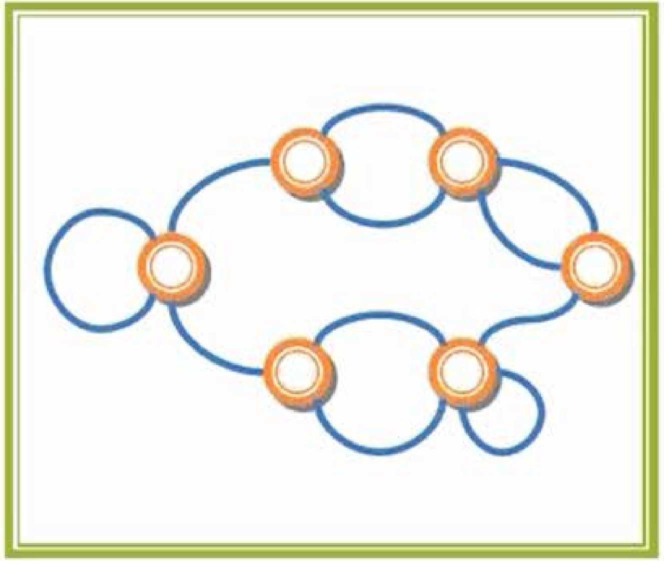
CẠNH KỀ, ĐỈNH KỀ, BẬC

Liên quan giữa cạnh và đỉnh

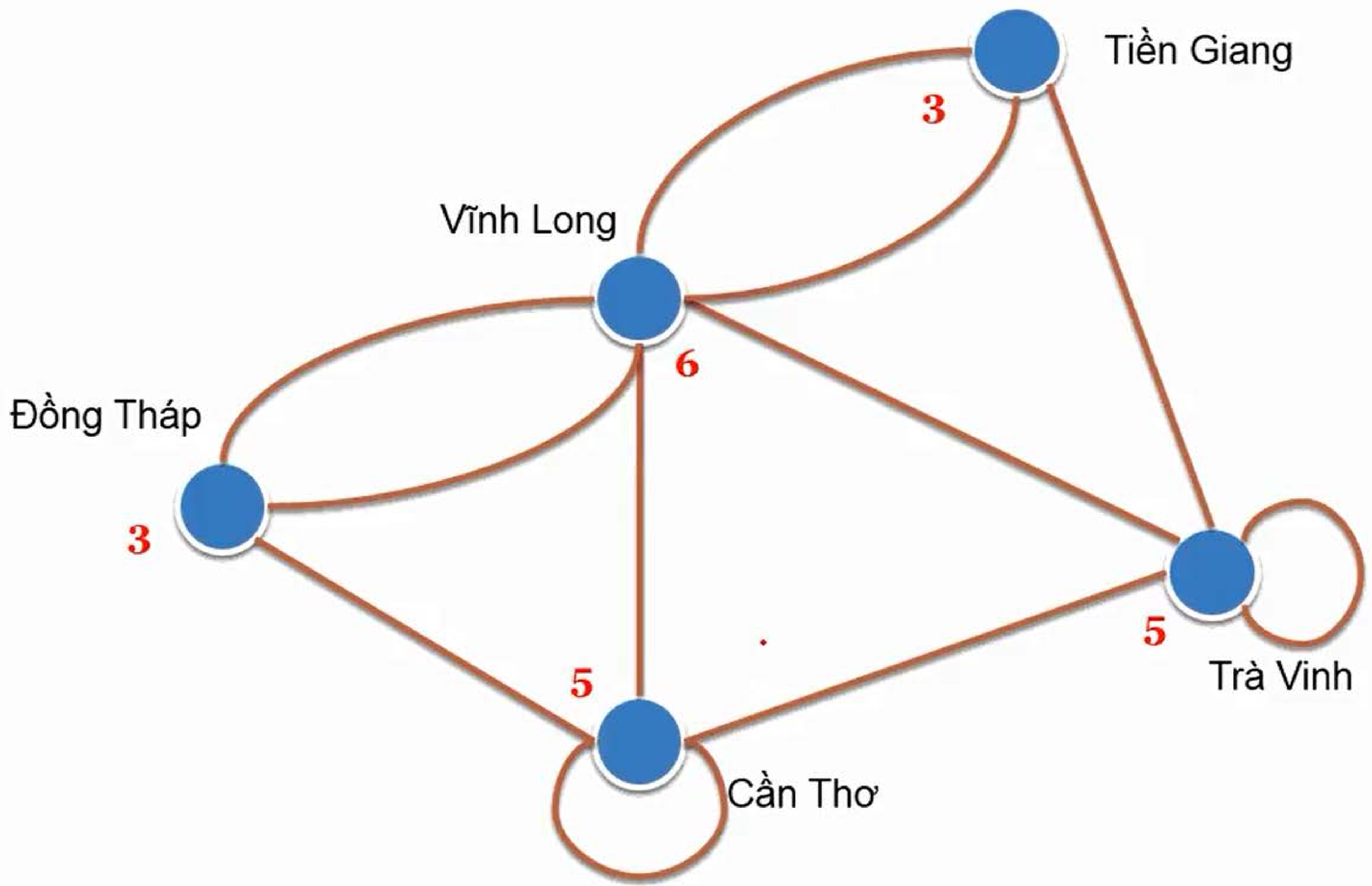
- Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là kề hay liền kề (adjacent) (hay láng giềng (neibor)) nếu {u, v} là một cạnh của G.
- Nếu e = {u, v} thì e được gọi là cạnh liên thuộc (incident) với các đỉnh u và v. Cạnh e cũng được gọi là cạnh nối (connect) các đỉnh u và v.
- Các đỉnh u và v gọi là các điểm đầu mút (endpoint) của cạnh {u, v}.

