Phép tính vi phân hàm nhiều biến

A. Lý thuyết.

• Định nghĩa hàm hai (nhiều) biến và MXĐ của hàm số. Định nghĩa và cách tính giới hạn dãy điểm, giới hạn hàm số. Định nghĩa tính liên tục của hàm số.

• Định nghĩa và cách tính đạo hàm riêng cấp 1. Biểu thức và ứng dụng cua vi phân cấp 1. Công thức tính đạo hàm riêng của hàm hợp. Cách tính đạo hàm riêng và vi phân cấp 2 (cấp cao).

• Định nghĩa cực trị. Các định lý điều kiện cần, điều kiện đủ của cực trị (quy tắc tìm cực trị). Công thức tính đạo hàm hàm ẩn. Định nghĩa cực trị có điều kiện. Cách tìm cực trị có điều kiện. Cách tìm max và min của hàm số trên tập đóng và giới nội.

B. Bài tập..

1. Tìm miền xác định của các hàm sau đây

a) $z = \ln xy$ b) $z = \dfrac{1}{y - x^2}$

c) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$

d) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ e) $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$ f) $z = \sqrt{x \ln y}$

Lời giải.

a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\right\}$.

b) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\right\}$

c) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$.

d) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x < y < x\right\}$.

e) Hàm số xác định khi

$$-1 \le \frac{y-1}{x} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{y-1}{x} = \dfrac{-y+x+1}{x} \ge 0 \\ \dfrac{y-1}{x} + 1 = \dfrac{y+x-1}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \le x+1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y \ge x+1 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge -x+1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y \le -x+1 \\ x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

f) Hàm số xác định khi

$$x \ln y \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \ln y \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \le 0 \\ \ln y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \le 0 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$$

2. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2 + y^2\right) \sin \dfrac{1}{xy}$ b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to 2}} \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

Lời giải.

a) Từ $0 \le \left|\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}\right| \le x^2+y^2$ và $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}(x^2+y^2)=0$, theo tiêu chuẩn kẹp, ta được

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}=0.$$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}} \dfrac{\sin xy}{x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}} \dfrac{\sin xy}{xy} y = 2.$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to2}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to2}} \left[\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\right]^y = e^2.$

d) Từ $0 < \left|\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{|x|}{x^2+y^2}+\dfrac{|y|}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}$ và $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}+\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{|y|}=0$, theo tiêu chuẩn kẹp, ta được

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=0.$$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}-1}\lim\limits_{t\to0}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)=2, t:=x^2+y^2.$

f) Do $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{1}{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}}=0$ nên

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left[\left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = e^0=1.$$

3. Chứng minh các hàm sau đây không có giới hạn khi $(x,y)\to(0,0)$

a) $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ b) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

Lời giải.

a) Do khi $k\to\infty$, ta có

$$\begin{cases}\left(x_k^1,y_k^1\right)=\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\to(0,0)\\ \left(x_k^2,y_k^2\right)=\left(-\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k}\right)\to(0;0)\end{cases} \text{nhưng} \begin{cases} f\left(x_k^1,y_k^1\right)=\dfrac{1/k}{1/k+1/k}=\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}\\ f\left(x_k^2,y_k^2\right)=\dfrac{-1/k}{-1/k+2/k}=-1\to-1\end{cases}.$$

b) Do khi $k \to \infty$, ta có

$$\begin{cases} \left(x_k^1, y_k^1\right) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0) \\ \left(x_k^2, y_k^2\right) = \left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0;0) \end{cases} \text{nhưng} \begin{cases} f\left(x_k^1, y_k^1\right) = \frac{1/k^2 - 1/k^2}{1/k^2 + 1/k^2} = 0 \to 0 \\ f\left(x_k^2, y_k^2\right) = \frac{4/k^2 - 1/k^2}{4/k^2 + 1/k^2} = \frac{3}{5} \to \frac{3}{5} \end{cases}.$$

c) Do khi $k \to \infty$, ta có

$$\begin{cases} \left(x_k^1, y_k^1\right) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0) \\ \left(x_k^2, y_k^2\right) = \left(\frac{1}{k}, \frac{-1}{k}\right) \to (0;0) \end{cases} \text{nhưng} \begin{cases} f\left(x_k^1, y_k^1\right) = \frac{1/k^2.1/k^2}{1/k^2.1/k^2 + \left(1/k - 1/k\right)^2} = 1 \to 1 \\ f\left(x_k^2, y_k^2\right) = \frac{1/k^2.1/k^2}{1/k^2.1/k^2 + \left(1/k + 1/k\right)^2} = \frac{1}{5} \to \frac{1}{5} \end{cases}.$$

