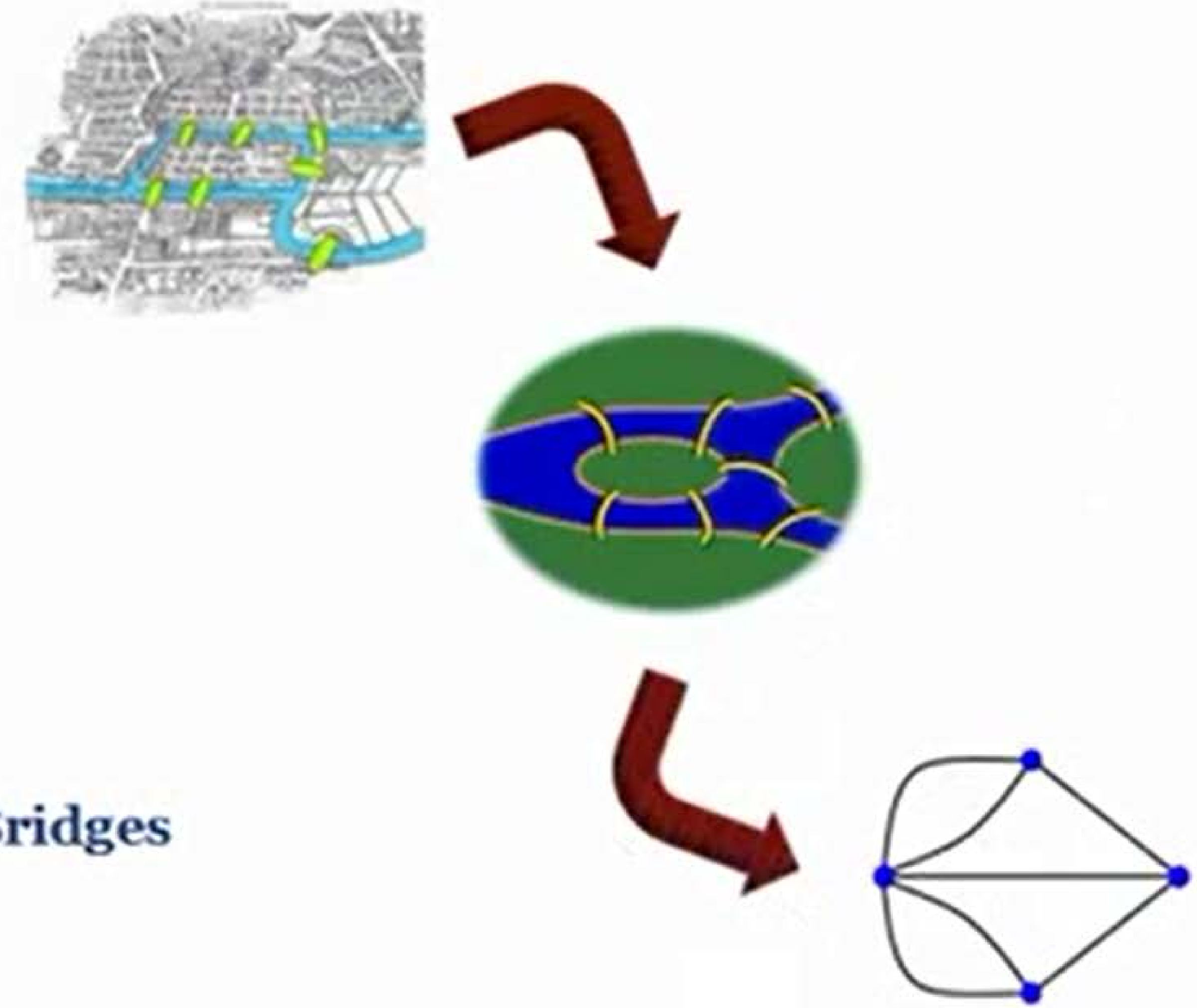
ĐỒ THỊ EULER

Lịch sử

- Thành phố Königsberg thuộc Phổ (bây giờ gọi là Kaliningrad thuộc Nga), được chia thành 4 vùng bằng các nhánh sông Pregel. Các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ XVIII người ta đã xây 7 chiếc cầu nối các vùng này với nhau.
- Vào chủ nhật, người dân ở đây thường đi bộ dọc theo các phố. Họ tự hỏi không biết có thể xuất phát tại một địa điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả các cầu, mỗi chiếc cầu không đi qua nhiều hơn một lần, rồi lại trở về điểm xuất phát được không.

Lịch sử

- Leonhard Euler (1707 – 1783)



Euler's Konigsberg's Bridges Problem, 1736

Phát biểu bài toán

- Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu không quá một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình như sau:

Có tồn tại chu trình đơn
trong đa đồ thị chứa tất cả các cạnh?

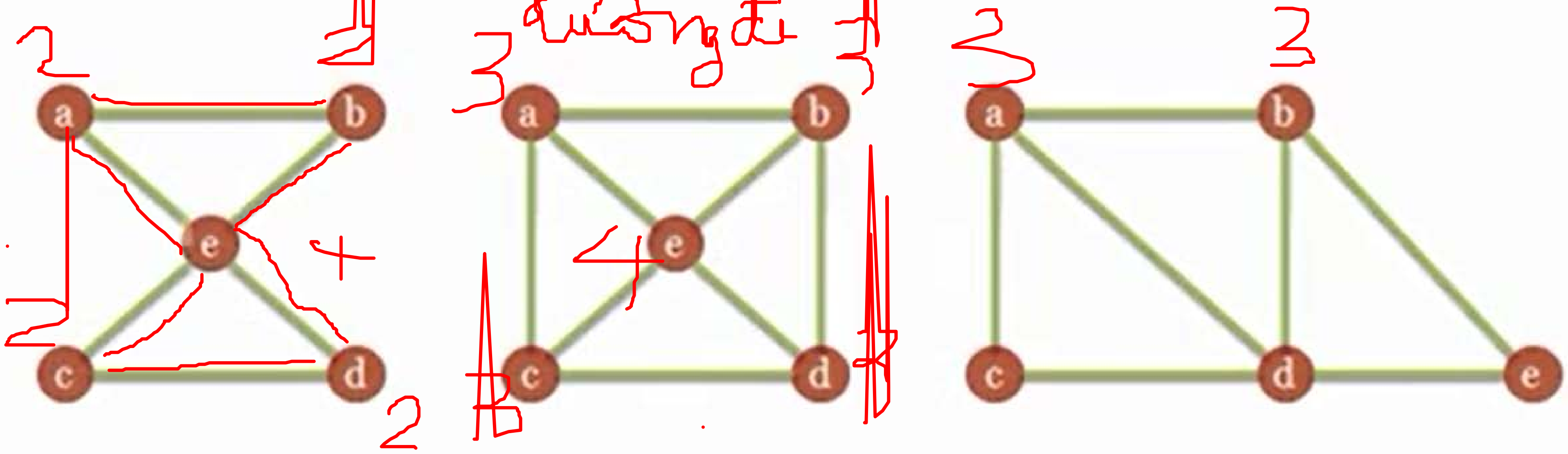
Định nghĩa

- Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là chu trình Euler (Eulerian circuit – Euler circuit).
- Đường đi Euler (Euler path) trong G là đương đi đơn chứa mọi cạnh của G.
- Đồ thị có chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler (Euler graph).
- Đồ thị có đường đi Euler được gọi là đồ thị nửa Euler (Semi-euler graph).

Ví dụ

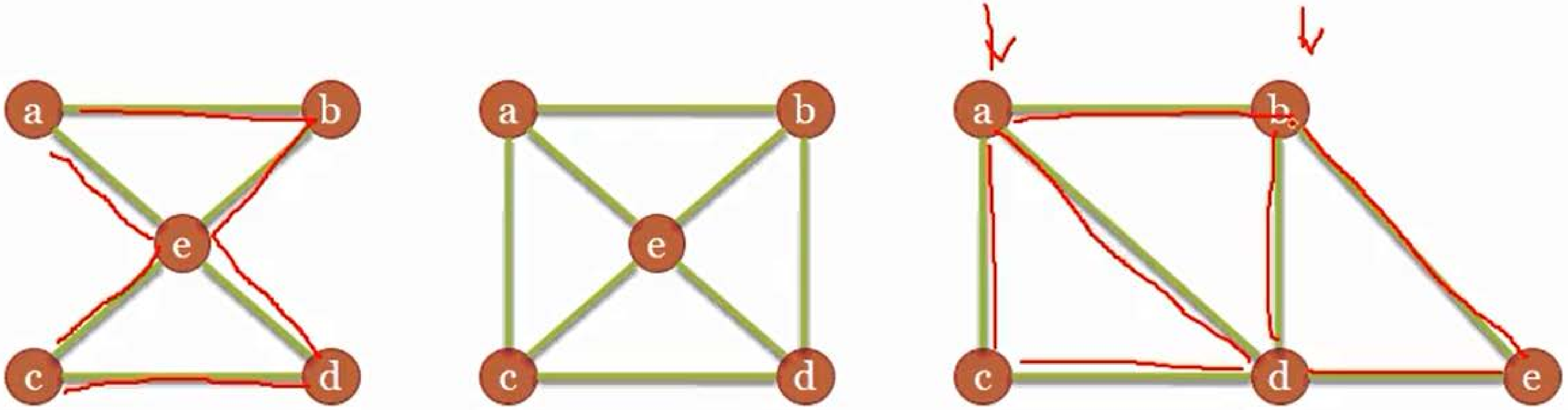
- Đồ thị nào trong 3 hình dưới có chu trình Euler? Nếu không, liệu nó có chu trình Euler hay không?

đường đi



Ví dụ

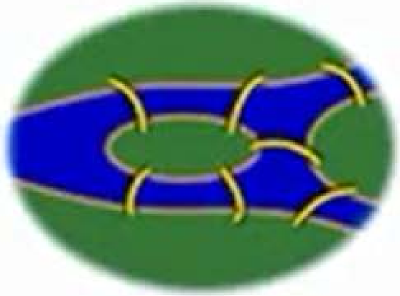
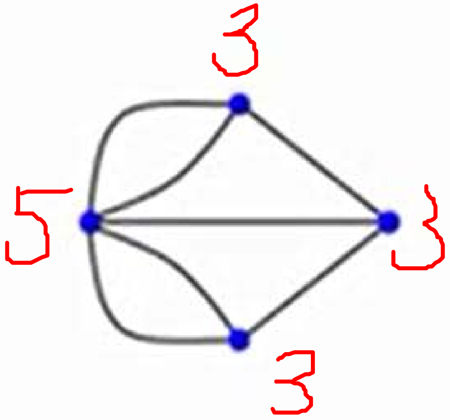
- Đồ thị nào trong 3 hình dưới có chu trình Euler? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler hay không?



