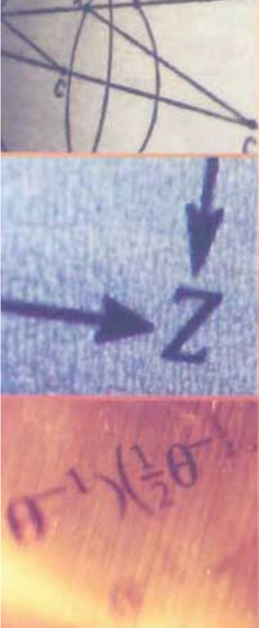


PGS. NGUYỄN CAM
PTS. CHU ĐỨC KHÁNH

Lý thuyết đồ thị

Sách dùng cho sinh viên các trường Đại học

Ngành tin học

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

Lý thuyết
đồ thị

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Nguyễn Cam, Chu Đức Khánh

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
Khu phố 6, phường Linh Trung, quận Thủ Đức, TP HCM
ĐT: 7242181, 7242160 + (1421, 1422, 1423, 1425, 1426)
FAX: 7242194 – **Email**: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

***

Chịu trách nhiệm xuất bản
TS HUỲNH BÁ LÂN
Biên tập: PHAN PHÚC DOÃN
Sửa bản in: QUỐC AN
Bìa: HUỲNH PHI HẢI
Đơn vị/Người liên kết:
NHÀ SÁCH THÀNH NGHĨA

$\frac{\text{TK.02.TH(V)}}{\text{ĐHQG.HCM.08}}$ 793-2007/CXB/60-46 TH.TK.1132 - 07(T)

Số lượng 1.000 cuốn, khổ 16*24 cm. Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 793-2007/CXB/60-46/ĐHQGTPHCM. Quyết định xuất bản số 11/QĐ-ĐHTPHCM ngày 09/01/2008 của Giám đốc NXB ĐHQG TPHCM. In tại Công ty Cổ phần in Bến Tre và nộp lưu chiểu quý I năm 2008.

PGS. NGUYỄN CAM
PTS. CHU ĐỨC KHÁNH

Lý thuyết đồ thị

Sách dùng cho sinh viên các trường Đại học

Ngành tin học

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

LỜI NÓI ĐẦU

Lí thuyết Đồ Thị là một ngành của toán học được khai sinh kể từ công trình về bài toán "7 cây cầu ở Konigsburg" của nhà toán học Leonhard Euler (1707 – 1783) công bố vào năm 1736. Từ đó đến nay, đã có nhiều nhà toán học trên thế giới nghiên cứu và làm cho môn học này ngày càng phong phú và có nhiều ứng dụng trong những lãnh vực khác nhau của khoa học như Mạng Điện Tử, Lý Thuyết Mã, Vận Trù Học, Kinh Tế Học...

Đặc biệt, trong khoảng vài mươi năm trở lại đây, cùng với sự ra đời của máy tính số & sự phát triển hết sức nhanh của Tin Học, Lý Thuyết Đồ Thị càng được quan tâm đến nhiều hơn, đặc biệt là các giải thuật trên đồ thị. Hiện nay, môn học này được xem là kiến thức cơ sở của khoa học máy tính.

Quyển sách này được biên soạn nhằm để đáp ứng nhu cầu tham khảo sách bằng tiếng Việt của sinh viên. Đây là giáo trình Toán dành cho sinh viên ngành Tin Học, do đó hầu hết các vấn đề được trình bày bằng ngôn ngữ giải thuật, mặc dù vậy, phần chứng minh vẫn chặt chẽ & rõ ràng.

Nội dung quyển sách bao gồm những vấn đề cơ bản nhất của Lý Thuyết Đồ Thị cùng một số các bài toán áp dụng & được chia thành 8 chương:

Chương 1: Giới thiệu định nghĩa & các tính chất cơ bản của đồ thị vô hướng & đồ thị có hướng

Chương 2: Trình bày 2 bài toán về chu trình Euler & chu trình Hamilton.

Chương 3: Khảo sát sơ lược về đồ thị phẳng.

Chương 4: Khảo sát tổng quát về cây S các vấn đề liên quan, đặc biệt là cây nhị phân.

Chương 5 : Trình bày bài toán con đường ngắn nhất & giải thuật Đijkstra & giải thuật Floyd.

Chương 6. Trình bày vài bài toán áp dụng của Lý Thuyết Đồ Thị cùng với các giải thuật để giải chúng.

Cuối mỗi chương có phần bài tập để giúp người đọc kiểm tra lại các kiến thức đã lĩnh hội được. Hướng dẫn & đáp số của một số các bài tập được cho ở phần phụ lục.

Chúng tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến phê bình xây dựng của độc giả để trong lần tái bản cuốn sách sẽ phục vụ tốt hơn việc học tập của các bạn sinh viên

I
MỞ ĐẦU

1.1 Định nghĩa

Đồ thị (Graph) $G = (V, E)$ là một bộ gồm 2 tập hợp E và V, trong đó $V \neq \emptyset$, các phần tử của V gọi là các đỉnh (vertises), các phần tử của E gọi là các cạnh (edges), mỗi cạnh tương ứng với 2 đỉnh. Nếu cạnh e tương ứng với 2 đỉnh v, w thì ta nói v và w là 2 đỉnh kề hay liên kết (adjacent) với nhau, ta nói cạnh e tới (incident) các đỉnh v và w. Kí hiệu $e = \overline{vw}$ hay $v \overset{e}{\text{———}} w$.

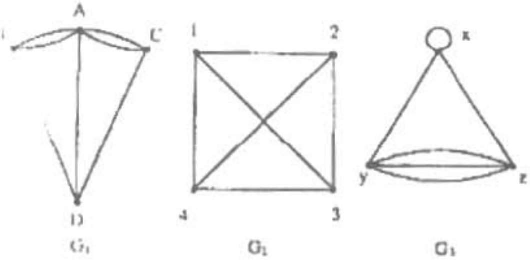
Cạnh $\overline{vv}$ tương ứng với 2 đỉnh trùng nhau gọi là vòng (loop) tại v. Hai cạnh phân biệt cùng tương ứng với 1 cặp đỉnh gọi là 2 cạnh song song (parallel edges). Đồ thị không có cạnh song song và cũng không có vòng gọi là đơn đồ thị (simple graph), ngược lại là đa đồ thị (multigraph). Đồ thị mà mọi cặp đỉnh của nó đều kề nhau gọi là đồ thị đầy đủ (complete graph). Đồ thị $G' = (V', E')$ gọi là đồ thị con (subgraph) của đồ thị $G = (V, E)$ nếu $V' \subset V$ và $E' \subset E$.

Đồ thị có số đỉnh và số cạnh hữu hạn gọi là đồ thị hữu hạn (finite graph), ngược lại là đồ thị vô hạn (infinite graph). Trong những phần sau ta chỉ khảo sát các đồ thị hữu hạn.

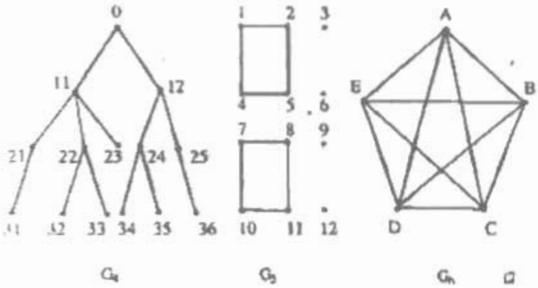
1.2. Biểu đồ

Một đồ thị thường được biểu diễn bằng một biểu đồ như sau: mỗi đỉnh biểu diễn thành 1 điểm và mỗi cạnh biểu diễn thành 1 đoạn nối 2 đỉnh tương ứng với nó.

Thí dụ 1: Dưới đây là biểu đồ của vài đồ thị



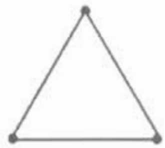
G_1 G_2 G_3



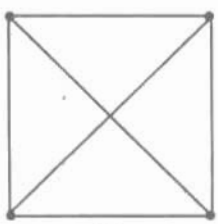
Thí dụ 2: Ta dùng ký hiệu K_n để chỉ đơn đồ thị đầy đủ có đỉnh. Biểu đồ của K_n với $1 \leq n \leq 5$ như sau:

K_1

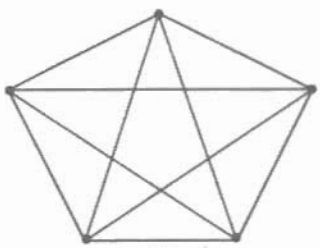
K_2



K_3



K_4



K_5

1.3. Bậc của một đỉnh

Xét một đỉnh v trong đồ thị G. Số cạnh tới v, trong đó mỗi vòng tại v được kể là 2 cạnh tới v, gọi là bậc (degree) của v và ký hiệu là d(v)

Đỉnh có bậc 0 gọi là đỉnh cô lập (isolated vertex).

Đỉnh có bậc 1 gọi là đỉnh treo (pendant vertex), cạnh tới đỉnh treo gọi là cạnh treo (pendant edge).

Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là đồ thị rỗng (null graph).

1.3.1. Định lí

Với mọi đồ thị G = (V, E), ta có: $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Chứng minh: hiển nhiên vì mỗi cạnh đều tới 2 đỉnh.

1.3.2. Hệ luận 1

Tổng số bậc của các đỉnh lẻ trong 1 đồ thị là một số chẵn.

Chứng minh: Xét đồ thị G = (V,E). Gọi V_0 và V_e lần lượt là tập hợp các đỉnh bậc lẻ và tập hợp các đỉnh bậc chẵn của G. Ta có:

$$2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_0} d(v) + \sum_{v\in V_e} d(v)$$

mà hiển nhiên $\sum_{v\in V_e} d(v)$ là số chẵn, do đó $\sum_{v\in V_0} d(v)$ cũng là số chẵn.

1.3.3. Hệ luận 2

Mọi đồ thị đều có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

Chứng minh: Hiển nhiên

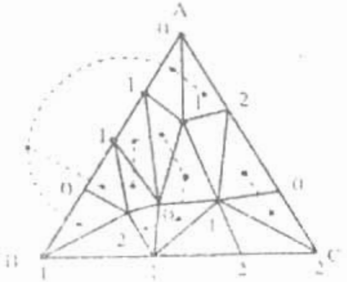
1.3.4. Hệ luận 3

Đồ thị K_n có $\frac{1}{2}n(n-1)$ cạnh.

Chứng minh: Mọi đỉnh của K_n đều có bậc là n – 1.

Thí dụ 3: Một đồ thị G = (V, E) có 24 cạnh và mỗi đỉnh của G đều có bậc là 4. Tìm đỉnh G. Ta có: $2.24 = 4.|V| \Rightarrow |V| = 12$

Thí dụ 4: Xét tam giác có 3 đỉnh là A, B, C được ghi nhãn lần lượt là 0, 1, 2. Chia ABC thành nhiều tam giác nhỏ và ghi nhãn cho các đỉnh mới theo điều kiện sau: Các đỉnh mới nằm trên cạnh AB được ghi nhãn 0 hoặc 1, các đỉnh mới nằm trên cạnh BC được được ghi nhãn là 1 hoặc 2, các đỉnh mới nằm trên cạnh CA được ghi nhãn 2 hoặc 0, còn các đỉnh mới nằm bên trong tam giác ABC ghi nhãn là 0, 1 hoặc 2 tuỳ ý. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 tam giác nhỏ mà 3 đỉnh của nó có nhãn 0, 1 và 2



Để giải bài toán này, ta lập mô hình đồ thị sau: chọn trong mỗi tam giác nhỏ 1 điểm làm đỉnh, và thêm 1 đỉnh ở bên ngoài tam giác ABC, 2 đỉnh sẽ được nối với nhau bằng 1 cạnh nếu 2 tam giác nhỏ tương ứng có 2 đỉnh chung là 0, 1. Dễ thấy rằng:

• Đỉnh ở ngoài tam giác ABC có bậc lẻ vì các đỉnh trên cạnh AB được ghi nhãn thay đổi giữa 0 và 1 một số lẻ lần.

• Tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn khác nhau thì đỉnh tương ứng có bậc 1.

• Tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn không đổi một khác nhau thì đỉnh tương ứng có bậc 0 hay bậc 2.

Vì số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn nên phải tồn tại 1 tam giác nhỏ có 3 đỉnh ghi nhãn khác nhau.