Bậc của đỉnh

- Bậc (degree) của một đỉnh trên đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Người ta ký hiệu bậc của đỉnh v là deg(v).



Bậc của đồ thị



Định lý bắt tay (Handshaking Theorem)

- Cho G = (V, E) là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

- Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 7?

Chứng minh định lý bắt tay

- Định nghĩa hàm f từ E x V tới {0, 1, 2… } trong đó:
  - f(e, v) = 1 nếu e có 2 đỉnh phân biệt và v là một trong 2 đỉnh này.
  - f(e, v) = 2 nếu e là một khuyên và v là đỉnh của khuyên này, và
  - f(e, v) = 0 nếu v không phải là đỉnh thuộc cạnh e.
- Do vậy, với cạnh e $\in$ E bất kỳ, ta có $\sum_{v \in V} f(e, v) = 2$ suy ra được từ định nghĩa.

Chứng minh định lý bắt tay

- Do vậy:

$$\sum_{e\in E} 2 = \sum_{e\in E}\sum_{v\in V} f(e,v)$$

$$\Rightarrow 2|E| = \sum_{e\in E} 2 = \sum_{e\in E}\sum_{v\in V} f(e,v) = \sum_{v\in V}\sum_{e\in E} f(e,v)$$

$$\text{Ta có}: \deg(v) = \sum_{e\in E} f(e,v)$$

$$\Rightarrow 2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v)$$

Định lý về số đỉnh bậc lẻ

- **Định lý:** Một đồ thị vô hướng có số lượng đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

Định lý về số đỉnh bậc lẻ

- **Định lý:** Một đồ thị vô hướng có số lượng đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.
- **Chứng minh:**
  - Giả sử V1, V2 tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị vô hướng G = (V, E). Khi đó:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

