LUỒNG TRONG MẠNG

Bài giảng Lý thuyết đồ thị

Nội dung

- Giới thiệu
- Luồng trong mạng
- Bài toán luồng cực đại
- Thuật toán Ford Fulkerson
- Một số ứng dụng của bài toán luồng cực đại

Giới thiệu

- Luồng cực đại là một trong những bài toán tối ưu trên đồ thị tìm được những ứng dụng rất rộng rãi trong cả thực tế cũng như trong lý thuyết tổ hợp.
- Bài toán được đề xuất vào đầu những năm 1950 và gắn liền với tên tuổi của 2 nhà toán học Mỹ: **Ford** (Lester Randolph Ford: 1927 -) và **Fulkerson** (Delbert Ray Fulkerson: 1924 - 1976).

Các định nghĩa – Mạng

- *Mạng (network)* là một đồ thị có hướng *G* = (*V*, *E*) trong đó:
  - Có duy nhất một đỉnh *s* không có cung đi vào, được gọi là đỉnh phát (source)
  - Có duy nhất một đỉnh t không có cung đi ra, được gọi là đỉnh thu (sink)
  - Mỗi cạnh *e* = (u, v) $\in$ E được gán một số nguyên không âm *c(e)* = c[u, v] và gọi là *khả năng thông qua* của cung đó (capacity).
