CẤU TRÚC RỜI RẠC

Discrete Mathematics

CHƯƠNG I: CƠ SỞ LÔGIC

① Mệnh đề
② Biểu thức logic (Dạng mệnh đề)
③ Qui tắc suy diễn
④ Vị từ, lượng từ
⑤ Quy nạp toán học

1. Mệnh đề

Định nghĩa: Mệnh đề là một khẳng định/phát biểu có giá trị chân lý xác định; đúng hoặc sai.

Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh… không là mệnh đề.

Ví dụ:

- 1+7=8
- Hôm nay bạn đẹp quá! (không là mệnh đề)
- Hôm nay là thứ mấy? (không là mệnh đề)

Mệnh đề

- Ký hiệu: Người ta dùng các ký hiệu P, Q, R… (p,q,r,…) để chỉ mệnh đề.
- Chân trị của mệnh đề: Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng, ngược lại ta nói P có chân trị sai.
- Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là 1 (hay Đ,T) và 0 (hay S,F)

Mệnh đề

Phân loại: Gồm 2 loại

- Mệnh đề sơ cấp (nguyên thủy): Là mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác thông qua liên từ hoặc trạng từ "không"
- Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết bằng các liên từ (và, hay, khi và chỉ khi,…) hoặc trạng từ "không"

Mệnh đề

Ví dụ:

- 2 là số nguyên tố.
- 2 không là số nguyên tố.
- 2 là số nguyên tố và là số lẻ.
- An đang xem ti vi hay đang học bài.

Mệnh đề

Các phép toán: có 5 phép toán cơ bản

1. Phép phủ định: Phủ định của mệnh đề P là một mệnh đề, ký hiệu là $\neg$P hay $\overline{P}$ (đọc là "không" P hay "phủ định của" P) có giá trị ngược lại với P.

Bảng chân trị :

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Ví dụ:

- 2 là số nguyên tố.

  Phủ định: 2 không là số nguyên tố

- n > 5 có phủ định: n ≤ 5

Mệnh đề

2. Phép hội (nối liền, giao): của hai mệnh đề P, Q là một mệnh đề, kí hiệu P $\wedge$ Q (đọc là “P và Q) và có bảng chân trị ở hình bên.

Nhận xét: P$\wedge$Q đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

P	Q	P$\wedge$Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ví dụ:

- P: “Hôm nay là chủ nhật”
- Q: “Hôm nay trời mưa”
- P $\wedge$ Q: “Hôm nay là chủ nhật và trời mưa”

Mệnh đề

3. Phép tuyển (nối rời, hợp): của hai mệnh đề P, Q là một mệnh đề, kí hiệu P ∨ Q (đọc là "P hay Q"). Bảng chân trị:

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Nhận xét:

P ∨ Q sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

Ví dụ:

- e > 4 hay e > 5 (S)
- 2 là số nguyên tố hay là số lẻ (Đ)

Mệnh đề

4. Phép kéo theo: Mệnh đề P kéo theo mệnh đề Q là một mệnh đề, kí hiệu $P \to Q$ (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P").

Bảng chân trị:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

NX: $P \to Q$ sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

Ví dụ:

e >4 kéo theo 5>6

Mệnh đề

5. Phép kéo theo hai chiều (phép tương đương): Mệnh đề P kéo theo mệnh đề Q và ngược lại (mệnh đề P tương đương với mệnh đề Q) là một mệnh đề, ký hiệu $P \leftrightarrow Q$ (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay "P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q").

Bảng chân trị:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NX: $P \leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

Ví dụ: 6 chia hết cho 3 khi và chỉ khi 6 chia hết cho 2

2. Biểu thức logic (Dạng mệnh đề)

Định nghĩa: Biểu thức logic được cấu tạo từ:

- Các mệnh đề (các hằng mệnh đề)

- Các biến mệnh đề p, q, r, …, tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó

- Các phép toán logic $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc () để chỉ rõ thứ tự thực hiện của các phép toán.