1.4. Ma trận liên kết

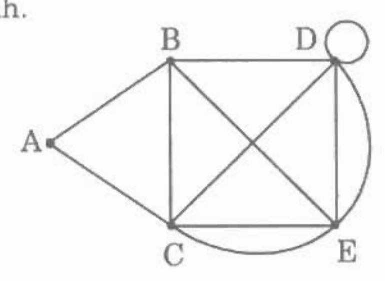
Cho đồ thị G có đỉnh là $v_1, v_2, \ldots v_n$. Ma trận liên kết (adjacency matrix) của G, với thứ tự các đỉnh là $v_1, v_2, \ldots v_n$ là ma trận vuông n x n

$$[m_{ij}]$$

Trong đó m_{ij} = số cạnh nối đỉnh v_i với đỉnh v_j $(1 \le i, j \le n)$

Lưu ý rằng vòng được tính 2 cạnh.

Thí dụ: Đồ thị sau:



có ma trận liên kết là:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.4.1. Định lí

Tổng các phần tử trên hàng (hoặc cột) thứ i của ma trận liên kết bằng bậc của đỉnh v_i nghĩa là:

$$d(v_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}$$

Chứng minh: hiển nhiên

1.5. Đường và chu trình

Cho một đồ thị G. Một đường (path) P và G là một dãy các đỉnh $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sao cho $e_i = \overline{v_{i-1}v_i}$ $(1 \le i \le k)$ là các cạnh đôi một khác nhau.

Ta kí hiệu : $P = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \ldots \xrightarrow{e_k} v_k$

hay $P = v_0v_1\ldots v_k$

Số k (là số cạnh tạo thành P) gọi là chiều dài của đường P.

Kí hiệu: $l(P) = k$

Ta nói đường P nối 2 đỉnh v_0 và v_k, các đỉnh v_i $(0 \le i \le k)$ và các cạnh e_i $(1 \le i \le k)$ gọi là nằm trên đường P.

Một đỉnh xem là một đường có chiều dài bằng 0.

Một chu trình (cycle/circuit) trong G là một đường trong G có dạng $c = v_0v_1\ldots v_{k-1}v_0$ với $l(c) \ge 1$.

Ta không cần chú ý đến đỉnh nào là đỉnh bắt đầu (và cũng là đỉnh kết thúc) của chu trình, nói cách khác, các chu trình $v_0v_1\ldots v_{i-1}v_iv_{i+1}\ldots v_{k-1}v_0$ và $v_iv_{i+1}\ldots v_{k-1}v_0v_1\ldots v_{i-1}v_i$ được đồng nhất với nhau là một.

Một đường (hay chu trình) gọi là đơn giản (simple) nếu nó không đi qua đỉnh nào quá một lần.

1.6. Sự liên thông

Một đồ thị gọi là liên thông (connected) nếu mọi cặp đỉnh của nó đều được nối với nhau bởi một đường.

Xét một đồ thị G = (V, E). Trên tập hợp V, ta định nghĩa hệ thức ~ như sau: $\forall_v, w \in V$, $v \sim w \Leftrightarrow$ có 1 đường trong G nối v và w. Dễ thấy rằng ~ là một hệ thức tương đương trên V và hệ thức ~ phân cắt V thành các lớp tương đương. Mỗi lớp tương đương này tương ứng với một đồ thị con liên thông của G gọi là một thành phần liên thông (connected component) của G. Hai thành phần liên thông khác nhau của G thì cách biệt, nghĩa là chúng không có đỉnh chung.

Hiển nhiên G liên thông $\Leftrightarrow$ G có đúng 1 thành phần.

Thí dụ 6: Chứng minh kết quả sau:

Một đồ thị G có n đỉnh và k thành phần thì tối đa là $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ cạnh.

Gọi n_i và c_i $(1 \le i \le k)$ lần lượt là số đỉnh và số cạnh của thành phần thứ i của G. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)^2 \le (n-k)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i^2 \le (n-k)^2 + 2n - k$$

Vì G là đơn đồ thị nên giữa 2 đỉnh, có nhiều nhất 1 cạnh nối chúng, do đó nếu gọi c là số cạnh của G thì:

$$c = \sum_{i=1}^{k} c_i \le \sum_{i=1}^{k}\binom{n_i}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(n_i^2 - n_i\right) \le$$

$$\frac{1}{2}\left[(n-k)^2 + 2n - k - n\right] = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

1.7. Sự đẳng hình

Hai đồ thị G = (V, E) và G' = (V', E') gọi là đẳng hình (isomorphic) với nhau nếu có 1 phép tương ứng 1 – 1 (song ánh) giữa hai tập hợp V, V' và có phép tương ứng 1 – 1 giữa hai tập hợp E, E' sao cho nếu cạnh $e = \overline{vw} \in E$ tương ứng của cặp đỉnh $v, w \in V$ cũng là tương ứng của cặp đỉnh $v', w' \in V'$.

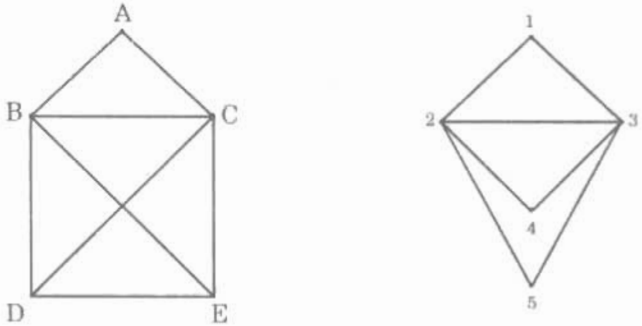
Hiển nhiên nếu 2 đồ thị đẳng hình với nhau thì chúng phải có:

- Cùng số đỉnh.
- Cùng số đỉnh bậc k, $\forall k$ nguyên ≥ 0
- Cùng số cạnh
- Cùng số thành phần

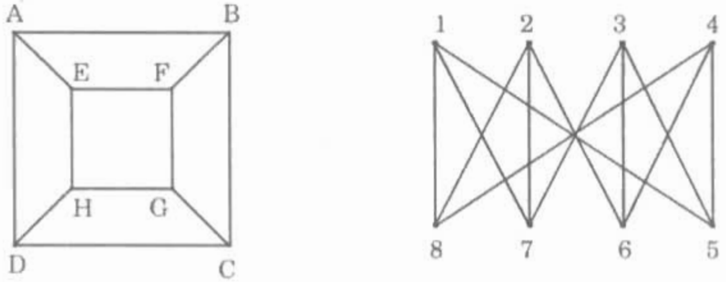
Nếu hai đồ thị có ma trận liên kết (theo 1 thứ tự đỉnh nào đó) bằng nhau thì chúng đẳng hình với nhau.

Thí dụ 7: Các cặp đồ thị sau đẳng hình với nhau

a)



b)

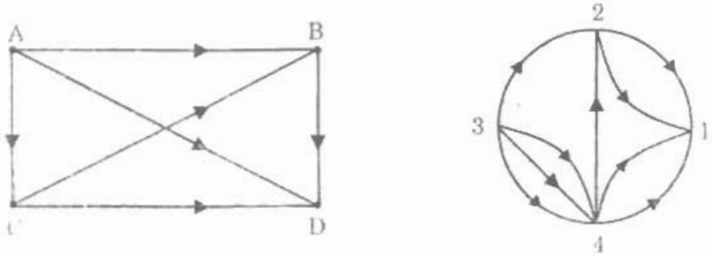


1.8. Đồ thị có hướng

Đồ thị như đã định nghĩa ở trên gọi là đồ thị vô hướng (undirected graph). Nếu bây giờ mỗi cạnh $e \in E$ được cho tương ứng với 1 cặp thứ tự (v, w) của 2 đỉnh $v, w \in V$ thì ta nói e là 1 cạnh có hướng từ v đến w, kí hiệu $e = \overrightarrow{vw}$, và đồ thị nhận được gọi là một đồ thị có hướng (directed graph).

Biểu đồ của đồ thị có hướng cũng giống như biểu đồ của đồ thị vô hướng, trong đó trên đoạn biểu diễn cạnh có hướng $\overrightarrow{vw}$, ta vẽ thêm 1 mũi tên theo chiều v đến w.

Thí dụ 8: Sau đây là biểu đồ của vài đồ thị có hướng:



Xét cạnh có hướng e = $\overrightarrow{vw}$. Đỉnh v gọi là đỉnh đầu (initial vertex) của e, ta nói cạnh e tới ngoài (incident out) đỉnh v và tới trong (incident in) đỉnh w. Số cạnh tới ngoài đỉnh v gọi là bậc ngoài (out –degree) của v, kí hiệu $d_{out}(v)$; số cạnh tới trong đỉnh v gọi là bậc trong (in–degree) của v, kí hiệu $d_{in}(v)$.

1.8.1. Định lí

Trong một đồ thị có hướng G, tổng các bậc trong và tổng các bậc ngoài của các đỉnh thì bằng nhau và cùng bằng số cạnh của G.

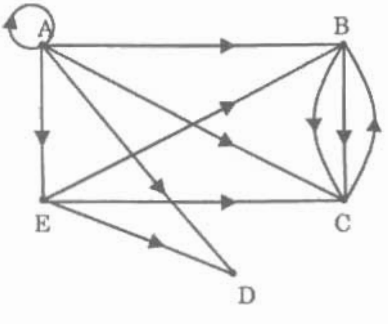
Chứng minh: hiển nhiên vì mỗi cạnh đều tới trong 1 đỉnh và tới ngoài 1 đỉnh. Một đồ thị có hướng gọi là cân bằng (balanced) nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc trong và bậc ngoài bằng nhau.

Ma trận liên kết của một đồ thị có hướng G với thứ tự đỉnh là $v_1, v_2, \ldots v_n$ là ma trận vuông n x n

$$[m_{ij}]$$

Trong đó m_{ij} = số cạnh có đỉnh đầu v_i và đỉnh cuối là v_j ($1 \le i, j \le n$).

Thí dụ 9: Đồ thị:



Có ma trận liên kết là:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Một chu trình trong G là một đường trong G có dạng $v_0v_1 \ldots v_{k-1}v_0$.

Một đồ thị có hướng G gọi là liên thông mạnh (strongly connected) nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt v, w luôn luôn tồn tại 1 đường nối v với w.

Đồ thị có hướng G gọi là liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông. Một đồ thị có hướng G gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đầy đủ.

BÀI TẬP

Trừ bài tập 16, đồ thị nói trong tất cả các bài tập còn lại đều vô hướng.

1. Vẽ 1 đồ thị có 4 đỉnh với bậc các đỉnh 3, 2, 2, 1.

2. Vẽ một đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều có bậc là k ($1 \le k \le 5$).

3. Có bao nhiêu đồ thị cùng nhận V = [1, 2, ...,n] là tập hợp đỉnh và thoả điều kiện:

a) là đơn đồ thị

b) không có vòng và không có nhiều nhất 2 cạnh song song giữa mỗi cặp đỉnh.

c) có nhiều nhất một vòng tại mỗi đỉnh và không có cạnh song song.

d) là đơn đồ thị và tập hợp cạnh $\subset \left\{\overline{ij} \middle| 1 \le i, j \le n, i + j \text{ lẻ}\right\}$

4. Vẽ đơn đồ thị có 6 đỉnh, trong đó có:

a) 3 đỉnh bậc 3 và 3 đỉnh bậc 1.

b) bậc các đỉnh là 1, 2, 3, 3, 4, 5.

c) bậc các đỉnh là 2, 2, 4, 4, 4, 4.

5. Tìm đơn đồ thị mọi đỉnh của nó đều có bậc 3 và có:

a) 4 đỉnh	c) 6 đỉnh
b) 5 đỉnh	d) 8 đỉnh

6. Tìm số đỉnh của đồ thị G biết rằng G có:
a) 12 cạnh và mọi đỉnh đều có 2 bậc.
b) 15 cạnh, 3 đỉnh bậc 4 và các đỉnh còn lại bậc 3.
c) 6 cạnh và mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau.

7. Một đồ thị có 19 cạnh và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3. Đồ thị này có tối đa là bao nhiêu đỉnh?

8. Biết rằng mọi đỉnh của một đồ thị G đều có bậc bằng số lẻ p. Chứng minh rằng số cạnh của G là một bội số của p.

9. Có thể có 1 nhóm người trong đó mỗi người chỉ quen biết đúng 5 người khác trong nhóm hay không?

10. Coi đơn đồ thị $G = (V,E)$ với: $V = \{1,2, ..., n\}$ $(n \geq 2)$ và $E = \left\{\overline{ij} \middle| 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, i + j \text{ chẵn}\right\}$

Chứng minh rằng G không liên thông. Xác định số thành phần của G.