4. Tính các đạo hàm hàm riêng cấp 1 và vi phân toàn phần của các hàm sau đây

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

b) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

c) $z = e^{\sin\frac{y}{x}}$

d) $z = x^{x^y}$

e) $z = yx^y$

f) $z = \sqrt{x^2y - xy^2}$

g) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

h) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

i) $z = \arcsin\dfrac{y - x}{x}$

j) $u = e^{xyz}\sin\dfrac{y}{z}$

k) $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$

l) $u = \ln(xy + z)$

Lời giải.

a) $z'_x = 3x^2 - 3y, z'_y = 3y^2 - 3x$ và $dz = \left(3x^2 - 3y\right)dx + \left(3y^2 - 3x\right)dy$.

b) $z'_x = \dfrac{4xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, z'_y = \dfrac{-4x^2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ và $dz = \dfrac{4xy(xdx - ydy)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$.

c) $z'_x = -\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}, z'_y = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}$ và $dz = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\left(-\dfrac{y}{x}dx + dy\right)$

d) Ta có $z = e^{x^y \ln x}$. Vậy

$$z'_x = z = e^{x^y \ln x}\left(x^y \ln x\right)'_x = x^{x^y}\left(yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}\right) = x^{x^y + y - 1}(y\ln x + 1),$$

$$z'_y = e^{x^y \ln x}\left(x^y \ln x\right)'_y = x^{x^y}\left(x^y \ln x.\ln x\right) = x^{x^y + y}\ln^2 x,$$

$$dz = x^{x^y + y - 1}(y\ln x + 1)dx + \left(x^{x^y + y}\ln^2 x\right)dy$$

e) $z'_x = y^2x^{y-1}, z'_y = x^y + yx^y \ln x = x^y(1 + y\ln x)$ và $dz = x^y\left[y^2x^{-1}dx + (1 + y\ln x)dy\right]$.

f) $z'_x = \frac{2xy - y^2}{2\sqrt{x^2y - xy^2}}, z'_y = \frac{x^2 - 2xy}{2\sqrt{x^2y - xy^2}}$ và $dz = \frac{2xy - y^2dx + \left(x^2 - 2xy\right)dy}{2\sqrt{x^2y - xy^2}}$.

g) $z'_x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy}{\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

h) $z'_x = \frac{-y/x^2}{1 + \left(y/x\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{1/x}{1 + \left(y/x\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}, dz = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$.

i) $z'_x = -\frac{y}{x}\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\left(y-x\right)/x\right]^2}}, z'_y = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\left(y-x\right)/x\right]^2}}$, $dz_x = \frac{-ydx + dy}{x\sqrt{1 - \left[\left(y-x\right)/x\right]^2}}$.

j) $u = e^{xyz}\sin\frac{y}{z}$

*) $u'_x = yze^{xyz}\sin\frac{y}{z}, u'_y = xze^{xyz}\sin\frac{y}{z} + \frac{1}{z}e^{xyz}\cos\frac{y}{z}; u'_z = xye^{xyz}\sin\frac{y}{z} - \frac{y}{z^2}e^{xyz}\cos\frac{y}{z}$ **)

$$du = e^{xyz}\left(yz\sin\frac{y}{z}dx + \left(xz\sin\frac{y}{z} + \frac{1}{z}\cos\frac{y}{z}\right)dy + \left(xy\sin\frac{y}{z} - \frac{y}{z^2}\cos\frac{y}{z}\right)dz\right)$$

k) $u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$

$$u'_x = z\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1}; u'_y = z\left(y - \frac{x}{y^2}\right)\left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1}; u'_z = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z \ln\left(xy + \frac{x}{y}\right)$$

$$du = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[z\left(y + \frac{1}{y}\right)dx + z\left(y - \frac{x}{y^2}\right)dy + \ln\left(xy + \frac{x}{y}\right)dz\right]$$

l) $u = \ln\left(xy + z\right)$

$$u'_x = \frac{y}{xy + z}; u'_y = \frac{x}{xy + z}; u'_z = \frac{1}{xy + z}$$

$$du = \frac{1}{xy + z}\left(ydx + xdy + dz\right)$$

5. Chứng minh rằng

a) Hàm $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ thoả phương trình $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$

b) Hàm $z = xy + xe^{y/x}$ thoả phương trình $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y+x}{x^2+xy+y^2}$$