Ví dụ:

$E(p,q) = \neg(\neg p \vee q)$

$F(p,q,r) = (p \wedge q) \rightarrow \neg(q \vee r)$

Biểu thức logic

Độ ưu tiên của các toán tử logic:

- Ưu tiên mức 1: ()
- Ưu tiên mức 2: $\neg$
- Ưu tiên mức 3: $\wedge$, $\vee$
- Ưu tiên mức 4: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Bảng chân trị của một biểu thức logic: là bảng liệt kê chân trị của biểu thức logic theo các trường hợp về chân trị của tất cả các biến mệnh đề trong biểu thức logic hay theo các bộ giá trị của bộ biến mệnh đề.

Biểu thức logic

Bảng chân trị của một biểu thức logic.

Ví dụ:

Với một biến mệnh đề, ta có hai trường hợp là 0 hoặc 1.

Với hai biến mệnh đề p,q ta có bốn trường hợp chân trị của bộ biến (p,q) là các bộ giá trị (0,0), (0,1), (1,0) và (1,1).

NX: Trong trường hợp tổng quát, nếu có n biến mệnh đề thì ta có 2^n trường hợp chân trị cho bộ n biến.

Biểu thức logic

Ví dụ: Cho E(p,q,r) =$(p \vee q) \rightarrow r$.

Ta có bảng chân trị sau:

p	**q**	**r**	**$p \vee q$**	**$(p \vee q) \rightarrow r$**
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Bài tập 1: Cho các mệnh đề tham biến **P: x<0** và **Q: y>0.** Hoàn thành bảng chân trị dưới đây:

x	y	P(x<0)	Q(y>0)	P ∨ Q	P ∧ Q	P → Q	P ←→ Q
-1	-1						
-1	1						
1	-1						
1	1						
0	0						

Bài tập 2: Viết **biểu thức logic** mệnh đề cho các mô tả dưới đây:

1. Điều kiện để tháng (m) là dữ liệu hợp lệ
2. Điều kiện để tháng m có 30 ngày
3. Điều kiện để tháng 2 có 29 ngày
4. Điều kiện để A, B, C là các góc của một tam giác
5. Điều kiện để A, B, C là các góc của một tam giác vuông
6. Điều kiện để A, B, C là các góc của một tam giác cân
7. Điều kiện để A, B, C là các góc của một tam giác đều.
8. Điều kiện để học sinh A xét điểm theo tổ hợp A0 đậu vào khoa CNTT IUH năm 2019
9. Điều kiện để bạn được nhận học bổng 100% trong học kỳ 1 năm học 2020-2021.
10. Điều kiện tiếng Anh để bạn được đăng ký học phần năm 3.

Bài tập 3: Hàm eq(X,Y) trả về 1 khi giá trị của X và Y là như nhau, trả về 0 trong các trường hợp còn lại. Biểu thức nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để nhận về 1 khi hàm eq(eq(A,B), eq(B,C)) được gọi?

a) (A=B và B=C) hoặc (A#B và B#C)
b) (A=B và B=C) hoặc (A#B hoặc B#C)
c) (A=B và B=C) hoặc (A=C)
d) (A=B hoặc B=C) hoặc (A=C)

Biểu thức logic

Tương đương logic: Hai biểu thức logic E và F theo các biến mệnh đề nào đó được gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng bảng chân trị.

Ký hiệu: E $\Leftrightarrow$ F (E tương đương với F).

Ví dụ: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Biểu thức logic E được gọi là hằng đúng nếu chân trị của E luôn bằng 1(đúng) trong mọi trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề có trong E. Nói cách khác, E là hằng đúng khi ta có E $\Leftrightarrow$ 1.

Biểu thức logic

Tương tự, E là một hằng sai khi ta có E $\Leftrightarrow$ 0.