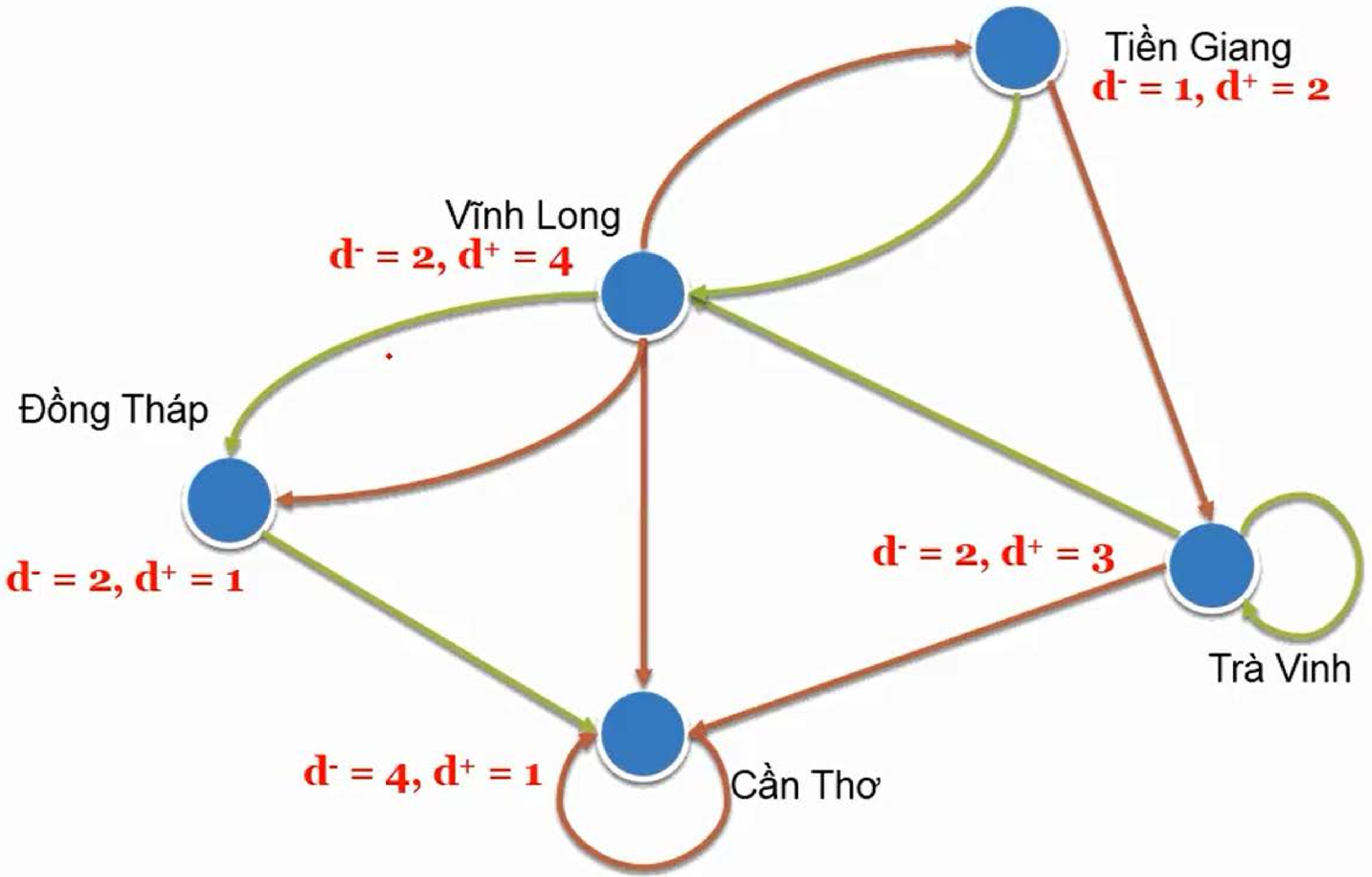
Liên quan giữa cạnh và đỉnh

- Khi (u, v) là cạnh của đồ thị có hướng G, thì u được gọi là nối tới v và v được gọi là nối từ u. Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu (initial vertex), đỉnh v gọi là đỉnh cuối (terminal hoặc end vertex) của cạnh (u, v).
- Cạnh e = (u, v) được gọi là đi từ đỉnh u tới đỉnh v hoặc đi ra đỉnh u vào đỉnh v.

Bậc – vào và bậc - ra

- Trong đồ thị có hướng, bậc vào (in-degree) của đỉnh v, ký hiệu là $deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là v.
- Bậc ra (out-degree) của đỉnh v, ký hiệu là $deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v.
  (Một khuyên sẽ góp thêm 1 đơn vị vào bậc vào và 1 đơn vị vào bậc ra của đỉnh chứa khuyên)

Bậc - vào và bậc - ra



Định lý về số bậc đồ thị

- Cho G = (V, E) là một đồ thị có hướng. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