Định lý

- Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

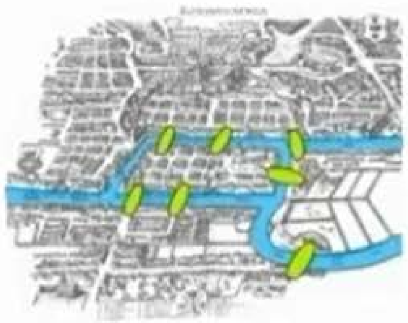
- *Như vậy bài toán 7 cây cầu đã được giải: Do đồ thị có 4 đỉnh bậc lẻ nên không thể có chu trình Euler. Vì vậy không thể bắt đầu từ một địa điểm bất kỳ, đi qua mỗi cây cầu một lần sao cho quay về lại địa điểm xuất phát.*

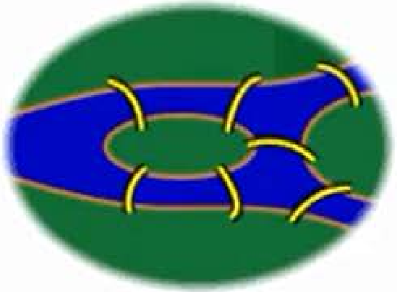




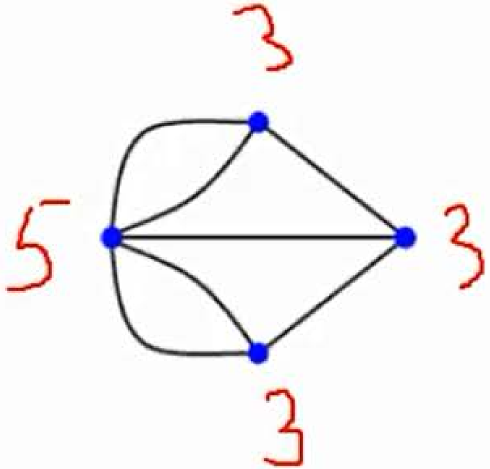
Định lý

- Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

- *Như vậy bài toán 7 cây cầu đã được giải: Do đồ thị có 4 đỉnh bậc lẻ nên không thể có chu trình Euler. Vì vậy không thể bắt đầu từ một địa điểm bất kỳ, đi qua mỗi cây cầu một lần sao cho quay về lại địa điểm xuất phát.*







Hệ quả

- Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.

rk = 2

Hệ quả

- Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.

$<= 2$

- Chứng minh:
  - Nếu G không có đỉnh bậc lẻ: theo định lý, hệ quả đúng.

Hệ quả

- Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.

- Chứng minh:
  - Nếu G không có đỉnh bậc lẻ: theo định lý, hệ quả đúng.
  - Nếu G có 2 đỉnh bậc lẻ u và v. Thêm cạnh (u, v), G trở nên không có bậc lẻ. Do vậy khi đó G có chu trình Euler. Suy ra trước khi thêm cạnh (u, v), G phải có đường đi Euler từ u đến v.

$n = 1$ 0 xảy ra

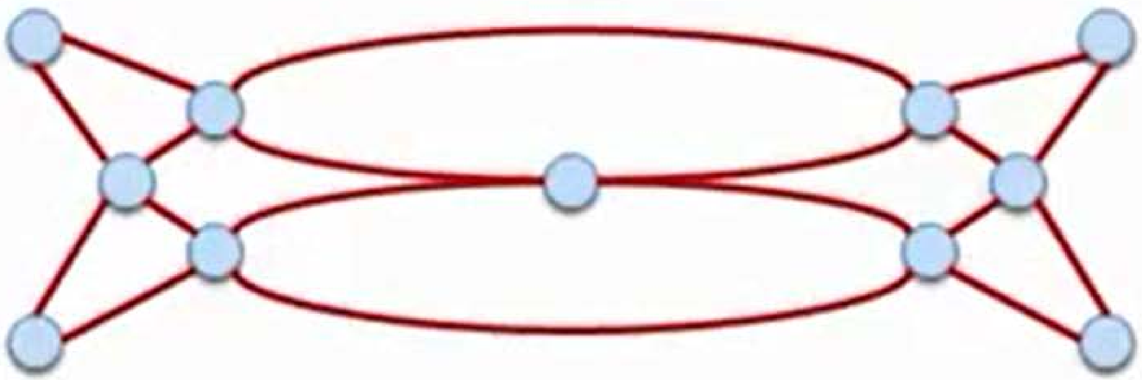
Thuật toán tìm chu trình Euler

- Bước khởi tạo:
  - Tìm chu trình C bất kỳ trong G.
  - Loại khỏi G các cạnh trong chu trình C.
- Bước lặp: Trong khi G $\neq \varnothing$ thực hiện các bước sau:
  - Bước 3.1. Tìm chu trình C' trong G có đỉnh bắt đầu thuộc C.
  - Bước 3.2. Loại bỏ khỏi G các đỉnh cô lập và các cạnh của C'.
  - Bước 3.3. Chèn vào C chu trình C' ở vị trí thích hợp.

Kết thúc thuật toán ta có C chính là chu trình Euler cần tìm

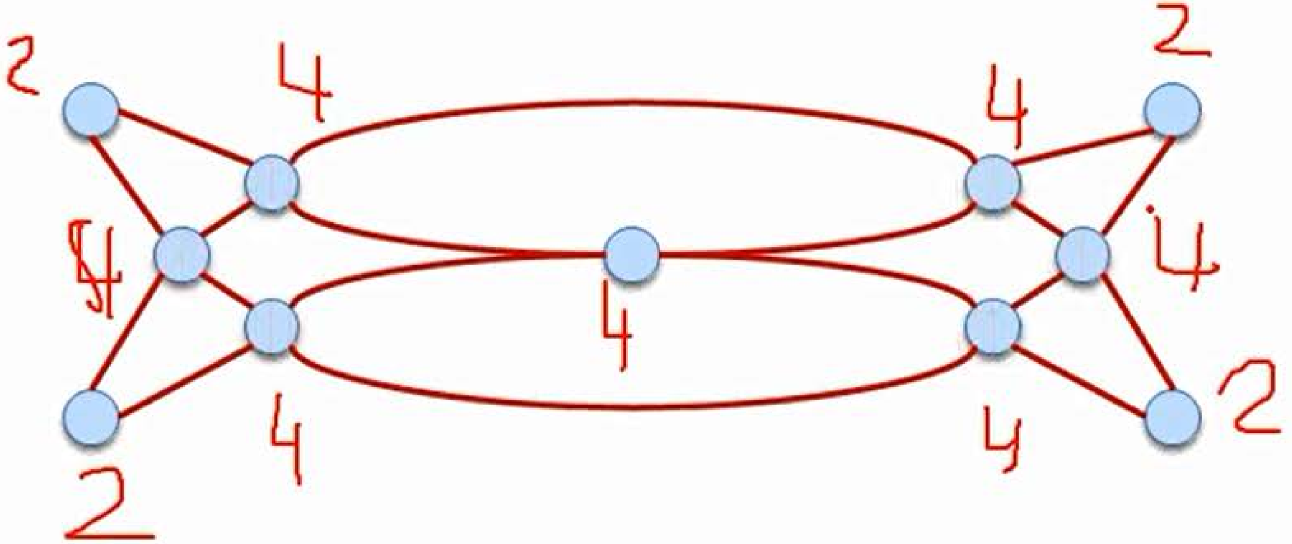
Ví dụ

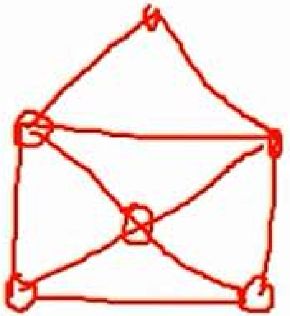
- Có thể vẽ *thanh mã tấu của Mohammed* xuất và và kết thúc tại một điểm bằng cách vẽ liên tục và không nhất bút lên được không? Vẽ như thế nào?



Ví dụ

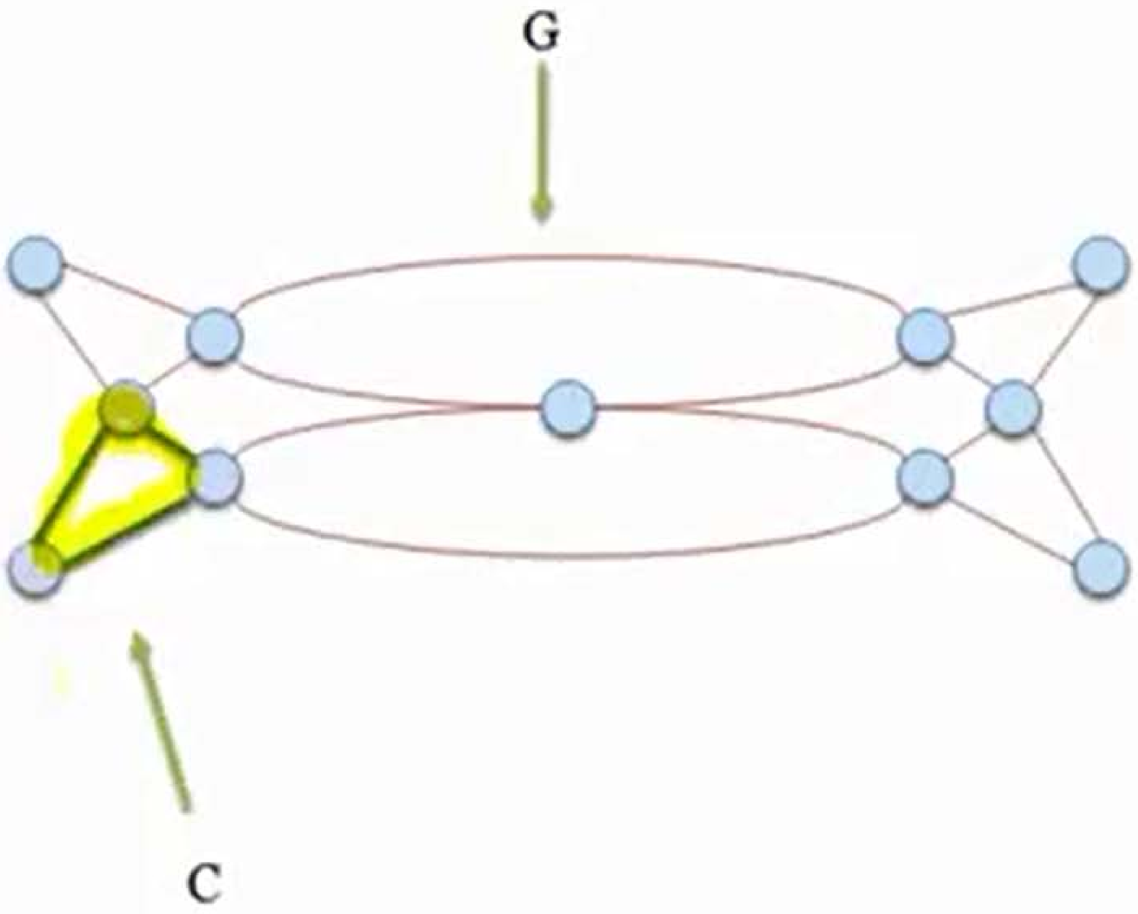
- Có thể vẽ *thanh mã tấu của Mohammed* xuất và và kết thúc tại một điểm bằng cách vẽ liên tục và không nhất bút lên được không? Vẽ như thế nào?