- Ta quy ước nếu mạng không có cung (u, v) thì ta thêm vào cung (u, v) với khả năng thông qua c[u, v] bằng 0.

Các định nghĩa – Tập cung vào ra

- Với một mạng G = (V, E, c), ta ký hiệu:
  - $W^-(v) = \{(u, v) \in E \mid u \in V\}$: tập các cung đi vào đỉnh v.
  - $W^+(v) = \{(v, u) \in E \mid u \in V\}$: tập các cung đi ra khỏi đỉnh v.

Các định nghĩa – Luồng trên mạng

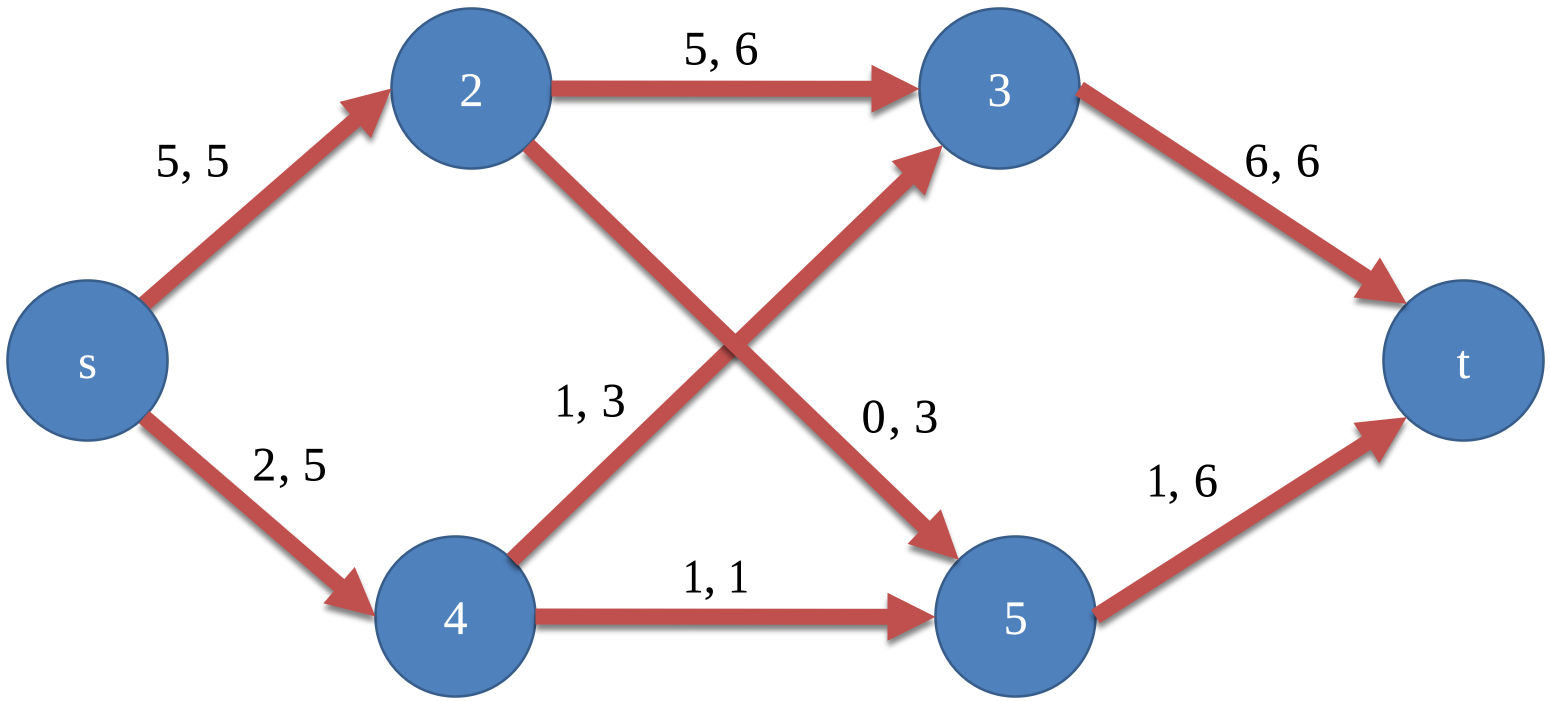
- Giả sử cho mạng G = (V, E). Ta gọi luồng f trong mạng là ánh xạ f: E → R_+ gán cho mỗi cung e = (u, v) $\in$ E một số thực không âm f(e) = f[u, v], thoả mãn các điều kiện sau:
  - ĐK 1 (Capacity Constraint): Luồng trên mỗi cung e $\in$ E không vượt quá khả năng thông qua của nó:
    $$0 \le f(e) \le c(e)$$
  - ĐK 2 (Flow Conversion): Điều kiện cân bằng luồng trên mỗi đỉnh của mạng: Tổng luồng trên các cung vào đỉnh v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi đỉnh v, nếu v $\neq$ s, t.
    $$t(W^-(x)) = t(W^+(x)), \forall x \neq s, t$$

