là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} L'_x & = 0 \\ L'_y & = 0 \\ L'_\lambda & = 0 \end{cases}$$

Ta có định lý sau cho điều kiện đủ của cực trị có điều kiện:

Định lí 6.2.1. *Giả sử các hàm $f(x, y)$ và $F(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong lân cận của điểm (x_0, y_0) và (x_0, y_0, λ) là điểm dừng của hàm Lagrange. Xét vi phân*

$$d^2L(x_0, y_0, \lambda) = L''_{xx}(x_0, y_0, \lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0, y_0, \lambda)dxdy + L''_{yy}(x_0, y_0, \lambda)dy^2,$$

trong đó dx, dy thỏa mãn điều kiện $F'_x dx + F'_y dy = 0$ với $dx^2 + dy^2 > 0$. Khi đó,

1. *Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda) < 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực đại tại (x_0, y_0).*

2. *Nếu $d^2L(x_0, y_0, \lambda) > 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (x_0, y_0).*

3. Nếu dấu $d^2L(x_0, y_0, \lambda)$ không xác định được thì hàm $f(x, y)$ không đạt cực trị tại (x_0, y_0).

Định lý điều kiện đủ này có thể mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến. Từ định lý này ta có thể rút ra các bước tìm cực trị có điều kiện.

- **Bước 1**: Lập hàm Lagrange
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y).$$
Tính $L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy}$.

- **Bước 2**: Tìm các điểm dừng (x_0, y_0, λ) của hàm Lagrange bằng cách giải hệ
$$\begin{cases} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ L'_\lambda &= 0 \end{cases}$$

- **Bước 3**: Tính
$$d^2L(x_0, y_0, \lambda) = L'_{xx}(x_0, y_0, \lambda)dx^2 + 2L'_{xy}(x_0, y_0, \lambda)dxdy + L'_{yy}(x_0, y_0, \lambda)dy^2,$$
rồi áp dụng kết quả của định lý trên, kết luận tại (x_0, y_0).

Ví dụ 6.2.2. Tìm cực trị của hàm $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Lập hàm Lagrange:
$$L(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ta có $L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2\lambda$.

Giải hệ $\begin{cases} L'_x &= -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= -3 + 2\lambda x = 0 \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ ta được các điểm dừng của hàm Lagrange là
$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{3}{5}; \lambda_2 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{4}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}.$$

Ta có
$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

- Với $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, ta có $d^2L(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}) = 2\frac{5}{2}(dx^2 + dy^2) > 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ và $z_{min} = 1$.

- Với $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, ta có $d^2L(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{2}) = 2(-\frac{5}{2})(dx^2 + dy^2) < 0$ nên hàm đạt cực đại tại $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ và $z_{min} = 11$.

Phương pháp xét dấu định thức cấp 3

Cực trị có điều kiện của hàm hai biến $f(x, y)$ ràng buộc bởi điều kiện $F(x, y) = 0$ là cực trị của hàm số $f(x, y)$ thu hẹp trên đường cong $F(x, y) = 0$. Các điểm cực trị của hàm số phải là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda F'_x(x, y) & = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda F'_y(x, y) & = 0 \\ F(x, y) & = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Như vậy, cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y)$ ràng buộc bởi điều kiện $F(x, y) = 0$ là cực trị của hàm Lagrange sau đây

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y).$$

Nếu hệ (1.2) vô nghiệm thì $f(x, y)$ không có cực trị. Nếu a, b, λ_0 là nghiệm của hệ (1.2) thì ta lập số

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & F'_x(a, b) & F'_y(a, b) \\ F'_x(a, b) & L''_{xx}(a, b, \lambda_0) & L''_{xy}(a, b, \lambda_0) \\ F'_y(a, b) & L''_{xy}(a, b, \lambda_0) & L''_{yy}(a, b, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

và ta có kết luận như sau:

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực đại tại (a, b).
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (a, b).
- Nếu $\Delta = 0$ thì chưa kết luận được.

Ví dụ 6.2.3. Tìm cực trị có cực trị của hàm $f(x, y) = x + \dfrac{y}{2}$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải

Ta có hệ

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda F'_x(x, y) & = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda F'_y(x, y) & = 0 \\ F(x, y) & = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda 2x & = 0 \\ \dfrac{1}{2} + \lambda 2y & = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 & = 0. \end{cases}$$

Hệ này có hai nghiệm $\begin{cases} x & = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y & = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_1 & = \frac{\sqrt{5}}{4}. \end{cases}$ và $\begin{cases} x & = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y & = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_1 & = -\frac{\sqrt{5}}{4}. \end{cases}$

Ta có $L''_{xx}(x, y) = 2\lambda, L''_{yy}(x, y) = 2\lambda, L''_{xy}(x, y) = 0$. Khi đó

- Tại điểm $(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{\sqrt{5}}{4})$ thì

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ và giá trị cực tiểu là $f_{\min} = -\sqrt{5}$.

- Xét tương tự tại điểm $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{4})$, hàm số đã cho đạt cực đại tại $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ và giá trị cực đại là $f_{\max} = \sqrt{5}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

GIỚI HẠN CỦA HÀM HAI BIẾN

Bài 1.1. Hãy tìm miền xác định của các hàm hai biến sau và biểu diễn hình học miền xác định đó lên mặt phẳng tọa độ

a) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; b) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(25 - x^2 - y^2)}$;

c) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1}}$; d) $z = \ln(x + y)$;

e) $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 - 2y}$; f) $z = \sqrt{\log_{a^2+1}(x^2 + y^2)}$.

Bài 1.2. Chứng minh rằng đối với hàm $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ thì

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y) = 1; \qquad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y) = -1$$

trong khi đó không tồn tại giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

Khi cố định một biến, tính giới hạn theo biến còn lại, sau đó tính giới hạn theo biến cố định ở trước gọi là giới hạn lặp.

Bài 1.3. Chứng minh rằng đối với hàm $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$, ta có

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0.$$

Tuy nhiên, không tồn tại giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

Bài 1.4. Chứng minh rằng đối với hàm $f(x, y) = (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, cả hai giới hạn

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)); \qquad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y))$$

không tồn tại, nhưng tồn tại giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

Bài 1.5. Giới hạn sau đây có tồn tại hay không?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Bài 1.6. Tính giới hạn các hàm hai biến sau, nếu có

$$\text{a)} z = \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} \qquad \text{b)} z = \frac{x^4y}{x^4+y^2}$$

$$\text{c)} z = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad \text{d)} z = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

Bài 1.7. Tìm các giới hạn

$$\text{a)} \lim_{\substack{y\to\infty\\ x\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \qquad \text{b)} \lim_{\substack{y\to\infty\\ x\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

$$\text{c)} \lim_{\substack{y\to a\\ x\to 0}} \frac{\sin xy}{x} \qquad \text{d)} \lim_{\substack{y\to+\infty\\ x\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

$$\text{e)} \lim_{\substack{y\to+\infty\\ x\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \qquad \text{f)} \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

$$\text{g)} \lim_{\substack{y\to a\\ x\to\infty}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} \qquad \text{h)} \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 1}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM HAI BIẾN

Bài 1.8. Tìm các điểm gián đoạn của các hàm sau:

$$\text{a)}\ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{b)}\ z = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

Bài 1.9. Khảo sát sự liên tục của các hàm số sau

$$\text{a)}\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{nếu } \ x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)}\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } \ x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Bài 1.10. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^3} & \text{nếu } \ x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

không liên tục tại $(0,0)$.

ĐẠO HÀM CỦA HÀM HAI BIẾN

Bài 1.11. Tính đạo hàm riêng f'_x, f'_y, f''_{xy} của các hàm số sau

a) $f(x,y) = x^y$; b) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;

c) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$; d) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$.

Bài 1.12. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{nếu } \ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Đẳng thức $f''_{xy} = f''_{yx}$ có đúng không?

Bài 1.13. Cho $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Chứng minh rằng

$$xf'_x + yf'_y = 2f(x,y).$$

Bài 1.14. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{nếu } \ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } \ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

không khả vi tại $(0,0)$.

Bài 1.15. Tính đạo hàm của các hàm số hợp

a) $z = \ln(2x - \sqrt{y})$, trong đó $x = e^t$, $y = \sin t^2$.

b) $z = \sin(u^2 - v^2)$, trong đó $u = \cos x$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$;

CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN

Bài 1.16. Tìm cực trị địa phương của các hàm sau:

$a)z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $b)z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

$c)z = x^2y^3(6 - x - y)$ $d)z = x^3 + y^3 - 3xy$

$e)z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y},\ x > 0, y > 0$ $f)z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$g)u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{1}{y} + 2$ $h)u = x^n y^m,\ x + y = a > 0.$

Bài 1.17. Khảo sát cực trị có điều kiện của các hàm sau:

a) $u = xy^2$, nếu $x + 2y = a, (x > 0, y > 0, a > 0)$.

b) $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, nếu $x^2 + y^2 \leq 25$.

c) $u = (x - y^2)(2x - y^2)$.

d) $u = x^\alpha + y^\beta$ $(x, y > 0, \alpha, \beta > 0)$ với điều kiện ràng buộc $xy = a > 0$.

e) $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

f) $u = \dfrac{x^2 + 6xy + 3y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

CHƯƠNG 2

TÍCH PHÂN BỘI

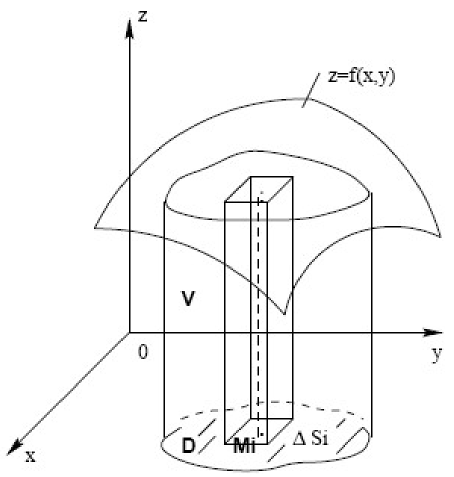
§1 ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KÉP VÀ TÍNH CHẤT

1.1 Bài toán mở đầu và định nghĩa tích phân kép

Ta đã biết, với hàm một biến ta lấy tích phân trên một đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (tức là miền một chiều). Do đó, ta phán đoán rằng để định nghĩa tích phân của hàm hai biến, chúng ta sẽ lấy tích phân trên một miền $R \subset \mathbb{R}^2$ (tức là miền hai chiều).

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ không âm, liên tục trên miền đóng và bị chặn D của mặt phẳng Oxy, có đồ thị là S. Ta gọi *vật thể hình trụ* là vật thể giới hạn bởi miền D, một mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và mặt cong S của hàm $z = f(x, y)$.

Bài toán: *Hãy tính thể tích V của vật thể hình trụ có đáy trên là phần đồ thị S và đáy dưới là miền D.*



Để giải quyết bài toán, ta chia miền D thành n miền nhỏ, đóng, không dẫm lên nhau $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ có diện tích lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Lấy mỗi miền nhỏ σ_i làm đáy, dựng vật thể hình trụ mà mặt xung quanh có đường sinh song song với trục Oz và phía trên giới hạn bởi S. Khi đó vật thể hình trụ đã được chia thành n vật thể hình trụ nhỏ hơn có thể tích giả sử là $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$.

Trong mỗi miền nhỏ σ_i lấy điểm (x_i, y_i) tùy ý. Khi σ_i khá nhỏ, Δv_i xấp xỉ với thể tích của vật thể hình trụ đứng có đáy ΔS_i và chiều cao $f(x_i, y_i)$, tức là

$$\Delta v_i \approx f(x_i, y_i)\Delta S_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Nếu mọi miền con σ_i đều rất bé thì thể tích V của vật thể hình trụ xấp xỉ

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Phép tính xấp xỉ này càng chính xác nếu n và σ_i càng bé. Gọi d_i là đường kính của miền con σ_i (đường kính là khoảng cách giữa hai điểm bất kì của σ_i). Cho $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ thì thể tích của vật thể hình trụ là

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử $z = f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền đóng, bị chặn D của mặt phẳng Oxy. Chia miền D thành n miền nhỏ, đóng, không dẫm lên nhau $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ có diện tích lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Trong mỗi miền nhỏ σ_i lấy điểm (x_i, y_i) tùy ý và lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Gọi d_i là đường kính của miền con σ_i. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà tồn tại giới hạn

$$I = \lim_{\max d_i \to 0} I_n \tag{2.1}$$

không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách chọn điểm (x_i, y_i) thì giới hạn trên được gọi là *tích phân kép của hàm $f(x, y)$ lấy trên miền D* và được kí hiệu là

$$\iint\limits_D f(x, y)dS, \tag{2.2}$$

trong đó $f(x, y)$ là *hàm dưới dấu tích phân*, D là *miền lấy tích phân*, dS là *yếu tố diện tích*.

Chú ý 1.1.1. Vì giá trị của tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D nên ta có thể chọn cách chia miền D bởi lưới các đường thẳng song song với các trục tọa độ. Khi đó các miền nhỏ σ_i (trừ một số không đáng kể các σ_i giao với biên) là hình chữ nhật có các cạnh $\Delta x, \Delta y$ nên ta có $dS = dx.dy$. Vì vậy tích phân kép thường được kí hiệu dưới dạng

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Nhận xét 1.1.1.