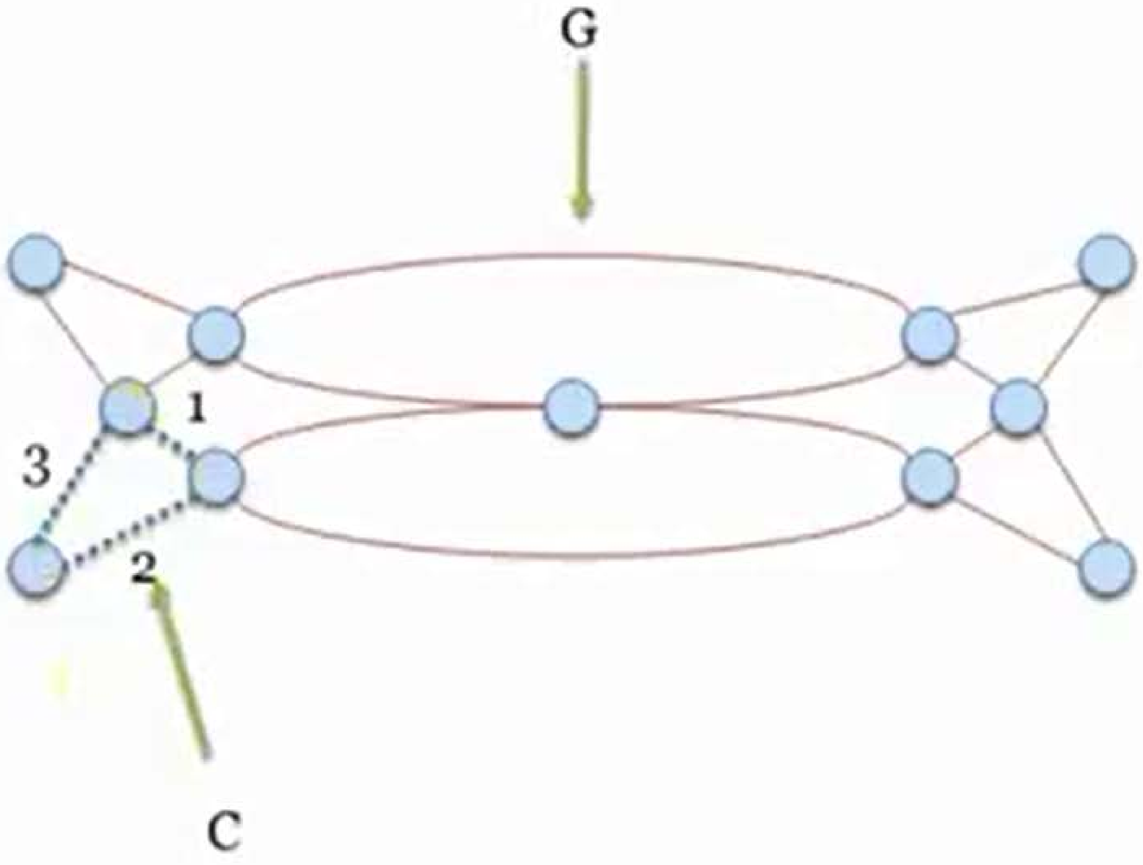
Ví dụ

- Tìm một chu trình C bất kỳ.



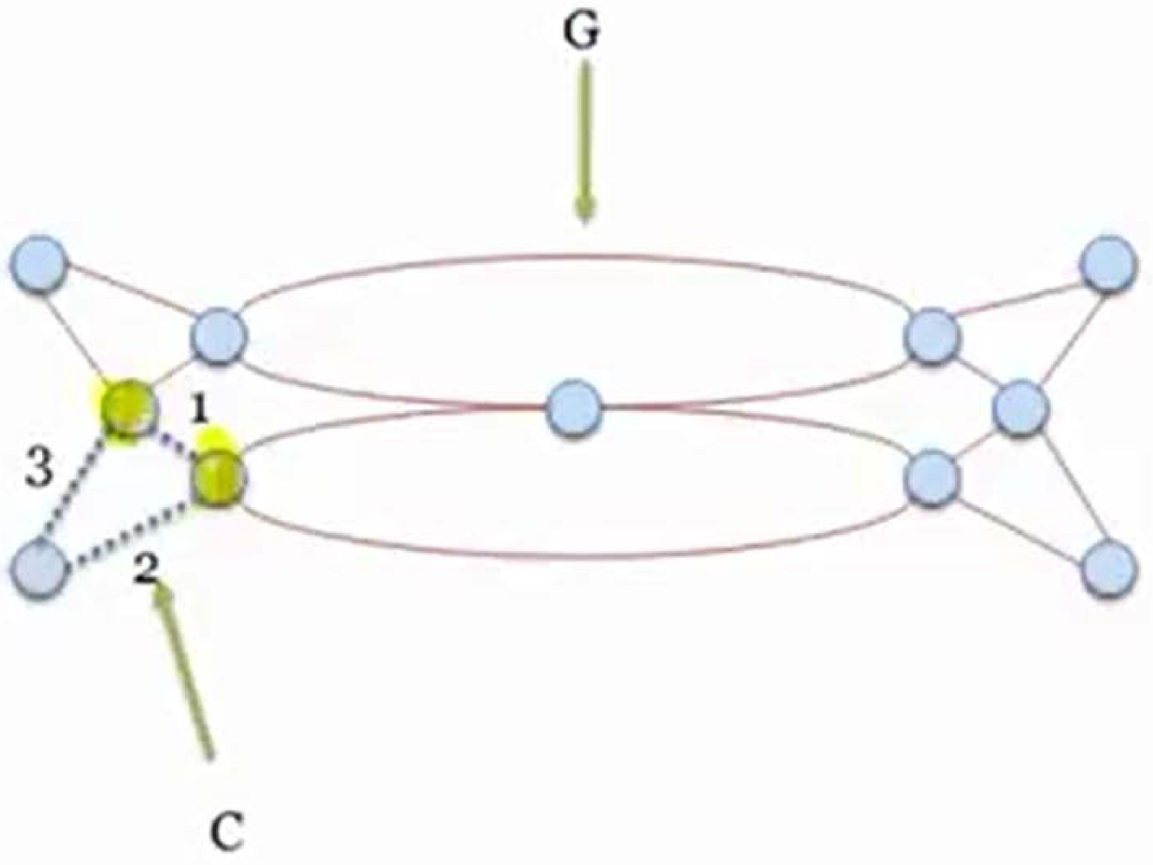
Ví dụ

- Xóa chu trình C đã tìm được ra khỏi G.



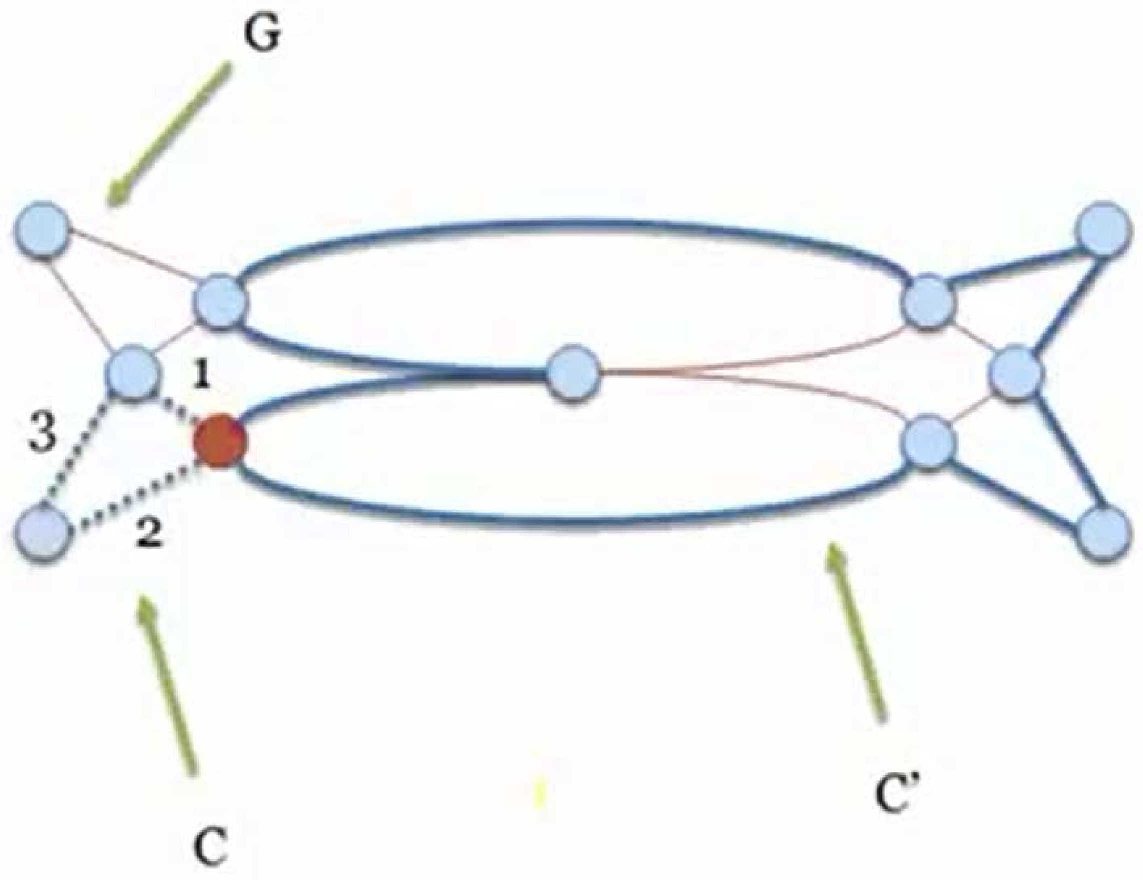
Ví dụ

- Xóa chu trình C đã tìm được ra khỏi G.



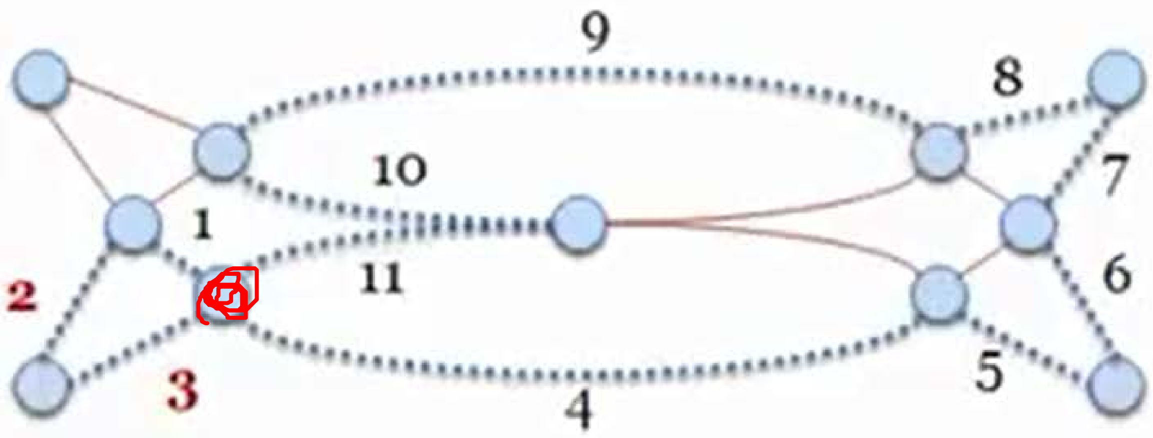
Ví dụ

- Tìm chu trình C’ trên G có đỉnh trên chu trình C đã tìm được.