Các định nghĩa – Giá trị của luồng

- Giá trị của một luồng được tính bằng tổng giá trị trên các cung đi ra từ đỉnh nguồn s, hoặc tổng giá trị trên các cung đi vào đỉnh thu t.

$$\mathrm{val}(f) = t(W^{+}(s)) = t(W^{-}(t))$$

Ví dụ



Bài toán luồng cực đại

- Cho một mạng G = (V, E), hãy tìm luồng f* trong mạng với giá trị luồng val(f*) là lớn nhất. Luồng như vậy sẽ được gọi là luồng cực đại trong mạng

Lát cắt

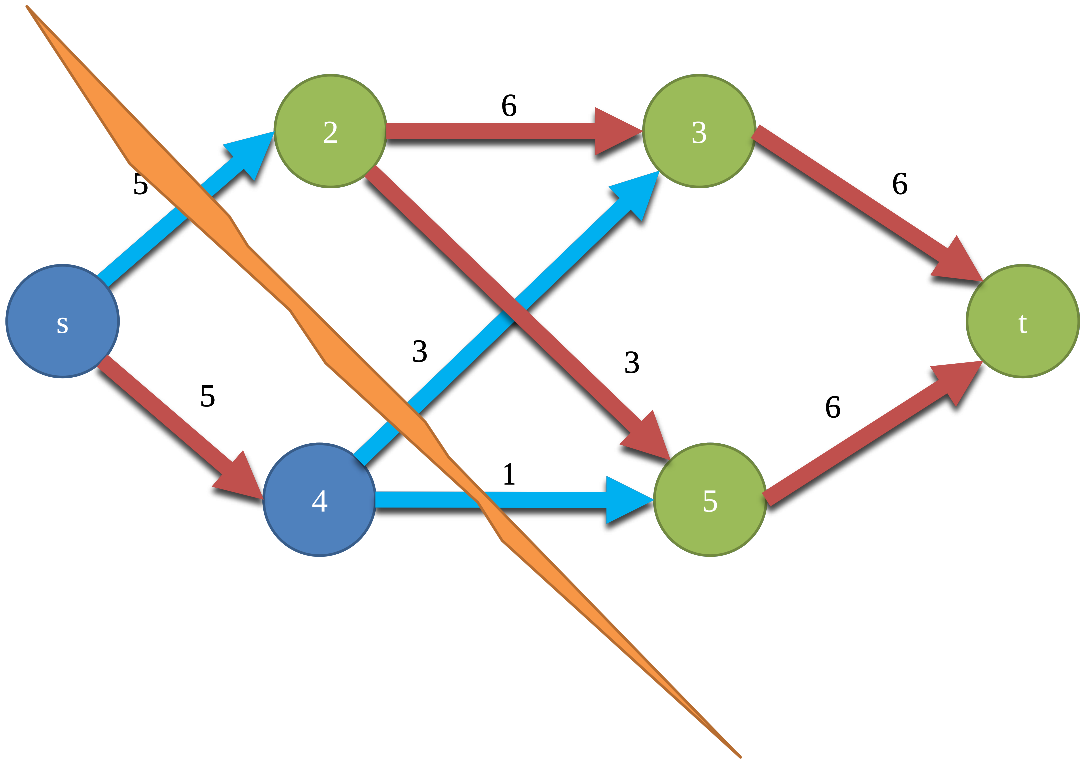
- Ta gọi lát cắt (X, X*) là một cách phân hoạch tập đỉnh V của mạng ra thành 2 tập X và X* = V\X, trong đó s $\in$ X và t $\in$ X*. Khả năng thông qua của lát cắt (X, X*) là số

$$c(X, X^*) = \sum_{\substack{v \in X \\ u \in X^*}} c(v, u)$$

- Lát cắt mà khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là **lát cắt hẹp nhất**.

Lát cắt – ví dụ

- Xác định lát cắt hẹp nhất của mạng sau:



Max flow – min cut

- Giá trị của mọi luồng f trong mạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng khả năng thông qua của lát cắt (X, X*) bất kỳ trong nó:

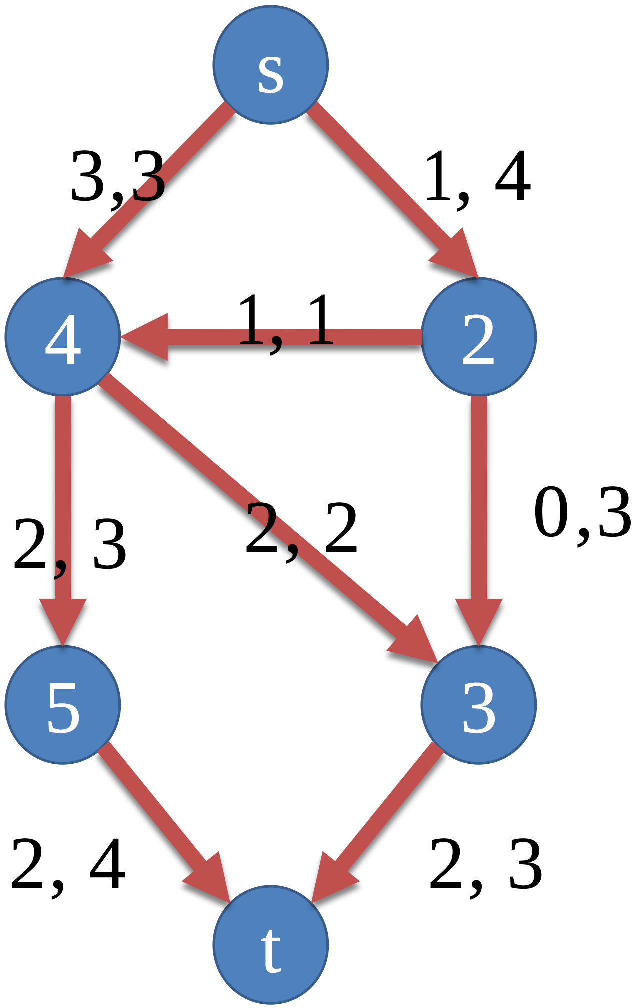
$$val(f) \le c(X, X^*)$$

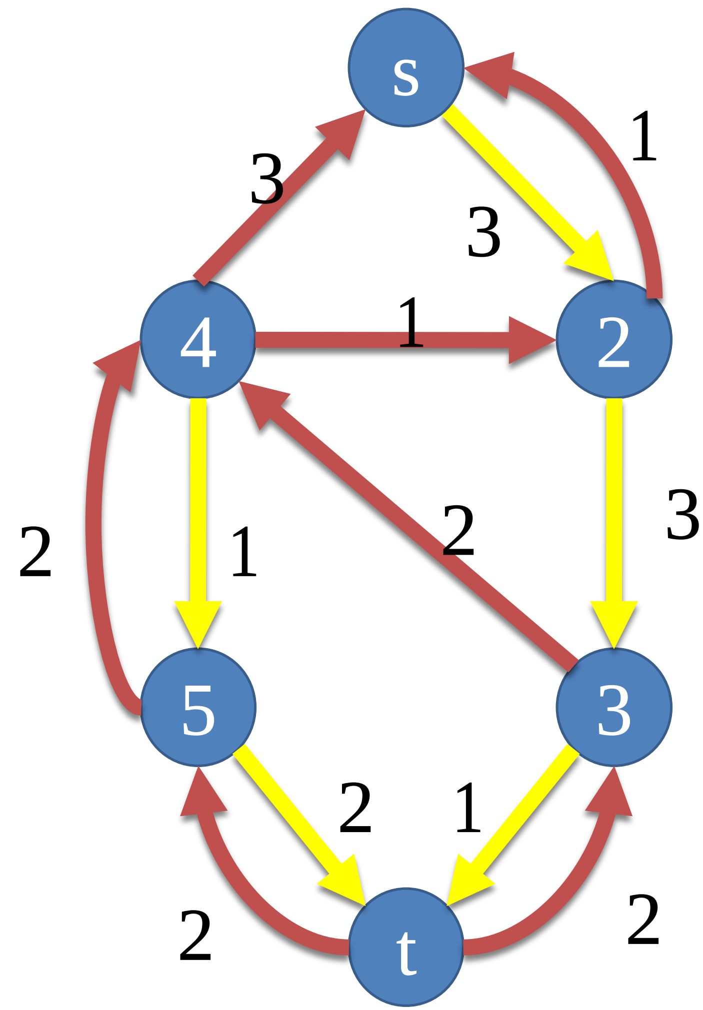
- Từ đó suy ra: Giá trị luồng cực đại trong mạng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất trong mạng.
- Định lý: **Giá trị luồng cực đại trong mạng bằng khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất**.

Đồ thị tăng luồng

- Giả sử f là một luồng trên mạng G = (V, E). Từ mạng G = (V, E) ta xây dựng đồ thị có trọng số trên cung $G_f = (V, E_f)$ với tập cung E_f và trọng số trên các cung được xác định theo quy tắc sau:
  1. Nếu e = (u, v) $\in$ E với f(u, v) = 0 thì (u, v) $\in E_f$ với trọng số c(u, v).
  2. Nếu e = (u, v) $\in$ E với f(u, v) = c(u, v) thì (v, u) $\in E_f$ với trọng số f(u, v).
  3. Nếu e = (u, v) $\in$ E với 0 < f(u, v) < c(u, v) thì (u, v) $\in E_f$ với trọng số c(u, v) – f(u, v) và (v, u) $\in E_f$ với trọng số f(u, v).
- Các cung của G_f đồng thời cũng là cung của G được gọi là ***cung thuận***, các cung còn lại được gọi là ***cung nghịch***. Đồ thị G_f được gọi là ***đồ thị tăng luồng***.