Ví dụ: E(p,q) = p $\wedge$ $\neg$p là hằng sai.

F(p,q) =(p$\rightarrow$q) $\leftrightarrow$ ($\neg$p $\vee$ q) là hằng đúng.

Định lý: Hai biểu thức logic E và F tương đương với nhau khi và chỉ khi E $\leftrightarrow$ F là hằng đúng.

Ví dụ: (p$\rightarrow$q) $\Leftrightarrow$ ($\neg$p $\vee$ q)

Hệ quả logic: F được gọi là hệ quả logic của E nếu E $\rightarrow$ F là hằng đúng.

Ký hiệu: E $\Rightarrow$ F

Ví dụ: $\neg$(p $\vee$ q) $\Rightarrow$ $\neg$p

Các luật logic

1. Phủ định của phủ định: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
2. Qui tắc De Morgan: $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

   $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
3. Luật giao hoán: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
4. Luật kết hợp: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

   $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Các luật logic

5. Luật phân phối: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

6. Luật lũy đẳng: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

   $p \vee p \Leftrightarrow p$

7. Luật trung hòa: $p \vee 0 \Leftrightarrow p$

   $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$

8. Luật về phần tử bù: $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$

   $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$

Các luật logic

9. Luật thống trị: $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$

10. Luật hấp thu: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

11. Luật về phép kéo theo: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Ví dụ: Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng: $(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

Các luật logic

VD: Dùng bảng chân trị chứng minh qui tắc De Morgan

Qui tắc De Morgan: $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Các luật logic

Ví dụ: Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng: $(\neg p \to r) \land (q \to r) \Leftrightarrow (p \to q) \to r$.

Giải:

$$
\begin{aligned}
&(\neg p \to r) \land (q \to r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \lor r) \land (\neg q \lor r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \land \neg q) \lor r \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg p \lor q) \lor r \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \to q) \lor r \\
\Leftrightarrow\ & (p \to q) \to r
\end{aligned}
$$

Bài tập 4: Tìm sơ đồ khối tương đương

Bài tập 5: Tìm bảng chân trị của biểu thức Z

Qui tắc suy diễn

Định nghĩa:

Trong các chứng minh toán học, ta thường thấy những lý luận dẫn xuất có dạng: nếu p_1 và p_2 và p_n thì q.

Dạng lý luận này là đúng khi ta có biểu thức $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ là hằng đúng.

Ta gọi dạng lý luận trên là một quy tắc suy diễn và thường được viết theo các cách sau đây:

Cách 1: Biểu thức hằng đúng

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q] \Leftrightarrow 1$$

Qui tắc suy diễn

Định nghĩa:

Cách 2: Dòng suy diễn

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

Cách 3: Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Các biểu thức logic $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được gọi là giả thiết (hay tiên đề), biểu thức q được gọi là kết luận.

Qui tắc suy diễn

1. Qui tắc khẳng định (Modus Ponens):

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Ví dụ:

- Học tốt thi đậu
- SV A học tốt

Suy ra: SV A thi đậu

- Nếu chuồn chuồn bay thấp thì mưa
- Thấy chuồn chuồn bay thấp

Suy ra: trời mưa

Qui tắc suy diễn

2. Qui tắc phủ định (Modus Tollens):

$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q\,] \Rightarrow \neg\, p$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Ví dụ:

- Nếu A đi học đầy đủ thì A đậu toán rời rạc.
- A không đậu toán rời rạc.

Suy ra: A không đi học đầy đủ.

Qui tắc suy diễn

3. Qui tắc tam đoạn luận:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$$

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Ví dụ:

- Nếu trời mưa thì đường ướt
- Nếu đường ướt thì đường trơn

Suy ra: nếu trời mưa thì đường trơn.

