TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA/VIỆN: Công Nghệ Thông Tin

ĐỀ THI CUỐI KỲ 2023

Môn thi : Cấu trúc rời rạc

Đề tham khảo

Thời gian làm bài: 75 phút

Họ tên: .... MSSV: ....

Câu 1. (3 điểm) Giải hệ thức đệ quy sau đây:

$$\begin{cases} a_0 = -1, a_1 = -26, \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 15a_n + 2^n(49 - 15n), \ \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Câu 2. (3.5 điểm) Xét tập hợp $A = \{1,2,4,5,10,12,20,25\}$ và định nghĩa quan hệ hai ngôi $x\ R\ y$ nếu như x chia hết cho y.

a) Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự.

b) Vẽ biểu đồ Hasse cho tập A dựa trên quan hệ R. Từ đó chỉ ra (các) phần tử tối đại và tối tiểu của A.

c) Chứng minh rằng A có phần tử nhỏ nhất nhưng không có phần tử lớn nhất. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 2023 có thể thêm vào A để A có phần tử lớn nhất?

Câu 3. (3.5 điểm) Cho hàm Bool f theo bốn biến như sau:

$$f(x,y,z,t) = x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z\,\bar{t} \vee \bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee \bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}.$$

a) Dựa theo biểu đồ Karnaugh bên cạnh, hãy biểu diễn hàm f trên và xác định 6 tế bào lớn của nó.

b) Tìm công thức đa thức tối tiểu cho f.

c) Vẽ mạch logic cho hàm f ở dạng tối tiểu.

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$				
zt				
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$				

HẾT

Sinh viên được dùng tài liệu giấy

Hướng dẫn giải.

1) Cho $a0 = -1$, $a1 = -26$, $a(n+2) = 2.a(n+1) + 15.a(n) + 2^n.(49 – 15n)$, mọi $n >= 0$.

Bước 1: xét PT đặc trưng $t^2 = 2t + 15 \rightarrow t = 5, t = -3$.

Nghiệm chung có dạng: $a(n)^* = A.5^n + B.(-3)^n$.

Bước 2: ở đây, phần không thuần nhất có dạng $(an+b).c^n$ với c khác cả 2 nghiệm của PT đặc trưng $\rightarrow$ trường hợp dễ. Nếu như bị trùng 1 lần $\rightarrow$ ta nhân n vào công thức: $n(an+b).c^n$ còn nếu trùng 2 lần (PT đặc trưng có nghiệm kép trùng c) $\rightarrow$ ta nhận n^2 vào.

Nghiệm riêng có dạng: $an^\wedge = (Cn+D).2^n$.

Bước 3: thay vào đề và tìm C, D:

$$[C(n+2)+D].2^{(n+2)} = 2.[C(n+1)+D].2^{(n+1)} + 15.[Cn+D].2^n + 2^n.(49-15n)$$

$$\Leftrightarrow [C(n+2)+D].4 = 2.[C(n+1)+D].2 + 15.[Cn+D] + (49-15n)$$

Hướng 1 $\rightarrow$ khai triển ra rồi rút gọn.

Hướng 2 $\rightarrow$ để như thế, xong rồi thay các số n cụ thể vào rồi giải hệ.

Ta làm theo hướng 1:

$$\Leftrightarrow 4C(n+2)+4D = 4C(n+1)+4D + 15Cn+15D + 49-15n$$

$$\Leftrightarrow \underline{4Cn} + 8C + \underline{4D} = \underline{4Cn} + 4C + \underline{4D} + 15Cn + 15D + 49 – 15n$$

$$\Leftrightarrow 4C = 15D + 49 + 15Cn – 15n.$$

$n = 0 \rightarrow 4C = 15D + 49$.

$n = 1 \rightarrow 4C = 15D + 49 + 15C – 15$. Bấm máy giải hệ được: $C = 1$, $D = -3$ nên nghiệm riêng là:

$$a(n)^\wedge = (n-3).2^n.$$

Bước 4: nghiệm tổng quát = nghiệm riêng + nghiệm chung

$$a(n) = a(n)^* + a(n)^\wedge = A.5^n + B.(-3)^n + (n-3).2^n.$$

$a0 = -1$, $a1 = -26$.

$n = 0 \rightarrow -1 = A+B+(-3)$.

$n = 1 \rightarrow -26 = 5A-3B – 2.2^1$. Giải hệ tiếp được $A = -2$, $B = 4$.

Vậy nghiệm tổng quát cần tìm là:

$$a(n) = -2.5^n + 4.(-3)^n + (n-3).2^n.$$

//ta có thể tính thử a0, a1, a2 và đối chiếu với công thức xem có trùng khớp không?

$n=0 \rightarrow a2 = 2.(-26) + 15.(-1) + 2^0.(49-0) = -52-15+49 = -18$.

Thay vào công thức:

$$a(2) = -2.5^2 + 4.(-3)^2 + (2-3).2^2 = -50 + 36 – 4 = -18.$$

Sau khi thử thấy đúng thì khá chắc chắn kq là đúng (phần thử lại này không cần trình bày vào bài thi).

Bài 2.

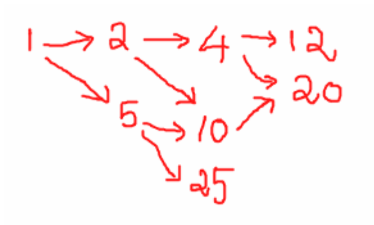
a) Kiểm tra tính chất của quan hệ thứ tự:

- Phản xạ: với mọi a thì a R a ⇔ a chia hết cho a, đúng.

- Phản xứng: với a, b thuộc A thì a R b và b R a ⇔ a chia hết cho b và b chia hết cho a, chỉ xảy ra khi a = b.

- Bắc cầu: với a, b, c thuộc A thì a R b và b R c ⇔ a chia hết cho b và b chia hết cho c => a chia hết cho c, do đó a R c.

b) Ta có biểu đồ sau đây:



Khi ký hiệu: ta viết 2 R 1 (vì 2 chia hết cho 1).

- Tối đại: 12, 20, 25.
- Tối tiểu: 1
- Lớn nhất: không có, do không có phần tử nào chia hết cho tất cả các số (khi đã có lớn nhất thì đó cũng là phần tử tối đại duy nhất).
- Nhỏ nhất: 1.

c) Số x có thể làm phần tử lớn nhất → ta cần có x chia hết cho 12, 20, 25. Ta cần có x là bội chung của cả 3 số (viết 12 = 3.4, 20 = 4.5, 25 = 5.5) → 3.4.5.5 = 300, 600, 900, 1200, 1500, 1800. Có tất cả 6 số thỏa mãn.

Bài 3. (*Cách giải bên dưới chỉ mang tính tham khảo, mỗi GV đã có hướng dẫn cách trình bày riêng cho từng lớp*).

a/ Vẽ biểu đồ và đánh số như bảng bên phải:

	XY’	XY	X’Y	X’Y’
ZT’	1	1	1	1
ZT			1	
Z’T	1	1		1
Z’T’	1	1		1

	XY’	XY	X’Y	X’Y’
ZT’	1	2	3	4
ZT			5	
Z’T	6	7		8
Z’T’	9	10		11

Các TBL là:

XZ’ gồm có: 6,7,9,10; ZT’ gồm có: 1,2,3,4; XT’ gồm có: 1,2,9,10;

Y’Z’ gồm có: 6,8,9,11; Y’T’ gồm có: 1,4,9,11; X’YZ gồm có: 3,5.

b/ Xác định các TBL bắt buộc phải chọn:

- XZ’ chỉ chứa 7 của riêng 7;

- X’YZ chỉ chứa 5 của riêng nó;
- Y’Z’ chỉ chứa 8 của riêng nó.

Phủ tối tiểu gồm XZ’ ∨ X’YZ ∨ Y’Z’ (còn các ô tự do: 1, 2, 4).

Số 1 thuộc về: ZT’ và XT’ và Y’T’.

(1) XZ’ ∨ X’YZ ∨ Y’Z’ ∨ ZT’.

(2) XZ’ ∨ X’YZ ∨ Y’Z’ ∨ XT’ ∨ Y’T’.

Có 2 đa thức thỏa mãn như trên, trong đó chỉ có (1) là đa thức tối tiểu.