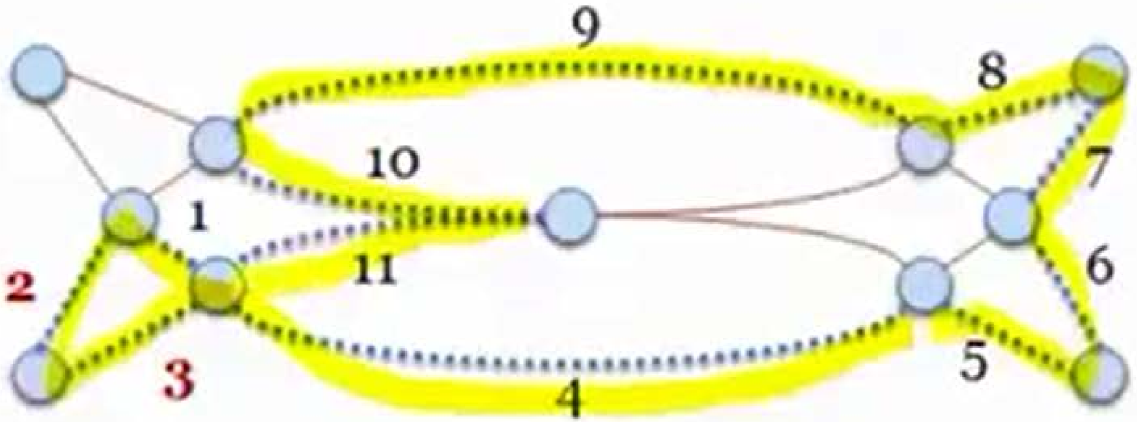
Ví dụ

- Thêm chu trình C' vừa tìm được vào C. Xóa C' ra khỏi G.



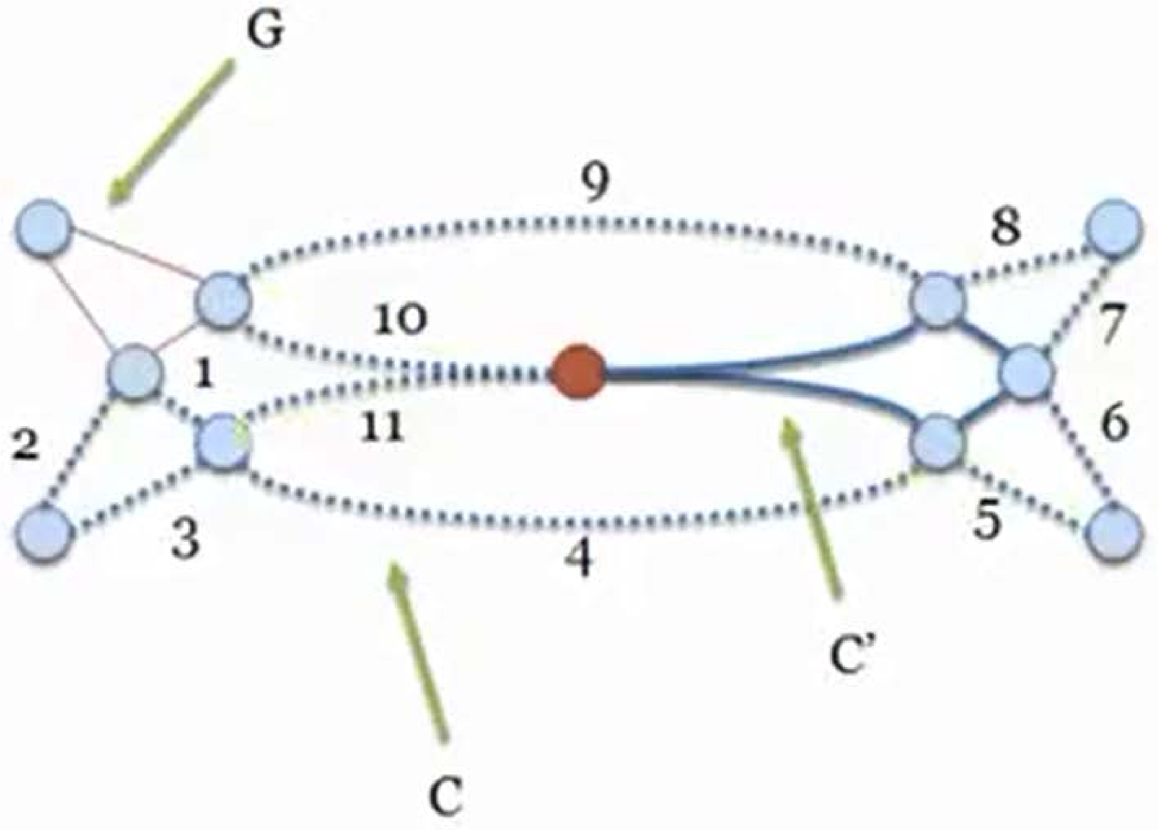
Ví dụ

- Thêm chu trình C' vừa tìm được vào C. Xóa C' ra khỏi G.



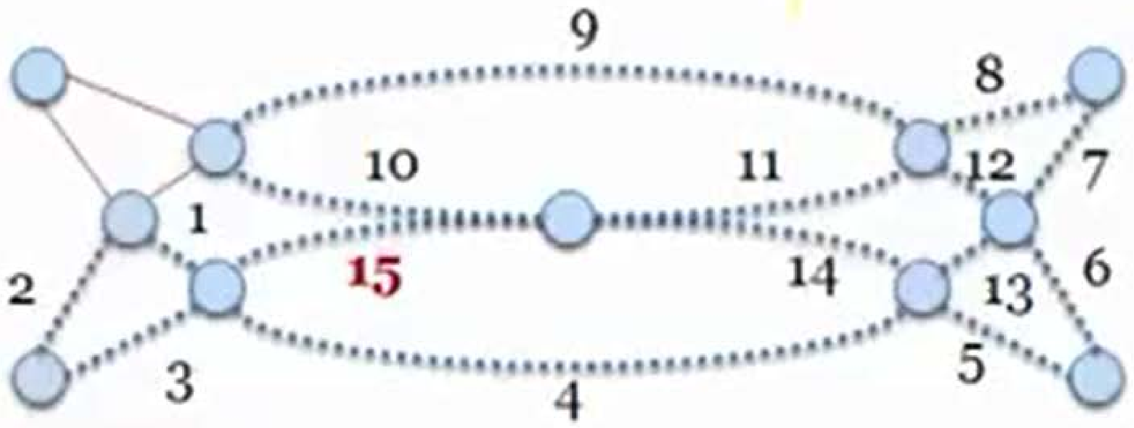
Ví dụ

- Tìm chu trình C’ trên G có đỉnh trên chu trình C đã tìm được.



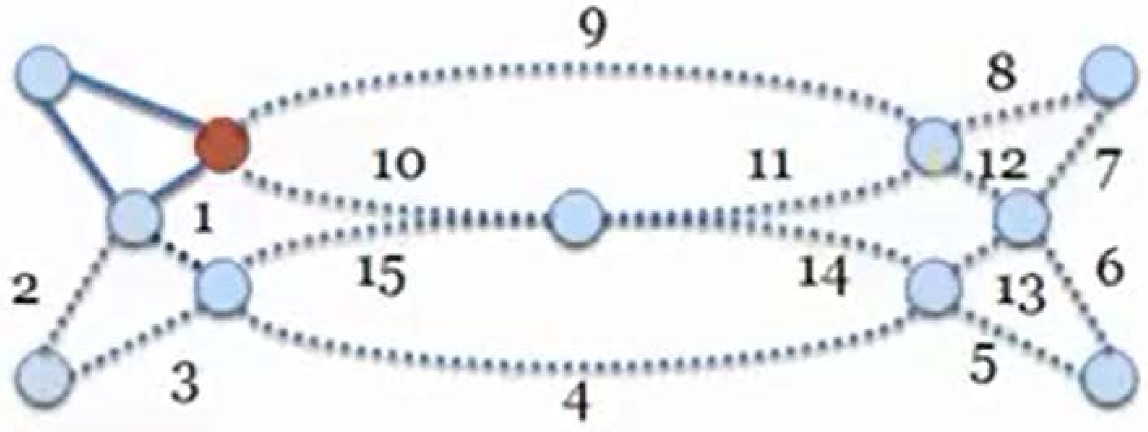
Ví dụ

- Thêm chu trình C' vừa tìm được vào C. Xóa C' ra khỏi G.



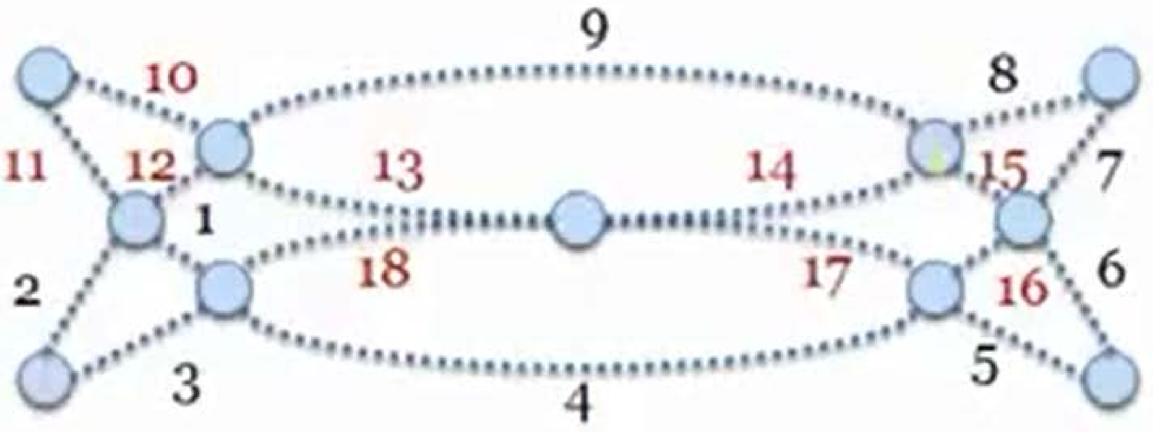
Ví dụ

- Tìm chu trình C' trên G có đỉnh trên chu trình C đã tìm được.



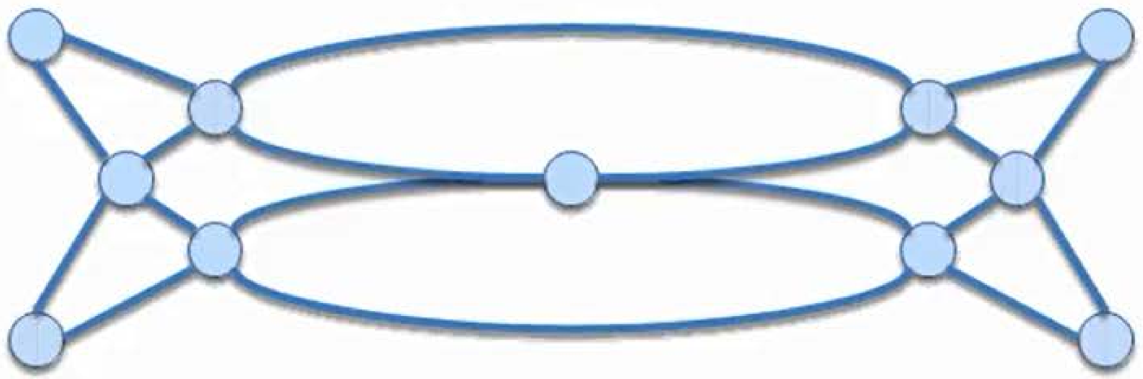
Ví dụ

- Thêm chu trình C' vừa tìm được vào C. Xóa C' ra khỏi G.