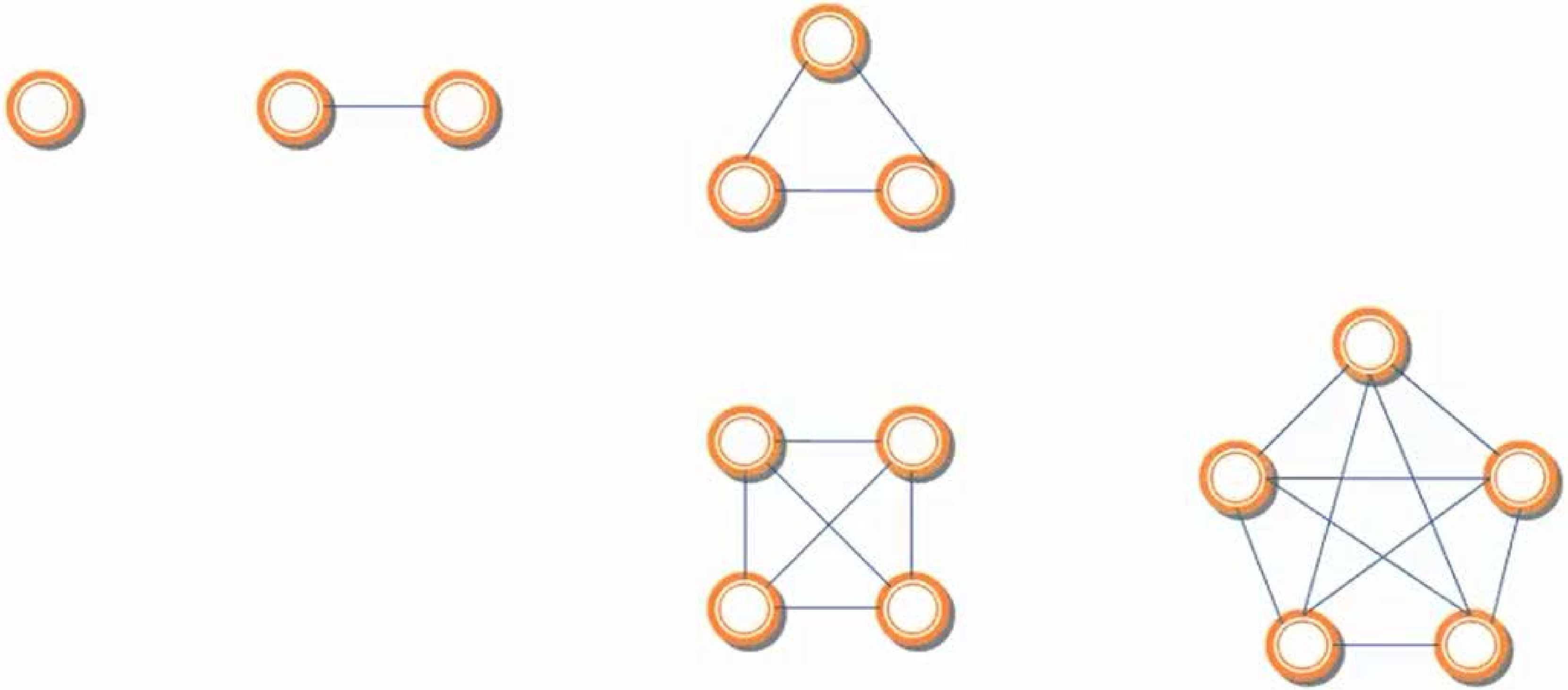
Đỉnh treo, đỉnh cô lập

- Đỉnh treo (pendant vertex) là đỉnh có bậc bằng 1.
- Đỉnh cô lập (isolated vertex) là đỉnh có bậc bằng 0.

MỘT SỐ ĐƠN ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Đồ thị đầy đủ

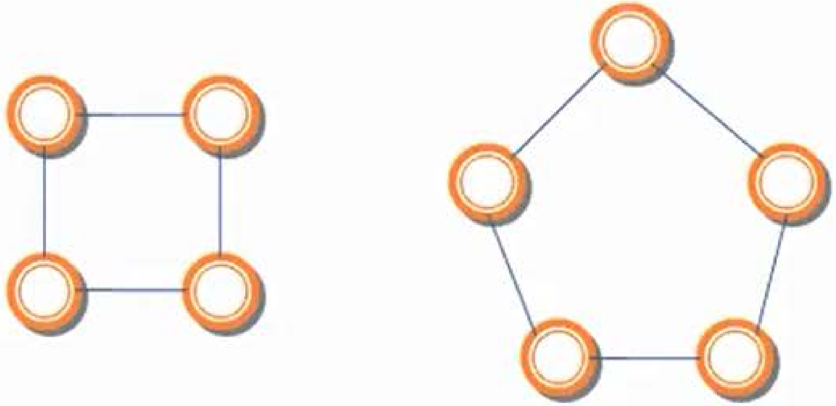
- Đồ thị đầy đủ (complete graph) n đỉnh, ký hiệu là K_n, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt.



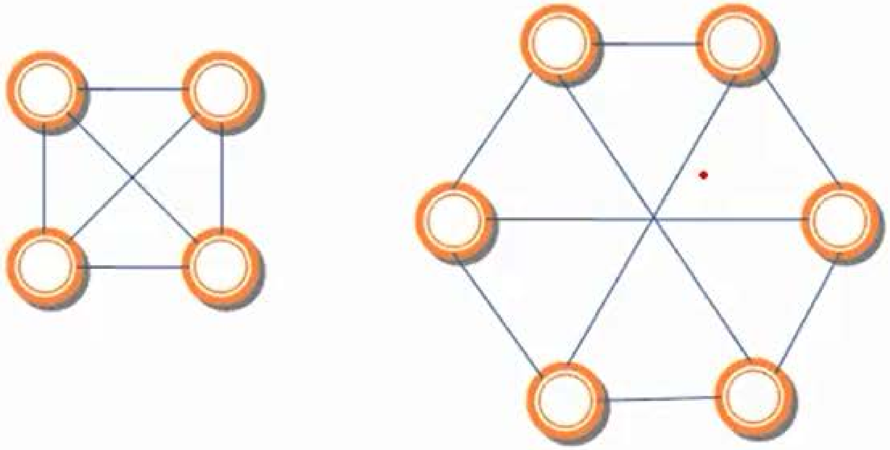
Đồ thị chính quy

- Đồ thị chính quy (regular graph) là đơn đồ thị mà bậc của mọi đỉnh đều bằng nhau.
- Nếu bậc của các đỉnh là n, thì đồ thị này được gọi là n – chính quy (n – regular).