Khi đó

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2} + y\frac{2y+x}{x^2+xy+y^2} = 2.$$

b) Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{y/x}\left(1-\frac{y}{x}\right) \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = x + e^{y/x}.$$

Khi đó

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + xe^{y/x}\left(1-\frac{y}{x}\right) + yx + ye^{y/x} = 2xy + xe^{y/x} = xy + z.$$

6. Dùng biểu thức vi phân cấp 1 tính gần đúng trị của các biểu thức

a) $A = (1{,}003)^{1{,}995}$ b) $B = \sqrt{9.(1{,}95)^2 + (8{,}1)^2}$ c) $C = \operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$

Lời giải. Trong bài này ta áp dụng công thức

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

a) Đặt

$$(x_0,y_0) = (1;2), (\Delta x, \Delta y) = (0{,}003; -0{,}005),$$
$$f(x,y) = x^y, f'_x = yx^{y-1}; f'_y = x^y \ln x,$$
$$f(x_0,y_0) = 1, f'_x(x_0,y_0) = 2, f'_y(x_0,y_0) = 0.$$

Ta được

$$A = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx 1 + 2\times 0{,}003 + 0\times(-0{,}005) = 1{,}006.$$

b) Đặt

$$(x_0,y_0) = (2;8), (\Delta x, \Delta y) = (-0{,}05; 0{,}1),$$
$$f(x,y) = \sqrt{9x^2+y^2}, f'_x = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}}; f'_y = \frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}},$$
$$f(x_0,y_0) = 10, f'_x(x_0,y_0) = 1{,}8, f'_x(x_0,y_0) = 0{,}8.$$

Khi đó

$$B = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx 10 + 1{,}8\times(-0{,}05) + 0{,}8\times 0{,}1 = 9{,}99.$$

c) Đặt

$$(x_0,y_0) = (1;1); (\Delta x, \Delta y) = (0{,}02; -0{,}05),$$
$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, f'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, f'_y = \frac{-x}{x^2+y^2},$$
$$f(x_0,y_0) = \frac{\pi}{4}, f'_x(x_0,y_0) = \frac{1}{2}, f'_x(x_0,y_0) = -\frac{1}{2}.$$

Khi đó

$$C = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\times 0{,}02 - \frac{1}{2}\times 0{,}05 = \frac{\pi}{4} + 0{,}035.$$

7. Tính đạo hàm hàm riêng của các hàm hợp sau đây

a) Cho $z = x^2 \sin y, x = \dfrac{u}{v}, y = v\sqrt{u}$. Tính z'_u, z'_v.

b) Cho $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, x = u\sin v, y = u\cos v$. Tính f'_u, f'_v.

c) Cho $z = y\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, y = \cos^2 x$. Tính z'_x.

d) Cho $f(x,y) = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}, x = 3t^2, y = \sqrt{1+t^2}$. Tính f'_t.

Lời giải.

a) Ta có

$$z'_x = 2x\sin y, z'_y = x^2\cos y;\ \ x'_u = \frac{1}{v}, x'_v = -\frac{u}{v^2};\ y'_u = \frac{v}{2\sqrt{u}}, y'_v = \sqrt{u}.$$

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm hợp, ta được

$$z'_u = z'_x.x'_u + z'_y.y'_u = \frac{2u}{v^2}\sin v\sqrt{u} + \frac{v}{2\sqrt{u}}\cos v\sqrt{u}$$

$$z'_u = z'_x.x'_v + z'_y.y'_v = -\frac{2u^2}{v^3}\sin v\sqrt{u} + \sqrt{v}\cos v\sqrt{u}.$$

b) Cho $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, x = u\sin v, y = u\cos v$. Tính f'_u, f'_v.