1. Nếu $f(x, y)$ liên tục và không âm trên miền D (đóng và bị chặn) thì **tích phân kép** của $f(x, y)$ trên miền D chính là **thể tích của vật thể hình trụ** V trong không gian có đáy dưới là miền D trong mặt phẳng Oxy và đáy trên là mặt cong xác định bởi $z = f(x, y)$, tức là

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

2. Việc tính tích phân kép dựa vào định nghĩa rất khó khăn, trong các phần sau ta sẽ có các kết quả cho phép tính tích phân kép một cách dễ dàng.

3. Giới hạn (2.4) không phải khi nào cũng tồn tại, có nghĩa là tích phân (2.5) của một hàm hai biến trên một miền D không phải khi nào cũng có. Nếu tích phân (2.5) tồn tại, ta nói rằng $f(x, y)$ *khả tích* trong miền D. Định lý sau cho phép ta khẳng định tích phân kép tồn tại, tức là $f(x, y)$ khả tích trên D.

Định lí 1.1.1. *Nếu $f(x, y)$ liên tục trên miền D (đóng và bị chặn) thì $f(x, y)$ khả tích trên D.*

1.2 Tính chất của tích phân kép

Tích phân kép có các tính chất quen thuộc chúng ta đã biết ở tích phân xác định, với giả thiết các tích phân có mặt đều tồn tại.

1. $$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D g(x, y)dxdy.$$

2. $$\iint_D kf(x, y)dxdy = k \iint_D f(x, y)dxdy.$$

3. Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ thì
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

4. Nếu $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ thì
$$\iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_D g(x, y)dxdy.$$

§2 TÍCH PHÂN KÉP TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC

Như đã nói ở nhận xét trên, việc tính tích phân kép trực tiếp bằng định nghĩa là một công việc rất phức tạp, đòi hỏi ta phải có công thức tính đơn giản, phù hợp định nghĩa và tính chất của tích phân kép. Người ta sẽ tìm cách đưa nó về phép tính tích phân hàm một biến (nhiều lần). Mở đầu, chúng ta xét tích phân kép của hàm hai biến trên miền $D = [a, b] \times [c, d]$, tức là miền lấy tích phân là hình chữ nhật. Ta sẽ xét miền lấy tích phân tổng quát hơn ở phần sau.

2.1 Miền lấy tích phân là hình chữ nhật ($D = [a, b] \times [c, d]$)

Ví dụ 2.1.1 (Ví dụ mở đầu)**.** Tính tích phân

$$I = \int_1^2 \Big(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}\Big) dx.$$

Giải

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$. Do vậy

$$I = \int_1^2 (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}) dx = \ln \frac{x+1}{x+2} \Big|_1^2 = \ln \frac{9}{8}.$$

Bây giờ, tính tích phân $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, trong đó $D = [1, 2] \times [1, 2]$. Để tính tích phân kép này, ta sử dụng kết quả sau:

Định lí 2.1.1 (Định lý Fubini)**.** *Nếu $f(x, y)$ **liên tục** trên $D = [a, b] \times [c, d]$ thì*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

Trở lại ví dụ mở đầu, để tính tích phân $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$ trong đó $D = [1, 2] \times [1, 2]$, ta nhận thấy rằng hàm $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$ liên tục trên $D = [1, 2] \times [1, 2]$ nên

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \Big(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}\Big) dx = \ln \frac{9}{8}.$$

Như vậy, Định lý Fubini đã giải quyết được yêu cầu đặt ra là đưa phép tính tích phân kép về phép tính tích phân hàm một biến, với yêu cầu hàm $f(x, y)$ có tính chất quen thuộc là liên tục. Tuy rằng Định lý Fubini cũng đúng khi $f(x, y)$ khả tích trên D và hàm $y \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[c, d]$ (hoặc hàm $x \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[a, b]$), nhưng đây là các tính chất không quen thuộc và ít sử dụng trong tính toán, do đó ta chỉ quan tâm với những hàm hai biến liên tục trên R.

Ví dụ 2.1.2. Tính tích phân kép

$$\iint_D [x^2y^2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi x)]dxdy, \text{ trong đó } D = [-2, -1] \times [0, 1].$$

Giải

Vì hàm $f(x,y) = x^2y^2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$ liên tục trên $D = [-2,-1] \times [0,1]$ nên áp dụng định lý Fubini ta có

$$\begin{aligned}\iint\limits_D [x^2y^2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi x)]dxdy &= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{-2}^{-1} [x^2y^2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi y)]dx\Big)dy \\ &= \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{3}x^3y^2 + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + x\sin(\pi y)\Big)\Big|_{-2}^{-1} dy \\ &= \int\limits_0^1 \Big(\frac{7}{3}y^2 + \sin(\pi y)\Big)dy \\ &= \frac{7}{9}y^3 - \frac{1}{\pi}\cos(\pi y)\Big|_0^1 = \frac{7}{9} + \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.3. Tính tích phân kép

$$I = \iint\limits_D e^{x+y}dxdy, \text{ trong đó } D = [0,1] \times [0,1].$$

Giải

$$\begin{aligned}I = \iint\limits_D e^{x+y}dxdy &= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 e^{x+y}\Big)dy = \int\limits_0^1 \Big(e^{x+y}\Big]_0^1\Big)dy \\ &= \int\limits_0^1 \Big(e^{1+y} - e^y\Big)dy = e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2.\end{aligned}$$

<u>Chú ý</u>: *Nếu hàm hai biến $f(x,y) = g(x)h(y)$, thì tích phân của $f(x,y)$ trên $D = [a,b] \times [c,d]$ được tính như sau*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \Big(\int\limits_a^b g(x)dx\Big)\Big(\int\limits_c^d h(y)dy\Big).$$

Ví dụ 2.1.4. Tính tích phân kép

$$I = \iint\limits_D x\cos^2 y dxdy, \text{ trong đó } D = [-2,3] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

Giải

$$\begin{aligned}I &= \iint\limits_D x\cos^2 y dxdy = \Big(\int\limits_{-2}^3 xdx\Big)\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy\Big) = \Big(\frac{1}{2}x^2\Big|_{-2}^3\Big)\Big(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2y)dy\Big) \\ &= \frac{5}{2}.\Big(\frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}\sin(2y))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big) = \frac{5\pi}{8}.\end{aligned}$$

2.2 Miền lấy tích phân là miền bị chặn

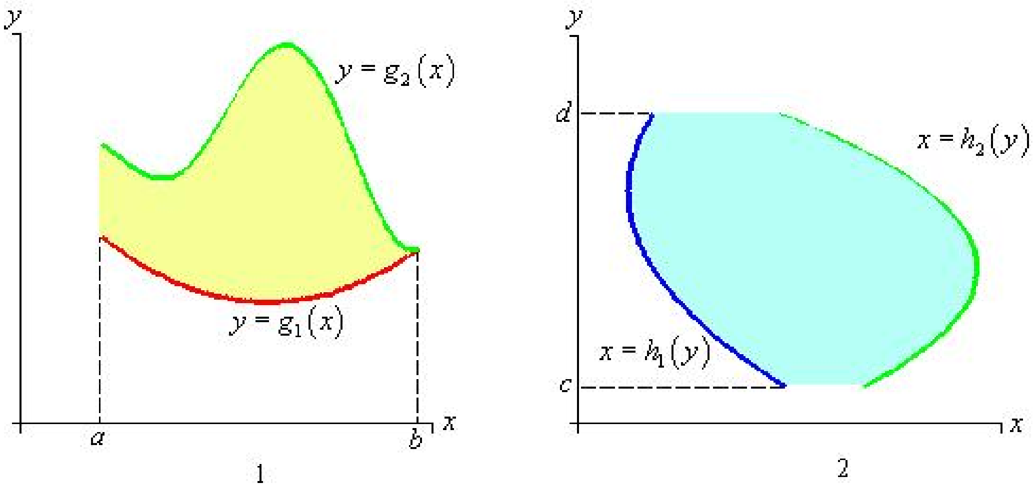
Đối với miền bị chặn, ta có thể xét hai trường hợp sau đây

- Miền lấy tích phân theo phương Ox (Hình 1)

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

- Miền lấy tích phân theo phương Oy (Hình 2)

$$D = \{(x, y) : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}.$$



Hình 2.1: *Miền lấy tích phân theo phương Ox và Oy*

Định lí 2.2.1 (Định lý Fubini)**.**

1. *Nếu* $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$*, trong đó* $g_1(x)$ *và* $g_2(x)$ *là hai hàm* ***liên tục*** *trên* $[a, b]$ *(miền lấy tích phân theo phương Ox) thì*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy.$$

2. *Nếu* $D = \{(x, y) : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$*, trong đó* $h_1(y)$ *và* $h_2(y)$ *là hai hàm* ***liên tục*** *trên* $[c, d]$ *(miền lấy tích phân theo phương Oy) thì*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y))} f(x, y)dx.$$

Như vậy, Định lý Fubini này cho phép ta tính tích phân kép của hàm hai biến trên một miền bị chặn trong hai trường hợp trên (tương tự như đối với miền là hình chữ nhật). Tuy nhiên, việc lấy cận tích phân rất quan trọng, đòi hỏi ta phải biết vẽ hình, xác định các giao điểm (nếu có) và rút ra công thức tính toán chính xác.

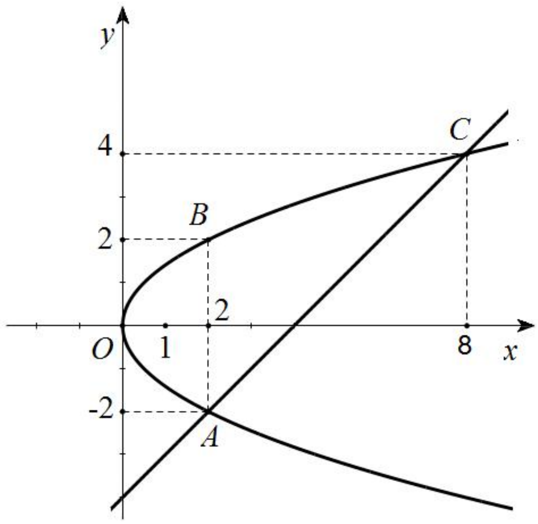
Ví dụ 2.2.1. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D xy^2 dxdy,$$

trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x - 4$ và $y^2 = 2x$.

Giải

Để xác định cận lấy tích phân, cách tốt nhất là ta vẽ hai đường $y = x - 4$ và $y^2 = 2x$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Tọa độ giao điểm của hai đường $y = x - 4$ và $y^2 = 2x$ là $A(2, -2), C(8, 4)$.
Ta có $y^2 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{2}$ và $y = x - 4 \Rightarrow x = y + 4$.

- Nếu xét theo phương Oy thì miền D được xác định như sau

$$D = \{(x, y) : \frac{y^2}{2} \leq x \leq y + 4, -2 \leq y \leq 4\}.$$

Do đó

$$I = \int\limits_D\int xy^2 dxdy = \int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xy^2 dx = \int\limits_{-2}^{4} \frac{y^2x^2}{2}\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{4}(y^4 + 8y^3 + 16y^2 - \frac{y^6}{4})dy = \frac{16992}{34}.$$

- Nếu xét theo phương Ox, ta chia miền D thành hai miền D_1, D_2 được xác định như sau

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{2x}\},$$
$$D_2 = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 8, x - 4 \leq y \leq \sqrt{2x}\}.$$

Từ đó, áp dụng Định lý Fubini, ta có

$$I = \int\int_D xy^2dxdy = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} xy^2dy + \int_2^8 dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} xy^2dy.$$

Tính toán, ta được $I = \dfrac{16992}{34}$.

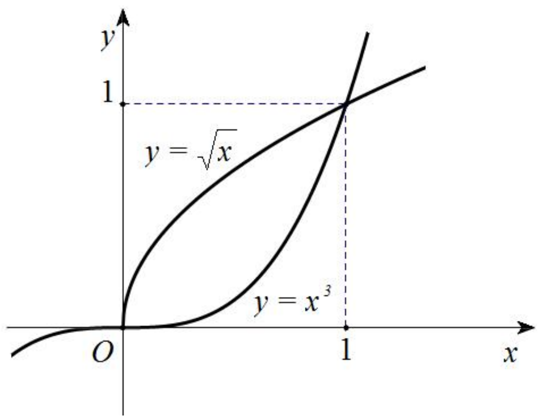
Ví dụ 2.2.2. Tính tích phân

$$I = \iint_D 4xy - y^3dxdy,$$

trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x^3$.

Giải

Ta vẽ hai đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x^3$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Tọa độ giao điểm của hai đường $y = \sqrt{x}$ và $y = x^3$ là $(0,0)$ và $(1,1)$. Nếu xét theo phương Ox thì miền D được xác định như sau

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x^3 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

Khi đó, tích phân kép đã cho là

$$I = \iint_D 4xy - y^3dxdy = \int_0^1 \Big(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} 4xy - y^3dy\Big)dx = \int_0^1 \Big(2xy^2 - \frac{1}{4}y^4\Big)\Big|_{x^3}^{\sqrt{x}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{7}{4}x^2 - 2x^7 + \frac{1}{4}x^{12}dx = \Big(\frac{7}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{52}x^{13}\Big)\Big|_0^1 = \frac{55}{156}.$$

§3 ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TÍCH PHÂN KÉP

3.1 Công thức đổi biến số

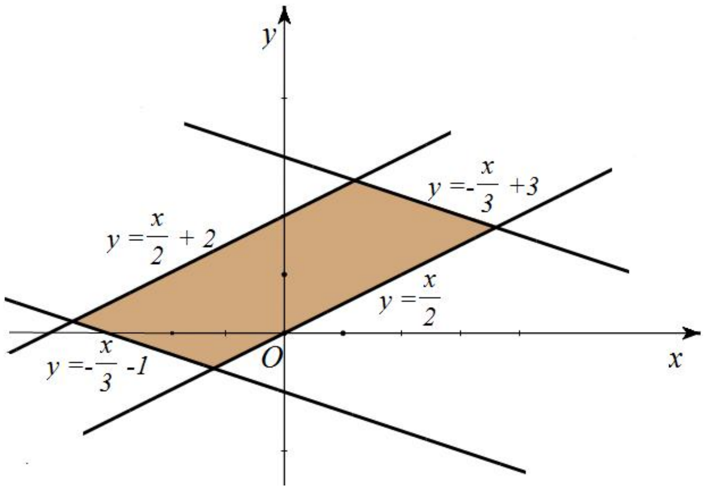
Đổi biến số là phương pháp quen thuộc trong việc tính tích phân xác định mà ta đã thực hành rất nhiều trong cả chương trình toán phổ thông và chương trình toán cao cấp. Đối với tích phân kép, đổi biến số cũng là một phương pháp được sử dụng để tính trong các trường hợp miền lấy tích phân phức tạp không trực tiếp lấy cận được. Việc đổi biến số cho phép chuyển miền lấy tích phân trở nên đơn giản hơn, quen thuộc hơn và cho phép ta tính tích phân kép một cách dễ dàng hơn.