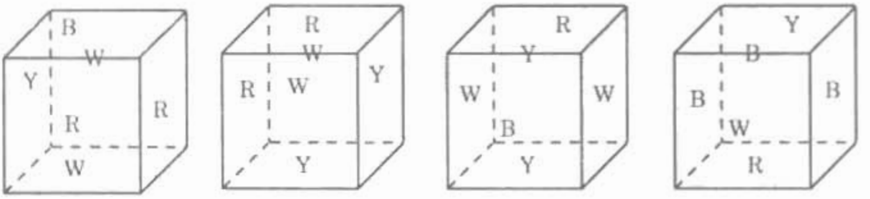
11. Coi đơn đồ thị $G = (V,E)$ với $V = \{2,3...,41\}$ và

$E = \left\{\overline{ij} \middle| 2 \leq i, j \leq 41, i \neq j, i \text{ và } j \text{ không nguyên tố cùng nhau}\right\}$

G có mấy thành phần?

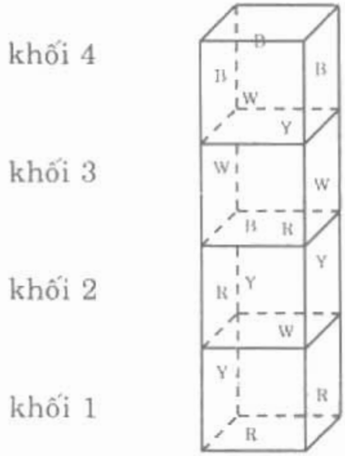
12. (Instant Insanity Puzzle)

Có 4 khối lập phương, mỗi mặt của các khối này được tô bằng một trong 4 màu: đỏ (R), xanh (B), vàng (Y), trắng (W)



khối 1 khối 2 khối 3 khối 4

Tìm cách xếp 4 khối này thành một hình hộp, khối này nằm trên khối kia sao cho trên mỗi mặt xung quanh của hình hộp đều xuất hiện 4 màu. Hiển nhiên, tuy theo cách tô màu 4 khối lập phương mà bài toán có thể không có lời giải hoặc cũng có thể có nhiều lời giải.

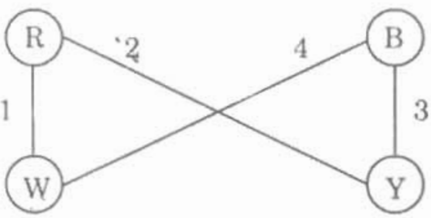


(Hình a)

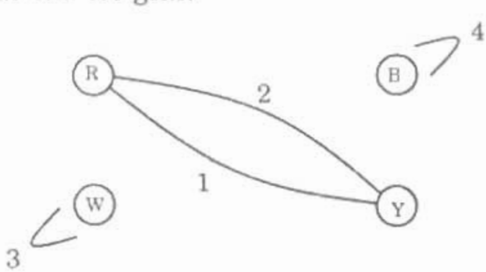
Giải bằng phương pháp thử sai là không khả thi vì có tất cả $3 \times 24^3 = 41472$ trường hợp phải kiểm tra. Tuy nhiên, ta có thể tìm ra mọi lời giải trong một thời gian ngắn bằng cách sau:

Xét 1 lời giải bất kì. Chẳng hạn: (hình a)

Lời giải này tương ứng với hai đồ thị thứ nhất H biểu diễn mối quan hệ về màu ở mặt trước và mặt sau của lời giải: đồ thị có 4 đỉnh là 4 màu, nếu khối lập phương i có màu của mặt trước và mặt sau là x và y thì có cạnh nhãn i nối x với y.



Tương tự, đồ thị thứ hai k biểu diễn mối quan hệ về màu ở mặt trái và mặt phải của lời giải:



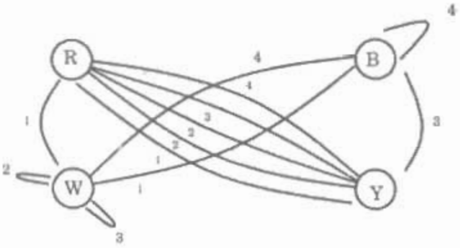
Hai đồ thị này thoả 3 tính chất sau:

(i) Mỗi đỉnh đều có bậc là 2.

(ii) Có 4 cạnh mang nhãn lần lượt là 1, 2, 3, 4.

(iii) Hai đồ thị không có cạnh chung.

Mặt khác nếu gọi G là đồ thị biểu diễn mối quan hệ về màu của cả 4 khối lập phương.

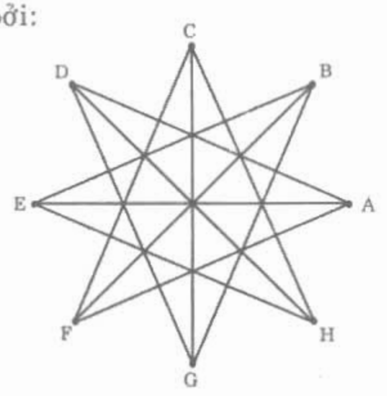


thì H và k là các đồ thị con của G.
Vậy tổng quát, để tìm lời giải, trước hết ta vẽ đồ thị G. Mỗi cặp đồ thị con H, K của G thoả 3 tính chất (i) – (iii) nêu trên tương ứng với 1 lời giải.

13. Xét một đơn đồ thị G = (V, E). Bù (complement) của G là đơn đồ thị $\overline{G} = (V, \overline{E})$. định nghĩa bởi:

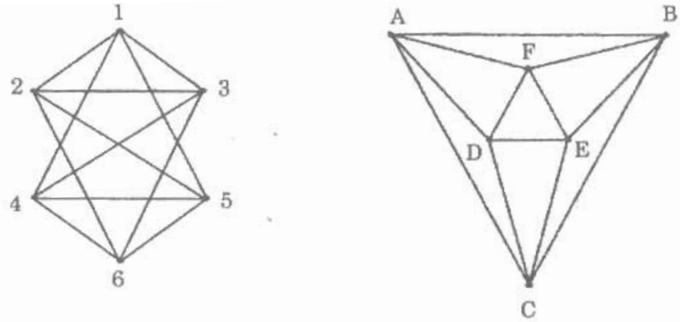
$\forall v, w \in V, \ \overline{vw} \in \overline{E} \Leftrightarrow \overline{vw} \notin \overline{E}$

a) Vẽ đồ thị bù $\overline{G}$ của đồ thị sau:



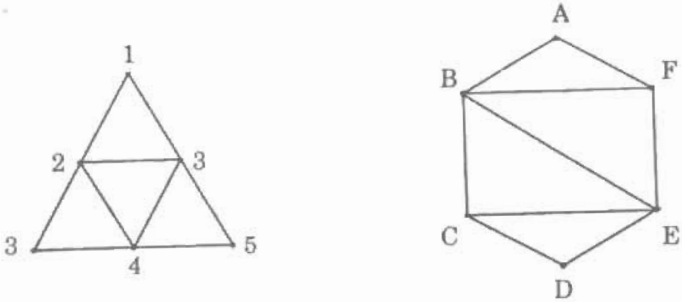
b) Chứng minh rằng 2 đơn đồ thị đẳng hình với nhau nếu và chỉ nếu bù của chúng đẳng hình với nhau.

c) Hai đồ thị sau đây có đẳng hình với nhau không?

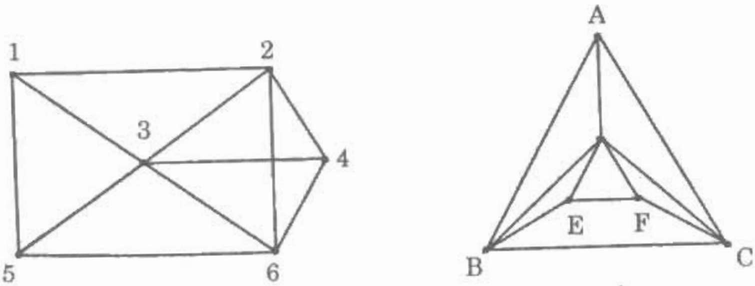


14. Các cặp đồ thị sau có đẳng hình với nhau không? Giải thích.

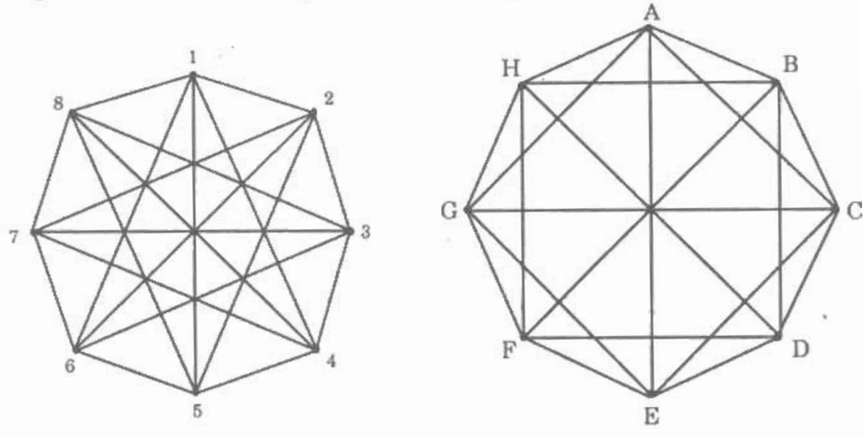
a)



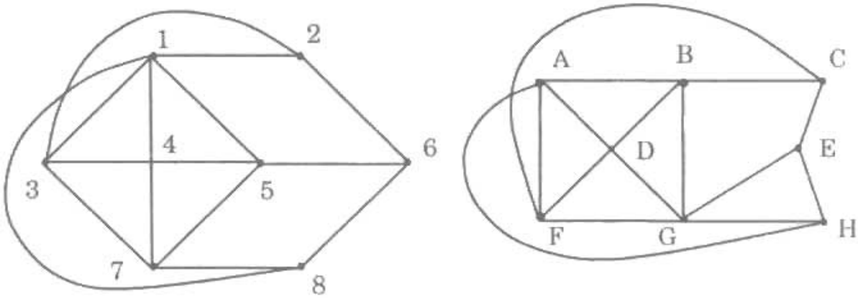
b)



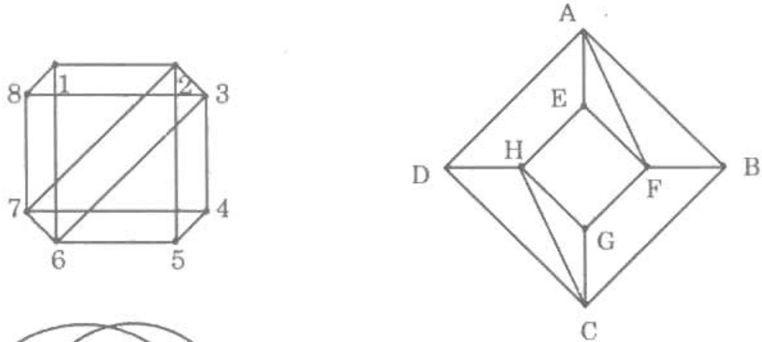
c)

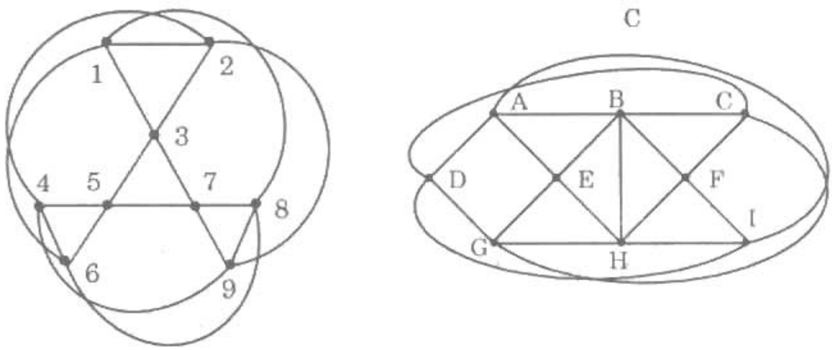


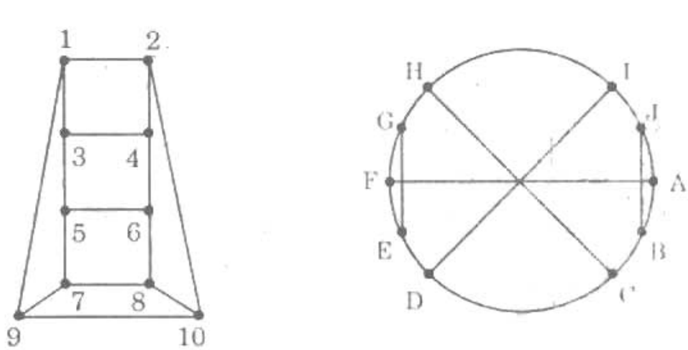
d)