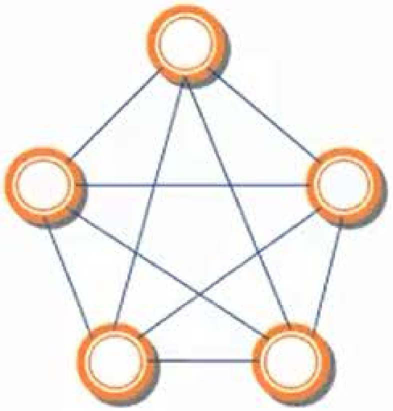
Ví dụ đồ thị chính quy



2 – chính quy



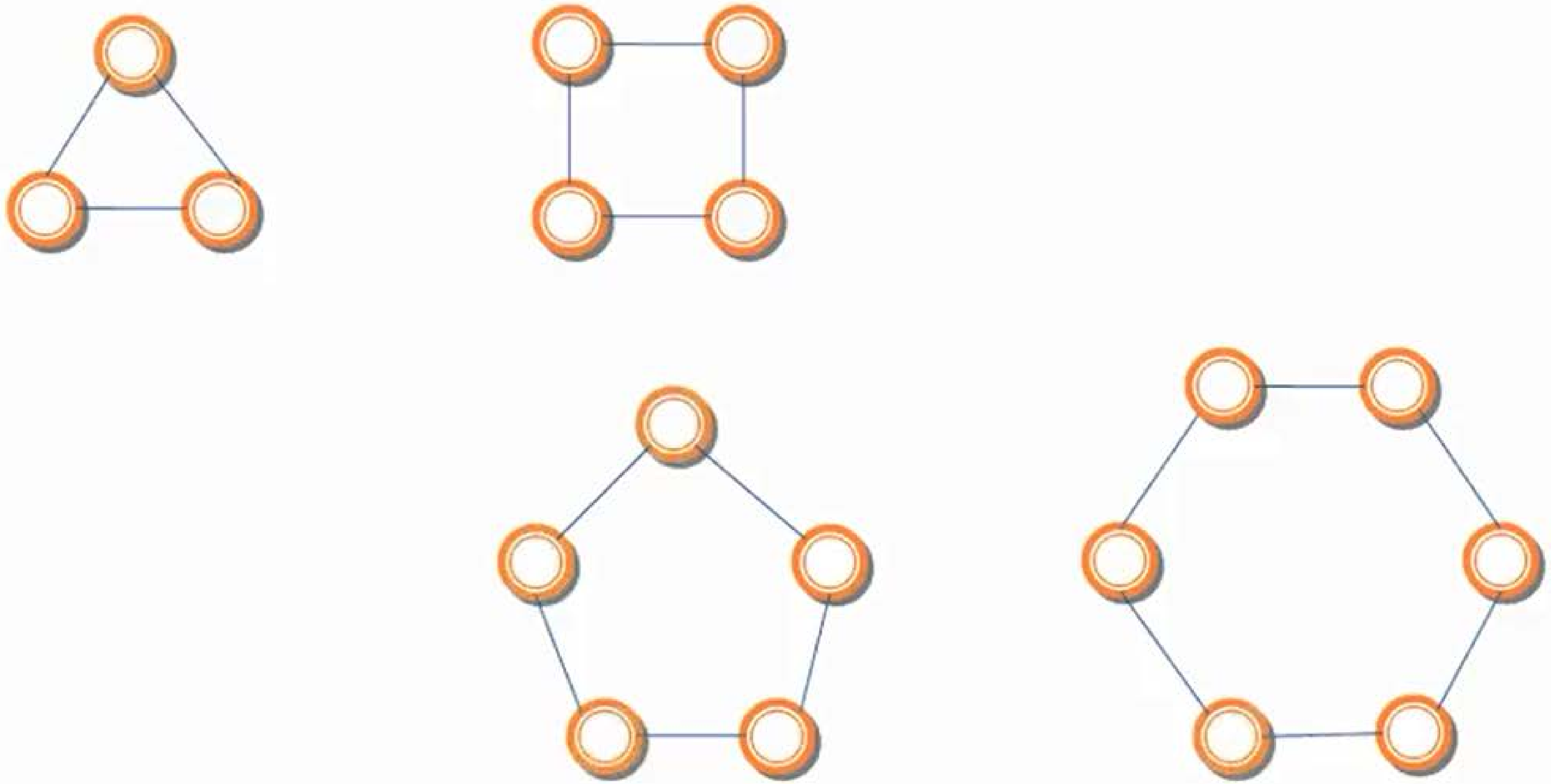
3 – chính quy



4 – chính quy

Đồ thị vòng

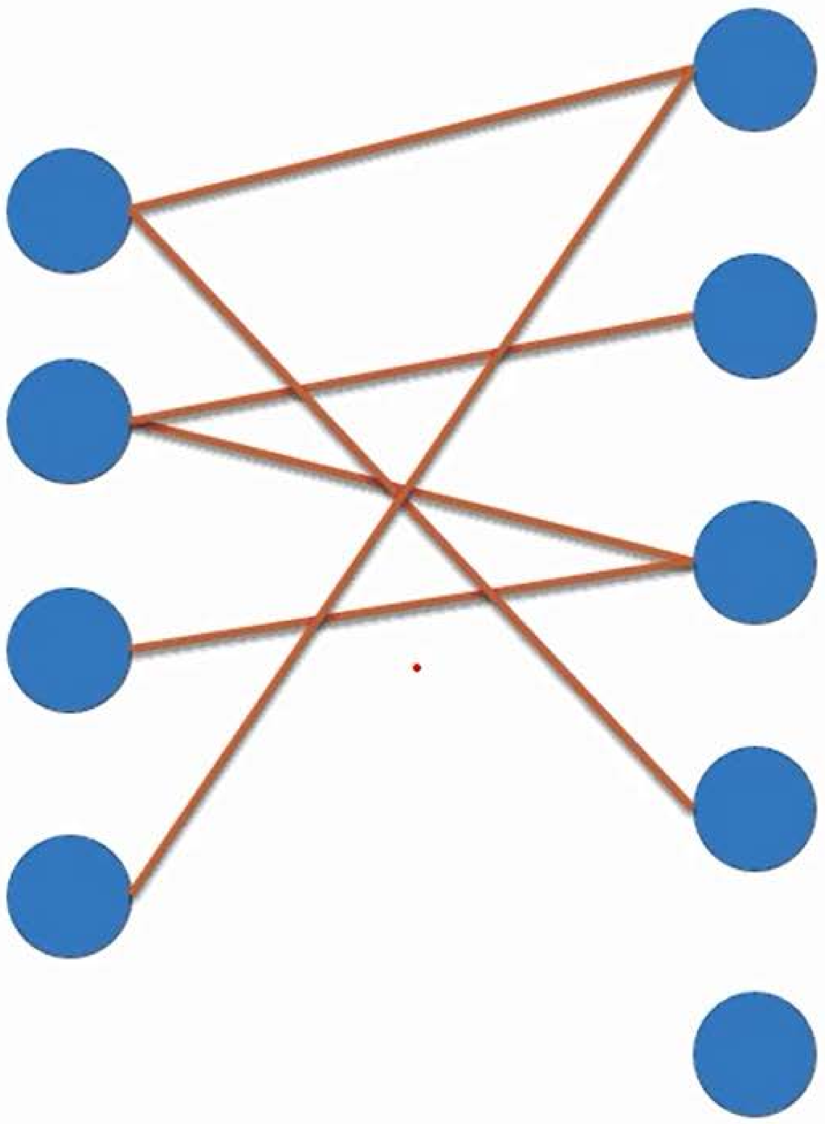
- Đồ thị vòng (cycle) C_n, $n \geq 3$ là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2 \ldots