Để làm quen với phương pháp đổi biến số trong tích phân kép, ta xét ví dụ sau đây để thấy rằng qua phép đổi biến số, miền giới hạn của ta trở nên đơn giản hơn.

Ví dụ 3.1.1. Cho D là miền giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x}{2}, y = \dfrac{x}{2}+2, y = -\dfrac{x}{3}-1, y = -\dfrac{x}{3}+3$ và phép đổi biến số

$$\begin{cases} u = -\dfrac{x}{2} + y \\ v = \dfrac{x}{3} + y. \end{cases}$$

Miền D được biểu diễn trong hệ trục Oxy như sau

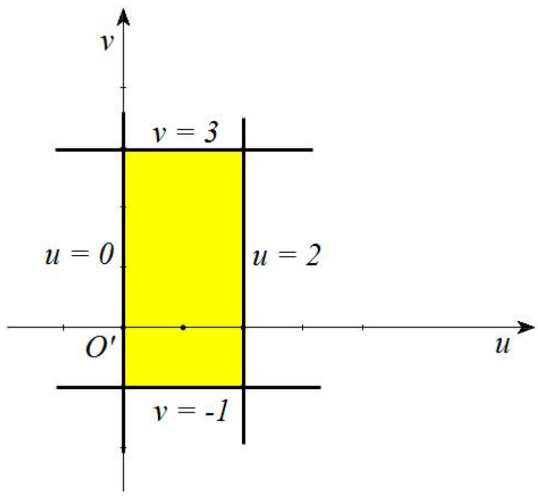


Ta có $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ y = \frac{x}{2}+2 \\ y = -\frac{x}{3}-1 \\ y = -\frac{x}{3}+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{x}{2}+y = 0 \\ -\frac{x}{2}+y = 2 \\ \frac{x}{3}+y = -1 \\ \frac{x}{3}+y = 3 \end{cases}$. Khi đó, với phép đổi biến số $\begin{cases} u = -\dfrac{x}{2} + y \\ v = \dfrac{x}{3} + y \end{cases}$ ta được miền giới hạn D' trong hệ trục $O'uv$ được xác định bởi

$$\begin{cases} u = 0 \\ u = 2 \\ v = -1 \\ v = 3 \end{cases}.$$

Lúc đó, miền D' được biểu diễn trong hệ trục $O'uv$ như sau

Như vậy, từ hình bình hành ban đầu, sau khi đổi biến, ta được hình chữ nhật từ đó cho phép ta tìm cận xác định miền D dễ dàng hơn. Cũng như trong tích phân xác



định, khi dùng phép đổi biến số ta cần chuyển hàm hai biến $f(x, y)$ dưới dấu tích phân đã cho sang hàm hai biến $f^*(u, v)$ và biến $dxdy$ sang $dudv$. Câu hỏi đặt ra là khi đổi biến như vậy sẽ áp dụng quy tắc hay công thức nào?

Định nghĩa 3.1.1. Jacobian của phép đổi biến $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Công thức đổi biến số

Giả sử ta cần tính tích phân kép của hàm $f(x, y)$ trên miền D. Dùng phép biến đổi $x = g(u, v), y = h(u, v)$, miền D trở thành miền D'. Khi đó tích phân trở thành

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(g(u,v), h(u,v))\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|dudv. \tag{2.3}$$

Nhận xét 3.1.1.

1. $\Big|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|$ chính là giá trị tuyệt đối của Jacobian và với phép đổi biến $x = g(u, v), y = h(u, v)$, ta có

$$dxdy = \Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|dudv.$$

2. Có một số tích phân kép sau khi dùng phép đổi biến, việc tính tích phân trở nên đơn giản và nhanh chóng. Tuy nhiên, không phải bài toán nào ta cũng dùng phép đổi biến. Trước tiên, ta vẽ hình miền giới hạn, nếu không thể lấy cận tích phân ta nghĩ ngay đến phép đổi biến.

3. Việc đổi biến đòi hỏi ta phải chuyển miền D thành miền D' một cách chính xác, sau đó tính Jacobian, tức là tính định thức cấp 2. Cuối cùng áp dụng công thức (2.3).

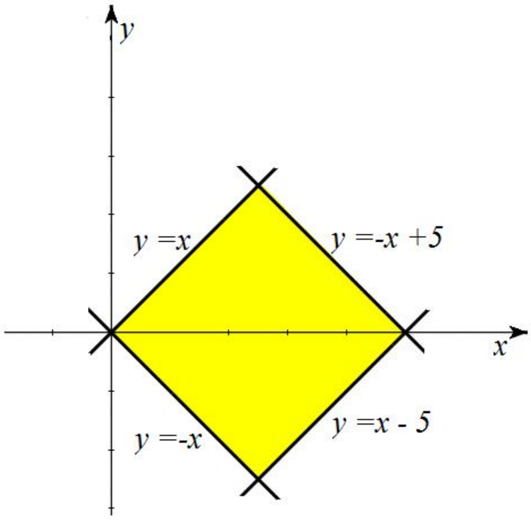
Ví dụ 3.1.2. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_D x + ydxdy,$$

trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x, y = -x, y = x - 5, y = -x + 5$.

Giải

Ta vẽ các đường $y = x, y = -x, y = x - 5, y = -x + 5$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Nếu không dùng phép đổi biến ta có thể chia miền D thành hai miền và xác định cận lấy tích phân. Tuy nhiên, phương pháp đổi biến số sẽ giúp ta tính tích phân dễ dàng hơn. Ta có $\begin{cases} y = x \\ y = -x \\ y = x - 5 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + y = -5 \\ x + y = 5 \end{cases}$. Khi đó, với phép đổi biến số $\begin{cases} u = -x + y \\ v = x + y \end{cases}$ ta được miền giới hạn D' trong hệ trục $O'uv$ được xác định bởi $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ u = -5 \\ v = 5 \end{cases}$. Hay

$$D' = \{(u, v) : -5 \leq u \leq 0, 0 \leq v \leq 5\}.$$

Từ $\begin{cases} u = -x + y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-u + v) \\ y = \frac{1}{2}(u + v) \end{cases}$. Lúc đó, Jacobian của phép đổi biến là

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Sau khi đã xác định được miền D' và tính Jacobian của phép đổi biến, áp dụng công thức (2.3) ta được

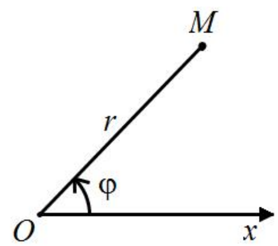
$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D x + ydxdy = \iint\limits_{D'} \Big(\frac{1}{2}(-u+v) + \frac{1}{2}(u+v)\Big)\Big| -\frac{1}{2}\Big| dudv \\ &= \int\limits_0^5 \Big(\int\limits_{-5}^0 \frac{1}{2} v du\Big) dv = \int\limits_0^5 \frac{25}{4} dv = \frac{125}{4}. \end{aligned}$$

3.2 Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Hệ tọa độ cực

Khi xác định tọa độ của một điểm trong mặt phẳng, ta thường xác định điểm đó dựa vào hoành độ và tung độ của một hệ tọa độ đề các cho trước. Trong thực tế còn có những cách xác định tọa độ khác.

Hệ tọa độ cực xác định vị trí của một điểm M dựa vào bán kính vector $\overrightarrow{OM}$, và góc định hướng giữa vector $\overrightarrow{OM}$ và Ox.



Hình 2.2: *Hệ tọa độ cực*

Bộ đôi (r, φ) xác định vị trí của điểm M trong mặt phẳng, trong đó

- $r = OM$;
- φ là *góc định hướng* giữa vector $\overrightarrow{OM}$ và Ox;
- Ox được gọi là *trục cực*, O được gọi là *gốc cực*.

Công thức tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Công thức liên hệ giữa các tọa độ đề các (x, y) và tọa độ cực (r, φ) của cùng một điểm (xem như phép đổi biến số) là

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi. \end{cases}$$

Nếu $r \geq 0$ và $0 \leq \varphi < 2\pi$ thì các công thức trên xác định một song ánh giữa các tọa độ đề các và tọa độ cực.

Bây giờ, từ công thức (2.3) ta thiết lập công thức chuyển từ tích phân kép trong tọa độ đề các sang tọa độ cực. Ta có Jacobian của phép đổi biến là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Khi đó $dxdy = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| drd\varphi = |r|drd\varphi = rdrd\varphi$. Vậy

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Nếu miền D trong hệ tọa độ đề các chuyển thành miền D' trong hệ tọa độ cực được xác định bởi

$$\alpha \le \varphi \le \beta, \quad r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$$

thì ta có **công thức tính tích phân kép** như sau

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \Big(\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr \Big) d\varphi.$$

Cần chú ý các điều quan trọng sau:

1. Bài toán nào thì chuyển sang tọa độ cực được? Ta chỉ chuyển để biến miền D từ phức tạp thành đơn giản. Chuyển sang tọa độ cực khi:
   (a) Hàm dưới dấu tích phân có chứa $x^2 + y^2$, đồng thời miền D giới hạn bởi các đường đi qua O.
   (b) Miền lấy tích phân là hình tròn, hình tròn lệch, giới hạn của hai hình tròn, hoặc đường cong có chứa $x^2 + y^2$.
2. Với những miền lấy tích phân có thể vẽ hình, ta nên vẽ hình, điều này giúp ta dễ dàng xác định cận lấy tích phân.
3. Trước khi đổi cận, ta xem miền D và hàm lấy có tính chất đối xứng hay không? Điều này giúp ta thu hẹp miền lấy tích phân:
   (a) Nếu miền D đối xứng qua Ox và $f(x,y) = f(x,-y)$ thì

   $$\int\int\limits_D f(x,y)dxdy = 2\int\int\limits_{D_1} f(x,y)dxdy,$$

   trong đó D_1 là một phần của D ứng với $y > 0$.
   Nếu miền D đối xứng qua Ox và $f(x,y) = -f(x,-y)$ thì

   $$\int\int\limits_D f(x,y)dxdy = 0$$

(b) Tương tự, nếu miền D đối xứng qua Oy và $f(x,y) = f(-x,y)$ thì

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = 2\int\int_{D_1} f(x,y)dxdy,$$

trong đó D_1 là một phần của D ứng với $x > 0$.
Nếu miền D đối xứng qua Oy và $f(x,y) = -f(-x,y)$ thì

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = 0$$

(c) Nếu D là miền đối xứng qua Ox và Oy và $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y)$ thì

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = 4\int\int_{D^*} f(x,y)dxdy,$$

trong đó D^* là phần của D nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Phương pháp xác định cận

Thông thường, để xác định cận lấy tích phân, ta thường dùng phương pháp hình học, tức là vẽ hình miền lấy tích phân D. Sau đó thực hiện các bước sau:

1. Xác định 2 tia $\varphi = \alpha$ và $\varphi = \beta$ $(\alpha \leq \beta)$ tiếp xúc với đường cong (C) giới hạn miền D.

2. Chuyển công thức các đường cong giới hạn miền D sang tọa độ cực, tìm các biểu thức xác định r.

3. Trong đoạn $[\alpha, \beta]$, biểu thức xác định r nhỏ hơn, kí hiệu $r_1(\varphi)$, biểu thức xác định r lớn hơn, kí hiệu $r_2(\varphi)$.