1 2 3 4 5 6 7 8
A B C D E F G H

e)

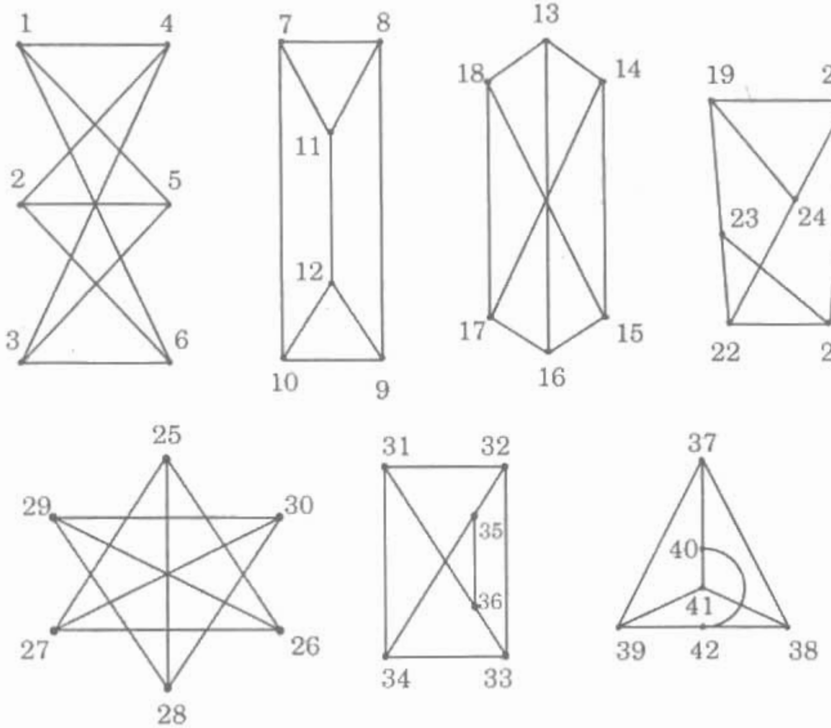

1 2 3 4 5 6 7 8
A B C D E F G H


1 2 3 4 5 6 7 8 9
A B C D E F G H I

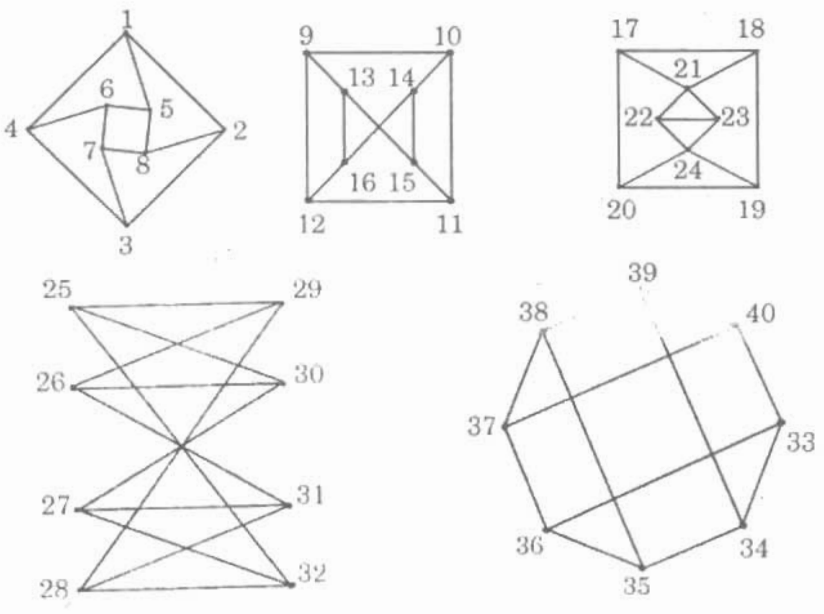

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
A B C D E F G H I J

15. Tìm các cặp đồ thị đẳng hình trong các đồ thị sau:

a)

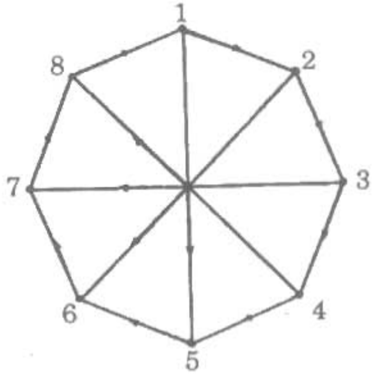


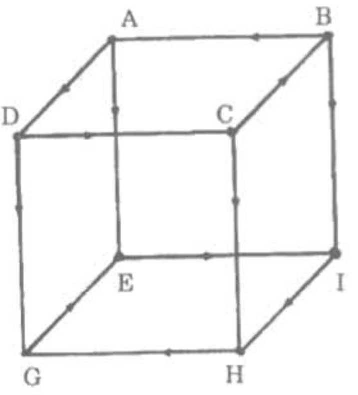
b)



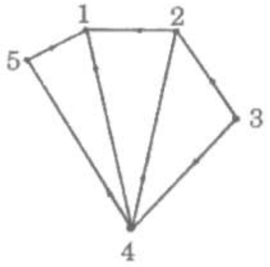
16. Các cặp đồ thị có hướng dưới đây có đẳng hình với nhau không? Giải thích.

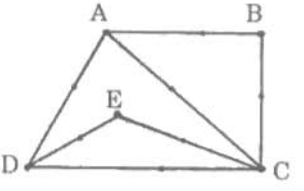
a)



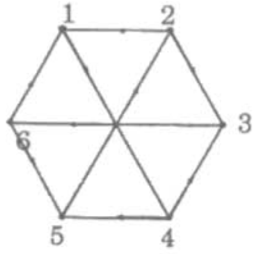


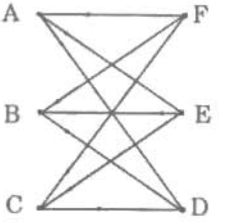
b)





c)



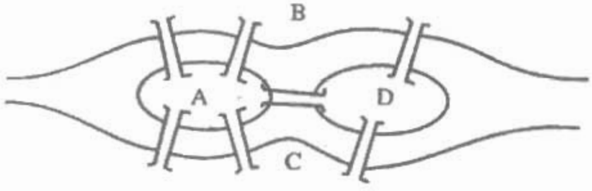


II

CÁC BÀI TOÁN VỀ CHU TRÌNH

2.1. Euler và bài toán 7 cầu ở Königsburg

Ở thành phố Königsburg (Lithuania) có 7 cây cầu bắc ngang con sông Pregel như hình vẽ sau:

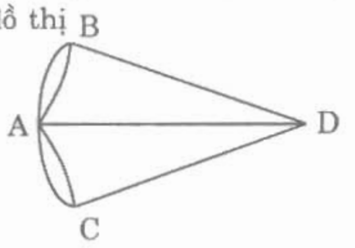


Người ta đặt câu đố:

Tìm cách đi quan sát tất cả 7 cây cầu này, mỗi cái đúng 1 lần rồi quay về điểm xuất phát.

Năm 1736, Leonhard Euler (1707 – 1783) đã chứng minh không thể có 1 đường đi như thế bằng lập luận sau:

Biểu diễn 4 miền đất A, B, C, D bằng 4 điểm trong mặt phẳng mỗi cầu nối 2 miền được biểu diễn bằng 1 đoạn nối 2 điểm tương ứng, ta sẽ có đồ thị



Bây giờ, một đường đi qua 7 cây cầu, mỗi cái đúng 1 lần rồi quay lại về điểm xuất phát sẽ có số lần đi đến A bằng số lần rời khỏi A, nghĩa là phải sử dụng đến 1 số chẵn cây cầu nối với A. Vì số cầu nối với A là 5 (lẻ) nên không thể có đường đi nào thoả điều kiện của bài toán.

Ý tưởng trên của Euler đã khai sinh ngành toán học quan trọng có nhiều áp dụng là Líthuyết đồ thị.

Dưới đây ta sẽ tổng quát hoá bài toán trên.

2.2. Chu trình Euler

2.2.1. Định nghĩa

Xét một đồ thị liên thông G. Một chu trình Euler của G là 1 chu trình qua tất cả các cạnh của G. Một đường Euler của G là một đường có đỉnh bắt đầu khác đỉnh kết thúc và đi qua tất cả các cạnh của G.

2.2.2. Định lí Euler 1

Cho 1 đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có chu trình Euler nếu chỉ nếu mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Chứng minh:

(⇒) Giả sử G có chu trình Euler. Xét đỉnh x.

Tưởng tượng 1 động tử khởi hành từ x, đi trên các cạnh theo chu trình Euler và dừng lại tại x sau khi đã hoàn tất chu trình Euler này. Rõ ràng số lần động tử này rời khỏi x cũng bằng số lần động tử đi đến x. Do đó d(x) chẵn.

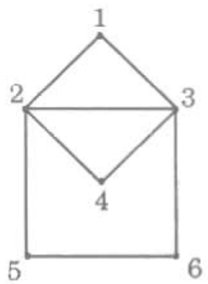
(⇐) Giả sử mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn. Xét giải thuật xây dựng 1 chu trình trong G như sau:

Bắt đầu từ đỉnh a, đi theo các cạnh 1 cách ngẫu nhiên nhưng không được lập lại cạnh nào đã đi qua cho đến khi cạnh tới b nhiều hơn số lần rời khỏi b, nếu a ≠ b thì dễ thấy rằng số lần đi đến b nhiều hơn số lần rời khỏi b là 1: vô lí vì d(b) chẵn. Vậy phải có b = a. Nói cách khác khi không thể đi tiếp được là động tử đã tạo nên một chu trình. Nếu có 1 đỉnh c trong chu trình này là đỉnh đầu của 1 cạnh chưa đi qua thì ta sẽ mở rộng (breakout) chu trình này thành 1 chu trình lớn hơn bằng cách khởi hành từ c, đi theo chu trình cũ cho đến khi hoàn tất nó ở c, rồi tiếp tục đi theo cạnh tới c chưa đi qua nó ở trên cho đến khi không thể đi tiếp được nữa, ta sẽ tạo được 1 chu trình mới chứa chu trình cũ. Cứ tiếp tục thủ tục này: thành lập chu trình, mở rộng nó cho đến khi một chu trình mà không thể mở rộng được nữa, điều này xẩy ra khi mọi đỉnh trong chu trình hiện có đều không còn cạnh tới nào chưa đi qua.

Ta chỉ còn phải chứng minh rằng lúc đó, chu trình hiện có chính là 1 chu trình Euler của G, nghĩa là mọi cạnh của G đều thuộc chu trình này. Thực vậy, coi cạnh e = $\overline{xy}$. Vì G liên thông nên có 1 đường nối đỉnh a với đỉnh x: $aa_1a_2...x$. Cạnh $\overline{aa_1}$ phải thuộc chu trình, vì không còn cạnh nào chưa đi qua. Suy ra đỉnh a_1 phải thuộc chu trình. Lại lập luận tương tự, cạnh $\overline{aa_1}$ phải thuộc chu trình, suy ra a_2 thuộc chu trình, ..., cuối cùng ta phải có đỉnh x thuộc chu trình và do đó cạnh e cũng thuộc chu trình.

Bây giờ dùng ma trận liên kết, ta sẽ xem giải thuật nêu trên được áp dụng để tìm chu trình Euler của 1 đồ thị như thế nào trong thí dụ sau đây:

Thí dụ: Xét đồ thị G với ma trận liên kết (các vị trí trống là số 0)

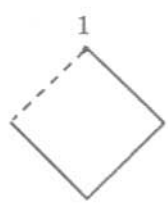


$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{bmatrix}
 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

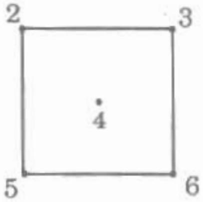
Trước hết nhận xét rằng tổng các phần tử trên mỗi hàng của ma trận liên kết đều là số chẵn (nghĩa là mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn), vậy G có chu trình Euler.