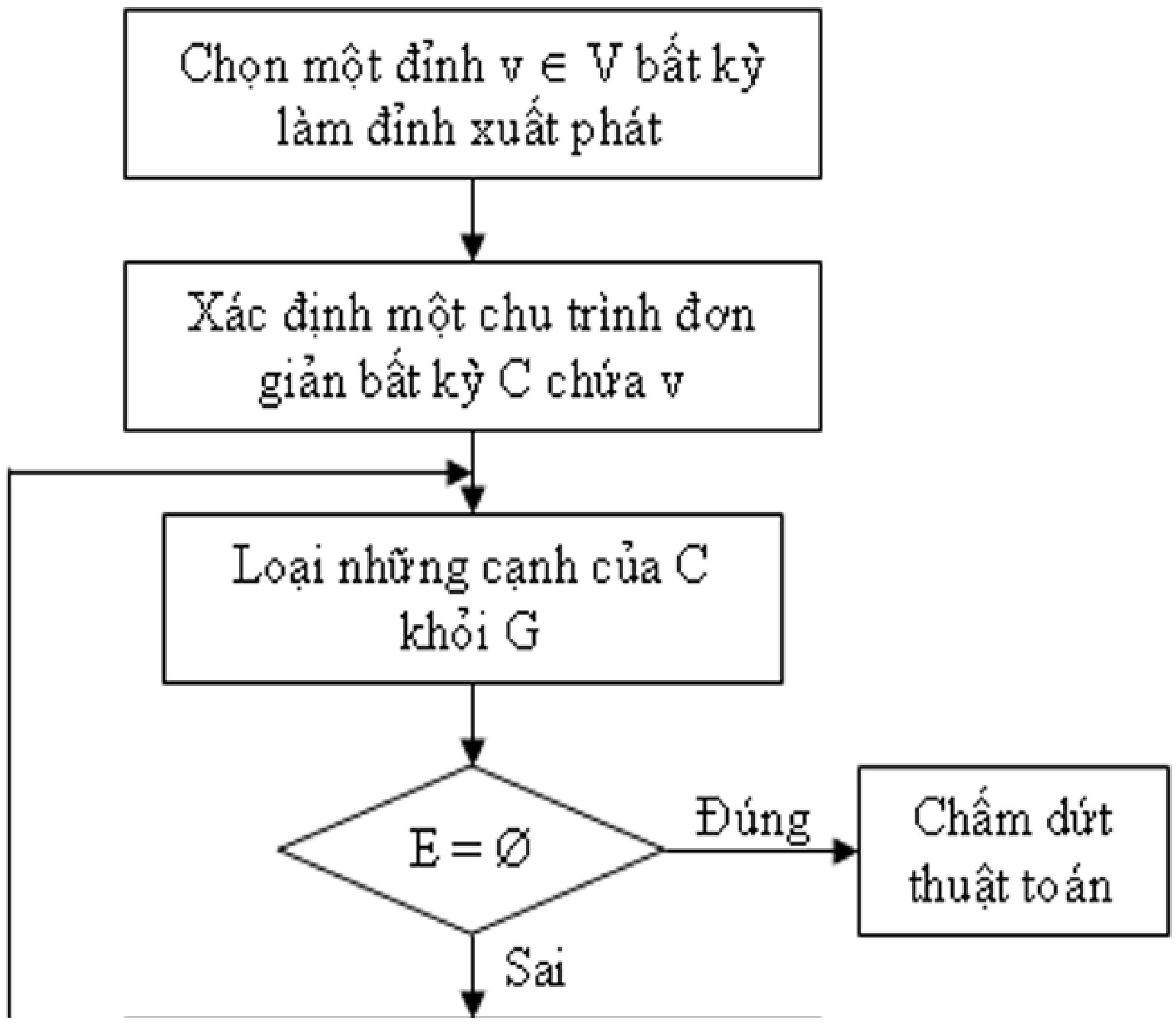
Ví dụ

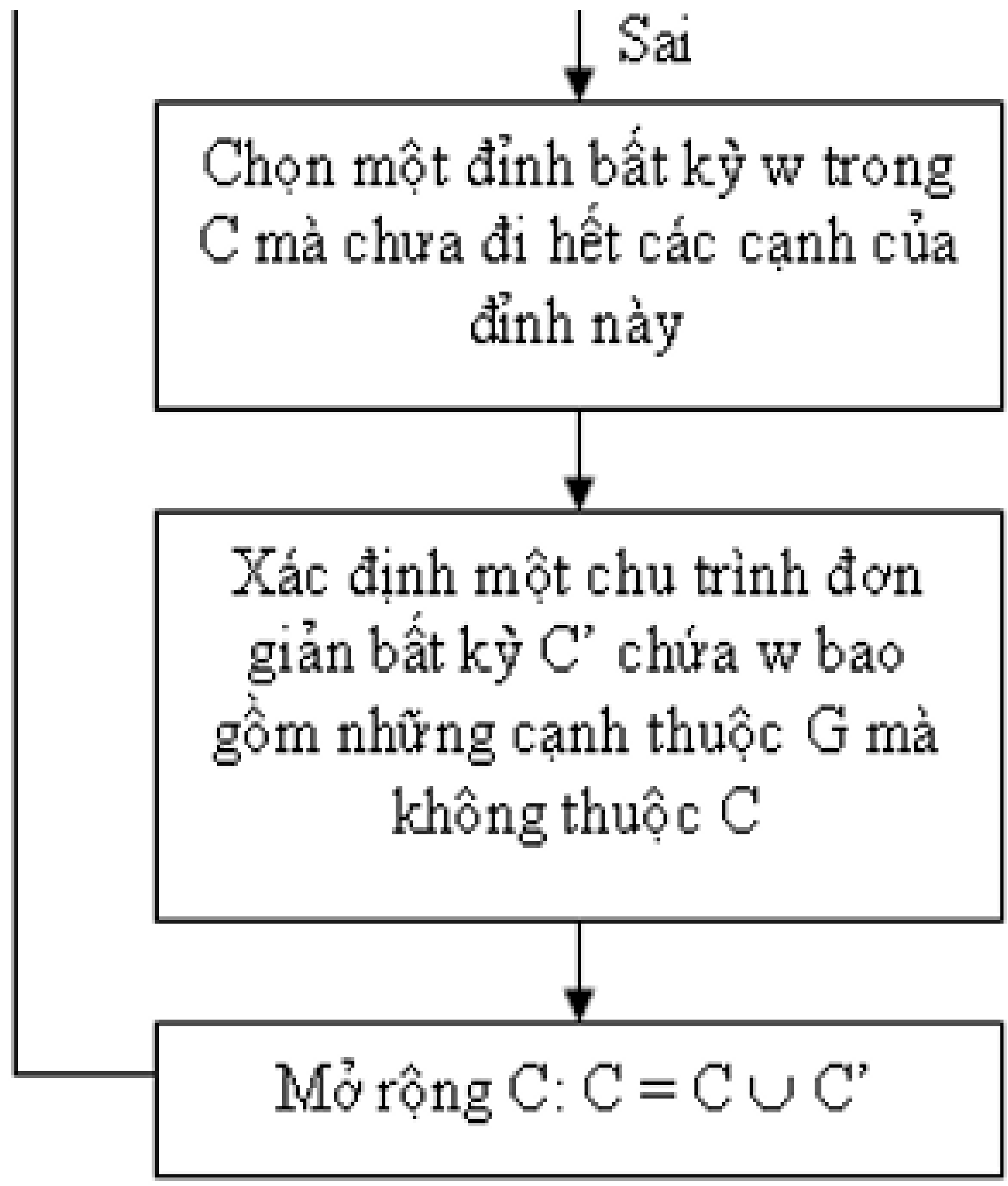
- Vậy ta có thể vẽ thanh mã tấu Mohammed liên tục bằng một nét và xuất phát/kết thúc cùng một điểm.

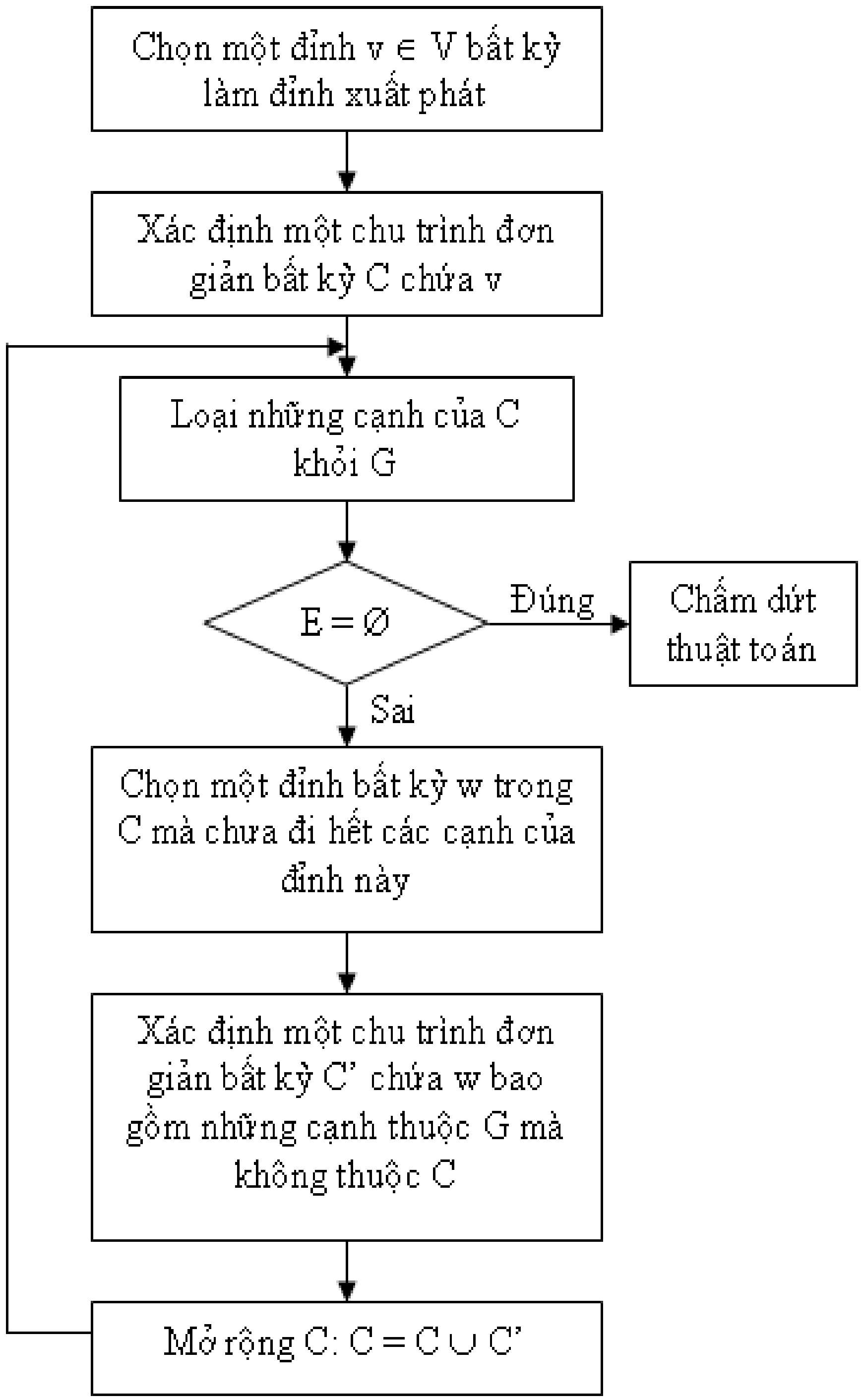


- Thuật toán tìm chu trình Euler của đồ thị G(V, E)