v_n$ và các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots \{v_{n-1}, v_n\}$ và $\{v_n, v_1\}$.



Đồ thị phân đôi (lưỡng phân)

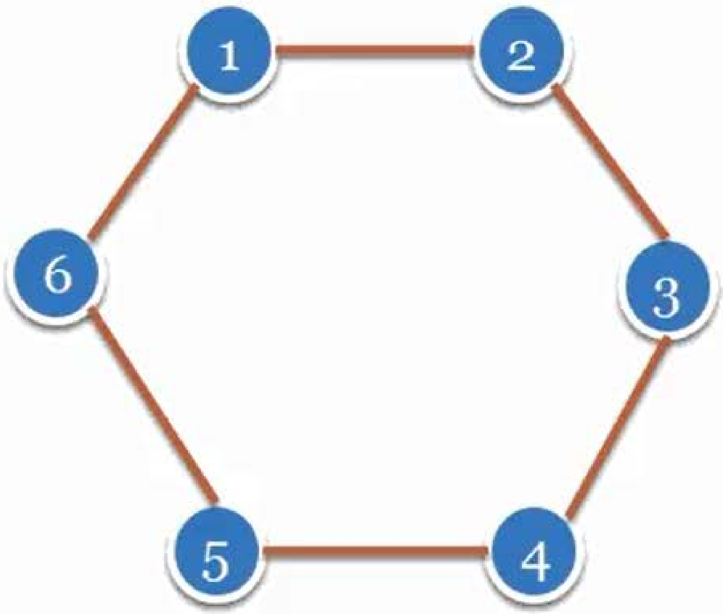
- Một đơn đồ thị G được gọi là đồ thị phân đôi (bipartite graph) nếu tập các đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.