4. Sau cùng, chuyển hàm dưới dấu tích phân sang tọa độ cực và áp dụng công thức:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \Big(\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr \Big) d\varphi.$$

Ví dụ 3.2.1. Với mỗi miền D sau, xác định cận lấy tích phân trong tọa độ cực:

1. D **xác định bởi** $x^2 + y^2 \leq 1$. D giới hạn bởi đường tròn tâm O bán kính 1 nên O nằm trong miền D, tức cận dưới của r bằng 0. Hơn nữa, mọi tia xuất phát từ O đều cắt biên tại một điểm có $r = 1$. Do đó cận lấy tích phân là

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

2. D **xác định bởi** $x^2 + y^2 \leq 2ax$. D giới hạn bởi đường tròn tâm $I(a, 0)$ bán kính $|a|$. Hai tia xuất phát từ O tiếp xúc với đường tròn này là $\alpha = -\frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}$. Do

đường tròn đi qua O nên cận dưới của r bằng 0. Chuyển đường tròn đó qua hệ tọa độ cực ta có $r^2 = 2ar\cos\varphi \Rightarrow r = 2a\cos\varphi$. Từ đó cận lấy tích phân là

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2a\cos\varphi.$$

3. D **xác định bởi** $x^2 + y^2 \leq 2by$. D giới hạn bởi đường tròn tâm $I(0, b)$ bán kính $|b|$. Hoàn toàn tương tự, ta dễ dàng xác định cận lấy tích phân là

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 2b\sin\varphi.$$

4. D **xác định bởi hình tròn tâm** $I(a, b)$ **bán kính** R. Trong trường hợp này việc tìm hai tia tiếp xúc với đường tròn gặp khó khăn. Do đó, ta tịnh tiến tâm đường tròn này về gốc tọa độ, tức là thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} X &= x - a \\ Y &= y - a \end{cases}$$

Khi đó

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{X^2+Y^2=R^2} f(X+a, Y+a)dXdY$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R)} f(a + r\cos\varphi, a + r\sin\varphi)rdr.$$

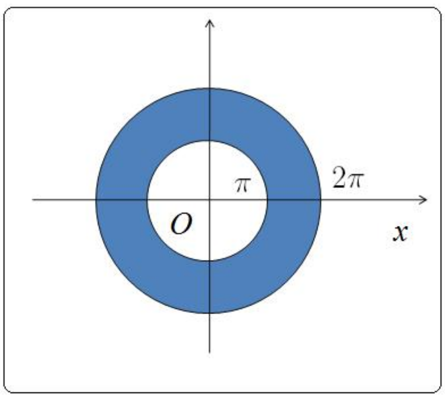
5. D **xác định bởi** $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$. D giới hạn bởi vành khăn, miền trong và miền ngoài của hai đường tròn tâm O bán kính lần lượt $|a|$ và $|b|$. Do đó, cận lấy tích phân là

$$|a| \leq r \leq |b|, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Ví dụ 3.2.2. Tính

$$I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}dxdy,$$

Trong đó miền D được xác định bởi $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.



Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. D giới hạn bởi vành khăn, miền trong và miền ngoài của hai đường tròn tâm O bán kính lần lượt π và 2π. Do đó, cận lấy tích phân là

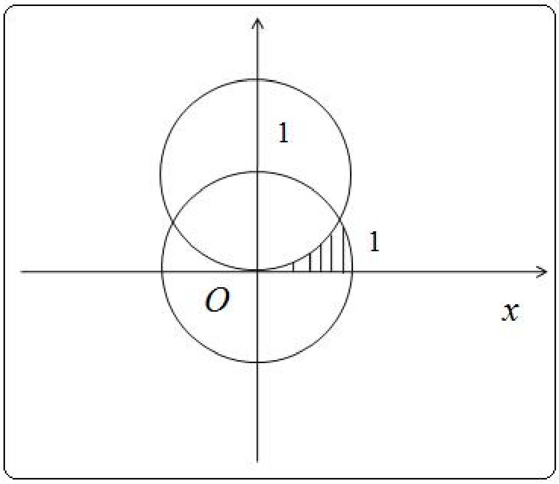
$$\pi \leq r \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Vì vậy, $I = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r dr\Big)d\varphi = -6\pi^2.$

Ví dụ 3.2.3. Tính

$$I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

trong đó miền D được xác định bởi $x^2+y^2-1 \leq 0, x^2+y^2-2y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0.$



Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Hai đường tròn $x^2+y^2 = 1$ và $x^2+y^2-2y = 0$ có phương trình trong tọa độ cực là $r = 1$ và $r = 2\sin\varphi$. Chúng cắt nhau tại một điểm có tọa độ cực là $(1, \dfrac{\pi}{6})$. Lúc đó 2 tia $\varphi = 0$ và $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ tiếp xúc với đường cong giới hạn miền D. Trong $[0, \dfrac{\pi}{6}]$, ta có $2\sin\varphi < 1$ nên cận lấy tích phân là

$$2\sin\varphi \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

Vì vậy

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\Big(\int\limits_{2\sin\varphi}^{1} r^2dr\Big)d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1-8\sin^3\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{\pi}{6} - 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi] = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{6} + 3\sqrt{3} - \frac{16}{3}).$$

§4 TÍCH PHÂN BA LỚP

Ta đã biết tích phân kép với hàm dưới dấu tích phân là hàm hai biến và miền lấy tích phân D trong mặt phẳng Oxy, tích phân ba lớp là sự mở rộng của tích phân kép với hàm dưới dấu tích phân là hàm ba biến và miền lấy tích phân V trong không gian $Oxyz$.

4.1 Khái niệm tích phân ba lớp

Định nghĩa 4.1.1. Cho hàm ba biến $f(x, y, z)$ xác định trong miền bị chặn V của không gian $Oxyz$. Chia tùy ý miền V thành n miền nhỏ không dẫm lên nhau có tên và thể tích gọi chung là $\Delta V_1, \Delta V_2, ...\Delta V_n$. Trong mỗi miền nhỏ ΔV_i lấy điểm tùy ý (x_i, y_i, z_i) và lập tổng

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Gọi d_i là đường kính của miền con ΔV_i. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ mà tồn tại giới hạn

$$I = \lim_{\max d_i \to 0} \tau_n \tag{2.4}$$

không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm (x_i, y_i, z_i) thì giới hạn trên được gọi là *tích phân ba lớp của hàm $f(x, y, z)$ lấy trên miền V* và được kí hiệu là

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV, \tag{2.5}$$

trong đó $f(x, y, z)$ là *hàm dưới dấu tích phân*, V là *miền lấy tích phân*, dS là *yếu tố thể tích*.

Nếu hàm $f(x, y, z)$ có tích phân ba lớp trong miền V thì ta nói $f(x, y, z)$ khả tích trong miền V. Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để $f(x, y, z)$ khả tích trong miền V.

Định lí 4.1.1. *Nếu $f(x, y, z)$ liên tục trong miền hữu hạn V thì $f(x, y, z)$ khả tích trong miền V.*

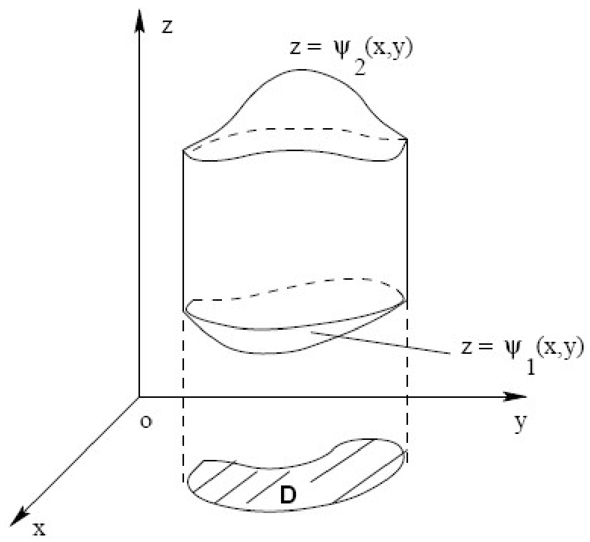
Chú ý 4.1.1.

1. Vì giá trị của tích phân ba lớp không phụ thuộc vào cách chia miền V nên ta có thể chọn cách chia miền V bởi các mặt phẳng song song với các mặt Oxy, Oyz, Ozx. Khi đó các miền nhỏ ΔV_i (trừ một số không đáng kể các ΔV_i giao với biên) là hình hộp chữ nhật nên ta có $dV = dxdydz$. Vì vậy tích phân ba lớp thường được kí hiệu dưới dạng
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

2. Tích phân ba lớp của $f(x, y, z) = 1$ lấy trên miền ω chính là thể tích của miền ω, tức là
$$V(\omega) = \iiint\limits_\omega dV = \iiint\limits_\omega dxdydz.$$

4.2 Cách tính tích phân ba lớp

Như tích phân kép, để tính tích phân ba lớp của hàm ba biến trên miền V, ta cần xác định miền V. Ứng với mỗi dạng miền V ta có công thức tương ứng. Trường hợp tổng quát nhất của miền V là: *vật thể phía dưới giới hạn bởi mặt cong $z = \psi_1(x, y)$, phía trên bởi mặt cong $z = \psi_2(x, y)$, hai mặt cong liên tục và mỗi đường thẳng song song với trục Oz cắt mỗi mặt không quá một điểm và giới hạn chung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz.*



Gọi D là hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy. Khi đó tích phân ba lớp được tính bằng tích phân kép sau đây

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \Big(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big) dxdy. \tag{2.6}$$

Nếu D xác định bởi

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

thì bằng Định lý Fibini, ta có

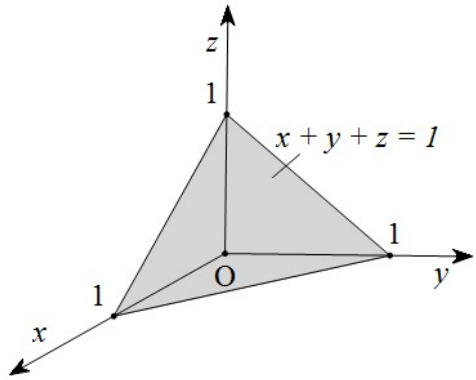
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2.7}$$

Ví dụ 4.2.1. Tính tích phân ba lớp

$$I = \iiint\limits_V xyzdxdydz,$$

trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$.

Giải



Trước tiên, ta vẽ miền V lên hệ trục tọa độ $Oxyz$:
Gọi D là hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy, khi đó D xác định bởi

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Mặt khác, $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$, do đó

$$0 \leq z \leq 1 - x - y.$$

Từ đó, tích phân đã cho được tính như sau

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyzdz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4 dx = \frac{1}{720}.$$

Trường hợp V là hình hộp chữ nhật

Khi V laf hình hộp chữ nhật xác định bởi

$$V = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}.$$

thì đây là trường hợp đặc biệt, theo công thức (2.9) ta có

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z)dz. \tag{2.8}$$

Hơn nữa nếu $f(x, y, z) = f_1(x).f_2(y).f_3(z)$ thì

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \int_e^f f_3(z)dz. \tag{2.9}$$

Ví dụ 4.2.2. Tính tích phân ba lớp

$$I = \iiint_V (xy^2 + z^3)dxdydz,$$

trong đó V là hình hộp chữ nhật xác định bởi $1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2.$

Giải

Áp dụng công thức đối với V là hình hộp, ta có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (xy^2 + z^3)dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (xy^2 z + \frac{z^4}{4})\Big|_0^2 dy$$
$$= \int_0^1 (\frac{2}{3}xy^3 + 4y)\Big|_0^1 dx = \int_0^1 (\frac{2}{3}x + 4)dx = \frac{13}{3}.$$

§5 ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN BA LỚP

5.1 Đổi biến trong tọa độ trụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho điểm $M(x, y, z)$, chiếu M lên mặt phẳng Oxy thành điểm M_1, đặt $OM_1 = r,\ 0 \le r < +\infty$ và $\varphi = (Ox, OM_1)$. Khi đó ta gọi (r, φ, z) là tọa độ trụ của M trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Bây giờ giả sử V là một miền đóng và bị chặn, đo được trong $\mathbb{R}^3$ và $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trong V. Lúc này, ta có Jacobian của phép đổi biến

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Vậy:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

Trong trường hợp V' có dạng:

$$V' = \Big\{(r,\varphi,z) : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2; \rho_1(\varphi) \le r \le \rho_2(\varphi); \xi_1(r,\varphi) \le z \le \xi_2(r,\varphi)\Big\}$$

thì

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} rdr \int_{\xi_1(r,\varphi)}^{\xi_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz.$$

Nhận xét 5.1.1. Ta nên dùng công thức đổi biến trong tọa độ trụ nếu V có dạng hình trụ (V có hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là hình tròn hay một phần hình tròn).

Ví dụ 5.1.1. Tính tích phân ba lớp

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$$

với V là miền giới hạn bởi mặt nón $x^2+y^2=z^2, z=1$.

Giải

Đổi biến trong tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Khi đó, miền V được xác định bởi

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r \le z \le 1. \end{cases}$$

Vậy, tích phân đã cho được tính như sau

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2dr \int\limits_r^1 dz = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

Ví dụ 5.1.2. Tính tích phân ba lớp

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz,$$

trong đó $V = \{(x,y,z) : \dfrac{x^2+y^2}{2} \le z \le 2\}$.

Giải

Đổi biến trong tọa độ trụ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Khi đó, miền V được xác định bởi

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ \dfrac{r^2}{2} \le z \le 2. \end{cases}$$

Do đó

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \frac{16\pi}{3}.$$

5.2 Đổi biến trong tọa độ cầu

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ ta xét điểm $M(x,y,z)$, chiếu M xuố ng mặt phẳng Oxy thành M_1. Đặt $r = OM, \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM_1}), \theta = (\vec{Oz}, \vec{OM})$. Khi đó ta gọi (r,φ,θ) là tọa độ cầu của điểm M và viết $M(r,\varphi,\theta)$ với:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

trong đó $0 \le r \le +\infty;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \theta \le \pi$.
Bây giờ giả sử V là một miền đóng và bị chặn, đo được trong $\mathbb{R}^3$ và $f(x,y,z)$ là hàm liên tục trong V. Lúc đó, ta có Jacobian của phép đổi biến

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Vậy:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Trong trường hợp V' có dạng:

$$V' = \{(r,\varphi,\theta) : 0 \le \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \le 2\pi; \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi); \rho_1(\varphi,\theta) \le r \le \rho_2(\varphi,\theta)\}$$

thì

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta \int_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2 dr.$$

Nhận xét 5.2.1. Ta nên dùng công thức đổi biến trong tọa độ cầu nếu V có dạng hình cầu hay một phần hình cầu.