$$f'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u = \frac{u\cos v}{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v}\sin v - \frac{u\sin v}{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v}\cos v = 0$$

$$f'_u = f'_x x'_v + f'_y y'_v = \frac{u\cos v}{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v}u\cos v + \frac{u\sin v}{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v}u\sin v = 1$$

c) Ta có

$$z'_x = \frac{y^2}{x^2+y^2}, z'_y = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{xy}{x^2+y^2},\ y'(x) = -\sin 2x.$$

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm hợp, ta được

$$\frac{dz}{dx} = z'_x + z'_y.y'(x) = \frac{\cos^4 x}{x^2+\cos^4 x} - \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{x\cos^2 x}{x^2+\cos^4 x}\right)\sin 2x.$$

d) Cho $f(x,y) = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}, x = 3t^2, y = \sqrt{1+t^2}$. Tính f'_t.

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{y}}\cot g\frac{x}{\sqrt{y}}, f'_y = -\frac{x}{2\sqrt{y^3}}\cot g\frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$f'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t = \frac{3t}{\sqrt[4]{1+t^2}}\cot g\frac{3t^2}{\sqrt[4]{1+t^2}}\left(2 - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

8. Tính các đạo hàm hàm riêng và vi phân cấp 2 của các hàm sau đây

a) $z = \ln(x^2+y)$ b) $z = \sqrt{2xy+y^2}$

c) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ d) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Lời giải.

a) $z'_x = \dfrac{2x}{x^2+y}, z'_y = \dfrac{1}{x^2+y}$ và $z''_{xx} = \dfrac{2\left(y-x^2\right)}{\left(x^2+y\right)^2}, z''_{yy} = \dfrac{-1}{\left(x^2+y\right)^2}, z''_{xy} = \dfrac{-2x}{\left(x^2+y\right)^2}$.

b) $z'_x = \dfrac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}, z'_y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$,

$$z''_{xx} = \frac{-y^2}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}}, z''_{yy} = \frac{-x^2}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}}, z''_{xy} = \frac{xy}{\sqrt{\left(2xy+y^2\right)^3}}.$$

c) $z'_x = \dfrac{1+y^2}{\left(1-xy\right)^2}\dfrac{\left(1-xy\right)^2}{\left(1-xy\right)^2+\left(x+y\right)^2} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} = \dfrac{1}{1+x^2}, y' = \dfrac{1}{1+y^2}$,

$$z''_{xx} = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}, z''_{yy} = \frac{-2y}{\left(1+y^2\right)^2}, z''_{xy} = 0.$$

d) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u''_{xx} = \frac{y^2+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; u''_{yy} = \frac{x^2+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; u''_{zz} = \frac{y^2+x^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$$

$$u''_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; u''_{zy} = \frac{-yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; u''_{zx} = \frac{-zx}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$$

$$d^2u = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\left[\begin{array}{l}\left(y^2+z^2\right)dx^2+\left(x^2+z^2\right)dy^2+\left(x^2+y^2\right)dz^2-2xydxdy\\ -2xzdxdz-2yzdydz\end{array}\right]$$

9. Tính đạo hàm của các hàm ẩn xác định bởi các phương trình sau đây

a) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a}-\dfrac{y}{a}=0$. Tính $y'(x)$ b) $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$. Tính $y'(x)$

c) $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$. Tính z'_x, z'_y d) $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=4 \end{cases}$. Tính $y'\left(x\right), z'\left(x\right)$

Lời giải.

a) Ta có

$$F\left(x\right) := xe^y+ye^x-e^{xy}, F'_x = e^y+ye^x-ye^{xy}, F'_y = xe^y+e^x-xe^{xy}.$$

Áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm ẩn, ta được

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y + ye^x - ye^{xy}}{xe^y + e^x - xe^{xy}}.$$

b) $F(x) := xy - \ln y - a \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y}{x - (1/y)} = \frac{y^2}{1 - xy}$.

c) $F(x) := y^x - x^y \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$.

10. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ xác định hàm ẩn z = z(x,y). Chứng minh rằng

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z}.\backslash$$

Giải

11. Tìm cực trị của các hàm sau đây

a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$
b) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
c) $z = x + y - xe^y$
d) $z = (x-1)^2 + 2y^2$
e) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
f) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$
g) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$
h) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
i) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy - x - 2z$
j) $u = x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8$

Lời giải.

a) • Tìm điểm tới hạn

$$\begin{cases} z'_x = 4 - 2x = 0 \\ z'_y = -4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M_0(2,-2).$$

• Xác định điểm cực trị

$$z''_{xx} = -2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = -2.$$

Tại M_0: $A = -2 < 0, B = 0, C = -2, B^2 - AC = -4 < 0$

$$\Rightarrow M_0 \text{ là điểm cực đại và } z_{\max} = 8.$$

b) • $\begin{cases} z'_x = 2x + y + 1 = 0 \\ z'_y = 2y + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M_0(-1,1).$

• $z''_{xx} = 2; z''_{xy} = 1; z''_{yy} = 2$.

Tại M_0: $A = 2 > 0, B = 1, C = 2, B^2 - AC = -3 < 0 \Rightarrow M_0$ là điểm cực tiểu và $z_{\min} = 0$.

c) • $\begin{cases} z'_x = 1 - e^y = 0 \\ z'_y = 1 - xe^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1,0).$

• $z''_{xx} = 0; z''_{xy} = -e^y; z''_{yy} = -xe^y$.

Tại M_0: $A = 0, B = -1, C = -1, B^2 - AC = 1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

d) $\bullet \begin{cases} z'_x = 2(x-1) = 0 \\ z'_y = 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1,0)$

$\bullet\ z''_{xx} = 2, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = 4$

Tại M_0: $A = 2 > 0, B = 0, C = 4, B^2 - AC = -8 < 0 \Rightarrow M_0$ là điểm cực tiểu và $z_{\min} = 0$;

e) • Tìm các điểm tới hạn

$$\begin{cases} z'_x = 8x^3 - 2x = 0 \\ z'_y = 4y^3 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \vee y = \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số có 9 điểm tới hạn

$$M_1(0,0), M_{2,3}(0,\pm 1), M_{4,5}(\pm\frac{1}{2},0), M_{6,7}(\frac{1}{2},\pm 1), M_{8,9}\left(-\frac{1}{2},\pm 1\right).$$

• Xác định điểm cực trị

$$z''_{xx} = 24x^2 - 2; z''_{xy} = 0; z''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

* Tại M_1: $A = -2 < 0, B = 0, C = -4, B^2 - AC = -8 < 0$

$\Rightarrow M_1$ là điểm cực đại và $z_{\max} = 0$.

* Tại $M_{2,3}$: $A = -2 < 0, B = 0, C = 8, B^2 - AC = 16 > 0$

$\Rightarrow M_{2,3}$ không phải là điểm cực trị.

* Tại $M_{4,5}$: $A = 4 > 0, B = 0, C = -4, B^2 - AC = 16 > 0$

$\Rightarrow M_{4,5}$ không phải là điểm cực trị.

* Tại $M_{6,7}$: $A = 4 > 0, B = 0, C = 8, B^2 - AC = -32 < 0$

$\Rightarrow M_{6,7}$ là điểm cực tiểu và $z_{\min} = -\dfrac{9}{8}$.

* Tại $M_{8,9}$: $A = 4 > 0, B = 0, C = 8, B^2 - AC = -32 < 0$

$\Rightarrow M_{8,9}$ là điểm cực tiểu và $z_{\min} = -\dfrac{9}{8}$.

f) $\bullet \begin{cases} z'_x = 2y - 6x = 0 \\ z'_y = 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0,0)$.

$\bullet\ z''_{xx} = -6; z''_{xy} = 2; z''_{yy} = -4$.

Tại M_0: $A = -6 < 0, B = 2, C = -4, B^2 - AC = -20 < 0 \Rightarrow M_0$ là điểm cực đại và $z_{\max} = 10$.

g) • Tìm điểm tới hạn

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ z'_y = 6xy + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, y = 1 \\ x = -1, y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1(2,-1), M_2(-1,2), M_3(-2,1), M_4(-2,1)$$

• Xác định điểm cực trị

$$z''_{xx} = 6x, z''_{xy} = 6y, z''_{yy} = 6x.$$

* Tại $M_1: A=12>0, B=-6, C=12, B^2-AC=-108<0$

$\Rightarrow M_1$ là điểm cực tiểu và $z_{\min}=-22$.