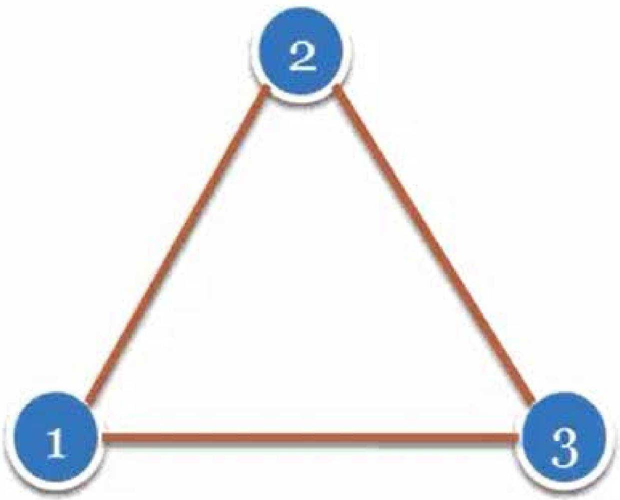
Đồ thị phân đôi (lưỡng phân)



Đồ thị phân đôi (lưỡng phân)

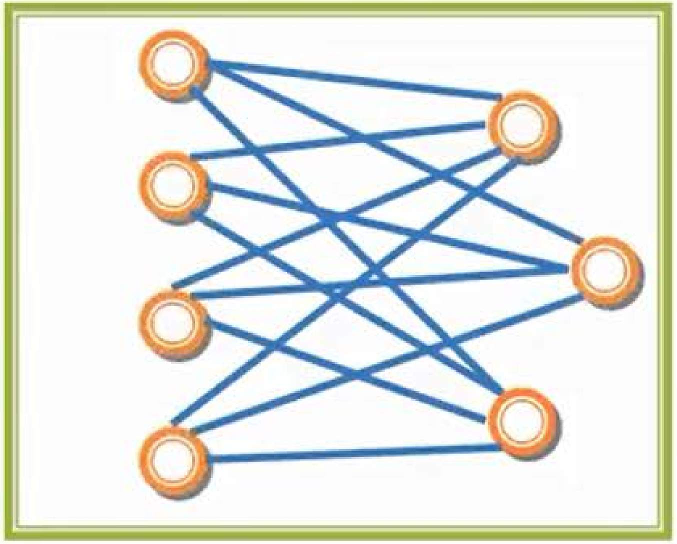
- Đồ thị C_6 và K_3 có phải là các đồ thị phân đôi? Giải thích.