– Xét hàng 1 (chọn đỉnh 1), phần tử cột 2 khác 0 vậy ta chọn đỉnh kế tiếp là 2 và có được đường 12.

Giảm 1 ở phần tử m_{12} (hàng 1 cột 2) và m_{21} (xóa cạnh $\overline{12}$ vừa đi qua). Đồ thị và ma trận trở thành.

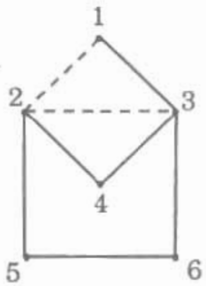


1 2 3 4 5 6



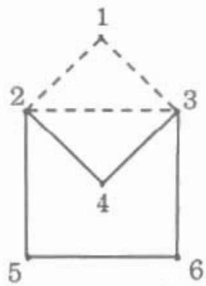
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{bmatrix} & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix}$$

– Xét hàng 2, $m_{23} \neq 0$, vậy chọn đỉnh kế tiếp là 3 và có được đường 1 2 3. Đồ thị và ma trận trở thành.



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ 1 & & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét ma trận, $m_{31} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 1 và có được đường 1 2 3 1. Đồ thị và ma trận trở thành.

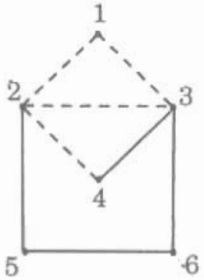


$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét hàng 1, mọi phần tử trên hàng này đều là 0: không thể đi tiếp được nữa. Xét đỉnh kế tiếp trong chu trình vừa tạo là đỉnh 2. Trên hàng 2, có phần tử $m_{24} \neq 0$. Vậy ta mở rộng chu trình (breakout) từ đỉnh 2.

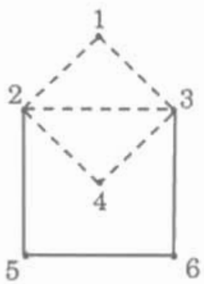
Viết lại chu trình: 2 3 1 2. Đồ thị và ma trận vẫn như cũ.

– Xét hàng 2, $m_{24} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 4 và có được đường 2 3 1 2 4



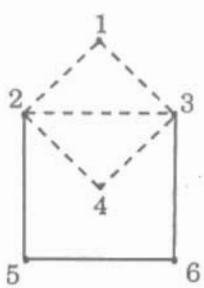
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét hàng 4, $m_{43} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 3 và có được đường 2 3 1 2 4 3.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \\ & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét hàng 3, $m_{43} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 6 và có được đường 2 3 1 2 4 3 6.



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

– Xét hàng 5, $m_{52} \neq 0$, chọn đỉnh kế tiếp là 2 và có được đường 2 3 1 2 3 6 5 2

2.2.3. Định lí Euler 2

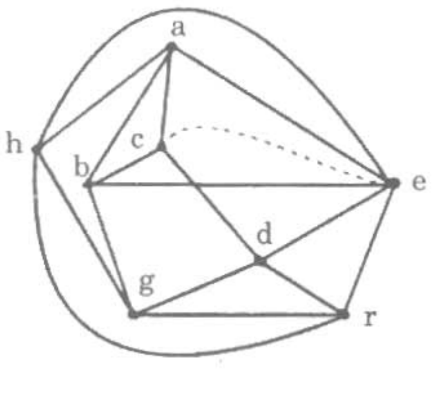
Cho 1 đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có đường Euler nếu và chỉ nếu G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

Chứng minh:

($\Rightarrow$) Giả sử G có đường Euler nối đỉnh a với đỉnh b. Lập luận giống phần chứng minh trong định lí Euler 1 với nhận xét thêm rằng riêng 2 đỉnh a và b, số lần động tử đi đến a (rời khỏi b) là 1. Vậy các đỉnh a và b có bậc lẻ, còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn.

($\Leftarrow$) Giả sử G có đúng hai đỉnh bậc lẻ là a và b. Thêm vào G một canh tưởng tượng nối a với b, ta nhận được đồ thị mới G' mà mọi đỉnh của G' đều có bậc chẵn. Vậy G' có 1 chu trình Euler P'. Loại bỏ cạnh tưởng tượng $\overline{ab}$ ra khỏi P', ta nhận được P là 1 đường Euler trong G.

Thí dụ 2: Xét đồ thị G sau đây:



Đồ thị này có 2 đỉnh bậc lẻ c và e, các đỉnh còn lại đều có bậc chẵn, vậy có đường Euler. Vẽ thêm cạnh tưởng tượng nối c với e, ta được đồ thị G'. Ta tìm được chi trình Euler cho G' là gdcedfehabcaebghg.

Hủy cạnh tưởng tượng khỏi chu trình này ta nhận được 1 đường Euler của G': edfehabcaebghdc.

2.2.4. Định lí Euler 3

Cho đồ thị có hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có chu trình Euler nếu và chỉ nếu G cân bằng.

Chứng minh: tương tự trường hợp vô hướng.

2.25. Định lí Euler 4

Cho đồ thị có hướng G liên thông và có hơn 1 đỉnh. Thì G có đường Euler nếu và chỉ nếu trong G có 2 đỉnh a, b thỏa:

$d_{out}(a) = d_{in}(a) + 1$

$d_{in}(b) = d_{out}(b) + 1$

và mọi đỉnh còn lại đều cân bằng.

Hơn nữa đường Euler phải bắt đầu ở a và kết thúc ở b.

Chứng minh: Xem như bài tập và dành cho độc giả.

2.3. Chu trình Hamilton

2.3.1. Định nghĩa

Xét một đồ thị liên thông G có hơn một đỉnh. Một chu trình Hamilton của G là một chu trình đi qua tất cả các đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng 1 lần.

Một đường Hamilton của G là một đường đi qua tất cả các đỉnh của G, mỗi đỉnh đúng 1 lần. Nói cách khác, chu trình (đường) Hamilton là 1 chu trình (đường) đơn giản đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị. Hiển nhiên nếu G có chu trình Hamilton thì G cũng có đường Hamilton: Ta chỉ cần hủy đi một cạnh. Tuy nhiên lưu ý rằng điều đảo lại không đúng: có những đồ thị có đường Hamilton nhưng không có chu trình Hamilton.

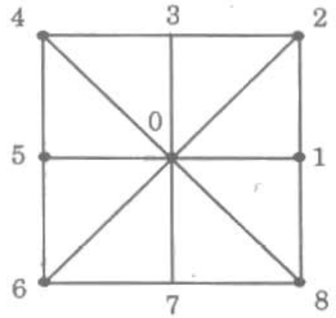
Dựa vào nhận xét là mỗi đỉnh trong chu trình Hamilton đều liên kết với đúng 2 cạnh trong chu trình này, ta suy ra các qui tắc sau:

2.3.2. Qui tắc tìm chu trình Hamilton

1. Nếu tồn tại 1 đỉnh của G có bậc ≤ 1 thì G không có chu trình Hamilton.
2. Nếu đỉnh x có bậc là 2 thì cả 2 cạnh tới x đều phải thuộc chu trình Hamilton.
3. Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.

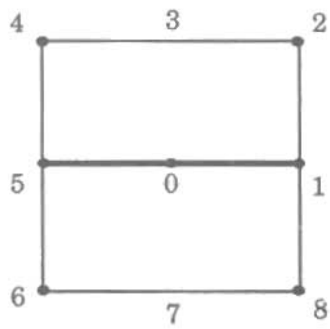
4. Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới 1 đỉnh x đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới x nữa, do đó có thể xoá mọi cạnh còn lại tới x

Thí dụ 3: Tìm chu trình Hamilton của đồ thị sau:

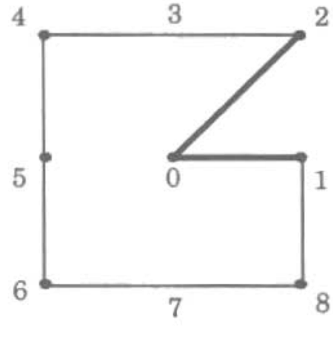


Xét đỉnh 0. Ta có thể chọn 2 cạnh tới đỉnh này là:

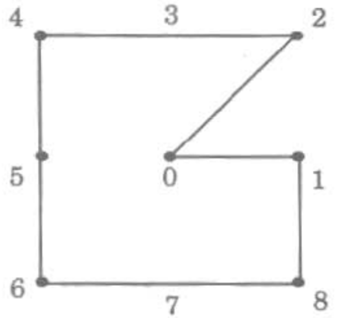
a) $\overline{01}$ và $\overline{05}$: Xoá các cạnh tới 0 khác (theo qui tắc 4) ta còn lại đồ thị:



b) $\overline{01}$ và $\overline{02}$: Xoá các cạnh tới 0 khác (theo qui tắc 4) và xoá cạnh $\overline{12}$ (theo qui tắc 3), ta còn lại đồ thị:



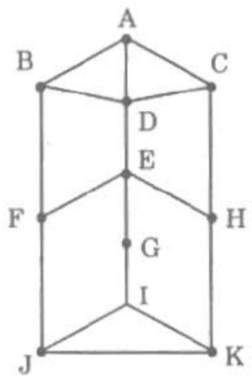
Các đỉnh 3, 4, 6, 7, 8 còn lại bậc 2 ta nhận được chu trình 0 2 3 4 5 6 7 8 10.



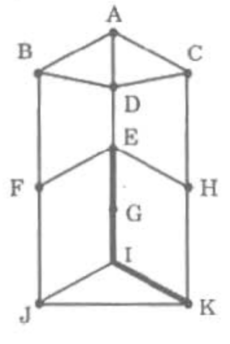
c) Lập luận tương tự, các trường hợp chọn $\overline{01}$ và $\overline{03}$, $\overline{01}$ và $\overline{04}$ đều không được.

Tóm lại mọi chu trình Hamilton của G đều phải chứa 2 cạnh tới đỉnh O tạo với nhau góc 45^0.

Thí dụ 4: Chứng minh rằng đồ thị G sau đây không có chu trình Hamilton.



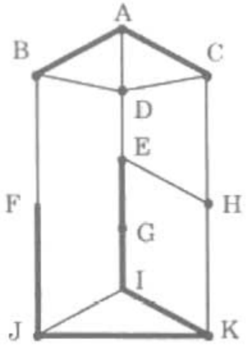
Giả sử G có 1 chu trình Hamilton là (γ). Vì d(A) = 3. d(G) = 2 nên (γ) phải chứa các cạnh $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{GE}$ và $\overline{GI}$. Xét đỉnh I. Do tính chất đối xứng của hình vẽ, có thể giả sử $\overline{IK} \in (\gamma)$. Dùng qui tắc 4 xóa bớt cạnh $\overline{IJ}$, ta còn lại đồ thị:



Đỉnh J bây giờ trở thành bậc 2, vậy $\overline{JF}$ và $\overline{JF} \in (\gamma)$.

Xóa tiếp được cạnh $\overline{KH}$. Ngoài ra cũng xóa được cạnh $\overline{FE}$ (do qui tắc 3).

Đồ thị bây giờ trở thành:



Dễ thấy rằng phải có $\overline{FB}, \overline{HE}, \overline{HC} \in (\gamma)$. Ta nhận được một chu trình con thực sự trong (γ): vô lí.

Vậy G không có chu trình Hamilton.

Lưu ý rằng đồ thị này có đường Hamilton là DEGJFBACHK.

2.3.3. Định lí

Một đồ thị đầy đủ đều có chu trình Hamilton.

Chứng minh: hiển nhiên.

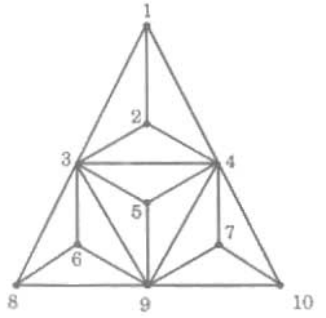
Để chứng minh một đồ thị không có chu trình Hamilton ta có thể dùng kết quả sau:

2.3.4. Định lí

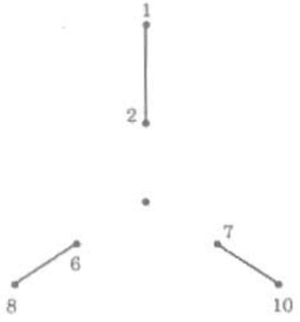
Cho 1 đồ thị G. Giả sử có k đỉnh của G sao cho nếu xoá k đỉnh này cùng với các cạnh liên kết với chúng khỏi G thì đồ thị nhận được có hơn k thành phần. Thì G không có chu trình Hamilton.