Đồ thị tăng luồng – Ví dụ





Tăng luồng

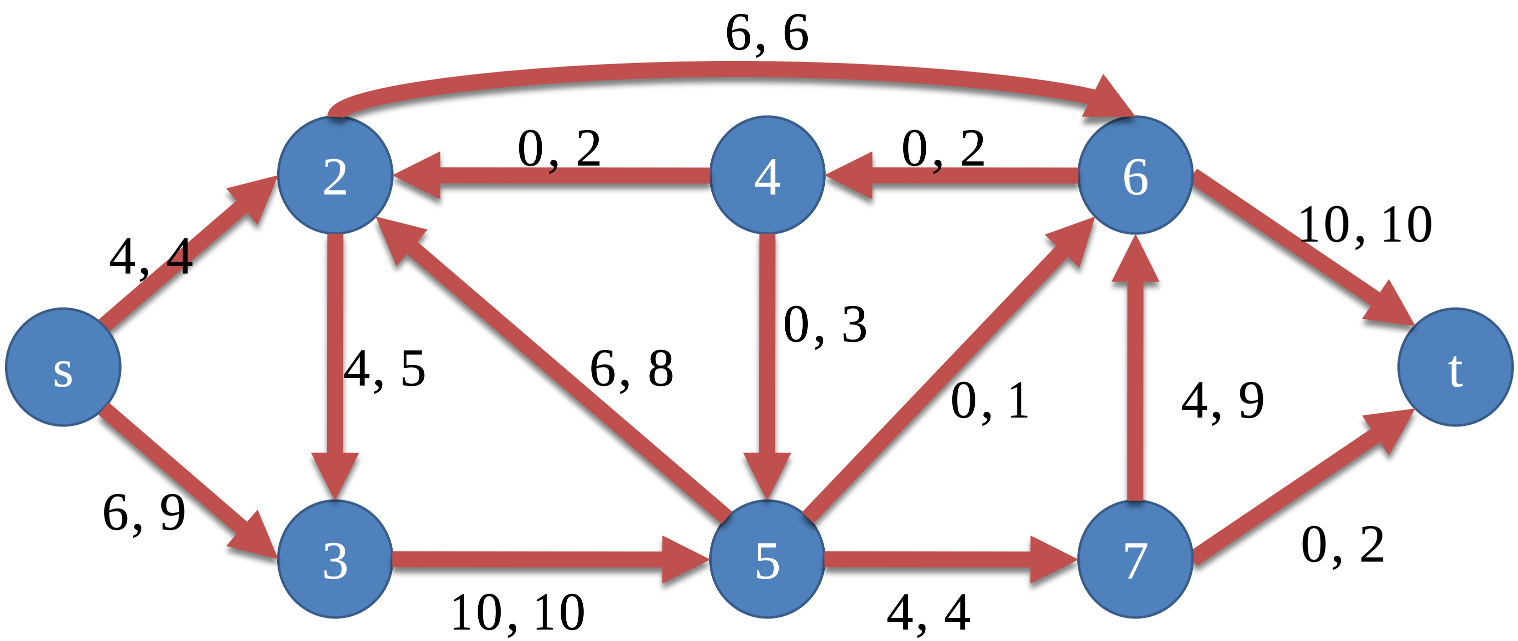
- Giả sử $P = (s = v_0, v_1, v_2\ldots v_k = t)$ là một đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng G_f. Gọi k là trọng số cung nhỏ nhất trên đường đi P. Xây dựng luồng f’ theo quy tắc sau:
  - $f'(u, v) = f(u, v) + k$, nếu $(u, v) \in P$ là cung thuận.
  - $f'(u, v) = f(u, v) – k$, nếu $(u, v) \in P$ là cung nghịch.
  - $f'(u, v) = f(u, v)$ nếu $(u, v) \notin P$.
- Dễ dàng kiểm tra được rằng f’ xây dựng như trên là luồng trong mạng và $val(f') = val(f) + k$.
- Thủ tục tăng luồng này gọi là **tăng luồng dọc theo đường P**.