Ví dụ 5.2.1. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

trong đó $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0; \ r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

Giải

Đổi biến trong tọa độ cầu với:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Với $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ suy ra $r \leq \rho \leq R$, và do $z \geq 0$ nên $\rho\cos\theta \geq 0$ suy ra $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, ngoài ra $\varphi \in [0, 2\pi]$ Vậy

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_r^R (\rho^2 . \rho^2 \sin^2\theta) d\rho = \\ &= 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta \int_r^R \rho^4 d\rho = \frac{2\pi}{5}(R^5 - r^5) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{5}(R^5 - r^5). \end{aligned}$$

Ví dụ 5.2.2. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$$

trong đó $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

Giải

Đổi biến trong tọa độ cầu với:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta. \end{cases}$$

Với $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ suy ra $0 \leq r \leq \cos\theta$, và $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, ngoài ra $\varphi \in [0, 2\pi]$
Do đó

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 dr = -\frac{\pi}{10} \cos^5\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 2.1. Tính các tích phân

a) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy;\quad D = \Big\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\Big\};$

b) $\iint\limits_D \dfrac{x^3}{1+y^2}dxdy;\quad D = \Big\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\Big\};$

c) $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy;\quad D = \Big\{(x,y) : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\Big\}.$

Bài 2.2. Hãy tìm các cận lấy tích phân trong các tích phân:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

với D lần lượt được xác định như sau

a) $D = \Big\{(x,y) : x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 2\Big\};$

b) $D = \Big\{(x,y) : x + y \le 1;\ x - y \le 1;\ x \ge 0\Big\};$

c) $D = \Big\{(x,y) : y \ge x^2;\ y \le 4 - x^2\Big\};$

d) $D = \Big\{(x,y) : y \ge x;\ y \le 2x;\ x + y \le 6\Big\}.$

Bài 2.3. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_D xydxdy;\ \ D = \Big\{(x,y) : xy = 1;\ x + y = \dfrac{5}{2}\Big\};$

b) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}dxdy;\ \ D = \Big\{(x,y) : xy = 1;\ x = 2;\ y = x\Big\};$

c) $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy;\ \ D = \Big\{(x,y) : x = 0;\ x = \pi;\ y = x\Big\}.$

Bài 2.4. Hãy đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx;$

b) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy;$

c) $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy.$

Bài 2.5. Tính $I = \iint\limits_D xy^2dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường tròn

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ và } x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

Bài 2.6. Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ với D là miền giới hạn bởi các đường tròn

$$x^2 + y^2 = ay,\ (a > 0).$$

Bài 2.7. Tính $I = \iint\limits_D (y - x)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường

$$y = x + 1;\ y = x - 3;\ y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{9};\ y = -\frac{x}{3} + 5.$$

Bài 2.8. Tính $I = \iint\limits_D r^2 dr d\varphi$ với D là miền giới hạn bởi:

a) các đường tròn $r = a$ và $r = 2a$;

b) đường $r = a\sin 2\varphi$ (hoa hồng bốn cánh).

Bài 2.9. Tính $I = \iint\limits_D r\sin\varphi dr d\varphi$ với D là:

a) quạt tròn giới hạn bởi các đường $r = a;\ \varphi = \dfrac{\pi}{2};\ \varphi = \pi$

b) nửa hình tròn $r \leq 2a\cos\varphi;\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$

c) miền giới hạn bởi các đường $r = 2 + \cos\varphi$ và $r = 1$.

Bài 2.10. Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} dxdy$ với D xác định bởi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Bài 2.11. Tính các tích phân ba lớp sau

a)

$$I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$$

với V là miền giới hạn bởi mặt $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

b)

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$$

với V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = z^2;\ z = 1$.

c)

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

với V là miền giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2z;\ z = 2$.

Bài 2.12. Tính $I = \iiint\limits_V xyz dxdydz$ với V nằm trong góc phần tám thứ nhất và là miền giới hạn bởi các mặt $z = \dfrac{x^2 + y^2}{m};\ z = \dfrac{x^2 + y^2}{n};\ xy = a^2;\ xy = b^2;\ y = ax;\ y = \beta x$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta,\ 0 < m < n)$.

CHƯƠNG 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

Chúng ta đã rất quen thuộc với tích phân xác định đối với hàm một biến $f(x)$ trên một khoảng $[a, b]$ là $\int\limits_a^b f(x)dx$. Lúc đó x chạy trên một đoạn với điểm đầu là a và điểm cuối là b. Câu hỏi đặt ra là có thể định nghĩa tích phân của một hàm hai biến $f(x, y)$ trên một đoạn, mở rộng hơn là trên một cung phẳng (tồn tại một mặt phẳng chứa cung này) hay không? Có nghĩa là điểm (x, y) chạy trên một cung phẳng (miền một chiều), điều này rõ ràng khác với tích phân kép ở chương II.

1.1 Phương trình của một đường cong phẳng (nếu được giới hạn gọi là cung phẳng)

Một đường cong phẳng có thể được cho bởi phương trình $y = f(x)$ hoặc cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Như vậy cung phẳng C có thể cho dưới dạng

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}.$$

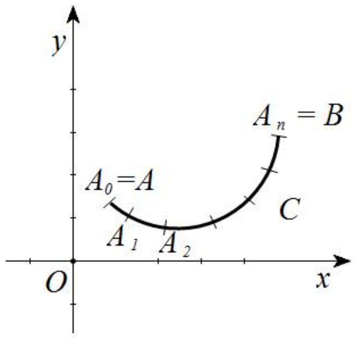
Định nghĩa 1.1.1.

- Cung phẳng $\begin{cases} y = f(x) \\ x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$ được gọi là *trơn* nếu hàm số $y = f(x)$ có **đạo hàm liên tục** trên $[x_1, x_2]$.
- Cung phẳng $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$ được gọi là *trơn* nếu các hàm $x = x(t)$ và $y = y(t)$ **liên tục** trên $[t_1, t_2]$.

1.2 Định nghĩa tích phân đường loại I

Từ bài toán tính thể tích vật thể hình trụ để định nghĩa tích phân kép, một cách tương tự ta xây dựng định nghĩa tích phân đường loại một như sau.

Định nghĩa 1.2.1. Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trên một cung phẳng C với điểm đầu là A điểm cuối là B. Chia cung C thành n cung phẳng nhỏ bởi các điểm $A_0 = A, A_1, A_2, ..., A_n = B$ và gọi độ dài cung $A_{i-1}A_i$ là Δl_i. Trên mỗi cung phẳng $A_{i-1}A_i$ ta lấy một điểm (x_i^*, y_i^*).



Ta cho $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta l_i \to 0$, lúc đó nếu tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta l_i \tag{3.1}$$

dần tới một giới hạn xác định và không phụ thuộc vào các điểm (x_i^*, y_i^*) thì giới hạn này gọi là *tích phân đường loại I* của hàm số $f(x, y)$ dọc theo cung C và được kí hiệu

$$\int_C f(x, y)dl. \tag{3.2}$$

Nếu tích phân này tồn tại ta nói rằng $f(x, y)$ *khả tích* trên C.

Nhận xét 1.2.1.

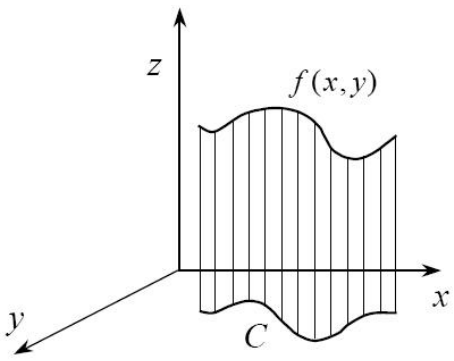
1. Người ta chứng minh được rằng: *nếu cung phẳng C **trơn** và $f(x, y)$ **liên tục** trên C thì $f(x, y)$ liên tục trên C hay tích phân (3.2) tồn tại.* Do đó, ta thường quan tâm đến những hàm hai biến liên tục trên cung trơn.

2. Nếu $f(x, y)$ không âm, liên tục trên cung phẳng trơn C thì tích phân đường loại I của $f(x, y)$ dọc theo C chính là diện tích miền thẳng đứng giới hạn bởi C và đường cong không gian xác định bởi $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in C\}$.

3. dl ở đây ta hiểu rằng (x, y) chạy dọc theo cung C (thay vì chạy dọc đoạn $[a, b]$ thuộc trục Ox được kí hiệu là dx).

4. Nếu $f(x, y) = 1$ thì $\int_C dl$ chính là độ dài cung C.

5. Tích phân đường loại một cũng có các **tính chất tương tự** tích phân kép.



1.3 Công thức tính tích phân đường loại I

Cũng như công thức tính tích phân kép, ta tìm cách đưa việc tính tích phân đường loại I về tích phân một biến. Tùy theo cung C, chúng ta có các trường hợp sau đây:
Trường hợp 1: Phương trình xác định cung C được cho bởi: $y = y(x), a \leq x \leq b$. Khi đó

$$\int\limits_C f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{3.3}$$

Trường hợp 2: Phương trình xác định cung C có dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$. Khi đó áp dụng **công thức**

$$\int\limits_C f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt. \tag{3.4}$$

Trường hợp 3: Phương trình xác định cung C được cho trong hệ tọa độ cực: $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$. Khi đó, xem φ là tham số, ta có phương trình của cung C là

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \\ a \leq t \leq b. \end{cases}$$

Lúc này ta có công thức như sau

$$\int\limits_C f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}d\varphi. \tag{3.5}$$

Nhận xét 1.3.1.

1. **Phương trình tham số của một số đường quen thuộc**.

- Ellipse $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x=a\cos t\\ y=b\sin t\\ 0\le t\le 2\pi.\end{cases}$

- Đường tròn $x^2+y^2=r^2$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x=r\cos t\\ y=r\sin t\\ 0\le t\le 2\pi.\end{cases}$

- Cung phẳng $\begin{cases} y=f(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$ có thể được tham số hóa bởi $\begin{cases} x=t\\ y=f(t)\\ a\le t\le b.\end{cases}$

2. Hoàn toàn tương tự công thức (3.4), nếu C là đường cong trong không gian được cho bởi phương trình tham số $x=x(t), y=y(t), z=z(t), a\le t\le b$ thì tích phân đường của hàm $f(x,y,z)$ dọc theo C được tính theo công thức

$$\int\limits_C f(x,y,z)dl=\int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt. \tag{3.6}$$

Ví dụ 1.3.1. Tính tích phân

$$I=\int\limits_C xy^4dl, \text{ trong đó } C \text{ là nửa bên phải của đường tròn } x^2+y^2=16.$$

Giải

Cung phẳng C là nửa bên phải của đường tròn $x^2+y^2=16$ được tham số hóa bởi $\begin{cases} x=4\cos t\\ y=4\sin t\\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$. Khi đó

$$x'(t)=-4\sin t,\ y'(t)=4\cos t \text{ và } \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{16\sin^2 t+16\cos^2 t}=4.$$

Lúc đó, áp dụng công thức (3.4), ta tính được

$$\begin{aligned} I=\int\limits_C xy^4dl&=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t(4\sin t)^4(4)dt\\ &=4096\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^4 tdt=\frac{4096}{5}\sin^5 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8192}{5}.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.2. Tính tích phân

$$I=\int\limits_C xydl,$$

trong đó C là phần tư của ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ.

Giải

Vì C là phần tư của ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ nên có phương trình tham số $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$. Ta có

$$x'_t=-a\sin t,\quad y'_t=b\cos t;\qquad \sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

Tính toán có thể tiến hành theo công thức (3.4):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t.b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}dt.$$

Đặt $\cos 2t=z$, khi đó $\sin 2tdt=-\dfrac{1}{2}dz$ và

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}dz==\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Cung trơn từng khúc

Định nghĩa 1.3.1. Cung C được gọi là *trơn từng khúc* nếu nó gồm một số hữu hạn cung trơn.