XZ’ ∨ X’YZ ∨ Y’Z’ ∨ ZT’.

c) Vẽ mạch logic cho hàm f ở dạng tối tiểu: SV tự vẽ.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CUỐI KỲ

Môn thi : CẤU TRÚC RỜI RẠC

Lớp/Lớp học phần : DHTH17

Ngày thi : 05/12/2022

Thời gian làm bài : 75 phút

Câu	Nội dung trả lời	Điểm
1	Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất : Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất : $\begin{cases} X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1} + 2^n + 2n \quad \forall n \geq 1 \\ X_0 = 3, X_1 = 4 \end{cases}$	**3.5**
	Hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất : $$X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1} + 2^n + 2n \ (1)$$ Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất là : $$X_{n+1} - 3X_n + 2X_{n-1} = 0 \ (2)$$ Phương trình đặc trưng của (2) là : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ (*) có 2 nghiệm là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ Nghiệm tổng quát của (2) là : $X_n = C_1 + C_2 (2)^n$ (3) **(0.5 đ)** Xét $X_n - 3X_n + 2X_{n-1} = 2^n \ (1')$ Một nghiệm riêng của (1') : $f_{n1} = 2^n$ *có* dạng $\beta^n . P_r(n)$ với $\beta = 2$ và đa thức bậc r = 0 theo n. Do β trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng (*) nên (1') có một nghiệm riêng dạng : $X_n = n\,2^n\,C \ (4')$ **(0.5 đ)** Thế (4') vào (1') ta được :	

	$$(n+1)\,2^{n+1}\,C - 3n\,2^{n}\,C + 2\,(n-1)\,2^{n-1}\,C = 2^{n}$$ Cho n = 0 ta có : $2C - 2\,.\,2^{-1}C = 1 \Rightarrow C = 1$ Một nghiệm riêng của (1’) là : $X_n = n\,2^{n}$ $(5')$ **(0.5 đ)** Xét $X_n - 3X_n + 2X_{n-1} = 2n\ (1'')$ Một nghiệm riêng của (1’) : $f_{n2} = 2n$ có dạng β^n . $P_r(n)$ với β = 1 và đa thức bậc r = 1 theo n. Do β trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng (*) nên (1’’) có một nghiệm riêng dạng : $X_n = n.(an+b)\ (4'')$ **(0.5 đ)** Thế (4’’) vào (1’’) ta được : $$(n+1).(a(n+1)+b) - 3n\,(an+b) + 2(n-1).(a(n-1)+b) = 2n$$ Cho $n_1 = -1$ và $n_2 = 1$ ta có : $$\begin{cases} 3(-a+b) - 4(-2a+b) = -2 \\ 2(2a+b) - 3(a+b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - b = -2 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$ Một nghiệm riêng của (1’’) là : $X_n = -n(n+3)$ $(5'')$ **(0.5 đ)** Từ (3) , (5’) và (5’’) ta có nghiệm tổng quát của (1) là : $$X_n = C_1 + C_2\,2^{n} + n\,2^{n} - n(n+3)\ (6)$$ **(0.5 đ)** Thay điều kiện $X_0 = 3$, $X_1 = 4$ ta có : $$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 4 = C_1 + 2\,C_2 + 2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 6 = C_1 + 2C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$ Thế vào (6) ta được nghiệm riêng cần tìm của (1) là : $$X_n = 3\,.\,2^{n} + n\,2^{n} - n(n+3)$$ $$X_n = (n+3).(2^{n} - n)$$ (0.5đ)	

2	Cho quan hệ 2 ngôi **R** trên Z được định nghĩa như sau : $\forall$ x, y $\in$ Z, x **R** y $\Leftrightarrow$ 3 | (4x - y) $\Leftrightarrow$ (4x - y) chia hết cho 3 a) Chứng minh **R** là quan hệ tương đương. b) Phân hoạch Z thành các lớp tương đương.	**3**
a)	+ $\forall$ x $\in$ Z, 3 | (4x - x) $\Leftrightarrow$ x R x $\Rightarrow$ R có tính phản xạ. (0.5 điểm) +$\forall$ x, y $\in$ A, x R y $\Leftrightarrow$ 3 | (4x - y) $\Leftrightarrow$ 3 | (16x - 4y) $\Leftrightarrow$ 4 | (15x+x-4y) $\Leftrightarrow$ 3 | (x- 4y) $\Leftrightarrow$ 3 | (4y - x) $\Leftrightarrow$ y R x $\Rightarrow$ R có tính đối xứng. (0.75 điểm) +$\forall$ x, y,z $\in$ A, xR y $\Leftrightarrow$ 3 | (4x - y) yR z $\Leftrightarrow$ 3 | (4y - z) $\Leftrightarrow$ 3 | (4x -y +4y - z) $\Leftrightarrow$ 3| (4x +3y- z) $\Leftrightarrow$ 3| (4x - z) $\Leftrightarrow$ xR z $\Rightarrow$ R có tính bắc cầu. (0.75 điểm) $\Rightarrow$ R là quan hệ tương đương	**2**
b)	Phân hoạch Z thành các lớp tương đương. $[x]_R$ = {y $\in$ Z : yR x} = {y $\in$ Z : 3 | (4y – x)} (0.25 điểm) $[0]_R$ = {y $\in$ Z : yR 0} = {y $\in$ Z : 3 | (4y - 0) } = {y $\in$ Z : 3 |4y}= {y $\in$ Z : 3 | y }= = { … , -6 , -3 , 0 , 3 , 6 , …} (0.25 điểm) $[1]_R$ = {y $\in$ Z : yR 1} = {y $\in$ Z : 3 | (4y - 1) }= {y $\in$ Z : 3 | (y - 1) }= = {… , -5 , -2 , 1 , 4 , 7 , … } (0.25 điểm) $[2]_R$ = {y $\in$ Z : yR 2} = {y $\in$ Z : 3 | (4y - 2) }= {y $\in$ Z : 3 | (y - 2) } = {…, -4 , -1 , 2 , 5 , 8, … }(0.25 điểm)	**1**
3	Cho hàm bool 4 biến : $f(x,y,z,t) = y\bar{z}(x\bar{z} \vee \bar{x}t) \vee z\bar{t} \vee x\bar{y}t$ a) (0.5 điểm) Dùng biểu đồ Karnaugh bên cạnh để biểu diễn hàm bool trên. b) (2.5 điểm) Xác định các tế bào lớn và các công thức đa thức tối tiểu của	3.5 điểm

<table>
<tr><td></td><td>hàm bool trên bằng biểu đồ Karnaugh.
c) (0.5 điểm) Vẽ mạch logic của hàm f (tối thiểu)</td><td></td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$$f(x,y,z,t) = y\,\bar{z}\,(x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,t) \vee z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,t$$ $$f(x,y,z,t) = x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z}\,t \vee z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,t$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td></td><td>$x\bar{y}$</td><td>xy</td><td>$\bar{x}y$</td><td>$\bar{x}\bar{y}$</td></tr>
<tr><td>$z\bar{t}$</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>zt</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\bar{z}t$</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>$\bar{z}\bar{t}$</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td>0.5 điểm</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Các tế bào lớn
<table><tr>
<td><table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$z\,\bar{t}$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$x\bar{z}\,t$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$y\,\bar{z}\,t$</td>
<td><table><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$x\bar{y}\,z$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$x\bar{y}\,t$</td>
<td><table><tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr></table>$x\,y\,\bar{t}$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr></table>$x\,y\,\bar{z}$</td>
</tr></table>
</td><td>2 điểm</td></tr>
<tr><td></td><td>Hai công thức đa thức tối tiểu :
$$f(x,y,z,t) = z\,\bar{t} \vee y\,\bar{z}\,t \vee \begin{cases} x\bar{y}\,t \vee x\,y\,\bar{z} \\ x\bar{y}\,t \vee x\,y\,\bar{t} \end{cases}$$</td><td>0.5 điểm</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Vẽ mạch logic của hàm f (tối thiểu)</td><td>0.5 điểm</td></tr>
<tr><td></td><td><u>TỔNG ĐIỂM</u></td><td><u>10 điểm</u></td></tr>
</table>

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CUỐI KỲ

Môn thi : CẤU TRÚC RỜI RẠC

Lớp/Lớp học phần : DHTH17TT

Ngày thi : 05/12/2022

Thời gian làm bài : 75 phút

Câu	Nội dung trả lời	Điểm
1	Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất : Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất : $\begin{cases} X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1} + n2^n & \forall n \geq 1 \\ X_0 = 1, X_1 = 0 \end{cases}$	3.5
	Hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất : $X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1} + n2^n$ (1) Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất là : $X_{n+1} - 3X_n + 2X_{n-1} = 0$ (2) Phương trình đặc trưng của (2) là : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ (*) có 2 nghiệm là $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ **(0.5 đ)** Nghiệm tổng quát của (2) là : $X_n = C_1 + C_2 (2)^n$ (3) **(0.5 đ)** Xét $X_n - 3X_n + 2X_{n-1} = n2^n$ (1) Một nghiệm riêng của (1) : $f_n = n2^n$ *có* dạng $\beta^n . P_r(n)$ với $\beta = 2$ và đa thức bậc r = 1 theo n. Do β trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng (*) nên (1’) có một nghiệm riêng dạng : $X_n = n\, 2^n (an + b)$ (4) **(1 đ)** Thế (4) vào (1) ta được :	

<table>
<tr><td></td><td>

$$(n+1)\, 2^{n+1}\,(a(n+1)+b) - 3n\, 2^n\,(an+b) + 2\,(n-1)\, 2^{n-1}\,(a(n-1)+b) = n\, 2^n$$

Cho $n_1 = -1$ và $n_2 = 1$ ta có :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(-a+b) - \frac{4}{4}(-2a+b) = -\frac{1}{2} \\ 2\,.\,4\,(2a+b) - 3\,.\,2\,(a+b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+3b+4a-2b = -1 \\ 16a+8b-6a-6b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 10a+2b=2 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Một nghiệm riêng của (1') là : $X_n = n\, 2^n\left(\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}\right) = n\, 2^{n-1}(n-3)$ (5) **(0.5 đ)**

Từ (3) , (5) ta có nghiệm tổng quát của (1) là :

$$X_n = C_1 + C_2\, 2^n + n\, 2^{n-1}(n-3) \;(6)\; \textbf{(0.5 đ)}$$

Thay điều kiện $X_0 = 1$, $X_1 = 0$ ta có :

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 + 2\,C_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 + 2C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Thế vào (6) ta được nghiệm riêng cần tìm của (1) là :

$$X_n = 2^n + n\, 2^{n-1}(n-3)$$

$$X_n = 2^{n-1}(n^2 - 3n + 2) = 2^{n-1}\,(n-1)\,(n-2) \;(0.5đ)$$

</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Cho quan hệ 2 ngôi **R** trên Z được định nghĩa như sau :
∀ x, y ∈ Z, x **R** y ⇔ 3 | (4y - x) ⇔ (4y - x) chia hết cho 3
a) Chứng minh **R** là quan hệ tương đương.
b) Phân hoạch Z thành các lớp tương đương.