* Tại $M_2: A=-6>0, B=12, C=-6, B^2-AC=108>0$

$\Rightarrow M_2$ không phải là điểm cực trị.

* Tại $M_3: A=-12>0, B=6, C=-12, B^2-AC=-108<0$

$\Rightarrow M_3$ là điểm cực tiểu và $z_{\min}=-22$.

* Tại $M_4: A=6>0, B=-12, C=6, B^2-AC=108>0$

$\Rightarrow M_4$ không phải là điểm cực trị.

h) • $\begin{cases} z'_x = y-\dfrac{50}{x^2}=0 \\ z'_y = x-\dfrac{20}{y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M_0(5,2)$.

• $z''_{xx}=\dfrac{100}{x^3}, z''_{xy}=1, z''_{yy}=\dfrac{40}{y^3}$.

Tại M_0: $A=\dfrac{4}{5}>0, B=1, C=5, B^2-AC=-3<0 \Rightarrow M_0$ là điểm cực tiểu và $z_{\min}=30$.

12. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm sau đây

a) $z=xy$ với $x+y=1$ b) $z=\cos^2 x+\cos^2 y$ với $y-x=\dfrac{\pi}{4}$

c) $z=x+2y$ với $x^2+y^2=5$ d) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ với $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$

Lời giải.

a) Do

$$x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x,$$

nên ta đưa được bài toán về bài toán tìm cực trị hàm một biến

$$z=z(x)=x-x^2, x\in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$z'(x)=1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ và } z''(x)=-2, z''\left(\frac{1}{2}\right)=-2.$$

Vậy hàm $z(x)$ đạt cực đại tại $x=\dfrac{1}{2}$ nên hàm $z(x,y)$ đạt cực đại có điều kiện tại $(x,y)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ và $z_{\max}=\dfrac{1}{4}$.

b) Do

$$y-x=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow y=x+\frac{\pi}{4}.$$

nên ta đưa bài toán về bài toán tìm cực trị hàm một biến

$$z = z(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbb{R} .$$

Ta có

$$z'(x) = -\sin 2x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x - \cos 2x = -\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \text{ và } z''(x) = -2\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z''\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\cos(k\pi) = \begin{cases} 2\sqrt{2}, & k = 2m+1 \\ -2\sqrt{2}, & k = 2m \end{cases}, m \in \mathbb{Z} .$$

Vậy hàm số đạt cực tiểu có điều kiện tại

$$\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{(2m+1)\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) \text{ với } z_{\min} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2m+1)\pi = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

và đạt cực đại có điều kiện tại

$$\left(-\frac{\pi}{8} + m\pi, \frac{\pi}{8} + m\pi\right) \text{ với } z_{\max} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2m\pi) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) Hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 5\right)$$

- Tìm điểm tới hạn

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -1/\lambda \\ \lambda^2 = 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(1,2), \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ M_2(-1,-2); \lambda = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Xác định điểm cực trị

$$\begin{cases} L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2\lambda \Rightarrow d^2L = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right) \\ \varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y \Rightarrow d\varphi = 2(xdx + ydy) = 0 \Leftrightarrow dy = -\dfrac{x}{y}dx \end{cases} \Rightarrow d^2L = 2\lambda\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)dx^2 .$$

* Tại $M_1(1,2), \lambda = -\frac{1}{2}$:

$$d^2L\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) = -\left(1 + \frac{1}{4}\right)dx^2 < 0, \forall dx \neq 0 \Rightarrow M_1 \text{ là điểm cực đại có điều kiện.}$$

* Tại $M_2(-1,-2), \lambda = \frac{1}{2}$:

$$d^2L\left(-1, -2, \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)dx^2 > 0, \forall dx \neq 0 \Rightarrow M_2 \text{ là điểm cực tiểu có điều kiện.}$$

d) Hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}\right), a > 0 .$$

- Tìm điểm tới hạn

$$\begin{cases} L'_x = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ L'_y = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -2\lambda \\ \lambda = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1\left(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\right), \lambda = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ M_2\left(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a\right), \lambda = -\dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