Đường tăng luồng

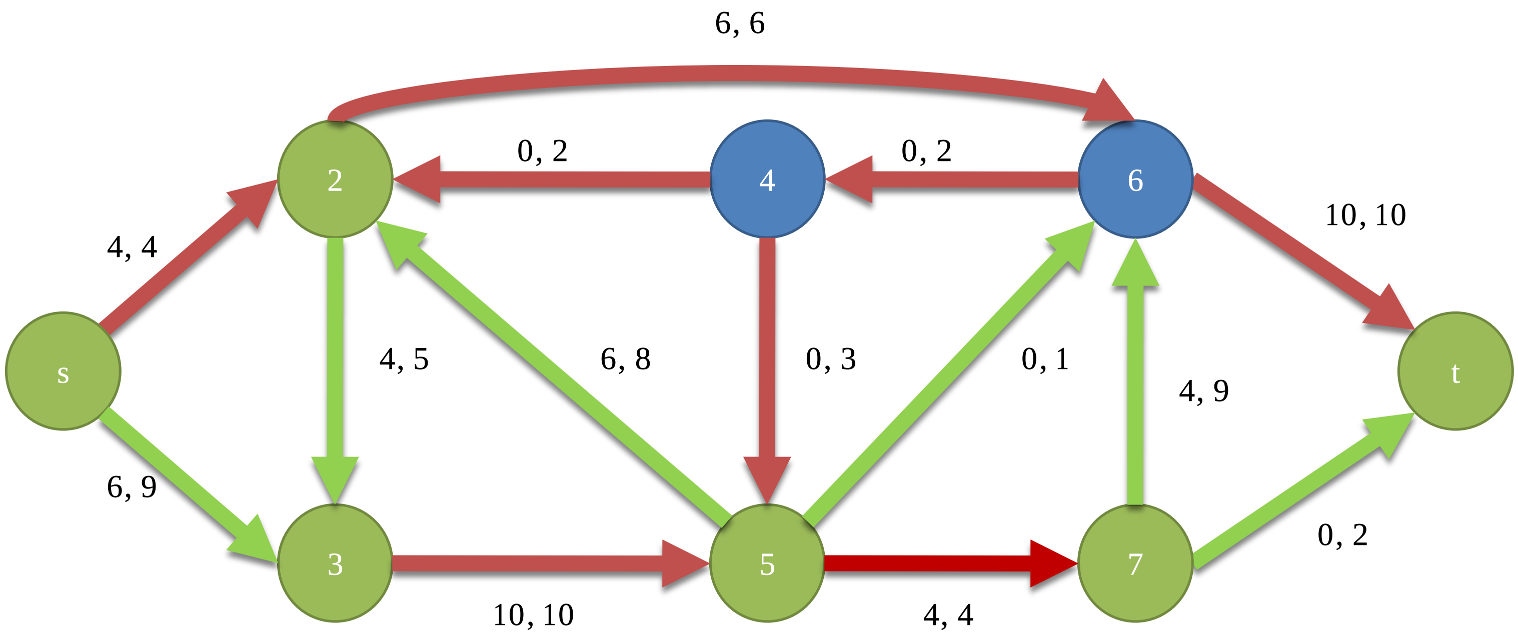
- Đường tăng luồng f là mọi đường đi từ s đến t trên đồ thị tăng luồng G_f.
- Các mệnh đề dưới đây là tương đương:
  1. f là luồng cực đại trong mạng.
  2. Không tìm được đường tăng luồng f.
  3. val(f) = c(X, X*) với một lát cắt (X, X*) nào đó.

Thuật toán Ford – Fulkerson

- **Bước khởi tạo:** Bắt đầu từ luồng với luồng trên tất cả các cung bằng 0 (ta sẽ gọi luồng như vậy là luồng không), và lặp lại bước lặp sau đây cho đến khi thu được luồng mà đối với nó không còn đường tăng.
- **Bước lặp tăng luồng (Ford – Fulkerson):** Tìm đường tăng P đối với luồng hiện có. Tăng luồng dọc theo P.
- Khi đã có luồng cực đại, lát cắt hẹp nhất có thể tìm theo thủ tục mô tả trong chứng minh trước.