</td><td>3</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>

+ ∀ x ∈ Z, 3 | (4x - x) ⇔ x R x ⇒ R có tính phản xạ. (0.5 điểm)

+∀ x, y ∈ A, x R y ⇔ 3 | (4y - x) ⇔ 3 | (16y – 4x) ⇔ 4 | (15y+y-4x)

⇔ 3 | (y- 4x) ⇔ 3 | (4x - y) ⇔ y R x

</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$\Rightarrow$ R có tính đối xứng. (0.75 điểm)
$+\forall$ x, y,z $\in$ A, xR y $\Leftrightarrow$ 3 | (4y - x)
yR z $\Leftrightarrow$ 3 | (4z - y)
$\Leftrightarrow$ 3 | (4y -x +4z - y) $\Leftrightarrow$ 3| (3y +4z- x) $\Leftrightarrow$ 3| (4z - x) $\Leftrightarrow$ xR z
$\Rightarrow$ R có tính bắc cầu. (0.75 điểm)
$\Rightarrow$ R là quan hệ tương đương</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Phân hoạch Z thành các lớp tương đương.
$[x]_R = \{y \in Z : yR\, x\} = \{y \in Z : 3 \mid (4x - y)\}$ (0.25 điểm)
$[0]_R = \{y \in Z : yR\, 0\} = \{y \in Z : 3 \mid (4 . 0 - y) \} = \{y \in Z : 3 \mid (-y) \} = \{y \in Z : 3 \mid y \} =$
$= \{ \dots , -6 , -3 , 0 , 3 , 6 , \dots\}$ (0.25 điểm)
$[1]_R = \{y \in Z : yR\, 1\} = \{y \in Z : 3 \mid (4 . 1 - y) \} = \{y \in Z : 3 \mid (4 - y) \} = \{y \in Z : 3 \mid (1 - y) \}$
$= \{y \in Z : 3 \mid (y - 1) \} = \{\dots , -5 , -2 , 1 , 4 , 7 , \dots \}$ (0.25 điểm)
$[2]_R = \{y \in Z : yR\, 2\} = \{y \in Z : 3 \mid (4 . 2 - y) \} = \{y \in Z : 3 \mid (8 - y) \} = \{y \in Z : 3 \mid (2 - y) \}$
$= \{y \in Z : 3 \mid (y - 2) \} = \{\dots, -4 , -1 , 2 , 5 , 8, \dots \}$(0.25 điểm)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Cho hàm bool 4 biến :
$f(x,y,z,t) = x\,\bar{y}\,(\bar{y}\,t \vee z\,\bar{t}\,) \vee y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z\,t$
a) (0.5 điểm) Dùng biểu đồ Karnaugh bên cạnh để biểu diễn hàm bool trên.
b) (2.5 điểm) Xác định các tế bào lớn và các công thức đa thức tối tiểu của hàm bool trên bằng biểu đồ Karnaugh.
c) (0.5 điểm) Vẽ mạch logic của hàm f (tối thiểu)</td><td>3.5 điểm</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$f(x,y,z,t) = x\,\bar{y}\,(\bar{y}\,t \vee z\,\bar{t}\,) \vee y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z\,t$
$f(x,y,z,t) = x\,\bar{y}\,t \vee x\,\bar{y}\,z\,\bar{t} \vee y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,z\,t$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td></td><td>$x\bar{y}$</td><td>xy</td><td>$\bar{x}y$</td><td>$\bar{x}\bar{y}$</td></tr>
<tr><td>$z\bar{t}$</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>zt</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>0.5 điểm</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td><table><tr><td>$\bar{z}t$</td><td>1</td><td>**1**</td><td>**1**</td><td></td></tr><tr><td>$\bar{z}\bar{t}$</td><td></td><td>**1**</td><td>**1**</td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Các tế bào lớn
<table><tr>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr></table>$y\,\bar{z}$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$\bar{y}\,z\,t$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$\bar{x}\,z\,t$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$x\,\bar{z}\,t$</td>
<td><table><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$x\bar{y}\,z$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$x\bar{y}\,t$</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>$\bar{x}\,y\,t$</td>
</tr></table></td><td>2 điểm</td></tr>
<tr><td></td><td>Hai công thức đa thức tối tiểu :
$f(x,y,z,t) = y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee \begin{cases} \bar{x}\,z\,t \vee x\,\bar{y}\,t \\ \bar{x}\,z\,t \vee x\,\bar{z}\,t \end{cases}$</td><td>0.5 điểm</td></tr>
<tr><td>**c)**</td><td>Vẽ mạch logic của hàm f (tối thiểu)</td><td>0.5 điểm</td></tr>
<tr><td></td><td>**TỔNG ĐIỂM**</td><td>**10 điểm**</td></tr>
</table>

ÔN TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hàm bool 4 biến :

$$f(x, y, z, t) = y\,\bar{z}\,(x\,\bar{z} \vee \bar{x}\,t) \vee z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,t$$

a) (0.5 điểm) Dùng biểu đồ Karnaugh bên cạnh để biểu diễn hàm bool trên.

b) (2.5 điểm) Xác định các tế bào lớn và các công thức đa thức tối tiểu của hàm bool trên bằng biểu đồ Karnaugh.

c) (0.5 điểm) Vẽ mạch logic của hàm f (tối thiểu)

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$			$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$	**1**	**1**	**1**	**1**		$z\bar{t}$	1	2	3	4
zt	**1**					zt	5	6	7	8
$\bar{z}t$	**1**	**1**	**1**			$\bar{z}t$	9	10	11	12
$\bar{z}\bar{t}$		**1**				$\bar{z}\bar{t}$	13	14	15	16

Ta có: f(x,y,z,t) = x.y.z' v x'yz't v zt' v xy't

Xác định TBL (1 cụm gồm 1, 2, 4 hoặc 8 ô liên tiếp, kề nhau sao cho chúng không nằm trong TBL nào khác, trong đó đầu cuối kề nhau).

zt': 1, 2, 3, 4 xy'z: 1, 5 xy't: 5, 9

xz't: 9, 10 yz't: 10, 11 xyz': 10, 14 xyt': 2, 14.

Các TBL nhất thiết phải chọn (chứa ô của riêng nó):

zt' vì có chứa số 3 (của riêng nó), yz't chứa số 11

Do đó, ta có 2 phủ tối tiểu là zt' v yz't và TBL đã phủ được 1, 2, 3, 4, 10, 11; còn 3 ô chưa được phủ là: 5, 9, 14.

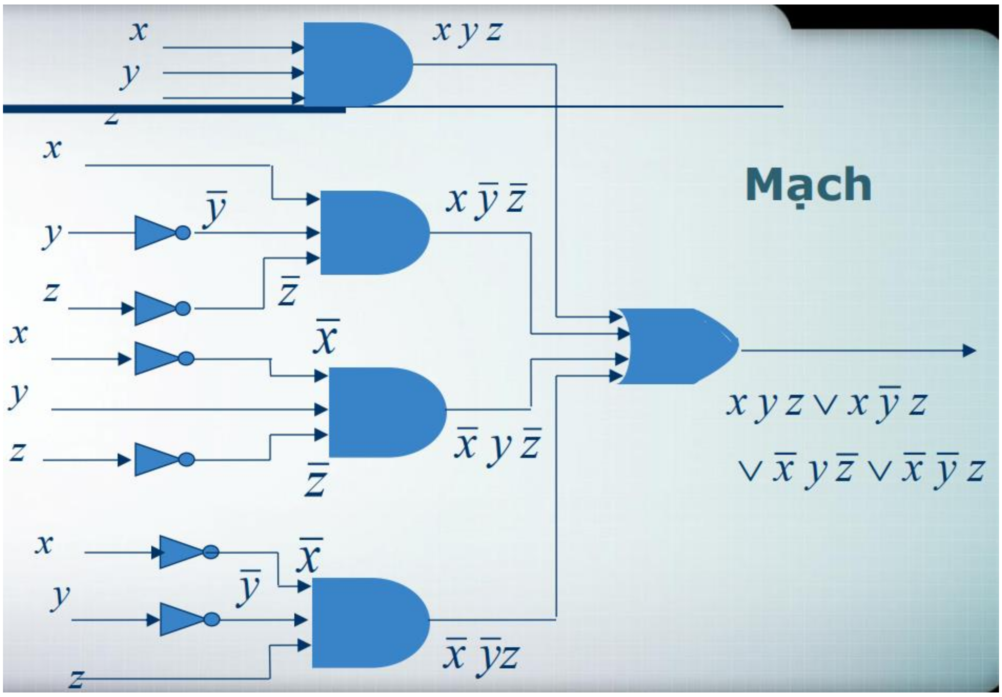
Ta sẽ kiểm tra xem còn những TBL nào cần lấy thêm để phủ được 3 còn lại.

xy't v xyz' hoặc xy't v xyt'.

Vậy nên công thức đã thức tối tiểu là:

zt' v yz't v xy't v xyz' hoặc

zt' v yz't v xy't v xyt'.



Bài 2. Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1} + 2^n + 2n \quad \forall n \geq 1 \\ X_0 = 3, X_1 = 4 \end{cases}$$

PT đặc trưng là t^2 = 3t – 2 → t = 1 hoặc t = 2.

Nghiệm chung là: A.1^n + B.2^n → A + B.2^n.