Nếu cung C trơn từng khúc gồm n cung trơn $C_1,C_2,...,C_n$ và $f(x,y)$ liên tục trên C thì

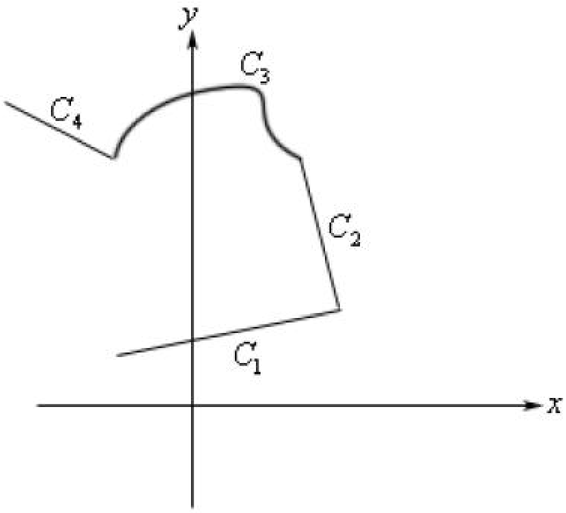
$$\int_C f(x,y)dl=\int_{C_1} f(x,y)dl+\int_{C_2} f(x,y)dl+...+\int_{C_n} f(x,y)dl.$$

Ví dụ 1.3.3. Tính tích phân $\int_C 4x^3dl$ trong đó C được biểu diễn như sau:

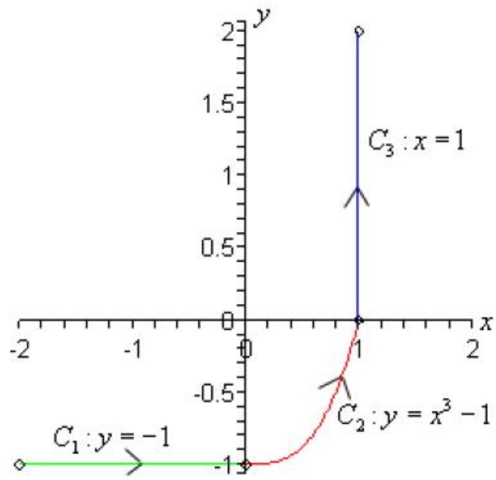
Trước tiên, ta cần tham số hóa các cung phẳng

- $C_1: x=t,\ y=-1,\quad -2\le t\le 0$
- $C_2: x=t,\ y=t^3-1,\quad 0\le t\le 1$
- $C_3: x=1,\ y=t,\quad 0\le t\le 2$

Từ đó, tích phân trên mỗi cung phẳng là



Hình 3.1: *Cung trơn từng khúc*



- $\int\limits_{C_1} 4x^3 dl = \int\limits_{-2}^{0} 4t^3\sqrt{1^2+0^2}dt = t^4\Big|_{-2}^{0} = -16.$
- $\int\limits_{C_2} 4x^3 dl = \int\limits_{-2}^{0} 4t^3\sqrt{1^2+(3t^2)^2}dt = \dfrac{1}{9}.\dfrac{2}{3}(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1} = \dfrac{2}{27}(10^{\frac{3}{2}}-1) = 2,268.$
- $\int\limits_{C_3} 4x^3 dl = \int\limits_{0}^{2} 4(1)^3\sqrt{0^2+1^2}dt = \int\limits_{0}^{2} 4dt = 8.$

Vậy, tích phân đã cho được tính như sau

$$\int\limits_{C} 4x^3 dl = \int\limits_{C_1} 4x^3 dl + \int\limits_{C_2} 4x^3 dl + \int\limits_{C_3} 4x^3 dl = -16 + 2,268 + 8 = -5,732.$$

§2 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1 Định nghĩa và công thức tính tích phân đường loại II

Nếu trong tổng (3.6) khi định nghĩa tích phân đường loại I ta thay Δs_i bởi Δx_i và Δy_i thì ta sẽ thu được hai dạng tích phân đường nữa gọi là tích phân đường của f dọc theo C đối với x và y. Cụ thể là

$$\int\limits_{C} f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i$$
$$\int\limits_{C} f(x,y)dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i$$

Những tích phân này gọi là *tích phân đường loại II*. Khác với Δs_i luôn dương, trong tích phân này giá trị Δx_i và Δy_i có thể âm, dương hay bằng 0 và **phụ thuộc** vào điểm đầu, điểm cuối của đường cong. Vì vậy, người ta viết rõ

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx \quad \text{và} \quad \int\limits_{BA} f(x,y)dy.$$

Giả sử đường cong C được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b,$$

trong đó $x(t), y(t)$ liên tục trên $[a,b]$ và f liên tục trên C. Vì

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)dt,$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = y(t_k) - y(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} y'(t)dt$$

nên sau khi qua giới hạn các tổng tích phân (tương tự tổng (3.6)) ta có **công thức**

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt, \tag{3.7}$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)dt \tag{3.8}$$

Nhận xét 2.1.1.

1. Trong các ứng dụng, tích phân đường loại II thường xuất hiện dưới dạng

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

   Để tính tích phân dạng này ta chỉ việc tách làm hai tích phân và áp dụng các công thức (3.7) và (3.8).

2. Nếu thay cung AB bởi cung BA thì vectơ tích phân đổi dấu, tức là

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

   Tích phân đường loại hai có các tính chất khác tương tự như tích phân xác định.

3. Nếu C là đường cong trong không gian thì tích phân của hàm ba biến dọc theo C đối với x, y, z cũng được định nghĩa và tính một cách tương tự khi C được cho bởi phương trình tham số.

Ví dụ 2.1.1. Tính tích phân

$$I = \int_C \sin(\pi y)dy + yx^2dx, \text{ trong đó } C \text{ là đoạn thẳng } AB \text{ với } A(0,2) \text{ và } (1,4).$$

Giải

Đường thẳng AB có phương trình $y = 2 + 2x$, do đó C là đoạn AB được tham số hóa bởi

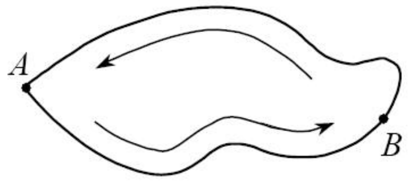
$$x = t, \ y = 2 + 2t, \ 0 \le t \le 1.$$

Lúc này, tích phân đã cho được tính như sau

$$I = \int_C \sin(\pi y)dy + yx^2dx = \int_C \sin(\pi y)dy + \int_C yx^2dx$$

$$= \int_0^1 \sin(\pi(2+2t))(2)dy + \int_0^1 (2+2t)t^2(1)dx = \frac{1}{\pi}\cos(2\pi + 2\pi t)\Big|_0^1 + \Big(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4\Big)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$$

Chú ý: Khi C là đường cong kín, tức là điểm đầu trùng với điểm cuối thì tích phân đường loại I không phụ thuộc vào việc chọn các điểm này. Tuy nhiên, đối với tích phân đường loại II ta phải *xác định hướng đi* (thông thường trong mặt phẳng, người ta thường qui định *hướng hương* là hướng đi theo đó phần mặt phẳng giới hạn bởi đường cong luôn nằm *phía bên phải*, có thể hiểu như ngược chiều kim đồng hồ, hướng ngược lại là hướng âm).



Khi đã xác định được hướng rồi, lấy A và B là hai điểm khác nhau trên C, ta có

$$\int\limits_C f(x,y)dx = \int\limits_{AB} f(x,y)dx + \int\limits_{BA} f(x,y)dx.$$

Như vậy tích phân lúc này không phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối (khi đã chọn hướng dương), khi đó tích phân này còn được viết là

$$\oint\limits_C f(x,y)dx.$$

Nhận xét 2.1.2. Nếu C cho bởi phương trình tham số $x = x(s), y = y(s),\ 0 \leq s \leq 1$ với $x(s), y(s)$ là các hàm khả vi thì

$$\int\limits_C f(x,y)dx = \int\limits_C f(x(s), y(s))x'(s)ds. \tag{3.9}$$

Đây là công thức thể hiện mối liên hệ giữa tích phân đường loại I và loại II

2.2 Định lý Green

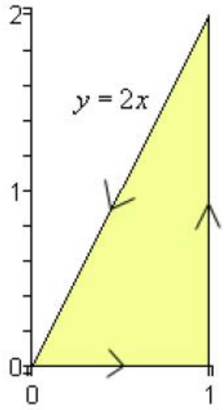
Công thức (3.9) cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường các loại. Định lý Green dưới đây sẽ cho công thức liên hệ giữa tích phân kép và tích phân đường. Để ngắn gọn, đôi lúc ta viết $P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial x}$ thay vì viết rõ tương ứng tại (x,y).

Định lí 2.2.1. *Giả sử C là đường cong phẳng, kín và trơn từng khúc, U là miền bao gồm cả C và phần C bao bọc (xem như U có biên là C). Khi ấy, nếu P và Q là những hàm khả vi liên tục trên miền mở chứa U thì*

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_U (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy. \tag{3.10}$$

Ví dụ 2.2.1. Sử dụng định lý Green để tính tích phân $I = \oint\limits_C xydx + x^2y^3dy$ trong đó C là cạnh tam giác đỉnh $(0,0), (1,0), (1,2)$.

Giải



Ta xác định phương trình các cạnh của tam giác

Rõ ràng C thỏa mãn các điều kiện của Định lý Green. Gọi U là miền bao gồm cả C và phần C bao bọc. Lúc đó, U xác định bởi

$$U = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2x\}.$$

Với $P = xy,\ Q = x^2y^3$, áp dụng Định lý Green, ta được

$$I = \oint\limits_C xydx + x^2y^3dy = \iint\limits_U 2xy^3 - xdxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{2x} 2xy^3 - xdy\Big)dx$$
$$= \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{2}xy^4 - xy\Big)\Big|_0^{2x} dx = \int\limits_0^1 8x^5 - 2x^2dx = \Big(\frac{4}{3}x^6 - \frac{2}{3}x^2\Big)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2.3 Điều kiện để tích phân đường loại II không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Khi có hai điểm A và B phân biệt, ta có rất nhiều cung khác nhau nối chúng, đoạn AB là một trong số đó. Câu hỏi đặt ra là khi nào, tích phân đường loại II trên cung AB không phụ thuộc vào cung nối chúng? Định lý sau sẽ trả lời câu hỏi này.

Định lí 2.3.1. *Cho các hàm $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp I của chúng liên tục trong miền mở đơn liên D. các mệnh đề sau tương đương*

1. *Tích phân $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. không phụ thuộc vào đường trơn từng khúc trong D nối A và B.*
2. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *trong D.*
3. $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$ *với mọi chu tuyến kín C trơn từng khúc trong D.*
4. *Tồn tại hàm hai biến $u(x, y)$ sao cho biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của u, tức là $du = Pdx + Qdy$.*

Định nghĩa 2.3.1. Tích phân đường loại II $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ được gọi là *không phụ thuộc đường lấy tích phân* nếu $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ trong $D \supset AB$. Kí hiệu

$$\int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} Pdx + Qdy$$

Khi tích phân đường loại II là tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân, để tích tích phân này, ta có thể xem cung AB là một đoạn thẳng, viết phương trình đường thẳng AB từ đó áp dụng công thức tính tích phân đường loại II. Ngoài ra, để nhanh chóng, ta có thể áp dụng công thức sau

$$\int\limits_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} Pdx + Qdy = \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x, y_A)dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y)dy.$$

Ví dụ 2.3.1. Tính $\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)} ydx + xdy.$

Giải

Đặt $P = y, Q = x$ lúc đó $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Vậy, tích phân đã cho không phụ thuộc đường lấy tích phân, áp dụng công thức ta được

$$I \int\limits_{0}^{3} 1dx + \int\limits_{1}^{4} 3dy = 12.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Tính các tích phân đường loại I sau đây

Bài 3.1. $I = \int\limits_C (x+y)dl$ trong đó C là chu vi tam giác với các đỉnh $O(0,0);\ A(1,0);\ B(0,1).$

Bài 3.2. $I = \int\limits_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})dl$, trong đó C là cung Astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Bài 3.3. $I = \int\limits_C |y|dl$, trong đó C là cung xplnixcát $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Bài 3.4. $I = \int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}dl$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.

Tính các tích phân đường loại I lấy theo các đường cong không gian

Bài 3.5. $I = \int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2)dl$, trong đó C là một phần đường xoắn $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\ (0 \le t \le 2\pi)$.

Bài 3.6. $I = \int\limits_C x^2dl$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0.$

Bài 3.7. $I = \int\limits_C zdl$, trong đó C là đường xoắn hình nón $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$ $(0 \leq t \leq t_0)$.

Bài 3.8. $I = \int\limits_C zdl$, trong đó C là cung của đường cong $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$ từ điểm $O(0,0,0)$ đến điểm $A(a, a, a\sqrt{2})$.

Tính các tích phân đường loại II sau đây lấy trên các đường cong được chỉ ra theo hướng tăng của tham số

Bài 3.9. $I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, trong đó C là đường parabol $y = x^2$ $(-1 \leq x \leq 1)$.

Bài 3.10. $I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, trong đó C là đường $y = 1 - |1 - x|$ $(0 \leq x \leq 2)$.

Bài 3.11. $I = \oint\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy$ trong đó C là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ chạy ngược chiều kim đồng hồ.

Bài 3.12. $I = \int\limits_C (2a - y)dx + xdy$, trong đó C là cung cycloid $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Bài 3.13. $I = \oint\limits_C \dfrac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, chạy ngược chiều kim đồng hồ.

Bài 3.14. $I = \oint\limits_{ABCDA} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó $ABCDA$ là chu vi hình vuông với các đỉnh

$$A(1, 0); B(0, 1); D(-1, 0); C(0, -1).$$

Bài 3.15. $I = \int\limits_{AB} dx\sin y + dy\sin x$, trong đó AB là đoạn thẳng nối các điểm $A(0, \pi)$ và $B(\pi, 0)$.

Bài 3.16. $I = \oint\limits_{OmAnO} dy\arctan\dfrac{y}{x} - dx$, trong đó OmA là cung parabol $y = x^2$ và OnA là đoạn của đường thẳng $y = x$.

Tính các tích phân đường sau đây

Bài 3.17. $I = \int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx.$

Bài 3.18. $I = \int\limits_{(0,1)}^{(3,4)} xdx + ydy.$

Bài 3.19. $I = \int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x - y)(dx - dy).$

Bài 3.20. $I = \int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy)$, trong đó $f(u)$ liên tục.

Bài 3.21. $I = \int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$ lấy theo đường không cắt trục Oy.

Bài 3.22. $I = \int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ lấy theo đường không đi qua gốc tọa độ.

Bài 3.23. $I = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$ trong đó φ và ψ là các hàm liên tục.

Bài 3.24. $I = \int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)$.

Bài 3.25. $I = \int\limits_{(0,-1)}^{(1,0)} \dfrac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$ lấy theo đường không cắt đường thẳng $y = x$.

Bài 3.26. $I = \int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$ lấy theo đường không cắt trục Oy.