Chứng minh: Nhận xét rằng trong 1 chu trình, nếu huỷ đi k đỉnh cùng với các cạnh tới chúng thì chu trình sẽ bị cắt thành nhiều nhất là k thành phần.

Thí dụ 5: Xét đồ thị:



Nếu huỷ đi 3 đỉnh 3, 4, 9 cùng với các cạnh tới chúng thì ta còn lại đồ thị sau:



Đồ thị này có 4 thành phần. Vậy G không có chu trình Hamilton.

Định lí dưới đây cho ta 1 điều kiện đủ để đồ thị có chu trình Hamilton.

2.3.5. Định lí (Dirac)

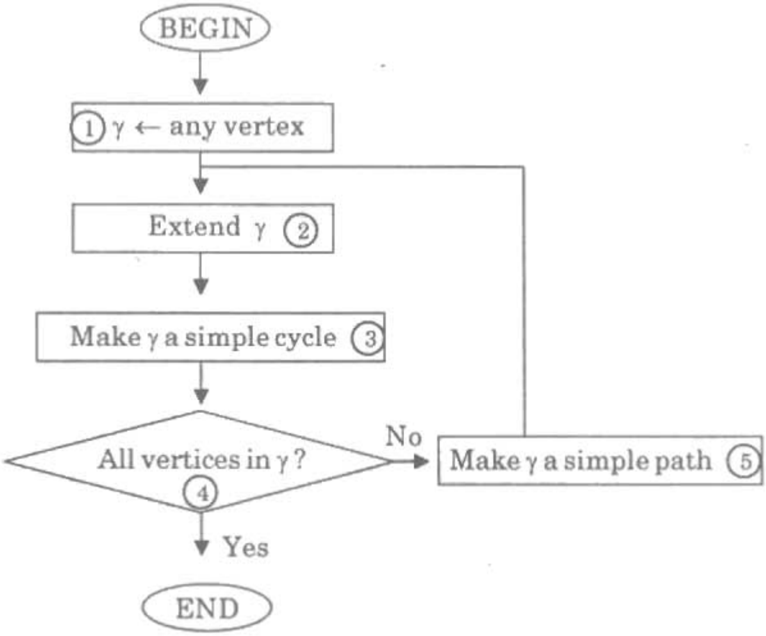
Coi đồ thị G liên thông và có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu mọi đỉnh của G đều có bậc $\geq \dfrac{n}{2}$ thì G có chu trình Hamilton.

Chứng minh: Xét giải thuật xây dựng 1 đường đơn giản γ trong G sau:

1. Chọn 1 đỉnh v_0 trong G đặt vào γ.
2. Lập lại thủ tục sau cho đến khi không thể thêm đỉnh nào vào γ được nữa: Tìm 1 đỉnh $w \notin \gamma$ sao cho có 1 cạnh trong G nối w với 1 đỉnh đầu của γ, thêm cạnh này và đỉnh w vào γ.
3. Thực hiện thủ tục sau để biến đổi γ thành 1 chu trình đơn giản: Nếu có cạnh nối 2 đỉnh đầu của γ thì thêm cạnh này vào γ', nếu không, tìm 1 cạnh. $a = \overline{uu'}$ trong $\gamma = v_1 ... uu' ... v_2$ với tính chất là

tồn tại các cạnh trong G là b = $\overline{v_1u'}$, c = $\overline{uv_2}$, thêm các cạnh b, c vào γ và loại bỏ cạnh a khỏi γ.

4. Nếu không thực hiện thủ tục sau để biến đổi γ thành 1 đường đơn giản: tìm 1 cạnh $\overline{vw}$ trong G sao cho $v \in \gamma$ và $w \notin \gamma$. Loại bỏ 1 cạnh tới v trong γ và thêm cạnh $\overline{vw}$ vào γ. Trở về bước 2.
Sơ đồ khối của giải thuật này là:



Nhận xét rằng γ luôn luôn là một đường đơn giản hoặc chu trình đơn giản ở mọi bước của giải thuật.

Ta chỉ cần chứng minh là bước 3 và bước 5 của giải thuật luôn luôn thực hiện được. Dễ thấy do tính chất liên thông của G nên bước 5 thực hiện được. Xét bước 3. Giả sử $\gamma = v_1...uu'...v_2$ và không thể mở rộng γ ở đầu v_1 cũng như v_2, nghĩa là không có cạnh nào nối v_1 hoặc v_2 với 1 đỉnh ở ngoài γ. Hơn nữa giả sử cũng không có cạnh nào nối v_1 với v_2. Đặt $|\gamma| = k$. Nếu với mọi $\overline{uu'}$ trên γ, không có đồng thời trong G 2 cạnh $\overline{uv_2}$ thì phải có:

$d(v_1) + d(v_2) \le k - 1 < n$

Vô lí vì $d(v_1) + d(v_2) \ge \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} = n$

2.3.6. Định lí (König)

Mọi đồ thị có hướng đầy đủ đều có đường Hamilton.

Chứng minh: Xét đồ thị có hướng G = (V,E)

Gọi $P = v_1v_2...v_k$ $(k > 0)$ là đường đơn giản trong G.

Nếu mọi đỉnh G đều thuộc P thì P chính là 1 đường Hamilton, nếu có 1 đỉnh x không thuộc P thì phải tồn tại 1 đường P' thuộc 1 trong 3 dạng sau:

(i) $P' = xv_1...v_k$

(ii) $P' = v_1...v_ixv_{i+1}...v_k$

(iii) $P' = v_1...v_kx$

Thực vậy, nếu trong G không có đường nào có dạng (i) hoặc (ii) thì ta có:

- $\overrightarrow{xv_1} \notin E$ và do $\overrightarrow{v_1x} \in E$ (1)
- $\forall_i = 1,...,k-1,\ \overrightarrow{v_ix} \in E$

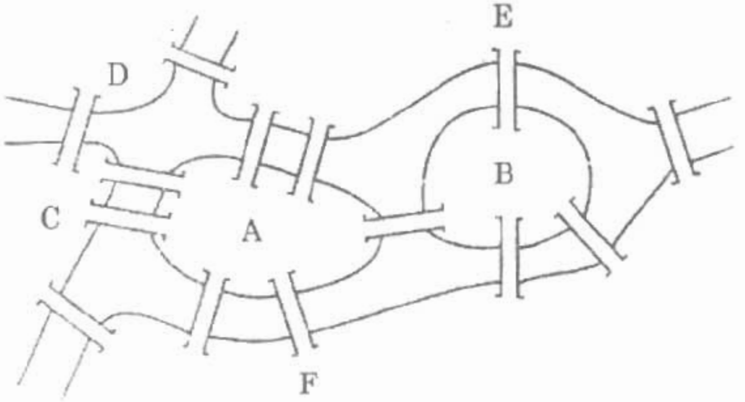
$\Rightarrow \overrightarrow{xv_{i+1}} \notin E \Rightarrow \overrightarrow{v_{i+1}x} \in E$ (2)

(1) và (2) cho $\overrightarrow{v_kx} \in E$

Vậy tồn tại đường P' ở dạng dạng (iii). Như thế, bắt đầu bằng một đường gồm 1 đỉnh, ta có thể mở rộng dần một đường mới chứa nhiều đỉnh hơn đường cũ và vẫn chỉ đi qua mỗi đỉnh không quá 1 lần, cứ thế cuối cùng ta sẽ có đường Hamilton.

BÀI TẬP

1. Xem hình vẽ sau tương tự hình vẽ của bài tập 7 cầu ở Königsburg:



a) Vẽ đồ thị G tương ứng.

b) G có chu trình Euler hoặc đường Euler không? Tại sao?

2. Tìm chu trình Euler hoặc đường Euler (nếu có) của đồ thị với ma trận liên kết sau:

a)

$$
\begin{array}{c}
 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
 & 1 & & & & 1 & & & & \\
1 & & 1 & & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \\
1 & 1 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & & & & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & & & 1 & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\
\begin{bmatrix}
 & 1 & 1 & & 1 & 1 & \\
1 & & 1 & & & 1 & \\
1 & 1 & & 1 & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
1 & & & 2 & & 1 & \\
1 & 1 & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

d)

$$\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\
\begin{bmatrix}
2 & 1 &   &   & 1 &   &   &   \\
1 &   & 1 & 1 & 1 &   &   &   \\
  & 1 &   &   & 1 & 2 &   &   \\
  & 1 &   &   &   & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 &   &   &   & 1 &   \\
  &   & 2 & 1 &   &   & 1 &   \\
  &   &   & 1 & 1 & 1 &   & 1 \\
  &   &   & 1 &   &   & 1 & 2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

3. Tìm chu trình Euler hoặc đường Euler (nếu có) của đồ thị có hướng với ma trận liên kết sau:

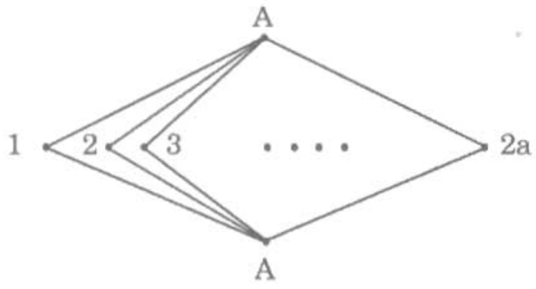
a)

$$\begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 &   &   &   & 1 &   &   &   \\
1 &   &   &   & 1 &   &   &   \\
  & 1 &   &   &   & 1 &   &   \\
  & 1 &   &   &   & 1 &   &   \\
  &   & 1 &   &   &   & 1 &   \\
  &   & 1 &   &   &   & 1 &   \\
  &   &   & 1 &   &   &   & 1 \\
  &   &   & 1 &   &   &   & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

b)

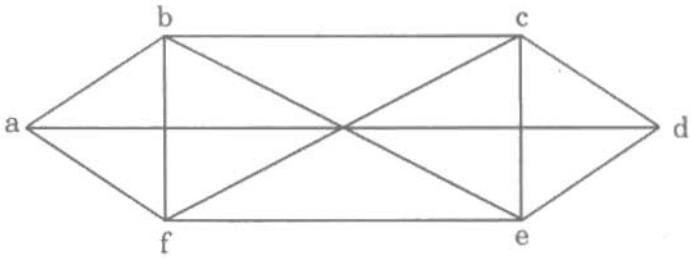
$$\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 &   &   &   &   &   &   &   & 1 & 1 \\
  &   & 1 &   &   &   &   & 1 &   &   \\
  &   &   & 1 &   & 1 &   &   &   &   \\
  &   &   &   &   &   &   & 1 &   & 1 \\
  &   &   & 1 &   &   &   & 1 &   &   \\
  &   &   &   & 1 &   & 1 &   &   &   \\
  &   &   &   & 1 & 1 &   &   &   &   \\
1 &   &   &   &   &   & 1 &   & 1 &   \\
  &   & 1 &   &   &   &   &   &   & 1 \\
1 & 1 &   &   &   &   &   &   &   &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

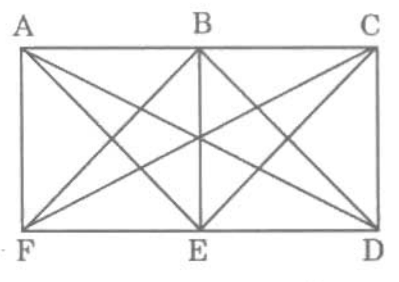
4. Đồ thị sau đây có bao nhiêu chu trình Euler?