Nghiệm riêng (1) ứng với 2^n (công thức P(n).d^n → P(n) = 1 và d = 2):

n.C.2^n (vì bị trùng 1 lần).

Thay vào (chỉ quan tâm nghiệm riêng này):

(n+1).C.2^(n+1) = 3.n.C.2^n – 2.(n-1).C.2^(n-1) + 2^n

⇔ (n+1).C.2 = 3n.C – (n-1).C + 1.

Thay n=0 → 2C = C+1 ⇔ C = 1.

Nghiệm riêng (2) ứng với 2n (công thức P(n).d^n → P(n) = 2n và d = 1):

n(Cn + D).

Thay lên trên và giải tiếp (làm trong 5p)

(n+1).[C(n+1)+D] = 3n.(Cn+D) – 2(n-1).[C(n-1)+D] + 2n.

Thay n=-1: 0 = -3(-C+D) + 4(-2D+D) – 2.

Thay n=0: ...

Giải được C = -1, D = -3. Vì thế CTTQ sẽ có dạng:

Xn = A + B.2^n + n.2^n + n(-n-3)

BT tương tự: Giải hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1} + n2^n & \forall n \geq 1 \\ X_0 = 1, X_1 = 0 \end{cases}$$

Cho biết dạng của nghiệm riêng?

P(n).d^n → P(n) = n và d = 2.

PT đặc trưng cũng có nghiệm là 2 → nghiệm riêng sẽ là: n.(Cn+D).2^n.

Quan hệ thứ tự:

Xét tập hợp $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ và định nghĩa quan hệ hai ngôi $x\ R\ y$ nếu như x chia hết cho y.

a) Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự.

b) Vẽ biểu đồ Hasse cho tập A dựa trên quan hệ R. Từ đó chỉ ra (các) phần tử tối đại và tối tiểu của A.

c) Chứng minh rằng A có phần tử nhỏ nhất nhưng không có phần tử lớn nhất. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 2023 có thể thêm vào A để A có phần tử lớn nhất?

//a: thỏa mãn 3 điều kiện: phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

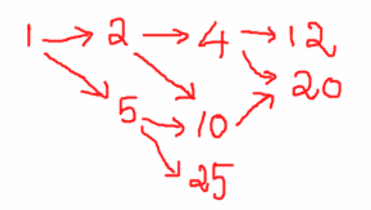
//b: vẽ mũi tên từ phần tử này sang trội trực tiếp của nó:

1 → 2, 1 → 5, 2 → 4, 4 → 12, 4 → 20
5 → 10. 5 → 25, 10 → 20.

Tối đại: 20, 12, 25.

Tối tiểu: 1

//c: nhỏ nhất là 1, để thêm phần tử x là lớn nhất thì cần x chia hết cho 12, 20, 25 → x = 300 và các bội số của x.



Bài 4. Cho chuỗi ký tự s = "daihoccongnghiep" và tập hợp A = các chuỗi con có 2 ký tự liên tiếp lấy từ s. Xét quan hệ thứ tự R trên A, trong đó: a R b ⇔ a có thứ tự từ điển nhỏ hơn hoặc bằng b.

a) Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự.

b) Vẽ biểu đồ Hasse và cho biết phần tử tối đại, tối tiểu. Nhận xét về đặc điểm của biểu đồ này?

A = {'da', 'ai', 'ih', 'ho', 'oc', 'cc', ''co', 'on, 'ng, 'gh', 'hi', 'ie', 'ep'}

Quan hệ từ điển là quan hệ thứ tự, thậm chí là thứ tự toàn phần do mỗi cặp từ đều so sánh được với nhau.

- Phản xạ: với mọi s thuộc A thì s R s.
- Phản xứng: nếu s1, s2 thuộc A thì s1 R s2 và s2 R s1 thì s1 = s2.
- Bắc cầu: nếu s1, s2, s3 thuộc A mà s1 R s2 và s2 R s3 thì s1 R s3.

Vẽ biểu đồ ra:

‘ai’ → ‘cc’ → ‘co’ → ... → ‘on’.

Biểu đồ này có đặc điểm là 1 dãy liên tiếp các đỉnh, không rẽ nhánh vì đây là quan hệ thứ tự toàn phần.

- BT thường kỳ cuối: làm đến 12h.
- Trong tuần sẽ có bảng điểm tổng hợp → gửi lên group zalo để hoàn tất bảng điểm.

CẤU TRÚC RỜI RẠC – BUỔI 7 (28/9)

1) Nhắc lại về khái niệm quan hệ.

Quan hệ (relation): giữa 2 tập hợp A, B → xét quan hệ giữa các phần tử trong A và B.

VD: A = tập hợp các SV, B = tập hợp các GV → quan hệ = "dạy và học". Chọn SV a trong tập A và GV b trong tập B, khi đó nếu "a có học b" thì ký hiệu a R b.

Số mối quan hệ tối đa là: |A| x |B|.

Đôi khi, ta còn xét quan hệ trên cùng 1 tập hợp.

VD: A = tập hợp các SV của IUH → quan hệ "học cùng lớp", "quen biết nhau".

VD: X = {1,2,3,4,5}, liệt kê các mối quan hệ a R b với a, b thuộc X mà a+b là số nguyên tố; chú ý khi xét cặp số trong quan hệ thì phải xét cả (a, b) lẫn (b, a).

→ (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2).

//Suy cho cùng: quan hệ được hiểu là một tính chất xem trên tập hợp nào đó, ta có thể định nghĩa một quan hệ theo các cách:

- Mô tả tính chất.

- Liệt kê.

- Vẽ bảng ô vuông, đánh số 0, 1 cho biết 2 phần tử i, j có quan hệ với nhau không.

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0

Số các số 1 bên trong bảng = số mối quan hệ.

Một quan hệ sẽ có một số tính chất:

- Phản xạ: a R a với mọi a thuộc tập hợp đã cho.
- Đối xứng: nếu có a R b thì cũng b R a.
- Bắc cầu: nếu có a R b và b R c thì cũng có a R c.

VD: quan hệ R = "cùng họ":

- a cùng họ với chính a → R có tính phản xạ.
- a cùng họ với b thì b cùng họ với a → R có tính đối xứng.
- a cùng họ với b, và b cùng họ với c thì a cũng cùng họ với c → R có tính bắc cầu.

VD: quay trở lại ví dụ về tổng là SNT: có đối xứng, thiếu phản xạ, thiếu bắc cầu.

2) Quan hệ tương đương:

Một quan hệ R thỏa mãn đồng thời cả 3 điều kiện trên → quan hệ tương đương.

VD: quan hệ R = "cùng lớp", "đồng hương", "thi bằng điểm", ...

Để dễ kiểm soát, người ta định nghĩa thêm lớp tương đương, phân lớp ra.

Quan hệ cùng họ → lớp tương đương sẽ là họ Nguyễn, họ Lê, họ Trần, ... ký hiệu như sau: xét SV "Hoàng Thanh Tú" có họ Hoàng →

["Hoàng Thanh Tú"]$_R$ = {các SV có cùng họ với bạn SV này}.

VD: xét tập hợp A = {1,2,3,...,100} và R là quan hệ a và b có cùng chữ số tận cùng.

a) Cmr R là quan hệ tương đương.

b) Liệt kê các phần tử của lớp tương đương $[23]_R$.

Giải.

a) Ta kiểm tra được các tính chất:

- a cùng chữ số tận cùng với chính số a → phản xạ.
- Nếu a có cùng chữ số tận cùng với b thì b cũng có cùng chữ số tận cùng với a → đối xứng.
- Nếu a cùng chữ số tận cùng với b, còn b cùng chữ số tận cùng với c thì a có cùng chữ số tận cùng với c → bắc cầu.

Do đó, đây là quan hệ tương đương.

b) Các phần tử trong lớp tương đương đã cho là {3, 13, 23, ..., 93}.

Ta thấy rằng 2 số có cùng chữ số tận cùng thì có cùng số dư khi chia cho 10. Một cách tổng quát, ta gọi 2 số x, y cùng số dư khi chia cho số m là "x đồng dư y modulo m", đọc modulo ngắn gọn là mod (mốt).

Chẳng hạn số 8 chia 5 dư 3, và 2023 cũng chia 5 dư 3 nên 8 và 2023 đồng dư với nhau theo modulo 5.

VD: xét A là tập hợp các số nguyên **Z**. Với x, y thuộc A, định nghĩa x R y ⇔ x – y chia hết cho 8.

a) Cmr R là quan hệ tương đương.

b) Liệt kê 5 phần tử là số nguyên < 0 thuộc lớp tương đương $[2023]_R$.

Giải.

a) Kiểm tra 3 tính chất của quan hệ tương đương đối với quan hệ R:

- Tính phản xạ: x R x ⇔ x – x = 0 chia hết cho 8, đúng.

- Tính đối xứng: x R y ⇔ x-y chia hết cho 8 ⇔ y-x cũng chia hết cho 8 ⇔ y R x.

Hoặc có thể trình bày là: x R y ⇔ x – y = 8k với k là số nguyên, do đó y-x = -8x nên cũng chia hết cho 8.

- Tính bắc cầu: x R y và y R x thì x – y = 8k và y – z = 8h với k, h là các số nguyên. Do đó: x – z = (x-y)+(y-z) = 8k+8h = 8(k+h) cũng chia hết cho 8, do đó x R z.

Có quan hệ tương đương.

b) Chú ý: 2023 R 7, số âm chia 8 dư 7 → đầu tiên là số -1, tiếp theo là -9, -17, -25, -33, ... đây là các số thuộc cùng lớp tương đương cần tìm.