Bài 3.27. $I = \int\limits_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y - \sin y dy)$.

Bài 3.28. Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là hàm liên tục và C là chu tuyến trơn từng khúc thì

$$I = \oint\limits_C f(x^2 - y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

Tính tích phân đường lấy theo các đường cong không gian (giả thiết hệ tọa độ là thuận

Bài 3.29. $I = \int\limits_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, trong đó C là đường $x = t; y = t^2; z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ lấy theo hướng tăng của tham số.

Bài 3.30. $I = \int\limits_C ydx + zdy + xdz$, trong đó C là một đoạn của đường xoắn $x = a\cos t; y = a\sin t, z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$ lấy theo hướng tăng của tham số.

Bài 3.31. $I = \int\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, trong đó C là đường tròn $x^2+y^2+z^2 = a^2, y = x\tan\alpha$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía x dương.

Bài 3.32. $I = \int\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, trong đó C là một phần của đường cong Viviani $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ $(z \ge 0, a > 0)$, lấy ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phần dương $(x > 0)$ của trục Ox.

Bài 3.33. $I = \int\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, trong đó C là chu vi tam giác cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ chạy theo chiều sao cho phiá ngoài của tam giác này luôn ở bên trái.

Áp dụng công thức Green tính các tích phân đường sau đây:

Bài 3.34. $I = \oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$.

Bài 3.35. $I = \oint\limits_C (x + y)dx - (x - y)dy$, trong đó C là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Bài 3.36. $I = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2+y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy)$.

Bài 3.37. Các tích phân đường sau đây khác nhau bao nhiêu

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy,$$

$$I_2 = \int\limits_{AnB} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy.$$

trong đó AmB là đoạn thẳng nói hai điểm $A(1, 1)$ và $B(2, 6)$ còn AnB là cung parabol với trục thẳng đứng, cũng đi qua A, B và gố c tọa độ.

Bài 3.38. Tính tích phân đường

$$I = \int\limits_{AmO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$$

trong đó AmO là nửa đường tròn trên $x^2 + y^2 = ax$ chạy từ điểm $A(a, 0)$ đến điểm $O(0, 0)$.

CHƯƠNG 4

TÍCH PHÂN MẶT

§1 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1.1 Định nghĩa tích phân mặt loại I

Ta đã biết tích phân *đường* loại I là sự mở rộng của tích phân xác định (một lớp). Tích phân *mặt* loại I cũng là sự mở rộng tự nhiên của tích phân hai lớp. Cũng như tích phân đường, chúng ta có thể xây dựng tích phân kép trên mặt cong thay vì tích phân trên mặt phẳng.

Giả sử S là mặt cong trơn (hàm xác định mặt này là khả vi), chia S bởi các đường cong trơn từng khúc thành các mảnh $S_1, S_2, ..., S_n$. Gọi δ là đường kính lớn nhất của các đường kính của các mặt cầu nhỏ nhất chứa S_k (max của min), gọi ΔS_k là diện tích của S_k và chọn $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in S_k, k = 1, ..., n$. Giả sử $f(x, y, z)$ là hàm số xác định trên S, ta thiết lập tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k. \tag{4.1}$$

Nếu tổng này có giới hạn khi $\delta \to 0$ và không phụ thuộc vào việc chọn $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in S_k$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân mặt loại I của f trên S và kí hiệu

$$\iint_S f(x, y, z)dS.$$

1.2 Đưa tích phân mặt loại I về tích phân hai lớp thông thường

Ta chỉ xét trường hợp mặt S được cho bởi phương trình $z = z(x, y)$ (hàm liên tục). Khi đó, **công thức** tính tích phân mặt loại I của $f(x, y, z)$ trên S như sau

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy \tag{4.2}$$

trong đó D là hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng Oxy và $p = z'_x(x, y), q = z'_y(x, y)$ là các hàm liên tục trên D.

Ví dụ 1.2.1. Tính $I = \iint\limits_S z^2(x^2 + y^2)dS, S$ là phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ứng với $x \geq 0, y \geq 0$.

Chia S thành hai phần, S_1 ứng với $z \geq 0$, có phương trình $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ và S_2 ứng với $z < 0$, có phương trình $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Ta có

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{với} \qquad I_i = \iint\limits_{S_i} z^2(x^2 + y^2)dS, i = 1, 2.$$

Trên S_1, ta có $p = -\dfrac{x}{z}, q = -\dfrac{y}{z} \implies 1 + p^2 + q^2 = \dfrac{a^2}{z^2}$. Theo công thức (4.2) ta có

$$I_1 = a \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}(x^2 + y^2)dxdy.$$

D là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a nằm trong góc phần tư thứ nhất. Chuyển sang tọa độ cực để tính tích phân kép ta được:

$$I_1 = a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r^3 dr.$$

Đặt $r = a \sin t, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, ta có

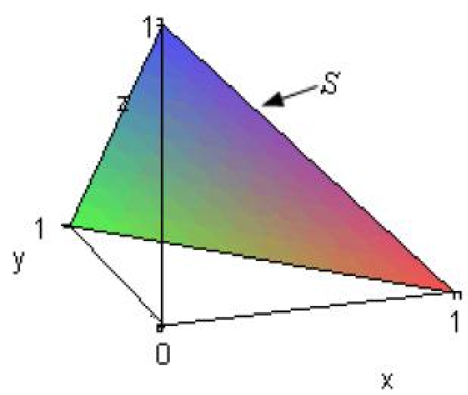
$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r^3 dr = a^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt = \frac{2a^5}{15}$$

Do đó $\quad I_1 = a \cdot \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{2a^5}{15} = \dfrac{\pi a^6}{15}$. Tương tự $I_2 = \dfrac{\pi a^6}{15}$, do đó $I = \dfrac{2\pi a^6}{15}$.

Ví dụ 1.2.2. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_S (2x + y + z)dS$$

trong đó S là phần của mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất như hình vẽ sau



Ta có $z = 1 - x - y, z'_x = z'_y = -1$. Công thức (4.2) cho ta

$$I = \iint\limits_D (x + 1)\sqrt{1 + 1 + 1}dxdy$$

trong đó D là tam giác $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$. Vì vậy,

$$I = \sqrt{3} \int_0^1 (x+1)dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{3} \int_0^1 (1 - x^2)dx$$
$$= \sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big]_0^1 = \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

§2 TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

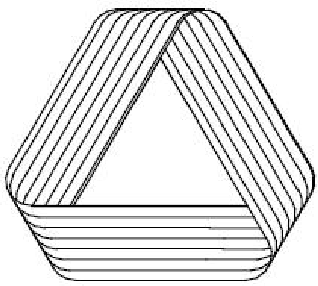
2.1 Mặt định hướng và mặt tham số

Mặt định hướng

Mặt S có thể xem như là tập các điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình $F(x, y, z) = 0$. Khi đó mặt S được gọi là *trơn* nếu các đạo hàm riêng $F(x, y, z)$ liên tục và không đồng thời bằng 0 trên S.

Định nghĩa 2.1.1. Cho S là mặt cong trơn. Vector n_p được gọi là vector pháp tuyến của S tại P nếu với mọi $u \in T_P S$ là mặt phẳng tiếp xúc của S tại P, ta luôn có $\langle n_p, u \rangle = 0$.

Giả sử S là mặt cong trơn. Tại mỗi điểm $P \in S$ ta có hai vector pháp tuyến đơn vị đối chiều nhau n_+, n_-. Khi P di chuyển trên đường cong kín, trơn trên S thì n_+ cũng di chuyển một cách liên tục về chính nó hoặc về n_-. Nếu với điểm B bất kì, sau khi di chuyển theo một đường cong kín, trơn bất kì mà n_+ lại trở về chính nó thì ta nói S là *mặt định hướng được*. Trong trường hợp ngược lại, S là *mặt không định hướng được*. Mặt cầu là một ví dụ cho mặt định hướng được, lá Moebius ở hình vẽ sau là một ví dụ cho mặt không định hướng được.



Hình 4.1: *Lá Moebius*

Giả sử S là mặt cong hai phía và tại mọi điểm vector pháp tuyến n_+ (hoặc n_-) đã được chọn. Khi đó ta nói S đã được định hướng. Dưới đây ta chỉ xét các mặt định hướng được.

Mặt tham số

Mặt tham số được cho bởi phương trình

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v).$$

Lúc đó, người ta thường biểu diễn mặt tham số S như sau

$$\overrightarrow{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \text{ hoặc } \overrightarrow{r} = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k},$$

trong đó (u,v) thuộc tập đóng $G \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó, mặt tham số S được gọi là trơn nếu các đạo hàm riêng $\overrightarrow{r}'_u, \overrightarrow{r}'_v$ liên tục và tích vô hướng $\overrightarrow{r}'_u . \overrightarrow{r}'_v \neq 0$ trên G. Lúc đó, một vector pháp tuyến đơn vị của mặt tham số S có thể chọn là

$$n = \frac{\overrightarrow{r}'_u \wedge \overrightarrow{r}'_v}{|\overrightarrow{r}'_u \wedge \overrightarrow{r}'_v|}.$$

Định nghĩa tích phân mặt loại II

Cho các hàm $P(x,y,z), Q(x,y,z, R(x,y,z)$ xác định trên mặt định hướng S với vector pháp đơn vị $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Tích phân được cho dưới dạng

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta, +R\cos\gamma)dS$$

được gọi là *tích phân mặt loại II của các hàm P, Q, R trên mặt định hướng S*. Tích phân được kí hiệu

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

2.2 Đưa tích phân mặt loại II về tích phân hai lớp

Giả sử cần tính tích phân $\iint\limits_S Rdxdy = \iint\limits_S R\cos\gamma dS$, trong đó S là **mặt trơn được định hướng có phương trình** $z = f(x,y)$ với vector pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ tạo với trục Oz một góc nhọn theo chiều dương.

Ta thấy rằng $\iint\limits_S R\cos\gamma dS$ chính là giới hạn của tổng

$$\sum_{k=1}^{n} R(x_k, y_k, z(x_k,y_k))\cos\gamma_k \Delta S_k. \tag{4.3}$$

Mặt khác

$$\cos\gamma_k \Delta S_k \approx \Delta D_k, \tag{4.4}$$

trong đó ΔS_k là diện tích mảnh cong ΔS_k và ΔD_k là diện tích hình chiếu mảnh ΔS_k xuống mặt phẳng Oxy. Chú ý rằng ở đây $\overrightarrow{n}$ tạo với Oz góc nhọn và ΔD_k lấy dấu dương. Từ đó, thay (4.4) vào (4.3), rồi qua giới hạn, ta được

$$\iint\limits_S Rdxdy = \iint\limits_D R(x,y,z(x,y))dxdy,$$

trong đó D là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy.

Nếu chọn $\overrightarrow{n}$ theo hướng ngược lại, thì $\cos\gamma_k < 0$ và ΔD_k lấy dấu âm, tức là

$$\iint_S Rdxdy = -\iint_D R(x, y, z(x, y))dxdy,$$

Tương tự, ta có

$$\iint_S Pdydz = \pm \iint_{D_1} P(x(y, z), y, z)dydz,$$
$$\iint_S Qdxdz = \pm \iint_{D_2} Q(x, y(x, z), z)dxdz,$$

Trong đó D_1, D_2 là các hình chiếu của S xuống mặt Oyz và Oxz tương ứng. Chọn dấu + hoặc - tùy theo việc chọn hướng của vector pháp. Tuy nhiên, để thống nhất, chúng ta thường quy ước việc chọn vector pháp tuyến sao cho dấu + xảy ra.

Ví dụ 2.2.1. Tính $\iint_S x^2y^2zdxdy$ trong đó S là nửa mặt cầu $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ được lấy theo phía trên.

Giải

Ta có

$$I = \iint_D x^2y^2(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})dxdy$$

trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$. Sử dụng phương pháp đổi biến số trong tọa độ cực, ta được

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\cos^2\varphi.r^2\sin^2\varphi.\sqrt{R^2 - r^2}rdr = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi.\sin^2\varphi d\varphi.\int_0^R r^5\sqrt{R^2 - r^2}dr.$$

Mặt khác

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4\varphi)d\varphi$$
$$= \frac{1}{8}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Hơn nữa, bằng cách đổi biến $t = \sqrt{R^2 - r^2}$, ta được

$$\int_0^R r^5\sqrt{R^2 - r^2}dr = \int_R^0 (R^2 - t^2)^2t(-tdt) = \int_0^R (R^4 - 2R^2t^2 + t^4)t^2dt$$
$$= \left(R^4\frac{t^2}{3} - 2R^2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right)\Bigg]_0^R = \frac{R^7}{3} - \frac{2R^7}{5} + \frac{R^7}{7} = \frac{8R^7}{105}.$$

Vậy $\quad I = -\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{8R^7}{105}\right) = -\dfrac{2\pi R^7}{105}.$

Ví dụ 2.2.2. Tính $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ trong đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Giải

Vì phương trình mặt cầu và biểu thức dưới dấu tích phân không đổi khi ta hoán vị vòng quanh x, y, z nên ta có

$$\iint\limits_S xdydz = \iint\limits_S ydzdx = \iint\limits_S zdxdy.$$

Do đó

$$I = 3\iint\limits_S zdxdy = 3\Big[\iint\limits_{S_1} zdxdy + \iint\limits_{S_2} zdxdy\Big]$$

trong đó S_1 là nửa trên mặt cầu, có phương trình $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, S_2 là nửa dưới mặt cầu có phương trình $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Vì vậy

$$I = 6\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy,$$

D là hình tròn tâm O bán kính R trong mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ cực, ta được:

$$I = 6\int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2}rdrd\Big)\varphi = 4\pi R^3.$$

2.3 Công thức Ostrogradsky

Trong mục này ta sẽ thiết lập mối liên hệ giữa tích phân ba lớp lấy trên một miền của không gian ba chiều với tích phân mặt lấy theo phía ngoài của biên miền đó.
Trước hết ta giả sử miền V là mặt trụ mở rộng (trường hợp tổng quát của miền V) và biên của nó là mặt kín S. Ở đây ta chọn phía của mặt S là phía ngoài, tức là hướng của pháp tuyến tại mỗi điểm của mặt S từ trong (miền V) ra ngoài. Với giả thiết đó thì mặt S được chia thành ba mặt: mặt dưới $S_1 : z = f_1(x, y)$, mặt trên $S_2 : z = f_2(x, y)$ và mặt trụ S_3 có đường sinh song song trục $\vec{O}z$, có đường chuẩn là biên của miền D, trong đó D là hình chiếu của V xuố ng mặt phẳng Oxy.
Ta giả thiết rằng các hàm số $f_1(x, y); f_2(x, y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên D
Cho hàm $R(x, y, z)$ xác định và liên tục cùng với đạo hàm riêng $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ trong một miền nào đó chứa V.