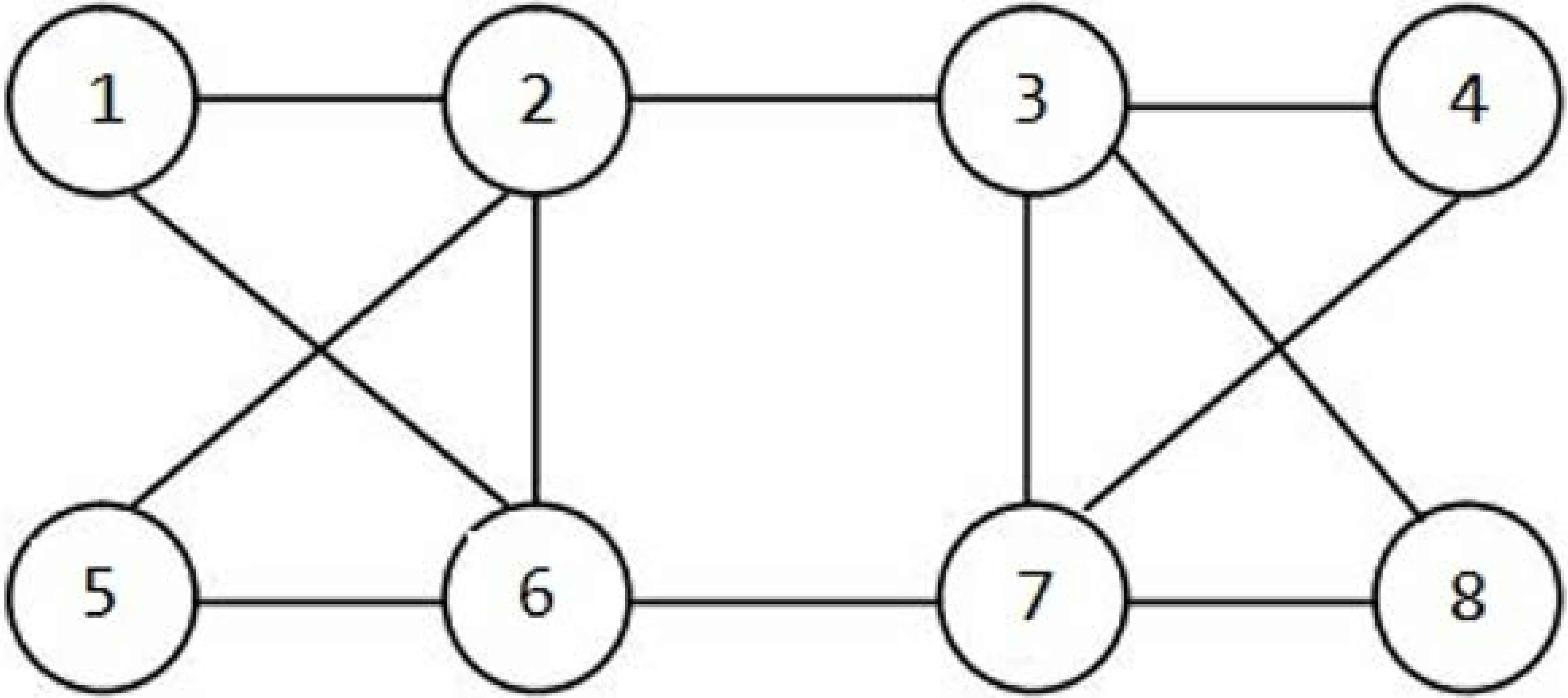
  Kết quả sẽ cho ra C là một chu trình Euler bao gồm thứ tự các cạnh của chu trình.


Chọn một đỉnh v ∈ V bất kỳ làm đỉnh xuất phát
Xác định một chu trình đơn giản bất kỳ C chứa v
Loại những cạnh của C khỏi G
E = Ø
Đúng
Chấm dứt thuật toán
Sai


Sai
Chọn một đỉnh bất kỳ w trong C mà chưa đi hết các cạnh của đỉnh này
Xác định một chu trình đơn giản bất kỳ C’ chứa w bao gồm những cạnh thuộc G mà không thuộc C
Mở rộng C: C = C ∪ C’


Chọn một đỉnh v ∈ V bất kỳ làm đỉnh xuất phát
Xác định một chu trình đơn giản bất kỳ C chứa v
Loại những cạnh của C khỏi G
E = Ø
Đúng
Chấm dứt thuật toán
Sai
Chọn một đỉnh bất kỳ w trong C mà chưa đi hết các cạnh của đỉnh này
Xác định một chu trình đơn giản bất kỳ C' chứa w bao gồm những cạnh thuộc G mà không thuộc C
Mở rộng C: C = C ∪ C'

Tìm chu trình Euler



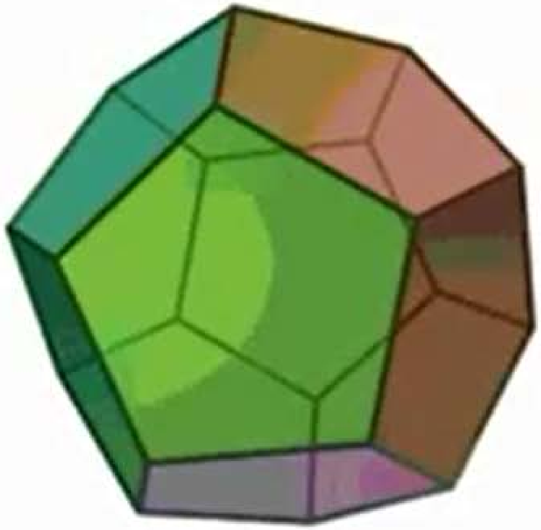
Bài tập

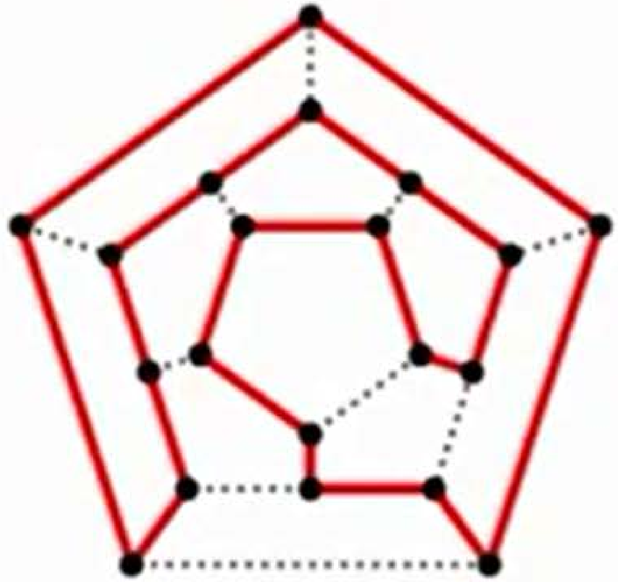
3. Với giá trị nào của m, n các đồ thị sau đây có chu trình Euler? Đường đi Euler?
   a) K_n
   b) C_n
   c) $K_{m, n}$

ĐỒ THỊ HAMILTON

Lịch sử

- Thuật ngữ này xuất phát từ trò đố vui do William Rowan Hamilton, nhà toán học người Ailen đưa ra vào năm 1857.
- Giả sử có một khối thập nhị diện (dodecahedron), mỗi mặt là một ngũ giác đều. Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh khối này được đặt tên một thành phố. Hãy tìm một đường xuất phát từ một thành phố, đi dọc theo cạnh của khối, ghé thăm mỗi một trong 19 thành phố còn lại đúng một lần, cuối cùng trở về thành phố ban đầu.





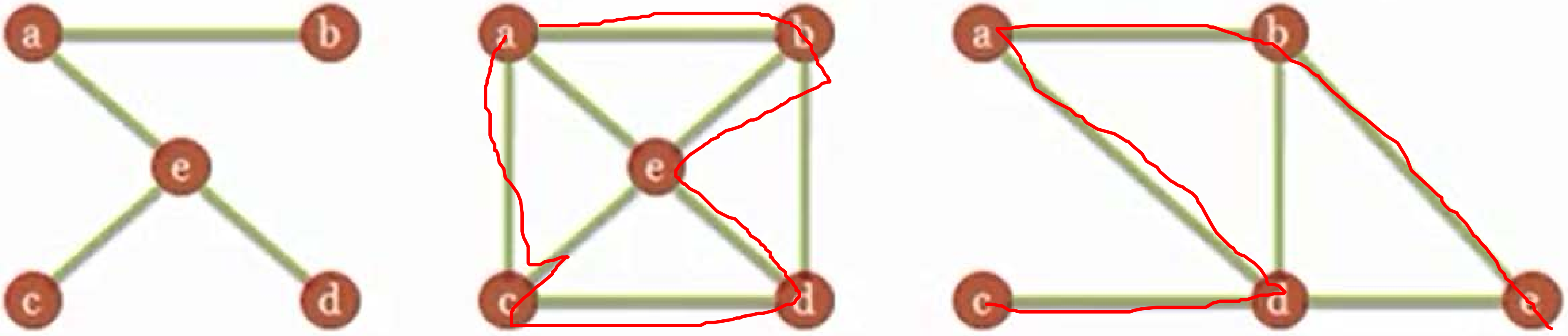
W. R. Hamilton
(1805 – 1865)

Định nghĩa

- Đường đi $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}, x_n$ trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đường đi Hamilton (Hamiltonia path, Hamilton path) nếu $V = \{x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n\}$ và $x_i \neq x_j$, với $0 \leq i < j \leq n$.
- Chu trình $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 1)$ trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là chu trình Hamilton (Hamilton circuit) nếu $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ là đường đi Hamilton.
- Đồ thị được gọi là đồ thị Hamilton (Hamilton graph) nếu nó chứa chu trình Hamilton và gọi là đồ thị nửa Hamilton (Semi-hamilton graph) nếu nó chứa đường đi Hamilton.