//ta có thể đặt vấn đề: đếm số phần tử của lớp tương đương.

VD: X = {1,2,...,50} và quan hệ R thỏa mãn a R b ⇔ a – b chia hết cho 11. Hỏi có phần tử thuộc lớp tương đương của $[50]_R$?

Tiếp theo, ta xét thêm một tính chất "phản xứng" → a R b và b R a cùng lúc xảy ra khi a=b; còn nếu a khác b thì có tối đa 1 trong 2 mối quan hệ được xảy ra.

VD: R = "điểm cao hơn", "mập hơn", ... các quan hệ có tính chất so sánh thì phản xứng.

Chú ý: R có phản xứng thì R không có đối xứng.

VD: với mỗi quan hệ sau đây, kiểm tra xem nó có các tính chất nào trong 4 tính chất: phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu?

1) R1 = {(a, b) với a, b là số thực| a < b}.

2) R2 = {(a, b) với a, b là số thực| a^2 = b^2}.

3) R3 = {(a, b) với a, b là hai SV| a và b học chung nhau đúng 2 môn}.

4) R4 = {(a, b) với a, b là hai SV| a có chiều cao khác b}.

5) R5 = {(a, b) với a, b là số thực| a – b nguyên}.

6) R6 = {(a, b) với a, b là hai SV| a có chiều cao không quá chiều cao của b}.

7) R7 = {(a, b) với a, b là hai số nguyên dương| a + b khác 5}.

	Phản xạ	Đối xứng	Phản xứng	Bắc cầu
R1	không	không	có	có
R2	có	có	không	có
R3	không	có	không	không (*)
R4	không	có	không	không
R5	có	có	không	có
R6	có	không	có	có
R7	có	có	không	không

(*) chẳng hạn a học chung b môn {X, Y} và b học chung c môn {Y, Z}.

7) Giải thích:

a+a = 2a là số chẵn nên luôn khác 5;

1+2 khác 5 và 2+4 khác 5 nhưng 1+4=5.

Một mối quan hệ R thiếu đi một số tính chất → có thể bổ sung thêm để có được tính chất đó, những quan hệ bổ sung thêm được gọi "bao đóng" (closure) R ứng với tính chất đó.

VD: X = {1,2,3,4,5} và R = {(1,1), (1, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4), (3, 3), (5,5)} trên X.

- Phản xạ: thiếu cặp (2,2) → bổ sung thêm cặp này thì được nên (2,2) thuộc bao đóng phản xạ của R.
- Đối xứng: bao đóng đối xứng sẽ gồm các cặp quan hệ (3, 1), (4, 3), (2, 4).

Không xét bao đóng phản xứng, nhưng vẫn có bao đóng bắc cầu; tuy nhiên, việc xác định này khó, chỉ thực hiện được (thủ công) nếu kích thước của X là tương đối nhỏ; tổng quát, để giải quyết đầy đủ thì cần dùng thuật toán Floyd của lý thuyết đồ thị.

Ở bài này, ta chỉ ra được bao đóng bắc cầu gồm: (1,4), (1,2).

Trở lại việc biểu diễn quan hệ R bằng ma trận nhị phân:

ô (i,j) ở hàng i cột j điền số 1 ⇔ i R j; ngược lại điền số 0.

	a	b	c
a		1	
b	1		
c			

- R cũng đối xứng ⇔ Ma trận này đối xứng.
- R phản xạ ⇔ Ma trận có đường chéo chính điền toàn bộ 1.
- R phản xứng ⇔ 2 ô đối xứng nhau qua đường chéo không thể cùng lúc là 1 (một trong hai là 0, hoặc cả hai đều là 0).

Ngoài ra, số lượng số 1 trên ma trận thì bằng với số lượng quan hệ trong R.

3) Quan hệ có thứ tự.

Quan hệ R có các tính chất: phản xạ, phản xứng và bắc cầu → quan hệ thứ tự.

VD: a R b ⇔ "a có điểm thi <= điểm của b", hoặc "chiều cao", "cân nặng".

- Phản xạ: a R a ⇔ a có điểm thi <= điểm của a, đúng.

- Phản xứng: giả sử có a R b và b R a ⇔ a có điểm thi <= b và b có điểm thi <= a, chỉ xảy ra khi a = b.

- Bắc cầu: giả sử có a R b và b R c ⇔ điểm a <= điểm b <= điểm c, đúng.

VD: xét A là một tập hợp các số nguyên với số lượng tùy ý. Gọi R là quan hệ trên các tập như thế sao cho "X R Y ⇔ X là tập con của Y" → c/m R là quan hệ thứ tự.

- Phản xạ: X R X đúng vì X là con của chính nó.
- Phản xứng: giả sử có X R Y và Y R X ⇔ X là tập con của Y mà Y cũng là tập con X, điều này chỉ xảy ra khi X = Y.
- Bắc cầu: giả sử có X R Y và Y R Z ⇔ X là con Y, và Y là con Z nên kết hợp lại rõ ràng có X là con Z.

VD: thứ tự từ điển → hai từ bất kỳ luôn so sánh được với nhau, nguyên tắc:

S = s1 s2 s3 ... sk

R = r1 r2 r3 ... rk (nếu từ nào ngắn hơn, ta coi các ký tự phía sau nó là trống, và quy ước ký tự trống này sẽ nhỏ hơn tất cả ký tự khác).

Đi từ bên trái sang phải, nếu gặp vị trí đầu tiên mà si khác ri:

Nếu si > ri → S > R; còn nếu si < ri → S < R.

VD: S = "VU", R = "VUI" → S < R; S = "ABCDEF" và R = "XYZ" → S < R.

SỬA ĐỀ GIỮA KỲ

Câu 1. *(1.0 điểm)* Trong lớp Cấu trúc rời rạc KHDL18A, gọi A là tập hợp các sinh viên của lớp còn B là tập hợp các bài kiểm tra thường kỳ. Xét vị từ: $P(x, y) =$ "x không làm y". Hãy chuyển mệnh đề sau thành một câu phát biểu cụ thể:

$$\exists x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2, \forall y \in B: \; P(x_1, y) \wedge P(x_2, y).$$

Tồn tại hai sinh viên (khác nhau) của lớp CTRR không làm mọi bài kiểm tra thường kỳ.

Câu 2. *(2.0 điểm)* Cho các biến logic p, q, r, s. Trình bày các bước chứng minh cho sơ đồ suy diễn bên dưới (*mỗi bước cần mô tả rõ quy tắc nào được áp dụng*):

$$\begin{array}{l} \overline{s} \to r \\ q \\ s \to \overline{q} \\ \underline{(r \vee s) \to p} \\ \therefore p \end{array}$$

(1) q (giả thiết)

(2) s → q' (giả thiết)

(3) s' (quy tắc phủ định)

(4) s' → r (giả thiết)

(5) r (quy tắc khẳng định)

(6) r v s (tính chất của phép tuyển)

(7) (r v s) → p (giả thiết)

(8) p (quy tắc khẳng định)

Cách khác: s' → r (giả thiết) có s v r, từ đó có ngay p.

Câu 3. *(2.5 điểm)* Cho biểu thức logic sau đây

$$T = (\overline{p} \vee r) \rightarrow (p \wedge q).$$

⇔ (p’ v r)’ v (p ^ q)

⇔ (p ^ r’) v (p ^ q)

⇔ p ^ (r’ v q).

p ^ T = T

a) Hãy rút gọn T (*kết quả chỉ chứa tối đa 1 dấu ngoặc*).

b) Lập bảng chân trị cho T (*sử dụng biểu thức gốc hay biểu thức đã rút gọn đều được*) và cho biết có bao nhiêu trường hợp mà $p \wedge T = 0$? → 5 dòng.

Câu 4. *(4.0 điểm)* Gọi **A** là tên tỉnh thành của anh / chị, còn **B** là số điện thoại của anh / chị (*SV thay các giá trị này ứng với thông tin cá nhân*). *VD:* **A** là BENTRE và **B** là 0357577422. Giả sử cần đặt mật khẩu cho trang web lms bằng cách sử dụng các ký tự có trong **A** và **B**. Tính số cách đặt mật khẩu trong mỗi trường hợp sau: (*SV chọn giải BỐN trong NĂM ý*)

a) Mật khẩu là hoán vị các chữ cái trong **A**.

Hoán vị lặp: 6! / 2!

b) Mật khẩu có 7 ký tự giống hệt nhau với các ký tự được lấy từ **A** và **B.**

Trong tên: {B, E, N, T, R}, trong sđt: {**0, 2, 3, 4, 5, 7**} → có 11 loại ký tự khác nhau.

Đáp số là 11.

c) Mật khẩu là số nguyên có 8 chữ số, không nhất thiết phân biệt lấy từ **B** và số đó chia hết cho 5.

abcdefgh → là mật khẩu thỏa mãn. Ta có: a khác 0, h chia hết cho 5 → h thuộc {0,5}.

Số a có 5 cách chọn, còn 6 số ở giữa chọn tùy ý nên có 6^6.

Số h có 2 cách chọn → 5.6^6.2

d) Mật khẩu độ dài 9 và chỉ chứa đúng 2 chữ cái phân biệt lấy từ **A**, *VD: BBBBBTTTT.*

Trước hết, chọn 2 trong 5 chữ cái → 5C2 = 10 cách.

Cách 1: chia 7 trường hợp, chữ thứ nhất xuất hiện 1, 2, ..., 7 lần → hoán vị lặp cho từng lần (dùng tổ hợp).