Qui tắc suy diễn

- **QUI TẮC TAM ĐOẠN LUẬN RỜI**

  Qui tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$\left[(p \vee q) \wedge \neg q\right] \rightarrow p \qquad \left[(p \vee q) \wedge \neg p\right] \rightarrow q$$

  Ý nghĩa của qui tắc: nếu trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp sai thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ đúng

Qui tắc suy diễn

4. Qui tắc phản chứng:

$$p \to q \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to 0]$$

* Tổng quát:

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \to 0]$$

Để chứng minh vế trái là một hằng đúng, ta chứng minh nếu thêm phủ định của q vào các tiên đề thì được một mâu thuẫn.

Qui tắc suy diễn

4. Qui tắc phản chứng:

Ví dụ:

Giải: CM bằng phản chứng

$$p \to r$$
$$\neg p \to q$$
$$q \to s$$
$$\neg r$$
$$\neg s$$

$$\therefore 0$$

Chứng minh suy luận:

$$p \to r$$
$$\neg p \to q$$
$$q \to s$$

$$\therefore \neg r \to s$$

Qui tắc suy diễn

5. Qui tắc chứng minh theo trường hợp :

$$[(p \to r) \land (q \to r)] \Rightarrow [(p \lor q)\to r]$$

* Tổng quát:

$$[(p_1 \to q) \land (p_2 \to q) \land \ldots \land (p_n \to q)]$$
$$\Rightarrow [(p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to q]$$

Qui tắc suy diễn

6.Phản ví dụ:

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay không là một hằng đúng, ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ.

Để tìm một phản ví dụ ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề sao cho các tiên đề trong phép suy luận là đúng còn kết luận là sai.

Qui tắc suy diễn

6.Phản ví dụ:

Ví dụ: Hãy kiểm tra suy luận:

$$\begin{array}{l} p \to r \\ p \\ \neg r \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

NX: Ta sẽ tìm p,q,r thỏa

$$\begin{array}{l} p \to r = 1, \\ p = 1 \\ \neg r \to q = 1 \\ \hline \therefore q = 0 \end{array}$$

Dễ dàng tìm thấy một phản ví dụ: p=1,q=0,r=1.

Vậy suy luận đã cho là không đúng

Qui tắc suy diễn

6. Phản ví dụ

Ví dụ: Ông Minh nói rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy bị mất việc thì phải bán xe.Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

p: ông Minh được tăng lương.

q: ông Minh nghỉ việc.

r: vợ ông Minh mất việc.

s: gia đình phải bán xe.

t: vợ ông hay đi làm trễ.

$$\begin{array}{l}
\neg p \to q \\
q \wedge r \to s \\
t \to r \\
p \\
\hline
\therefore \neg s \to \neg t
\end{array}$$

Qui tắc suy diễn

Ví dụ: Suy luận sau đúng hay sai

$$\begin{array}{c} \neg p \to q \\ q \land r \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \neg s \to \neg t \end{array}$$

Qui tắc suy diễn

Ví dụ:Suy luận sau đúng hay sai

$$\begin{array}{c} \neg p \to q \\ q \wedge r \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \neg s \to \neg t \end{array}$$

HD: Dùng phản ví dụ: Chọn

p=1, q=0, r=1, s=0, t=1

Suy luận (lập luận) sau đúng hay sai?

1. Nếu nghệ sĩ Trương Bạ không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 100 thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn.
2. Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiềnvé phải trả lại cho người xem.
3. Nhưng tiềnvé đã không trả lại cho người xem.

Vậy nghệ sỹ TB đã trình diễn

1. Nếu nghệ sĩ Trương Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 100 thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn.
2. Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiềnvé phải trả lại cho người xem.
3. Nhưng tiềnvé đã không trả lại cho người xem.