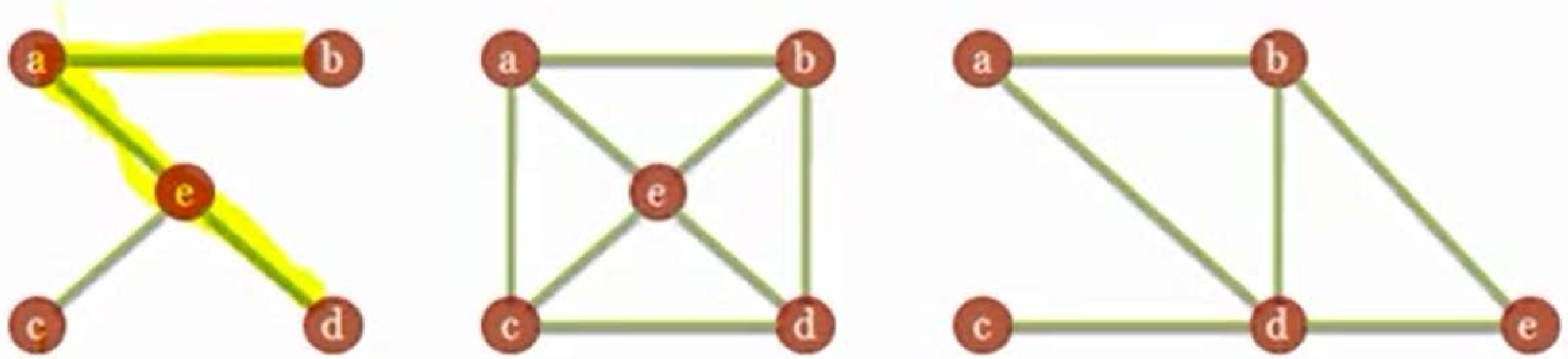
Ví dụ

- Đồ thị nào trong số các đồ thị sau đây là đồ thị Hamilton? Là nửa Hamilton?



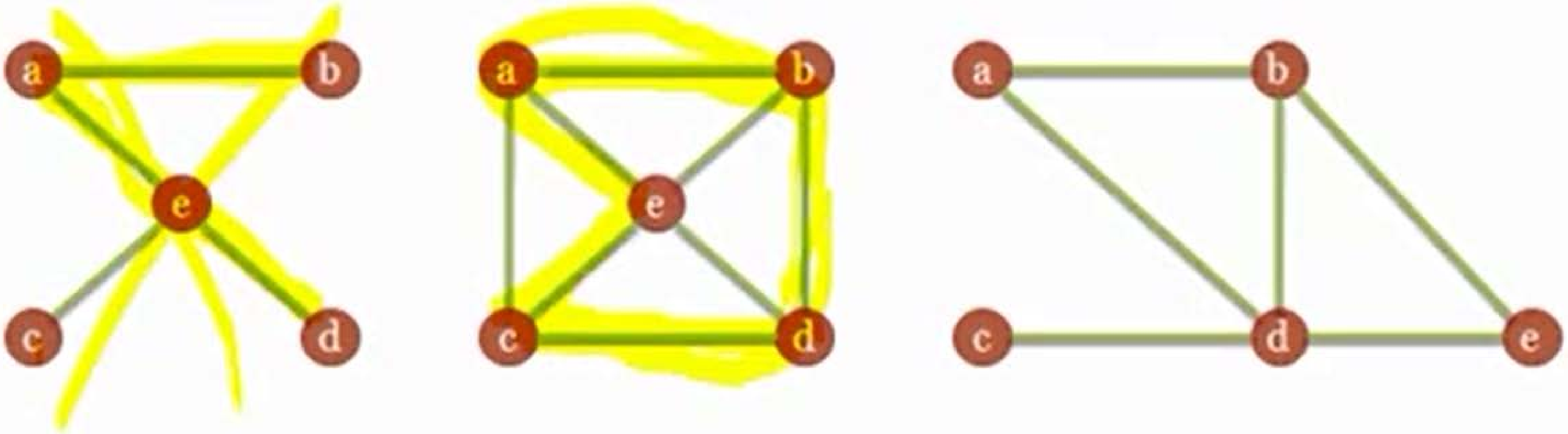
Ví dụ

- Đồ thị nào trong số các đồ thị sau đây là đồ thị Hamilton? Là nửa Hamilton?



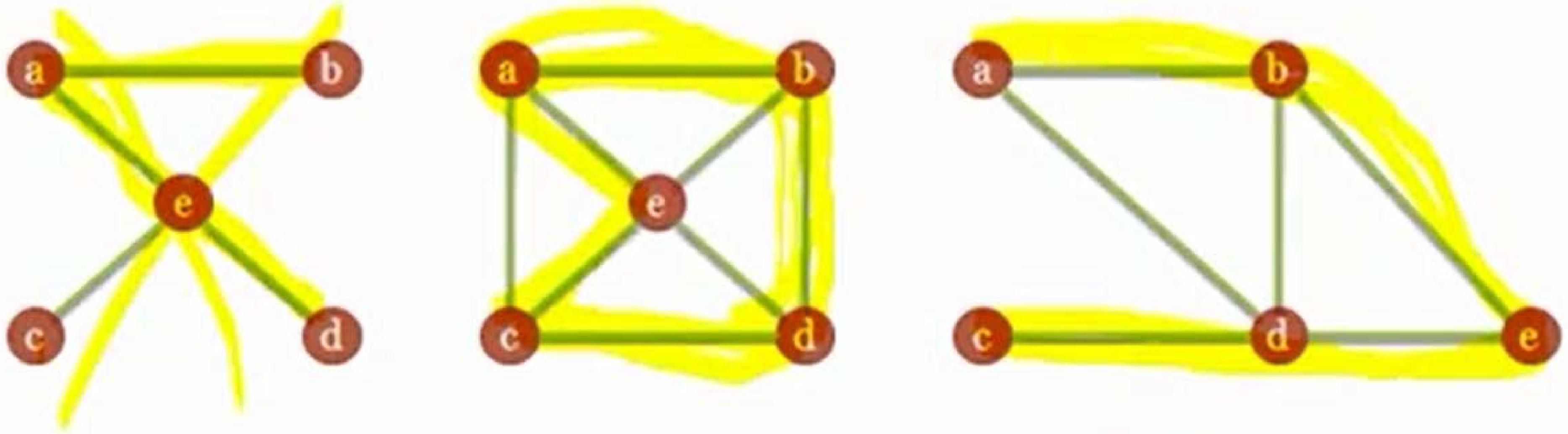
Ví dụ

- Đồ thị nào trong số các đồ thị sau đây là đồ thị Hamilton? Là nửa Hamilton?



Ví dụ

- Đồ thị nào trong số các đồ thị sau đây là đồ thị Hamilton? Là nửa Hamilton?



Nhận biết đồ thị Hamilton

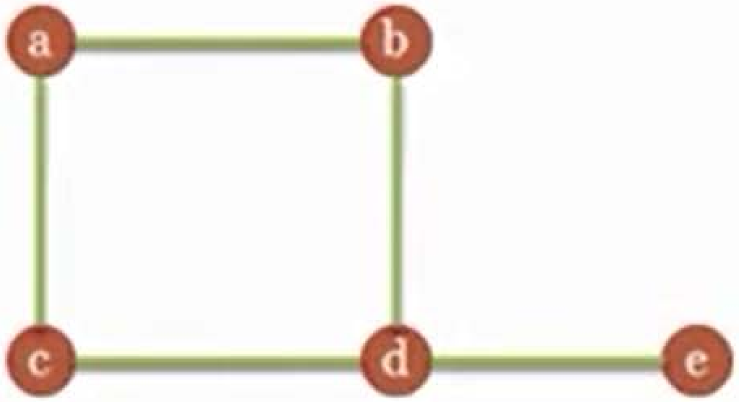
- Cho đến nay, người ta vẫn chưa tìm ra được điều kiện cần và đủ để tồn tại chu trình Hamilton.
- Các kết quả thu được phần lớn là các điều kiện đủ để một đồ thị là đồ thị Hamilton. Phần lớn chúng đều có dạng *"nếu G có số cạnh đủ lớn thì G là Hamilton"*

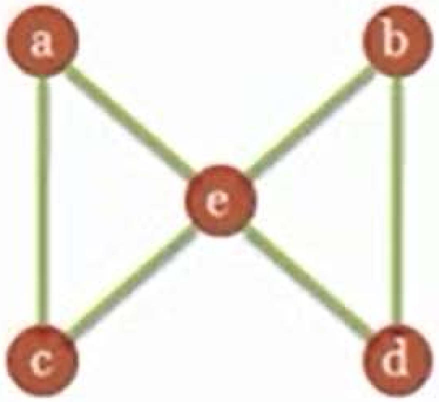
Nhận biết đồ thị không là Hamilton

- Một số tính chất sau đây có thể dùng để nhận biết một đồ thị không là Hamilton:
  - Tính chất 1: Đồ thị có đỉnh treo không thể có chu trình Hamilton. *(thật vậy, vì trong chu trình Hamilton mỗi đỉnh đều gắn với 2 cạnh trong chu trình).*
  - Tính chất 2: Nếu một đỉnh có bậc 2 thì cả 2 cạnh liên thuộc với đỉnh này phải là một phần của chu trình Hamilton.
- Lưu ý: Chu trình Hamilton không thể chứa chu trình nhỏ hơn trong nó.

Ví dụ

- Hãy chỉ ra rằng các đồ thị sau không là đồ thị Hamilton





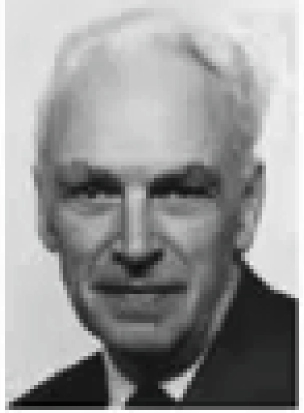
Một số định lý

- **Định lý Dirac** (1952):
  Đơn đồ thị vô hướng G = (V, E) với n đỉnh ($n \geq 3$) có chu trình Hamilton nếu

  $$\deg(v) \geq n/2, \forall v \in V$$

- **Định lý Ore** (1960):
  Đồ thị vô hướng G = (V, E) với $|V| \geq 3$ có chu trình Hamilton khi

  $$\forall (u, v) \notin E \rightarrow \deg(u) + \deg(v) \geq n$$



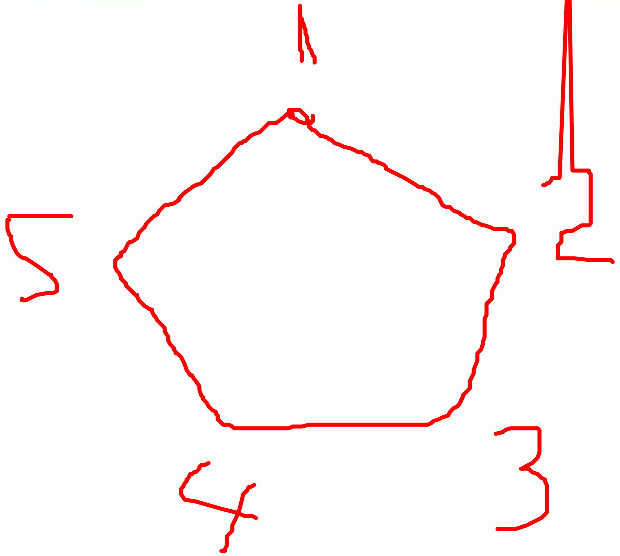
Ghi chú:

- Øystein Ore (1899 – 1968) là nhà toán học người Nauy.
- Gabriel Andrew Dirac (1925 – 1985) là nhà toán học người Thụy Sĩ, ông là con trước của nhà toán học Paul Dirac (1902 – 1984).