Cách 2: chọn tùy ý, mỗi vị trí có 2 cách nên có 2^9 cách, trừ hai trường hợp vi phạm (toàn chữ thứ 1, hoặc toàn chữ thứ 2) → 2^9 – 2 = 510.

Kq = 10 * 510.

e) Mật khẩu có độ dài 10, chứa đúng 3 chữ cái phân biệt trong **A**, còn lại là các chữ số không nhất thiết phân biệt trong **B** sao cho không có chữ cái nào đứng cạnh nhau, *VD: 2E00N00T77.*

Chọn 3 chữ cái phân biệt trong A → 5C3 = 10.

Có 7 chữ số → có 6^7 cách chọn → *******, với 7 chữ số này, ta có tất cả 8 khoảng trống, ta chọn ra 3 khoảng để đặt vào 3 chữ cái, có 8C3.

Hoán vị cho 3 chữ cái đó → 3!

Đáp số: 10 * 8C3 * 3! * 6^7.

Câu 5. *(0.5 điểm)* Trong HAI chọn MỘT:

a) Đếm số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ sao cho có một số bằng tổng của ba số còn lại.

Chọn số lớn nhất (bằng tổng 3 số kia) → có 4 cách chọn.

Tổng của 3 số còn lại là 10 → quy về đếm số nghiệm dương của a+b+c=10 → 9C2.

Kq = 4 * 9C2 = 144.

b) Trong hộp có 25 viên bi, mỗi viên được tô bởi một trong các màu xanh / đỏ / vàng và có 4 mức trọng lượng khác nhau. Chứng minh rằng có 3 viên bi vừa cùng màu vừa nặng bằng nhau.

Ta dùng nguyên lý Dirichlet 2 lần.

Từ 25 viên → 25/3 và làm tròn lên: 9 viên cùng màu. Tiếp tục trong 9 viên → 9/4 và làm tròn lên: 3 viên tiếp tục cùng cân nặng.

Kế hoạch 6 tuần tới (tính cả tuần này):

- Tuần 10: sửa bài GK + tiếp về quan hệ có thứ tự.
- Tuần 11: kết thúc chương quan hệ + thường kỳ lần 3 (trắc nghiệm online).
- Tuần 12: hệ thức đệ quy tuyến tính cấp 1, 2, 3.
- Tuần 13: ôn tập hệ thức đệ quy + chương cuối về Đại số Bool.
- Tuần 14: làm BT chương cuối + thường kỳ lần 4 (trắc nghiệm online).
- Tuần 15: ôn thi cuối kỳ (quan hệ + hệ thức đệ quy + ĐS Bool).

BUỔI 10 (NGÀY 19/10/2023)

3) Quan hệ có thứ tự (tiếp)

Nhắc quan hệ R có các tính chất: phản xạ, phản xứng và bắc cầu → quan hệ thứ tự.

VD: a R b ⇔ "a có điểm thi <= điểm của b", hoặc "chiều cao", "cân nặng".

- Phản xạ: a R a ⇔ a có điểm thi <= điểm của a, đúng.
- Phản xứng: giả sử có a R b và b R a ⇔ a có điểm thi <= b và b có điểm thi <= a, chỉ xảy ra khi a = b.
- Bắc cầu: giả sử có a R b và b R c ⇔ điểm a <= điểm b <= điểm c, đúng.

Ta thấy quan hệ có thứ tự: tập hợp và tiêu chí để so sánh → (S, ≺), trong đó ≺ là tiêu chí so sánh, có thể là: "nhỏ hơn hoặc bằng", "chia hết", "thứ tự từ điển", "tập con", ...

a ≺ b → b trội hơn a.

- Phần tử lớn nhất → trội hơn tất cả các phần tử khác → max(S).
- Phần tử nhỏ nhất → các phần tử khác thì trội hơn nó → min(S).

Trong một tập hợp với tiêu chí so sánh ≺ cho trước, các phần tử như trên có thể có hoặc không, nhưng nếu có thì là duy nhất.

VD 1: S = {-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5} và quan hệ ≺ là "bé hơn hoặc bằng".

Phần tử lớn nhất là max(S) = 5, phần tử nhỏ nhất là min(S) = -5.

VD 2: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} và quan hệ ≺ là "chia hết".

Phần tử lớn nhất là không có!

Phần tử nhỏ nhất là 1.

VD 3: S là tập hợp tất cả các tập con của {1,2,3,4,5} và quan hệ ≺ là "chứa".

max(S) = {1,2,3,4,5}.

min(S) = rỗng.

Một tập hợp S có xét thứ tự trên đó và tồn tại phần tử nhỏ nhất → sắp thứ tự tốt.

Tập hợp số nguyên dương (với phép so sánh lớn hơn, bé hơn) có 1 là nhỏ nhất → sắp thứ tự tốt; nhưng nếu xét tập số nguyên → không sắp thứ tự tốt.

Nếu với tiêu chí so sánh a ≺ b, ta vẽ một mũi tên đi từ a đến b (coi mỗi số trong tập hợp S là một điểm biểu diễn trên mặt phẳng) → khi đó, ta có biểu đồ Hasse (đồ thị có hướng):

+ Đỉnh nào có mũi tên hướng ra, nhưng không có hướng vào → điểm tối tiểu ("yếu" hơn so với vài số khác, nhưng không "trội" hơn ai hết).

+ Đỉnh nào có mũi tên hướng vào, nhưng không có hướng ra → điểm tối đại ("trội" hơn so với vài số khác, nhưng không "yếu" hơn ai hết).

Trong một tập S, có thể có 1 hoặc nhiều điểm tối tiểu & tối đại.

VD: xét tập hợp A = {2, 4, 5, 10, 12, 20, 25} và mối quan hệ "chia hết".

x R y ⇔ x chia hết cho y.

a) Cmr đây là quan hệ thứ tự.

Phản xạ: a R a ⇔ a chia hết cho a, đúng.

Phản xứng: giả sử có a R b và b R a ⇔ a chia hết cho b và b chia hết cho a ⇔ a = b.

Bắc cầu: giả sử có a R b và b R c ⇔ a chia hết cho b và b chia hết cho c nên có a chia hết cho c ⇔ a R c.

Do có 3 tiêu chí này nên đây là quan hệ thứ tự.

b) Tìm (các) phần tử tối đại & tối tiểu của A.

Tối đại: 12, 20, 25.

Tối tiểu: 2, 5.

Ta thử thêm 1 phần tử vừa tối đại, vừa tối tiểu: 7, 11, 13, ...

c) Hỏi A có phần tử lớn nhất & phần tử nhỏ nhất hay không? Nếu chưa có, hãy thử bổ sung thêm.

Ta thấy không có số nào chia hết cho tất cả các số còn lại → ta có thêm số 300 = max(A).

Tương tự cũng không có số nào bị chia hết bởi tất cả các số còn lại → thêm 1 = min(A).

Ta thấy với một quan hệ thứ tự và 2 phần tử bất kỳ trong tập nguồn, ta có thể so sánh được hoặc không.

+ Nếu luôn so sánh → quan hệ thứ tự toàn phần (poset).

+ Nếu không → quan hệ bán phần (partially ordering).

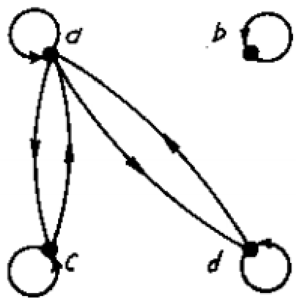
VD: quan hệ so sánh giá trị ">=, <=", hoặc thứ tự từ điển, ... là quan hệ thứ tự toàn phần.

VD: quan hệ chia hết, tập con, ... là quan hệ thứ tự bán phần.

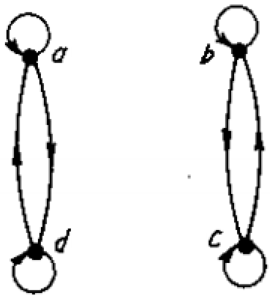
BT rèn luyện.

Trong các Bài tập từ 11 – 13 hãy xác định xem quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng cho dưới đây có là quan hệ tương đương không ?

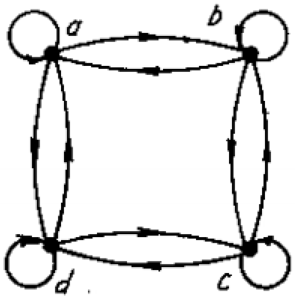
11.



12.



13.



a R b ⇔ có mũi tên đi từ a đến b.

11) có đủ tính chất: phản xạ, đối xứng nhưng chưa có bắc cầu.

12) có đủ 3 tính chất → quan hệ tương đương.

13) vẫn thiếu tính chất bắc cầu.

14. Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận cho dưới đây có là một quan hệ tương đương không ?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) không có tính đối xứng;

b, c) có đủ cả 3.

1. Which of these relations on $\{0, 1, 2, 3\}$ are partial orderings? Determine the properties of a partial ordering that the others lack.

a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

b) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

a) Có đủ hết cả 3 tính chất.

b) Ta có: (2, 3) và (3, 2) là hai số khác nhau nhưng có quan hệ → vi phạm tính phản xứng.

Có (3, 2) và (2, 0) phải có (3, 0) nhưng ở đây chưa có → không có tính bắc cầu.

c) Đủ cả 3 tính chất.

d) Có phản xạ & phản xứng & bắc cầu.

e) Có phản xạ, nhưng lại chứa: (0, 2) & (2, 0) → thiếu phản xứng, có bắc cầu.