Vậy nghệ sỹ TB đã trình diễn

- p:Nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn.
- q:số vé bán ra ít hơn 100.
- r:đêm diễn bị hủy bỏ.
- s: ông bầu buồn.
- t:trả lại tiền vé cho người xem

$$\begin{array}{l} \neg p \vee q \to r \wedge s \\ r \to t \\ \neg t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Qui tắc suy diễn

- VD1

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \lor s \\ t \to q \\ \overline{s} \\ \hline \therefore \overline{r} \to \overline{t} \end{array}$$

Giải

Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \overline{s} \\ \hline \therefore \overline{r} \to \overline{t} \end{array}$$

1)	$\overline{s}$	(Tiền đề)
2)	$p \vee s$	(Tiền đề)
3)	p	(Tam đoạn luận rời)
4)	$p \to (q \to r)$	(Tiền đề)
5)	$q \to r$	(Qui tắc khẳng định)
6)	$t \to q$	(Tiền đề)
7)	$t \to r$	(Tam đoạn luận)
	$\therefore \overline{r} \to \overline{t}$	(Luật phản đảo)

Vậy suy luận trên là đúng.

Vị từ - Lượng từ

Định nghĩa:

Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,.. cho trước sao cho:

- Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề
- Nếu thay x,y,.. thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

Ví dụ:

- p(n) = "n +1 là số nguyên tố"
- q(x,y) = "x + y = 1"

Vị từ - Lượng từ

Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề:

- Phủ định: $\neg p(x)$
- Phép nối liền (hội, giao): $p(x) \wedge q(x)$
- Phép nối rời (tuyển, hợp): $p(x) \vee q(x)$
- Phép kéo theo: $p(x) \rightarrow q(x)$
- Phép kéo theo hai chiều: $p(x) \leftrightarrow q(x)$

Vị từ - Lượng từ

Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) được định nghĩa như sau:

- Mệnh đề "Với mọi x thuộc A, p(x) ", kí hiệu: "$\forall x \in A, p(x)$" là mđ đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$. $\forall$ đgl lượng từ phổ dụng

- Mệnh đề "Tồn tại (có ít nhất một) x thuộc A, p(x)" kí hiệu "$\exists x \in A, p(x)$" là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x= a'$\in$ A nào đó sao cho mệnh đề p(a') đúng. $\exists$ đgl lượng từ tồn tại

Ví dụ 15. Xét các câu sau, trong đó ba câu đầu là tiền đề và câu thứ tư là kết luận đúng.

"Tất cả chim ruồi đều có màu sặc sỡ"

"Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong"

"Các chim không sống bằng mật ong đều có màu xám"

"Chim ruồi là nhỏ".

Gọi $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ là các câu "x là chim ruồi" ; "x là lớn", "x sống bằng mật ong", và "x có màu sặc sỡ", tương ứng. Giả sử rằng không gian là tất cả các loại chim, hãy diễn đạt các câu trong suy lí trên bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ và các lượng từ.

Giải : Ta có thể biểu diễn các câu trong suy lí trên như sau :

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow S(x))$$

$$\neg\exists x\ (Q(x) \wedge R(x))$$

$$\forall x\ (\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$$

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

Vị từ - Lượng từ

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" ≡ "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Vị từ - Lượng từ

Ví dụ: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- "$\forall x \in R, x^2 + 6x + 5 \leq 0$"
- "$\exists x \in R, x^2 + 6x + 5 \leq 0$"
- "$\forall x \in R, \forall y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\forall x \in R, \exists y \in R, 2x + y < 1$"
- "$\exists x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$"
- "$\exists x \in R, \exists y \in R, x + 2y < 1$"

Ví dụ 16. Cho $P(x,y)$ là câu "$x + y = y + x$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$.

Giải : Lượng từ

$$\forall x \forall y\ P(x,y)$$

là ký hiệu của mệnh đề :

"Với mọi số thực x và với mọi số thực y,
$x + y = y + x$ là đúng".