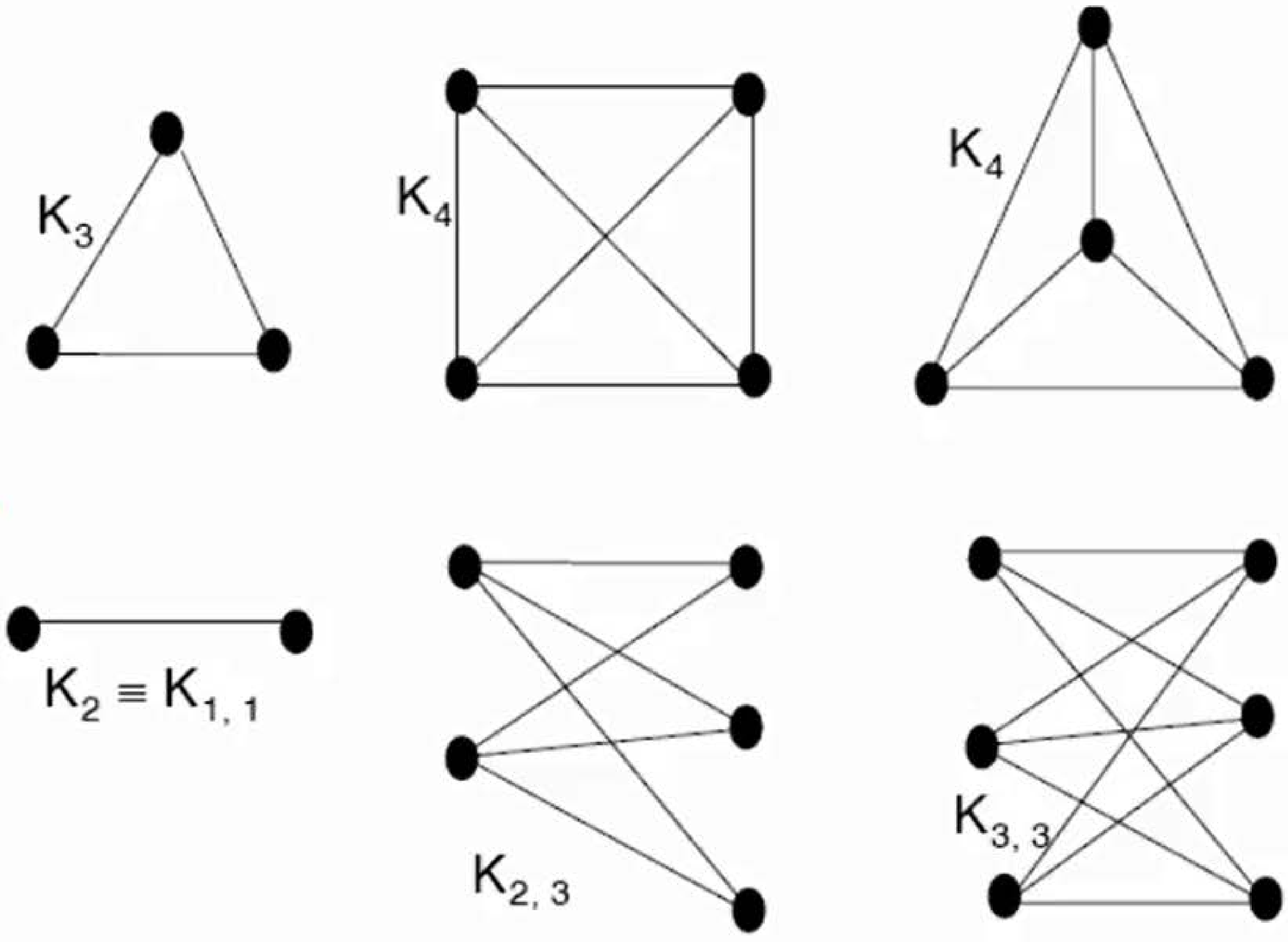


Đồ thị phân đôi đầy đủ

- Đồ thị phân đôi đầy đủ (complete bipartite graph) $K_{m,n}$ là đồ thị có tập đỉnh được phân thành hai tập con tương ứng có m đỉnh và n đỉnh và có một cạnh giữa 2 đỉnh nếu và chỉ nếu một đỉnh thuộc tập con này và đỉnh thứ hai thuộc tập con kia.



Ví dụ tổng hợp



Tóm tắt

- Thế nào là 2 đỉnh kề nhau?
- Bậc của đỉnh là gì?
- Mối liên quan giữa số cạnh và bậc?
- Số lượng đỉnh bậc lẻ của một đồ thị?
- Đỉnh treo? Đỉnh cô lập?
- Đồ thị đầy đủ?
- Đồ thị vòng?
- Đồ thị phân đôi?
- Đồ thị phân đôi đầy đủ?
- Đồ thị con? Đồ thị bộ phận

Bài tập

1. Cho G là một đồ thị đơn, vô hướng có số đỉnh $n > 3$. Chứng minh G có chứa 2 đỉnh cùng bậc.

Bài tập

2. Có thể tồn tại đồ thị đơn có 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 hay không?

Bài tập

3. Trong một buổi chiêu đãi, mọi người đều bắt tay nhau. Chứng tỏ rằng tổng số người được bắt tay với một số lẻ người khác là một số chẵn. Giả sử không ai tự bắt tay mình

Bài tập

4. Vẽ các đồ thị:

a. K_7

b. $K_{1,8}$

c. $K_{4,4}$

Bài tập

5. Các đồ thị sau đây có bao nhiêu cạnh?

   a. K_n

   b. $K_{m,n}$

Bài tập

6. Đồ thị sẽ có bao nhiêu cạnh nếu nó có các đỉnh bậc 4, 3, 3, 2, 2? Vẽ một đồ thị như vậy.

Bài tập

7. Có tồn tại đồ thị đơn chứa năm đỉnh với các bậc sau đây? Nếu có hãy vẽ đồ thị đó.

   a. 3, 3, 3, 3, 2

   b. 1, 2, 3, 4 ,5

   c. 1, 1, 1, 1, 1

   d. 1, 2, 1, 2, 1

   e. 2, 1, 0, 2, 1

Bài tập

9. Các đồ thị sau đây có phải là đồ thị phân đôi không?