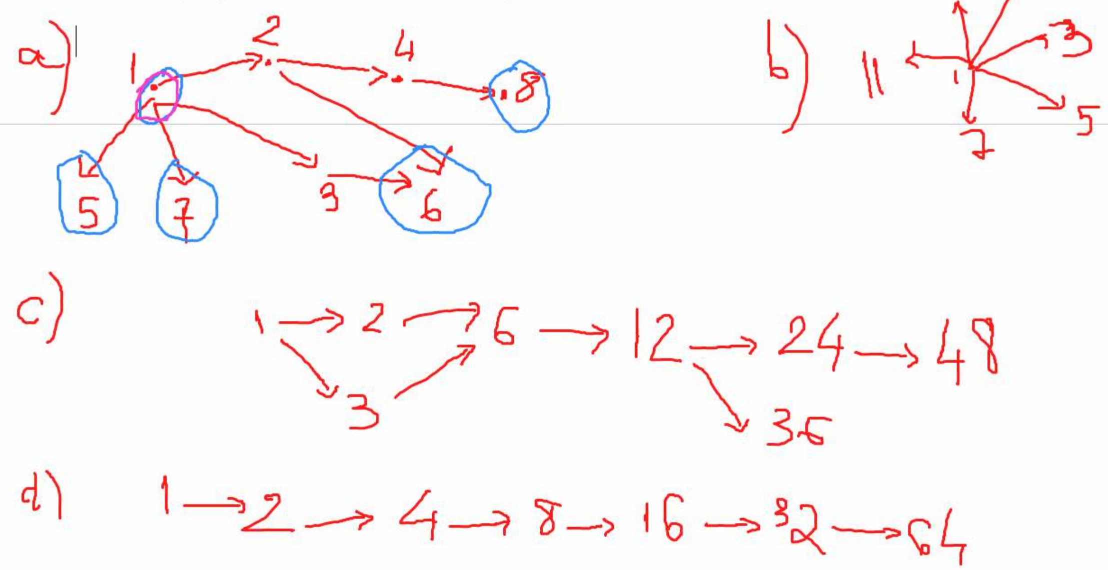
Quy tắc vẽ mũi tên: vẽ mũi tên từ a → b nếu như không tìm số c mà: a < c < b.

23. Draw the Hasse diagram for divisibility on the set

a) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. **b)** {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13}.

c) {1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48}.

d) {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}.



BUỔI 11 (NGÀY 26/10)

Ôn tập chương 3 + sửa các BT, đề thi.

Quan hệ 2 ngôi: giữa 2 phần tử → 2 phần tử có thể thuộc cùng 1 tập, hoặc lấy giữa 2 tập.

Quan hệ R trên A → a1 R a2 với a1, a2 thuộc A; quan hệ R giữa A và B → a R b với a, b lần lượt thuộc A, B.

Biểu diễn mối quan hệ:

+ Mô tả: các SV đồng hương, SV có cùng họ, các số đồng dư với nhau modulo 5, ...

+ Bằng ma trận: phần tử i, j có quan hệ ⇔ ô (i, j) điền 1; ngược lại điền 0.

+ Bằng sơ đồ.

+ Bằng cách liệt kê: xét tập A = {1,2,3,4} và các quan hệ

R = {(1,2), (1,1), (3,3), (3,4), (2,4), (4,2)}.

Các tính chất của quan hệ (xét trên 1 tập):

+ Tính phản xạ: a R a với mọi a thuộc A → bao đóng phản xạ: thêm các quan hệ để đủ tính chất đó. VD: thiếu (2,2) và (4,4).

+ Tính đối xứng: a R b ⇔ b R a. VD: thiếu (2,1) và (4,3), cần thêm cho đủ.

+ Tính bắc cầu: a R b và b R c => a R c. Vẫn có bao đóng bắc cầu, nhưng khó tìm, phải dùng các thuật toán lý thuyết đồ thị mới tiếp cận được.

+ Tính phản xứng: a R b thì không được có b R a; trong VD trên: có (2,4) và (4,2) đồng thời nên không được.

Xét 2 loại quan hệ quan trọng:

1. Quan hệ tương đương: phản xạ, bắc cầu, đối xứng → kiểm tra 3 tính chất.

BT: Cho A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Trên A xác định quan hệ như sau:

a,b thuộc A và a R b ⇔ a+b là số chẵn.

a. Chứng minh rằng R là quan hệ tương đương.

- Phản xạ: với a thuộc A, ta có a R a ⇔ a + a = 2a là số chẵn, đúng.
- Đối xứng: với a, b thuộc A, ta có a R b ⇔ a + b chẵn ⇔ b + a chẵn ⇔ b R a, đúng.
- Bắc cầu: với a, b, c thuộc A, ta có a R b và b R c ⇔ a + b và b + c chẵn, khi đó thì cộng lại: (a+b) + (b+c) = a + 2b + c chẵn nên a + c chẵn ⇔ a R c.

Do đó, R là quan hệ tương đương.

b. Tìm lớp tương đương ứng với 6.

Ta có: x thuộc A mà x, 6 cùng lớp tương đương ⇔ x R 6 ⇔ x + 6 là số chẵn. Ta liệt kê được các số: $[R]_6$ = {0,2,4,6,8}.

2. Quan hệ thứ tự: phản xạ, bắc cầu, phản xứng → tương tự trên.

Quan hệ thứ tự có liên quan đến việc sắp xếp các phần tử: so sánh thứ hạng của SV trong lớp, hoặc xếp từ vào từ điển, ...

Ký hiệu: a $\prec$ b cho biết b trội hơn a.

- Thứ tự toàn phần: giữa 2 phần tử, ta luôn so sánh được.
- Thứ tự bán phần: có thể không so sánh được.

Biểu diễn quan hệ thứ tự bằng biểu đồ Hasse: có mũi tên nối từ a → b nếu như b trội trực tiếp của a (giữa a, b không có phần tử khác chèn vào).

Một số khái niệm:

+ Tối đại: không là điểm đầu của mũi tên nào, nghĩa là không ai trội hơn nó.

+ Tối tiểu: không là điểm cuối của mũi tên nào, nghĩa là không trội hơn số khác.

+ Lớn nhất: trội hơn tất cả số khác.

+ Nhỏ nhất: tất cả số khác trội hơn nó.

VD: Xét tập hợp $A = \{1,2,4,5,10,12,20,25\}$ và định nghĩa quan hệ hai ngôi $x\ R\ y$ nếu như x chia hết cho y → x trội hơn y → y $\prec$ x.

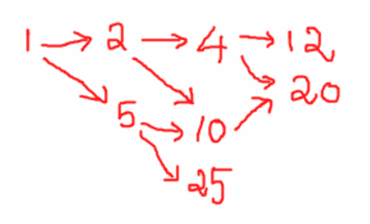
a) Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự.

- Phản xạ: với mọi a thì a R a ⇔ a chia hết cho a, đúng.

- Phản xứng: với a, b thuộc A thì a R b và b R a ⇔ a chia hết cho b và b chia hết cho a, chỉ xảy ra khi a = b.

- Bắc cầu: với a, b, c thuộc A thì a R b và b R c ⇔ a chia hết cho b và b chia hết cho c => a chia hết cho c, do đó a R c.

b) Vẽ biểu đồ Hasse cho tập A dựa trên quan hệ R. Từ đó chỉ ra (các) phần tử tối đại và tối tiểu của A. $A = \{1,2,4,5,10,12,20,25\}$



Khi ký hiệu: ta viết 2 R 1 (vì 2 chia hết cho 1).

- Tối đại: 12, 20, 25.
- Tối tiểu: 1
- Lớn nhất: không có, do không có phần tử nào chia hết cho tất cả các số (khi đã có lớn nhất thì đó cũng là phần tử tối đại duy nhất).
- Nhỏ nhất: 1.

c) Chứng minh A có phần tử nhỏ nhất nhưng không có phần tử lớn nhất. Hỏi có mấy số nguyên dương nhỏ hơn 2023 có thể thêm vào A để A có phần tử lớn nhất?

Số x có thể làm phần tử lớn nhất → ta cần có x chia hết cho 12, 20, 25. Ta cần có x là bội chung của cả 3 số (viết 12 = 3.4, 20 = 4.5, 25 = 5.5) → 3.4.5.5 = 300, 600, 900, 1200, 1500, 1800. Có tất cả 6 số thỏa mãn.

Sửa các đề thi các năm.

5. (*DHTH 17TT*)

Cho quan hệ 2 ngôi **R** trên Z được định nghĩa như sau :

∀ x, y ∈ Z, x **R** y ⇔ 3 | (4y - x) ⇔ (4y - x) chia hết cho 3

a) Chứng minh **R** là quan hệ tương đương.

b) Phân hoạch Z thành các lớp tương đương.

a) Phản xạ: a thuộc **Z** thì a R a ⇔ 4a – a chia hết cho 3 ⇔ 3a chia hết cho 3, đúng.

Đối xứng: a, b thuộc **Z**, nếu a R b ⇔ 4b – a chia hết cho 3 ⇔ tồn tại số k nguyên để 4b – a = 3k ⇔ b – 4a = 3k – 3b – 3a ⇔ 4a – b = 3a + 3b – 3k = 3(a+b-k) chia hết cho 3 nên b R a.

Bắc cầu: a, b, c thuộc **Z,** nếu có a R b và b R c thì 4b – a, 4c – b đều chia hết cho 3 ⇔ tồn tại k, h nguyên để 4b – a = 3k, 4c – b = 3h → 16c – 4b = 12h. Cộng với đẳng thức đầu, ta có: 16c – a = 3k + 12h ⇔ 4c – a = 3k + 12h – 12c = 3(k + 4h – 4c) chia hết cho 3.

b) Xét số x nguyên tùy ý, khi đó x R y ⇔ 4y – x chia hết cho 3 hay 3y + y-x chia hết cho 3 → y-x cũng chia hết cho 3, hay nói cách khác y, x đồng dư với nhau theo mod 3.