• Xác định điểm cực trị

$$\begin{cases} L''_{xx} = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6\lambda}{x^4}, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = \dfrac{2}{y^3} + \dfrac{6\lambda}{y^4} \Rightarrow d^2L = 2\left[\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3\lambda}{x^4}\right)dx^2 + \left(\dfrac{1}{y^3} + \dfrac{3\lambda}{y^4}\right)dy^2\right] \\ \varphi'_x = -\dfrac{2}{x^3}, \varphi'_y = -\dfrac{2}{y^3} \Rightarrow d\varphi = -2\left(\dfrac{1}{x^3}dx + \dfrac{1}{y^3}dy\right) = 0 \Leftrightarrow dy = -\dfrac{y^3}{x^3}dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2L = 2\left[\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3\lambda}{x^4}\right) + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{3\lambda}{y^4}\right)\left(\frac{y^6}{x^6}\right)\right]dx^2.$$

* Tại $M_1\left(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\right), \lambda = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$:

$$d^2L = 4\left(-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}} + \frac{3}{4a^3\sqrt{2}}\right)dx^2 = dx^2 = \frac{dx^2}{a^3\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow M_1$$ là điểm cực tiểu có điều kiện.

* Tại $M_2\left(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a\right), \lambda = -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$:

$$d^2L = 4\left(\frac{1}{2a^3\sqrt{2}} - \frac{3}{4a^3\sqrt{2}}\right)dx^2 = dx^2 = -\frac{dx^2}{a^3\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow M_2$$ là điểm cực đại có điều kiện.

13. Trong tất cả các tam giác vuông có diện tích bằng 1, tìm tam giác có cạnh huyền nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi $x, y, z > 0$ lần lượt là hai cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông có diện tích bằng 1. Khi đó

$$xy = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x} \text{ và } z = \sqrt{x^2 + y^2} := z(x, y).$$

Bài toán được đưa về bài toán tìm cực trị của hàm số

$$z = z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 4}}{x} := z(x), x \in (0, +\infty)$$

Ta có

$$z'_x = \frac{x^4 - 4}{x^2\sqrt{x^4 + 4}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Lập bảng xét dấu z'_x ta thấy $x = \sqrt{2}$ là điểm cực tiểu của hàm số $z(x)$ nên hàm $z(x, y)$ đạt cực tiểu tại $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Vậy trong tam giác vuông có diện tích bằng 1 thì tam giác vuông cân là tamgiác có cạnh huyền nhỏ nhất và bằng 2.

15. Tính max và min của các hàm sau đây trên tập đóng và giới nội *D* tương ứng

a) $z = x^2y(4-x-y)$ với D được giới hạn bởi các đường $x=0,\ y=0,\ x+y=6$

b) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ với $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$

c) $z = x^2 - y^2$ với $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\right\}$

d) $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(2x^2+3y^2\right)$ với $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$

Lời giải.

a) Ta có

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 6, 0 \le y \le 6-x\right\}.$$

- Tìm điểm tới hạn trong $\overset{0}{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 6, 0 < y < 6-x\right\}$: Ta có

$$z = x^2y(4-x-y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = xy(-3x-2y+8) = 0 \\ z'_y = x^2(-x-2y+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-8=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy trong $\overset{0}{D}$, hàm số có một điểm tới hạn $M_1(2,1)$ và $z(M_1) = 4$.

- Tìm điểm tới hạn trên ∂D:

  * Trên $OA: x=0, y \in (0,6): z = 0$

  * Trên $OB: y=0, x \in (0,6): z = 0$

  * Trên $AB: y = 6-x, x \in (0,6)$. Ta có hàm một biến

$$z = x^2y(4-x-y) = 2x^3 - 12x^2 =: z(x)$$

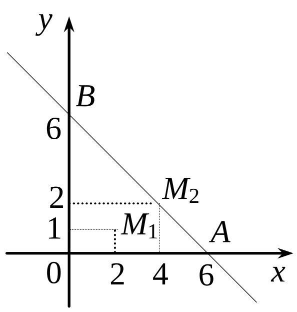
$$z'_x = 6x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in (0,6)$$

Trên *AB*, hàm số có một điểm tới hạn $M_2(2,4)$ và $z(M_2) = -64$.