Xét tích phân ba lớp: $\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$. Ta biểu diễn tích phân này dưới dạng:

$$\iint\limits_D \left[\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \right] dxdy.$$

Chú ý rằng:

$$\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} = R[x, y, f_2(x, y)] - R[x, y, f_1(x, y)]dxdy$$

ta nhận được

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D R[x, y, f_2(x, y)]dxdy - \iint\limits_D R[x, y, f_1(x, y)]dxdy,$$

hay

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{S_2} Rdxdy + \iint\limits_{S_1} Rdxdy.$$

Chú ý rằng tích phân thứ nhất trong vế phải của đẳng thức cuối cùng là tích phân mặt lấy theo phía trên của mặt S_2, còn tích phân thứ hai lấy theo phía dưới của mặt S_1. Vì tích phân mặt của $Rdxdy$ lấy theo mặt trụ có đường sinh song song với trục $\vec{O}z$ bằng 0 tức là:

$$\iint\limits_{S_3} Rdxdy = 0$$

nên cuối cùng ta có

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_S Rdxdy, \tag{4.1}$$

trong đó tích phân mặt ở vế phải được lấy theo phía ngoài của mặt S. Ta có thể chứng minh được rằng công thức (4.1) vẫn còn đúng nếu miền V được phân ra hai miền V_1, V_2 mà đối với mỗi miền công thức (4.1) đúng. Bây giờ ta thành lập công thức cho trường hợp tổng quát. Giả sử $P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)$ là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền nào đó chứa miền V giới hạn bởi mặt S. Khi đó ta chứng minh được rằng:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_S (Rdydz + Qdzdx + Rdxdy), \tag{4.2}$$

trong đó tích phân ở vế phải được lấy theo phía ngoài của mặt S. Ta có thể viết công thức trên dưới dạng sau đây:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_S (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)dS \tag{4.3}$$

trong đó $\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu$ là cosin chỉ hướng của pháp tuyến (hướng từ trong ra ngoài) tại điểm $(x, y, z) \in S$. Công thức (4.2) hay (4.3) được gọi là *công thức Ostrogradski.*

Ví dụ 2.3.1. Tính tích phân

$$I = \iint\limits_S y^2 z dxdy + xzdydz + x^2 ydzdx$$

trong đó S là phía ngoài của biên của vật thể giới hạn bởi các mặt $z = x^2+y^2, x^2+y^2 = 1$ và các mặt phẳng tọa độ.

Giải

Đặt $P = xz, Q = x^2y, R = y^2z$. Khi đó

$$P'_x = z, Q'_y = x^2, R'_z = y^2.$$

Áp dụng công thức Ostrogradski, ta có

$$I = \iiint\limits_V (z + x^2 + y^2)dxdydz$$

trong đó V là vật thể giới hạn bởi mặt S. Lúc đó, V được xác định bởi

$$(x, y) \in D, 0 \le z \le x^2 + y^2$$

với D là một phần tư hình tròn tâm O bán kính 1 trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ trụ ta được

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{V'} (z + r^2)rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^{r^2} (z + r^2)dz \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r(\frac{z^2}{2} + r^2 z)\Big|_0^{r^2} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{3}{2} r^5 dr = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

2.4 Công thức Stokes

Trong mục này ta sẽ xây dựng một công thức mở rộng của công thức Green cho trường hợp khi đường cong phẳng được thay bằng đường cong ghềnh.
Công thức này thiết lập mối liên hệ giữa tích phân lấy theo một phía xác định của mãnh mặt S giới hạn bởi chu tuyến kín L với tích phân đường lấy theo chu tuyến đó.
Giả sử mặt S đã cho được biểu diễn bởi phương trình $z = z(x, y)$. Ta luôn luôn giả thiết rằng hàm $z(x, y)$ cũng như các hàm P, Q, R của các biế n x, y, z sẽ đề cập đến trong mục này là liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục.
Trước hết ta hãy xét tích phân đường:

$$\int\limits_L P(x, y, z)dx \tag{4.4}$$

lấy dọc theo chu tuyến L của mặt S đi theo hướng dương. Gọi D là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy và chu tuyến của D là đường cong kín C. Khi đó ta có

$$\int\limits_L P(x, y, z)dx = \oint\limits_C P(x, y, f(x, y))dx \tag{4.5}$$

Thật vậy; giả sử L được cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

trong đó các hàm số $x(t), y(t), z(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$. Khi đó ta có

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx = \int\limits_a^b P[x(t),y(t),z(t)].x'(t)dt.$$

Nhưng vì $L \subset S$, mà S có phương trình là $z = z(x,y)$ nên suy ra $z(t) = z(x(t),y(t))$ và do đó

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx = \int\limits_a^b p[x(t),y(t),z(t)]x'(t)dt \tag{4.6}$$

nhưng tích phân của vế phải cuả(4.6) chính là tích phân đường $\oint\limits_C P[x,y,z(x,y)]dx$ và do đó ta có đẳng thức (4.5).

Bây giờ ta xét tích phân mặt sau đây:

$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}dxdy - \frac{\partial P}{\partial z}dxdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\nu - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\mu\right)dS \tag{4.7}$$

trong đó tích phân mặt loại II ở vế trái của (4.7) được lấy theo phía trên của mặt S. Lúc đó ta đã biết:

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + {z'}_x^2 + {z'}_y^2}},$$

$$\cos\mu = -\frac{{z'}_y}{\sqrt{1 + {z'}_x^2 + {z'}_y^2}} = -{z'}_y\cos\nu.$$

Thay vào (4.7), ta được:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}dxdy - \frac{\partial P}{\partial z}dxdz\right) = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\nu dS$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy.$$

Hàm dưới dấu tích phân của tích phân sau cùng, nếu thay trong đó z bởi $z(x,y)$, sẽ là:

$$\frac{\partial}{\partial y}P[x,y,z(x,y)]$$

Do đó theo định nghĩa của tích phân mặt, tích phân sau cùng có thể viết dưới dạng tích phân kép

$$\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}P[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

Vậy ta nhận được công thức:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}dxdy - \frac{\partial P}{\partial z}dxdz\right) = \iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}P[x, y, z(x, y)]dxdy \tag{4.8}$$

Bằng cách áp dụng công thức Green ta có

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy\right) = \int\limits_L P(x, y, z)dx \tag{4.9}$$

ở đây tích phân ở vế trái lấy theo phía trên của mặt S, còn tích phân ở vế phải, lấy theo hướng sao cho khi người quan sát di chuyển ở phía trên của S và dọc theo chu tuyến L thì mặt S ở về bên trái của đường đi. Dĩ nhiên đối với trường hợp mặt S có thể phân ra làm hai mặt S_1 và S_2, mà công thức (4.9) đúng cho cả hai mặt đó thì nó cũng đúng cho mặt S.

Hoán vị vòng quanh x, y, z và P, Q, R ta có hai công thức tương tự:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dydx - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz\right) = \int\limits_L Q(x, y, z)dy,$$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}dzdy - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx\right) = \int\limits_L R(x, y, z)dz.$$

Bằng cách cộng ba công thức trên lại ta đi đến công thức Stokes:

$$\iint\limits_S \Big\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx\Big\} = \int\limits_L (Pdx + Qdy + Rdz) \tag{4.10}$$

Bây giờ ta nêu lên một ứng dụng của công thức Stokes. Từ công thức Stokes dễ dàng chứng minh được mệnh đề sau:

Nếu tại mỗi điểm của một miền V nào đấy của không gian ba chiều xảy ra hệ thức:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

thì tích phân đường:

$$\int\limits_L (Pdx + Qdy + Rdz) = 0$$

trong đó L là đường cong kín bất kỳ nằm hoàn toàn trong V.

Ví dụ 2.4.1. Tính tích phân

$$I = \oint\limits_L ydx + zdy + xdz$$

trong đó L là giao tuyến của hai mặt $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, chiều trên L là ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống (nhìn về phía $z < 0$).

Giải

Vì $x+y+z=0$ là mặt phẳng đi qua tâm $O(0,0)$ của mặt cầu tâm O bán kính $|a|$ nên L là đường tròn lớn của mặt cầu. Áp dụng công thức Stokes với S là mặt phẳng $x+y+z=0$ giới hạn bởi L, hướng về phía $z>0$.
Đặt $P=y, Q=z, R=x$. Khi đó

$$P'_z=0, P'_y=1; Q'_x=0, Q'_z=1; R'_y=0, R'_x=1.$$

Công thức Stokes cho ta

$$I=-\iint_S dydz+dzdx+dxdy$$

Để tính tích phân này, ta chuyển về tích phân mặt loại I. Ta có $z=-x-y$, do đó $p=z'_x=-1, q=z'_y=-1$. Vậy

$$I=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\pi\sqrt{3}a^2$$

trong đó S là hình tròn bán kính bằng a.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Tính các tích phân mặt loại I sau đây

Bài 4.1. Tính $I=\iint\limits_D \dfrac{x}{x^2+y^2}dS$, trong đó S là một phần tám mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$ trong góc phần tám thứ nhất của hệ trục tọa độ.

Bài 4.2. Tính các tích phân mặt sau đây:

a) $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4}{3}y)dS$ với S là phần mặt phẳng phương trình $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=0$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

b) $\iint\limits_S ydS$, trong đó S là nưr a mặt cầu $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Bài 4.3. Tính $I=\iint\limits_S (x+y+z)dS$, trong đó S là mặt $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$.

Bài 4.4. Tính $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, trong đó S là biên của vật $\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$.

Bài 4.5. Tính $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, trong đó S là phần mặt nón $z^2=x^2+y^2$ nằm giữa các mặt phẳng $z=0$ và $z=1$.

Bài 4.6. Tính $I=\iint\limits_S xyzdS$, trong đó S là phần mặt nón $z^2=x^2+y^2$ nằm giữa các mặt phẳng $z=0$ và $z=1$.

Tính các tích phân mặt loại II sau đây

Bài 4.7. Tính $\iint\limits_S xyzdxdy$ với S là phía ngoài của một phần tư mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Bài 4.8. Tính $\iint\limits_S xdydz + dxdz + xz^2dxdy$ với S là phía ngoài của một phần tám mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Bài 4.9. Tính $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$ với S là mặt phía trên của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$.

Bài 4.10. Tính $I_1 = \iint\limits_S zdxdy,\ \ I_2 = \iint\limits_S z^2dxdy$ với S là phía ngoài của ellipsoit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bài 4.11. Tính $\iint\limits_S (x^2+y^2)dxdy$ với S là phía dưới của mặt tròn $x^2+y^2 = R^2, z = 0$.

Bài 4.12. Tính $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Bài 4.13. Tính $I = \iint\limits_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$ với S là phía ngoài của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2, (0 \leq z \leq h)$.

Bài 4.14. Tính $\iint\limits_S 2dydz + ydzdx + x^2zdxdy$ với S là phía ngoài của mặt cầu $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Tính các tích phân mặt sau đây bằng cách áp dụng công thức Otrogradsky

Bài 4.15. Tính $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$ với S là phía ngoài của biên của hình lập phương $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$.

Bài 4.16. Tính $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Bài 4.17. Tính $\iint\limits_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$ với S là phía ngoài của mặt $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$.

Bài 4.18. Tính $\iint\limits_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$ với S là phía ngoài của mặt nằm trong góc phần tám thứ nhất, tạo nên bởi một paraboloid $z = x^2 + y^2$, mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và các mặt tọa độ $x = 0, y = 0, z = 0$.

Tính các tích phân mặt sau đây bằng cách áp dụng công thức Stokes

Bài 4.19. Tính $I = \oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$ với AmB là một đoạn của đường đinh ốc: $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \\ z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi. \end{cases}$ từ điểm $A(0, 0, 0)$ đến $B(a, 0, h)$.

Bài 4.20. Tính $I = \oint\limits_{C}(y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ với C là giao tuyến của hình lập phương $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$ với mặt phẳng $x + y + z = \dfrac{3}{2}a$, chạy ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

Bài 4.21. Tính $I = \oint\limits_{L} e^x dx + z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz$ với L là đường cong kín giao tuyến của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ với các mặt phẳng $x = 0, y = 1, x = 2, y = 0$, lấy theo chiều quay kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Oz.

Bài 4.22. Tính $I = \oint\limits_{C} ydx + zdy + xdz$ với C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ chạy ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.