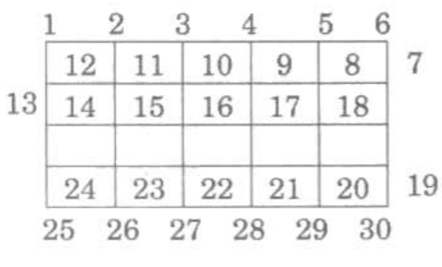


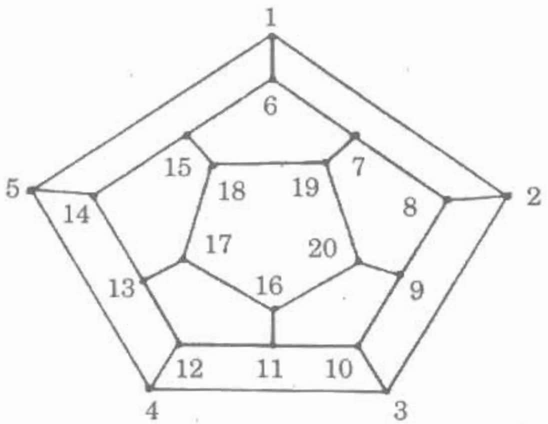
5. Đồ thị đường (line graph) L(G) của 1 đồ thị G là đồ thị có tập hợp đỉnh là tập hợp các cạnh của G, và có cạnh nối 2 đỉnh e_1, e_2 trong L(G) nếu và chỉ nếu 2 cạnh e_1 và e_2 tương ứng trong G là cùng tới 1 đỉnh trong G.

a) Vẽ L(G) của đồ thị G sau:



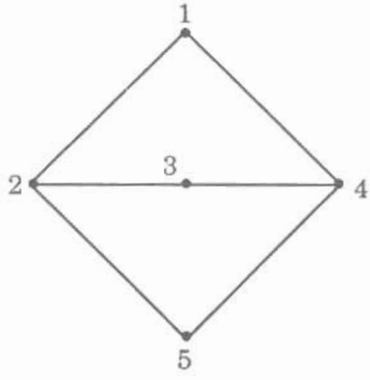




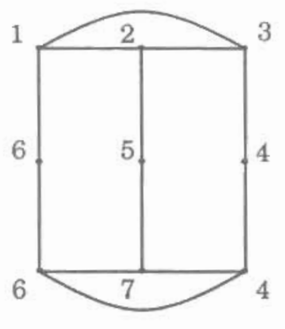


10. Chứng minh rằng các đồ thị sau không có chu trình Hamilton nhưng có đường Hamilton.

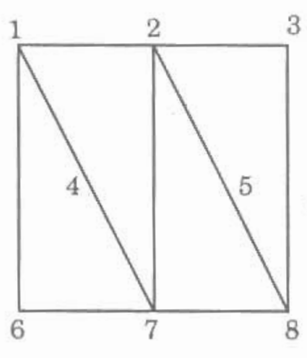
a)



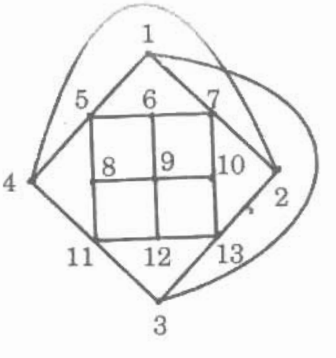
b)



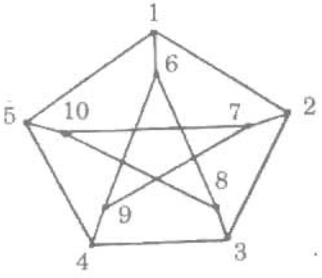
c)

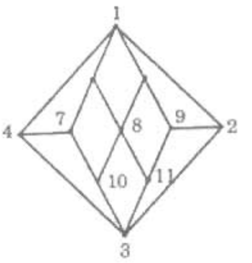


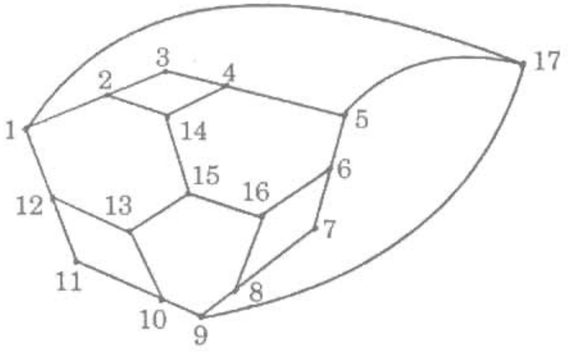
d)



e)







III
ĐỒ THỊ PHẲNG

3.1. Định nghĩa

Một đồ thị G gọi là đồ thị phẳng (panar graph) nếu có thể biểu diễn G bằng một biểu đồ trong mặt phẳng sao cho các cạnh đôi một không cắt nhau. Khi đó, các cạnh của G chia mặt phẳng thành nhiều miền, mỗi miền gọi là một mặt (face) của G (trong các mặt này, luôn luôn có 1 và chỉ 1 mặt vô nạn). Những cạnh nằm bên trong mặt f hoặc là cạnh giới hạn của mặt f với 1 mặt khác gọi là cạnh biên của mặt f (boundary edge).

Cho 1 đồ thị G, số g = chiều dài của chu trình ngắn nhất trong G gọi là đai (grith) của G. Trường hợp nếu G không có chu trình thì ta đặt g = số cạnh của G.

3.2. Công thức Euler

Một tính chất rất hay của đồ thị phẳng là số đỉnh, số cạnh và số mặt của nó có liên hệ với nhau. Sự liên hệ này được nêu trong định lí dưới đây.

3.2.1. Định lí:

Cho đồ thị phẳng liên thông G có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt là V, E và F. Thì:

$$V - E + F = 2. \qquad (1)$$

(1) Gọi là công thức Euler cho đồ thị phẳng liên thông.

Chứng minh: Ta hãy vẽ biểu đồ phẳng của G lần lượt từng cạnh một sao cho sau khi vẽ được i cạnh thì đồ thị G_i nhận được là 1 đồ thị phẳng liên thông. Gọi V_i, E_i, F_i lần lượt là số đỉnh, số cạnh và số mặt của của G_i. Ta chỉ cần chứng minh rằng mọi G_i đều thoả đẳng thức trong định lí.

Với $i = 1$ thì $V_1 = 2$, $E_1 = 1$, $F_1 = 1$, đẳng thức hiển nhiên thoả với G_1.

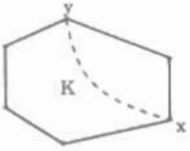
Cho $i \geq 2$. Giả sử G_{i-1} thoả đẳng thức.

Gọi $\overline{xy}$ là cạnh được vẽ thêm vào G_{i-1} để có G_i. Hiển nhiên phải có ít nhất 1 trong hai đỉnh của cạnh này nằm trong G_{i-1}, thí dụ x. Hơn nữa vì G_i phẳng nên $\overline{xy}$ phải nằm hoàn toàn trong 1 mặt k của G_{i-1}. Có 2 trường hợp:

a) $y \in G_{i-1}$: cạnh $\overline{xy}$ chia mặt k thành 2 mặt, vậy:

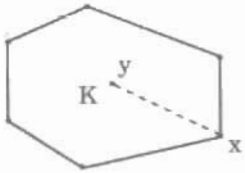
$V_i = V_{i-1}$, $E_i = E_{i-1} + 1$, $F_i = F_{i-1} + 1$

$\Rightarrow V_i - E_i + F_i = V_{i-1} - E_{i-1} + F_{i-1} = 2$



b) $y \notin G_{i-1} + 1$, $E_i = G_{i-1} + 1$, $F_i = F_{i-1}$

$\Rightarrow V_i - E_i + F_i = V_{i-1} - E_{i-1} + F_{i-1} = 2$



3.2.2. Hệ luận

Gọi G là một đồ thị phẳng có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt là V, E, F. Giả sử G có m thành phần. Khi đó

$V - E + F = m + 1$ (2)

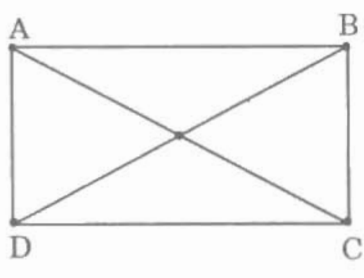
(2) gọi là công thức Euler cho đồ thị phẳng bất kì.

Chứng minh: Xem bài tập và dành cho độc giả.

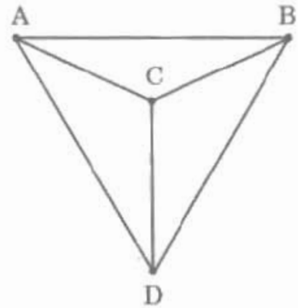
3.3. Bất đẳng thức ev

Ta xét bài toán xác định xem đồ thị G cho trước có phẳng không. Trước hết, xét một vài thí dụ.

Thí dụ 1: Cho đồ thị K_4:

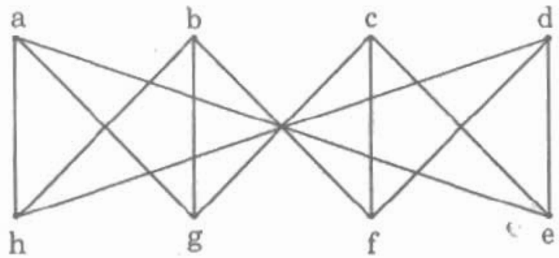


Có thể vẽ lại K_4 thành:

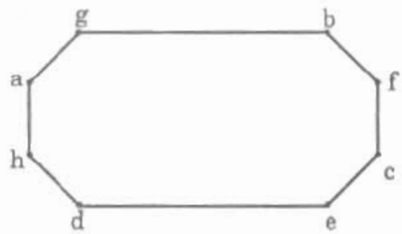


Vậy K_4 phẳng.

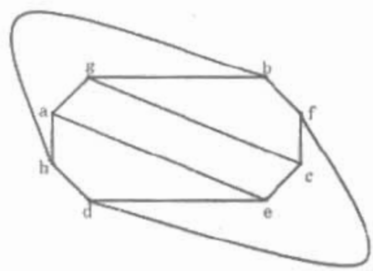
Thí dụ 2: Cho đồ thị G sau:



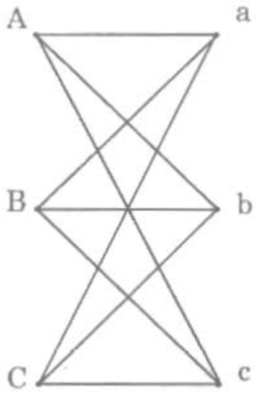
Ta tìm cách vẽ lại G thành 1 biểu đồ phẳng (các cạnh đôi một không cắt nhau). Chú ý đến chu trình agbfcedha chứa tất cả 8 đỉnh của đồ thị. Trong bất kì cách biểu diễn phẳng nào của G, chu trình trên cũng đều có dạng "đa giác" như sau:



Ta còn phải vẽ thêm các cạnh $\overline{ae}$, $\overline{gc}$ và $\overline{fd}$. Dễ thấy rằng G phẳng vì có thể biểu diễn như sau:



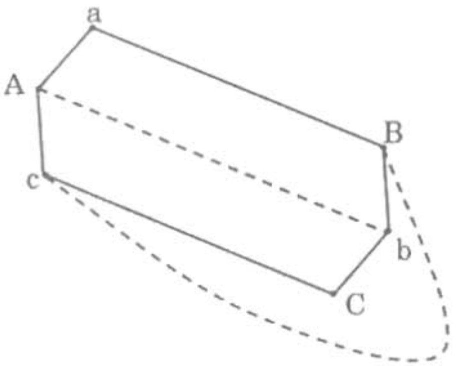
Thí dụ 3: Xét đồ thị G:



Ta chứng minh rằng đồ thị này không phẳng

Nhận xét rằng G có 1 chu trình chứa 6 đỉnh là AaBbCcA.

Nếu có thể vẽ đồ thị thành 1 biểu đồ phẳng chu trình trên sẽ dó dạng lục giác.



Ta còn phải vẽ 3 cạnh $\overline{Ab}$, $\overline{Bc}$, $\overline{Ca}$. Nếu vẽ $\overline{Ab}$ ở bên trong lục giác thì cạnh $\overline{Bc}$ phải được vẽ bên ngoài lục giác, nhưng khi đó cạnh $\overline{Ca}$ dù vẽ bên ngoài lục giác, nhưng khi đó cạnh $\overline{Ca}$ dù vẽ bên trong hay bên ngoài lục giác cũng đều cắt hoặc $\overline{Ab}$ hoặc $\overline{Bc}$. Lập luận tương tự trong trường hợp vẽ cạnh $\overline{Ab}$ ở bên ngoài lục giác. Suy ra đồ thị không phẳng.

3.3.1. Định lí

Giả sử H là đồ thị con của đồ thị G. Thì:

(i) Nếu G phẳng thì H phẳng.

(ii) Nếu H không phẳng thì G không phẳng.