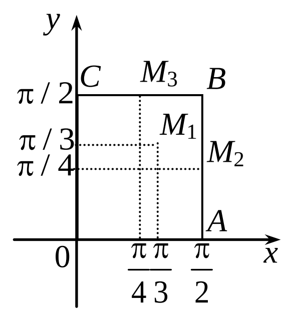
  * Tại các điểm $O(0,0), A(0,6), B(6,0): z(A) = z(B) = z(B) = 0$

So sánh các giá trị của hàm số tại các điểm tới hạn, ta được

$$\max_D z = 4 \text{ đạt tại } M_1(2,1) \text{ và } \min_D z = -64 \text{ đạt tại } M_2(4,2).$$



Hình 1



Hình 2

b) • Tìm các điểm tới hạn trong $\overset{0}{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, 0 < y < \dfrac{\pi}{2}\right\}$: Ta có

$$\begin{cases} z'_x = \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ z'_y = \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos y \\ \cos x + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \in \overset{0}{D} \text{ và } z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

• Tìm các điểm tới hạn trên ∂D:

* $OA: y = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $z = 2\sin x$ và $z'(x) = 2\cos x = 0 \Leftrightarrow$ VN.

* $OB: x = 0, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $z = 2\sin y$ và $z'(y) = 2\cos y = 0 \Leftrightarrow$ VN.

* $BC: y = \frac{\pi}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $z = 1 + \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin x + \cos x$

và

$$z'(x) = \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

* $OB: x = \frac{\pi}{2}, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $z = 1 + \sin y + \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin y + \cos y$

và

$$z'(y) = \cos y - \sin y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

* Tại các đỉnh $O(0,0), A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), C\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$z(O) = 0, z(A) = z(B) = z(B) = 2.$$

Kết luận:

$$\max_D z = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \min_D z = 0.$$

c) • Tìm điểm tới hạn trong $\overset{0}{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\right\}$: Ta có

$$\begin{cases} z'_x = 2x = 0 \\ z'_y = -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z(0,0) = 0$$

• Tìm điểm tới hạn trên $\partial D: x^2 + y^2 = 4$

Cách 1. Hàm Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4\right).$$

Ta có

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee \lambda = -1 \\ y = 0 \vee \lambda = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = \pm 2 \\ y = 0, x = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow z(0, \pm 2) = -4, z(\pm 2, 0) = 4.$$

Kết luận

$$\max_D z = 4, \min_D z = -4 .$$

Cách 2.

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2, x \in [-2, 2].$$

Xét

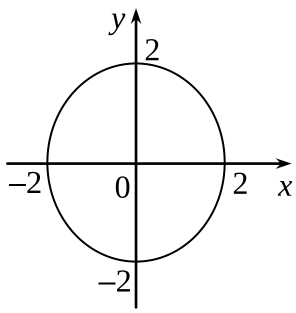
$$z = x^2 - y^2 = 2x^2 - 4 \Rightarrow z'(x) = 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

So sánh các giá trị

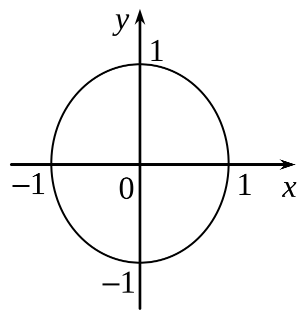
$$z(0) = -4, z(-2) = z(2) = 4$$

ta được

$$\max_D z = 4, \min_D z = -4 .$$



Hình 3



Hình 4

d) • Tìm các điểm tới hạn trong $\overset{0}{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$. Ta có

$$\begin{cases} z'_x = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left[-2x\left(2x^2+3y^2\right)+4x\right]=0 \\ z'_y = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left[-2y\left(2x^2+3y^2\right)+6y\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(2-2x^2-3y^2\right)=0 \\ y\left(3-2x^2-3y^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=0, y=\pm 1 \\ x=\pm 1, y=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (0,0) \in \overset{0}{D} \Rightarrow z(0,0) = 0 .$$

• Tìm các điểm tới hạn trên biên $\partial D : x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$. Ta có

$$z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(2x^2+3y^2\right) = e^{-1}(3-x^2) := z(x), x \in [-1,1]$$

$$z'(x) = -\frac{2}{e}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

So sánh các giá trị

$$z(0) = \frac{3}{e}, z(-1) = z(1) = \frac{2}{e}$$

ta được

$$\max_D z = \frac{3}{e}, \min_D z = 0 .$$