Vì $P(x,y)$ đúng với mọi số thực x và y, nên mệnh đề $\forall x \forall y\ P(x,y)$ là đúng

Ví dụ 17. Cho $Q(x,y)$ là câu "$x + y = 0$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\exists y\ \forall x\ Q(x,y)$ và $\forall x \exists y\ Q(x,y)$.

Giải : Lượng từ

$$\exists y \forall x\ Q(x,y)$$

là ký hiệu của mệnh đề :

"Tồn tại một số thực y sao cho với mọi số thực x, $Q(x,y)$ là đúng".

Bất kể số y được chọn là bao nhiêu, chỉ có một giá trị của x thoả mãn $x + y = 0$. Vì không có một số thực y sao cho $x + y = 0$ đúng với mọi số thực x, nên mệnh đề $\exists y \forall x\ Q(x,y)$ là sai.

Lượng từ

$$\forall x \exists y\ Q(x,y)$$

là ký hiệu của câu

"Với mọi số thực x, tồn tại một số thực y sao cho $Q(x,y)$ là đúng".

Với số thực x đã cho, luôn có một số thực y sao cho $x + y = 0$, cụ thể là $y = -x$. Từ đó suy ra mệnh đề $\forall x \exists y\ Q(x,y)$ là đúng.

Vị từ - Lượng từ

Định lý

Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

- "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
- "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng cách: thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$, và p(x,y,..) thành $\neg$ p(x,y,..).

Vị từ - Lượng từ

Với vị từ theo 1 biến ta có :

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \equiv \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \equiv \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

Với vị từ theo 2 biến

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,\ y)} \equiv \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x,\ y)} \equiv \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,\ y)} \equiv \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,\ y)} \equiv \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,\ y)}$$

Vị từ - Lượng từ

Ví dụ phủ định các mệnh đề sau

- "$\forall x \in A, 2x + 1 \leq 0$"

- "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x \in R: |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$"

Ví dụ 20. Diễn đạt định nghĩa giới hạn bằng cách dùng các lượng từ

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

là : "Với mọi số thực $\varepsilon > 0$ tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - L| < \varepsilon$ khi $0 < |x - a| < \delta$" .

Định nghĩa này của giới hạn có thể được diễn đạt bằng cách dùng các lượng từ như sau :

$$\forall \varepsilon \ \exists \delta \ \forall x \ (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

ở đây không gian đối với các biến δ và ε là tập các số thực dương, còn đối với x là tập các số thực.

Qui nạp

Cho $n_0 \in N$ và p(n) là một vị từ theo biến tự nhiên $n \geq n_0$.

Để chứng minh tính đúng đắn của mệnh đề:

$$\forall n \geq n_0,\ p(n)$$

ta có thể dùng các dạng nguyên lý quy nạp như sau:

*Nguyên lý quy nạp yếu (giả thiết đúng với k)

Mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{ll} \text{(cơ sở)} & p(n_0) \\ \text{(GTQN)} & \forall k \geq n_0,\ p(k) \rightarrow p(k+1) \\ \hline & \therefore \forall n \geq n_0,\ p(n) \end{array}$$

Qui nạp

*Nguyên lý quy nạp mạnh (giả thiết đúng đến k)

Mô hình suy diễn:

(cơ sở) $p(n_0)$

(GTQN) $\forall k \geq n_0, p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \ldots \wedge p(k) \rightarrow p(k+1)$

$$\therefore \forall n \geq n_0, p(n)$$

Qui nạp

Ví dụ :

Chứng minh $1+3+5+\ldots+\left(2n-1\right)=n^2$

Ví dụ :

Chứng minh $A^n=\begin{bmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Bài tập

1) Đề thi ĐHBK2000

Kiểm tra lại dạng mệnh đề sau là hằng đúng

$[p \to (q \vee r)] \to [(p \to q) \vee (p \to r)]$

2) Đề thi KHTN 2001

Kiểm tra lại tính đúng đắn của suy luận sau

p

$q \to r$

$p \to \neg r$

____

$\therefore \neg q$