Lưu ý

- Cả hai định lý Ore và Dirac đều chỉ là điều kiện đủ để một đơn đồ thị liên thông có tồn tại chu trình Hamilton. Tuy nhiên, chúng không phải là điều kiện cần. Ví dụ đồ thị C_5 có chu trình Hamilton nhưng không thỏa mãn các giả định của định lý Ore hay định lý Dirac.

$4 >= 5$



Dirac

$n/2 = 5/2 = 2.5$

Chứng minh định lý Dirac

- Chứng minh này dựa trên định lý Ore.

- *Chứng minh:*
  - Với mọi cặp đỉnh u, v $\in$ V, không quan tâm có tồn tại cạnh (u, v) $\in$ E hay không nếu ta đều có:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n/2 + n/2 = n$$

  - Do đó, theo định lý Ore, đồ thị có chứa chu trình Hamilton [đpcm].

THUẬT TOÁN TÌM TẤT CẢ CHU TRÌNH HAMILTON

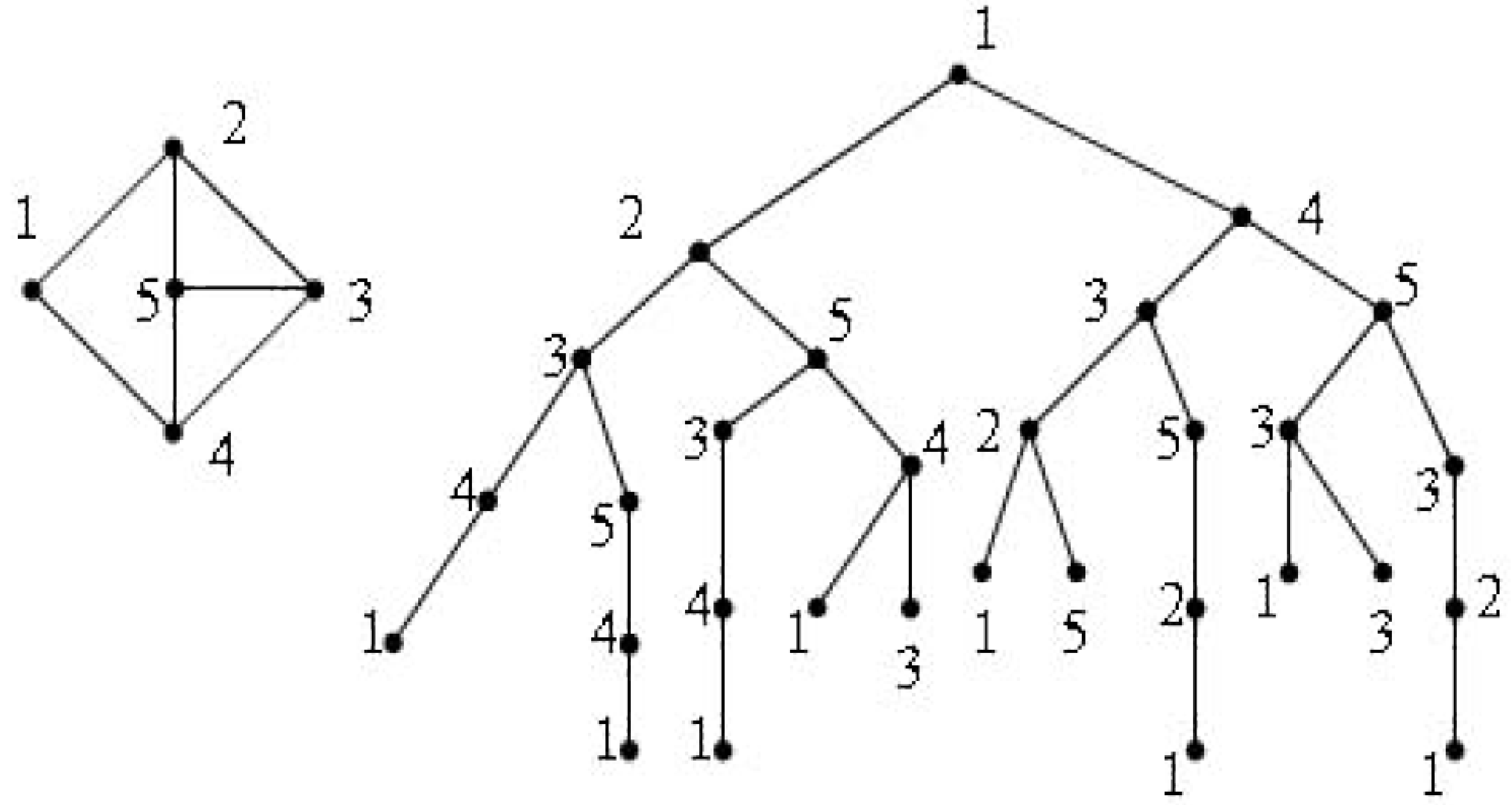
```
void main()
{
     for (v ∈ V)
          Chuaxet[v] =true;
     X[1] =0; // v0 la mot dinh nao do cua do thi
     Chuaxet[v0] =false;
     Hamilton(2);
}
```

void Hamilton(int k)

/* liet ke cac chu trinh Hamilton thu duoc bang viec phat trien day dinh (X[1],. . . , X[k-1]) cua do thi G=(V,E) cho boi danh sach ke: Ke(v), v∈ V */

```
{   for (y  ∈ Ke(X[k-1]))
            if ( (k ==N+1) && (y==v0))
                Ghinhan(X[1],. . . , X[n], v0)
            else
                if (Chuaxet[y])
                {      X[k] =y;
                       Chuaxet[y] =false;
                       Hamilton(k+1);
                       Chuaxet[y]=true;
                }
}
```

Ví dụ: Hình 3.12 mô tả cây tìm kiếm theo thuật toán vừa mô tả.

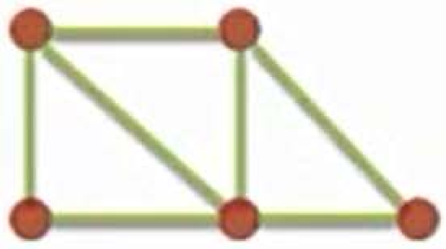


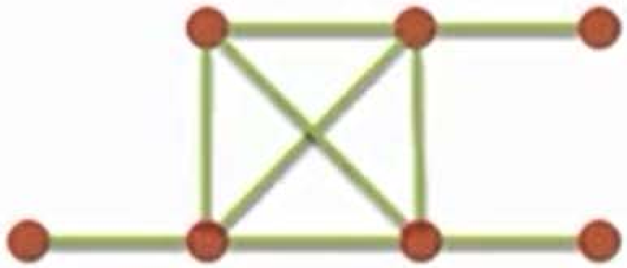
Hình 3.12. Đồ thị và cây liệt kê chu trình Hamilton của nó theo thuật toán quay lui

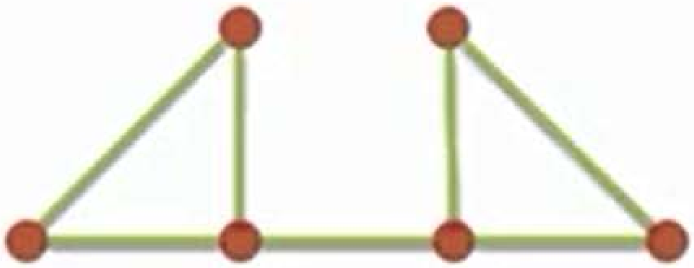
Trong trường hợp đồ thị có không quá nhiều cạnh thuật toán trên có thể sử dụng để kiểm tra đồ thị có phải là Hamilton hay không.

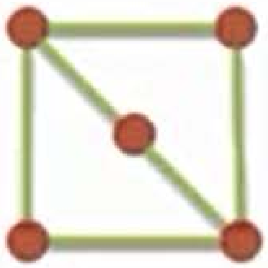
Bài tập

1. Xác định xem các đồ thị sau đây có là đồ thị Hamilton hay không? Nếu có, hãy chỉ ra, nếu không hãy giải thích. Câu hỏi tương tự với đồ thị là nửa Hamilton.



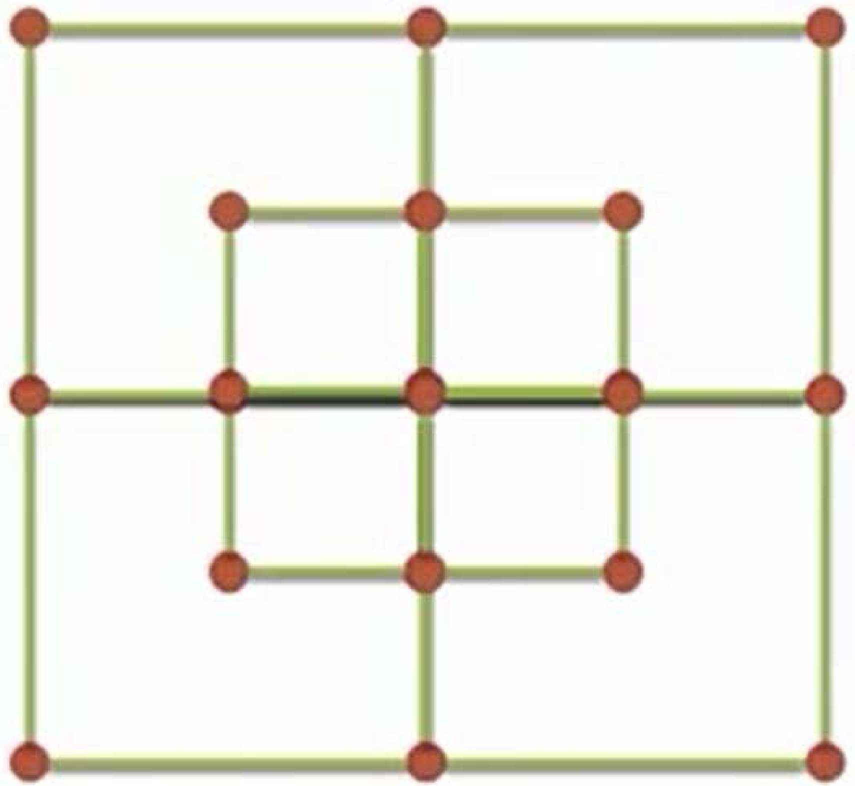






Bài tập

2. Xác định xem đồ thị sau đây có là đồ thị Hamilton hay không? Nếu có, hãy chỉ ra, nếu không hãy giải thích. Câu hỏi tương tự với đồ thị là nửa Hamilton.



Bài tập

3. Với các giá trị nào của n, đồ thị sau đây có đường đi Hamilton
   a) K_n
   b) C_n

Bài tập

4. Với giá trị nào của m và n đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton.

Bài tập

5. Đồ thị có một đỉnh kề với ba đỉnh bậc 2 thì có chu trình Hamilton hay không? Giải thích và cho ví dụ minh họa, nếu có.
6. Chứng tỏ rằng đồ thị phân đôi với một số lẻ các đỉnh không có chu trình Hamilton.
7. Vẽ đồ thị biểu diễn các di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ 3 x 4.
8. Chứng tỏ rằng có hành trình quân mã trên bàn cờ 3 x 4.
9. Chứng tỏ rằng không có hành trình của quân mã trên bàn cờ 4 x 4.