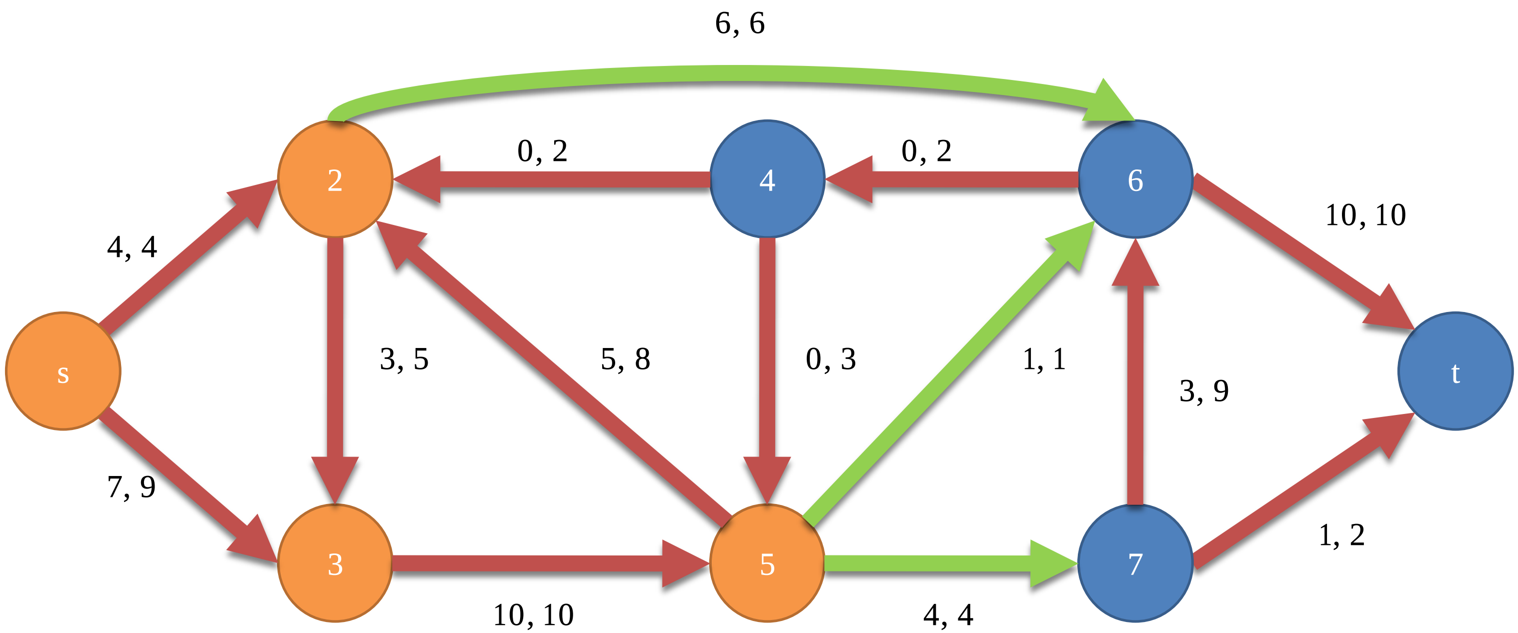

6, 6
0, 2
0, 2
2
4
6
4, 4
10, 10
s
4, 5
6, 8
0, 3
0, 1
4, 9
t
6, 9
3
5
7
0, 2
10, 10
4, 4

Ví dụ



$k(t) = 1$

Ví dụ



Thuật toán gán nhãn tìm đường tăng luồng

- Mỗi đỉnh sẽ có 1 trong 3 trạng thái: chưa có nhãn, có nhãn chưa xét, có nhãn đã xét.
- Nhãn của một đỉnh gồm có 2 phần:
  - p(v): Đỉnh trước của đỉnh v trên đường tăng luồng tìm được.
  - e(v): chỉ ra lượng lớn nhất có thể tăng (giảm).
- Đầu tiên, khởi tạo bằng cách gán nhãn đỉnh s là chưa xét, các đỉnh khác chưa có nhãn.
- Từ các đỉnh đã có nhãn chưa xét, gán nhãn cho tất cả các đỉnh chưa có nhãn kề với nó và nhãn của đỉnh v trở thành đã xét. (*)
- Kết thúc khi t được gán nhãn hoặc không đến được t.

Thuật toán gán nhãn tìm đường tăng luồng

- Cập nhật như thế nào ở phần (*)?
  - Nếu c[u, v] > 0 và f[u, v] < c[u, v] // còn có thể tăng!
    - p[v] = u.
    - e[v] = min{e[u], c[u, v] – f[u, v]}
  - Nếu c[v, u] > 0 và f[v, u] > 0 // thử quay ngược lại
    - p[v] = -u. // để xác định cung thuận/nghịch
    - e[v] = min{e[u], f[v, u]}