Mà số dư khi chia cho 3 là: 0, 1, 2 nên có 3 lớp tương đương:

$[0]_R = \{...,-6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$

$[1]_R = \{...,-5, -2, 1, 4, 7, 10, ...\}$

$[2]_R = \{...,-4, -1, 2, 5, 8, 11, ...\}$

Làm câu 6 và 9 → tính điểm cộng; hoặc là làm câu 7 và 8, làm tới 11h.

6. (*DHTH 15 đại trà*)

Xét quan hệ R trên tập Z được định nghĩa như sau :

∀x, y ∈ Z, x R y ⇔ $x^2 - y^2 = k(x - y)$ với $k \in Z^+$

a) (2 điểm) Chứng minh R là quan hệ tương đương

b) (1 điểm) Cho x ∈ Z, xác định lớp tương đương $[x]_R$

Câu 6

a. Tính phản xạ: Với mọi x ∈ Z, ta có x^2 – x^2 = 0 = k (x - x) với k ∈ Z. Do đó, x R x. Vậy R có tính phản xạ.

Tính đối xứng: Với mọi x, y ∈ Z, nếu x R y thì ta có x^2 – y^2 = k (x - y) với k ∈ Z. Nhân hai vế với -1, ta được y^2 – x^2 = k (y - x). Do đó, y R x. Vậy R có tính đối xứng.

Tính bắc cầu: Với mọi x, y, z ∈ Z, nếu x R y và y R z thì ta có:

x^2 – y^2 = k (x - y) với k ∈ Z + (1)

y^2 – z^2 = k(y - z) với k’ ∈ Z + (2)

Cộng hai vế của (1) và (2), ta được: $x^2 - z^2 = k(x - y) + k(y - z) = k(x - z)$.
Do đó, x R z. Vậy R có tính bắc cầu.
Kết luận: R là quan hệ tương đương.

b) Cho $x \in Z$, lớp tương đương $[x]R$ là tập hợp các số nguyên y sao cho x R y. Từ định nghĩa của quan hệ R, ta có:

$[x]_R = \{y \in Z \mid x^2 - y^2 = k(x - y), \text{ với } k \in Z+\}$
$= \{y \in Z \mid (x + y)(x - y) = k(x - y), \text{ với } k \in Z+\}$
$= \{y \in Z \mid (x + y) = k \text{ hoặc } (x - y) = 0, \text{ với } k \in Z+\}$
$= \{y \in Z \mid y = k - x \text{ hoặc } y = x, \text{ với } k \in Z+\}$
$= \{x\} \cup \{k - x \mid k \in Z+\}$.

Vậy lớp tương đương $[x]R$ là tập hợp gồm số nguyên x và các số nguyên có dạng k - x với k là số nguyên dương bất kỳ.

9. (DHTH 13 TT)

A= {1,2,3,4,5} × {1,2,3,4,5} và R là quan hệ trên *A*, sao cho:

$(x, y)\ R\ (z, t) \Leftrightarrow x + y = z + t$

a) Kiểm tra lại R là một quan hệ tương đương (3đ)

b) Xác định các lớp tương đương [(1,2)], [(2,4)] và [(1,1)] (1đ)

c) Chỉ ra phân hoạch của *A* thành các lớp tương đương (1đ)

a) Tính phản xạ: Với mọi $(x, y) \in A$, ta có $x + y = x + y$. Do đó, (x, y) R (x, y). Vậy R có tính phản xạ.
Tính đối xứng: Với mọi $(x, y), (z, t) \in A$, nếu (x, y) R (z, t) thì ta có $x + y = z + t$. Đổi chỗ hai vế, ta được $z + t = x + y$. Do đó, (z, t) R (x, y). Vậy R có tính đối xứng.
Tính bắc cầu: Với mọi $(x, y), (z, t), (u, v) \in A$, nếu (x, y) R (z, t) và (z, t) R (u, v) thì ta có:
$x + y = z + t$ (1) và $z + t = u + v$ (2)
Suy ra $x + y = u + v$
Do đó, (x, y) R (u, v). Vậy R có tính bắc cầu.
Kết luận: R là quan hệ tương đương.

b) Cho các cặp số thuộc A sau:
$[(1, 2)]_R = \{(x, y) \in A \mid x + y = 1 + 2 = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$
$[(2, 4)] = \{(x, y) \in A \mid x + y = 2 + 4 = 6\} = \{(2, 4), (4, 2), (5, 1), (1, 5), (3,3)\}$
$[(1, 1)] = \{(x, y) \in A \mid x + y = 1 + 1\} = \{(1, 1)\}$
c) Phân hoạch của A thành các lớp tương đương là:
$A/R = \{[2]R, [3]R, [4]R, [5]R, [6]R, [7]R, [8]R, [9]R, [10]R\}$, trong đó:
$[2]R = \{(1, 1)\}$
$[3]R = \{(1, 2), (2, 1)\}$
$[4]R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$
$[5]R = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$
$[6]R = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$
$[7]R = \{(2,5), (3,4), (4,3), (5,2)\}$
$[8]R = \{(3,5), (4,4), (5,3)\}$

[9]R = {(4 ,5), (5 ,4)}
[10]R = {(5 ,5)}

7. (DHTH 15 TT)

Cho tập A = { -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 }, xét quan hệ 2 ngôi **R** trên A được định nghĩa như sau:
$\forall x, y \in A$, x **R** y $\Leftrightarrow x^2 + 2y = y^2 + 2x$

a) Chứng minh **R** là quan hệ tương đương
b) Liệt kê các phần tử của tập quan hệ **R** và phân hoạch A thành các lớp tương đương.

a) Phản xạ: x R x ⬄ x^2 + 2x = x^2 + 2x.

Đối xứng: x R y ⬄ x^2 + 2y = y^2 + 2x ⬄ y^2 + 2x = x^2 + 2y ⬄ y R x.

Bắc cầu: x R y và y R z ⬄ x^2 + 2y = y^2 + 2x, và y^2 + 2z = z^2 + 2y.

Cộng 2 đẳng thức lại: x^2+2y+y^2+2z = y^2+2x+z^2+2y ⬄ x^2+2z = z^2+2x.

Do đó x R z.

Vậy R là quan hệ tương đương.

b) Ta có: x R y ⬄ x^2+2y = y^2+2x ⬄ x = y hoặc x+y = 2.

R = {(-2,-2), (-1, -1), ..., (4,4), (-2, 4), (-1,4), (0,2), ...} → các cặp bằng nhau hoặc tổng = 2.

[-2]R = {-2, 4}

[-1]R = {-1, 3}

[0]R = {0, 2}

[1]R = {1}

8. (DHTH 13 đại trà)

Cho A ={ x= m + n$\sqrt{2}$| m , n$\in$ Z }. Quan hệ hai ngôi R xác định trên A như sau :
$\forall$ x=(m + n$\sqrt{2}$) , y=(p + q$\sqrt{2}$) $\in$ A, xRy ⬄m+p và n+q là số chẳn.

a) (3 điểm) Chứng minh rằng R là quan hệ quan hệ tương đương trên A.
b) (1 điểm) Xác định các lớp tương đương của quan hệ R

//nhóm, vành, trường → ứng dụng vào mã hóa.

Đặt x = m + n.$\sqrt{2}$, y = p + q.$\sqrt{2}$, z = r + s.$\sqrt{2}$.

Phản xạ: x R x ⬄ (m+n$\sqrt{2}$) R (m+n$\sqrt{2}$) ⬄ m+m và n+n là chẵn, đúng.

Đối xứng: x R y ⬄ (m+n$\sqrt{2}$) R (p+q$\sqrt{2}$) ⬄ m+p và n+q chẵn ⬄ p+m và q+n cũng chẵn ⬄ (p+q$\sqrt{2}$) R (m+n$\sqrt{2}$).

Bắc cầu: tương tự.

Xét x = m+n$\sqrt{2}$ và x' = m'+n'$\sqrt{2}$ thuộc cùng lớp tương đương của x

⬄ m+m' và n+n' cùng chẵn ⬄ m, m' cùng tính chẵn lẻ; n, n' cùng tính chẵn lẻ.

Quy về xét số dư là 0, 1:

- [(0 + 1.$\sqrt{2}$)]R = {m + n$\sqrt{2}$, với m chẵn, n lẻ}.
- [(1 + 1.$\sqrt{2}$)]R = {m + n$\sqrt{2}$, với m lẻ, n lẻ}.

- $[(1 + 0.\sqrt{2})]R = \{m + n\sqrt{2}$, với m lẻ, n chẵn$\}$.
- $[(0 + 0.\sqrt{2})]R = \{m + n\sqrt{2}$, với m chẵn, n chẵn$\}$.

BT tham khảo.

(trong hôm nay ai làm được thì gửi zalo → tính điểm cộng).

Với n là số nguyên dương, gọi X là tập hợp tất cả các số nguyên dương không vượt quá $2n$. Xét quan hệ hai ngôi R trên X như sau: với mọi cặp số $a, b \in X$, ta có $a \mathcal{R} b$ khi và chỉ khi $\frac{a}{b}$ là lũy thừa của 2 với số mũ nguyên. *Ví dụ:* $3 \mathcal{R} 12$ *vì* $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ *là lũy thừa của* 2 *với số mũ là* -2.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên X.

b) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương tùy ý, số lớp tương đương của X luôn là n.