Chứng minh: Hiển nhiên.
Định lí sau đây cho ta 1 điều kiện đủ để đồ thị không phẳng.

3.3.2. Định lí bất đẳng thức EV (The Edges–Vestices Inequality)
Cho G là 1 đồ thị liên thông có V đỉnh, E cạnh và đai là $g \geq 3$. Nếu G phẳng thì ta có bất đẳng thức:

$$E \leq \frac{g}{g-2}(V-2) \quad (3)$$

Chứng minh: Gọi e_i $(1 \leq i \leq E)$ là các cạnh $f_j(1 \leq j \leq F)$ là các mặt của đồ thị phẳng liên thông G. Xét ma trận cạnh mặt (edge–face incidentmatrix) của G sau đây:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & \ldots & f_j & \ldots & f_F \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_E \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & m_{ij} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

Trong đó phần ở hàng i cột j là:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e_i \text{ là cạnh biên của mặt } f_j \\ 0 & \text{nếu } e_i \text{ không là cạnh biên của mặt } f_j \end{cases}$$

Xét hàng thứ i. Vì cạnh e_i là cạnh biên của nhiều nhất là 2 mặt nên tổng các phần tử trên này ≤ 2:

$$\sum_{j=1}^{F} m_{ij} \leq 2$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{1 \leq i \leq E \\ 1 \leq J \leq F}}^{F} m_{ij} = \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{F} m_{ij} \leq 2E \qquad (1)$$

Lại xét cột thứ j. Vì mặt f_j có ít nhất g cạnh biên nên tổng các phần tử trên cột này $\geq g$.

$$\sum_{j=1}^{F} m_{ij} \geq g$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{1 \leq i \leq E \\ 1 \leq j \leq F}} m_{ij} = \sum_{j=1}^{F} \sum_{i=1}^{F} m_{ij} \geq gF \qquad (2)$$

Hơn nữa theo định lí Euler 3.2.1, ta có:

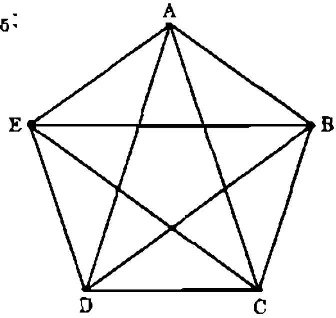
$F = E - V + 2$ (3)

(1), (2), (3) cho:

$$E \leq \frac{g}{g-2}(V-2)$$

Lưu ý: Giả thiết $g \geq 3$ cho thấy G phải là đơn đồ thị có ít nhất 3 cạnh.

Thí dụ: Xét đồ thị K_5:



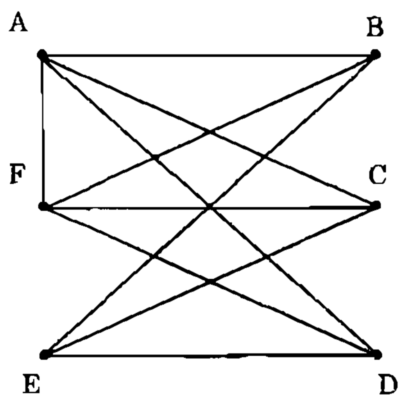
Đồ thị này có: $V = 5$, $E = 10$, $g = 3$

Mà: $\frac{g}{g-2}(V-2) = 9 < 10 = E$

Vậy K_5 không phẳng.

Lưu ý: Có những đồ thị không phẳng nhưng vẫn thoả bất đẳng thức EV.

Thí dụ 5: Đồ thị sau không phẳng nhưng thoả bất đẳng thức EV:



3.3.3. Định lí:

Cho G là một đơn đồ thị liên thông có V đỉnh, E cạnh với $E \geq 3$.
Nếu G phẳng thì ta có bất đẳng thức:

$$E \leq 3(V - 2) \qquad (4)$$

Chứng minh: Hiển nhiên

3.4. Định lí Kura Towski

Một cách tổng quát, việc khảo sát tính chất phẳng của một đồ thị là một bài toán không dễ. Định lí Kuratowski đưa ra một điều kiện ắt có và đủ để một đồ thị phẳng.

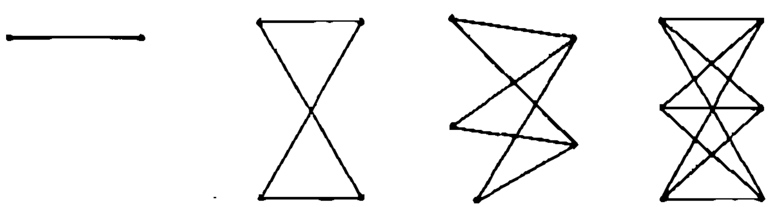
3.3.1. Định nghĩa

Nhắc lại rằng đơn đồ thị đầy đủ có n đỉnh được kí hiệu là K_n và có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

Dễ thấy K_1, K_2, K_3, K_4 đều phẳng. Hơn nữa, thí dụ 4 ở trên chứng tỏ rằng K_n ($n \geq 5$) không phẳng.

Đồ thị lưỡng phân đầy đủ (Complete bipartite graph) $K_{m,n}$ là 1 đơn đồ thị có m + n đỉnh gồm m đỉnh "bên trái" và n đỉnh "bên phải" sao cho mỗi đỉnh bên trái đều có cạnh nối đến mọi đỉnh bên phải.

Dễ thấy rằng $K_{m,n}$ có mn cạnh.



$K_{1,1}$ $\qquad$ $K_{2,2}$ $\qquad$ $K_{3,2}$ $\qquad$ $K_{4,3}$

Do thí dụ 3, $K_{m,n}$ ($m, n \geq 3$) không phẳng. Kết quả tổng quát về tính chất phẳng của đồ thị lưỡng phân đầy đủ được nêu ở phần bài tập.

Từ đồ thị G_0 cho trước, ta xây dựng 1 đồ thị G theo cách sau: Thêm vào G_0 các đỉnh mới và các cạnh mới, đỉnh mới cũng có thể nối với 1 đỉnh khác bằng 1 cạnh mới, đỉnh mới cũng có thể được đặt nằm trên 1 cạnh cũ và chua cạnh cũ này thành 2 cạnh

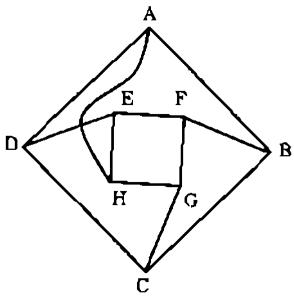
mới. Ta nói rằng đồ thị G nhận được là có chứa cấu hình (configuration) G_0.
Ta biết rằng $K_{3,3}$ và K_5 không phẳng, do đó hiển nhiên nếu một đồ thị có chứa cấu hình $K_{3,3}$ hoặc K_5 thì nó không phẳng. Điều đảo lại cũng đúng và là khẳng định của định lí Kuratowski

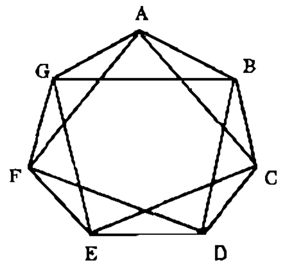
3.4.2. Định lí (Kuratowski)

Đồ thị G phẳng nếu và chỉ nếu F không chứa cấu hình $k_{3,3}$ cũng như K_5.

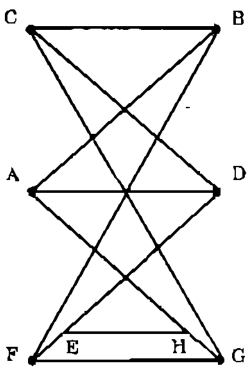
Phần chứng minh của định lí này khá phức tạp và sẽ không trình bày ở đây. Độc giả có thể tham khảo trong [1]
Ta có thể dùng định lí Kuratowski để chứng minh 1 đồ thị là không phẳng.

Thí dụ 6: Xét các đồ thị sau:

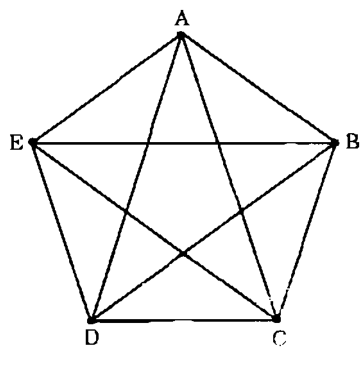




Ta vẽ lại chúng như sau:



G_1



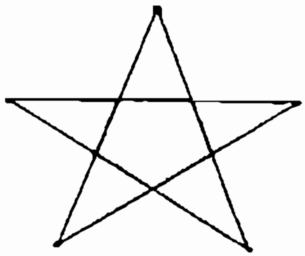
G_2

G_1 chứa cấu hình $K_{3,3}$, G_3 chứa cấu hình K_6, do đó chúng không phẳng.

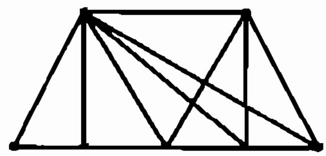
BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các đồ thị sau là phẳng:

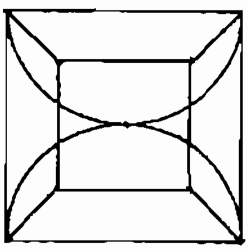
a)



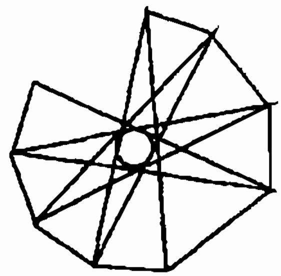
b)



c)

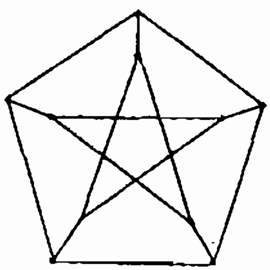


d)

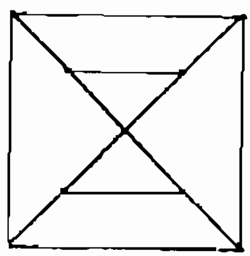


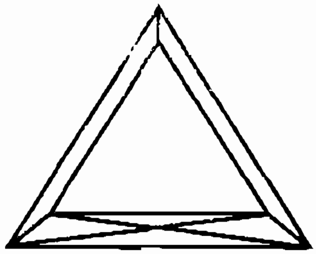
2. Chứng minh rằng các đồ thị sau không phẳng:

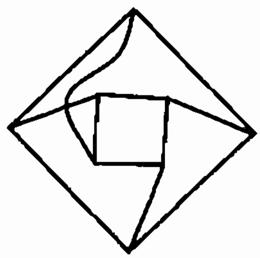
a)



b)







3. Các đồ thị sau đây có phẳng không ?

a)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & & & & 1 & & & & \\
1 & & 1 & & & & & & 1 & \\
 & 1 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & 1 & & & & \\
1 & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & 1 & \\
1 & & & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & 1 & & & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & 1 \\
1 & 1 & & & & 1 \\
1 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & & 1 & 1 & & & \\
1 & & 1 & & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & & & 1 \\
1 & & 1 & & & & 1 & \\
1 & & & & & 1 & & 1 \\
 & 1 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 & \\
1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 & \\
1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 & \\
1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
1 & & 1 & & 1 & & & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

e)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & & & & 1 & 1 \\
1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & & 1 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\
1 & & & 1 & 1 & & \\
1 & & 1 & & 1 & &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

f)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
 & 1 & & & 1 & 1 & & & 1 \\
1 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & 1 & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
1 & 1 & & 1 & & & & 1 & \\
1 & & & & & & 1 & & 1 \\
 & 1 & 1 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
1 & & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

g)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} & 1 & 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 & 1 & \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Gọi G là đồ thị có đỉnh là các ô trong 1 bàn cờ 4 x 4, và các cạnh là các đoạn nối giữa 3 đỉnh sao cho có thể đi từ đỉnh này đến đỉnh kia bằng 1 nước của quân mã.

a) Vẽ G

b) G có phẳng không?

5. Một đơn đồ thị phẳng liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị.

6. Chứng minh công thức Euler cho đồ thị phẳng không liên thông.

7. Đơn đồ thị phẳng liên thông G có 9 đỉnh, bậc các đỉnh là 2, 2,3,3,3,4,4,5. Tìm số cạnh và số mặt của G.

8. Chứng minh rằng nếu gọi E là số cạnh ($E \geq 1$) và F là số mặt của 1 đồ thị phẳng liên thông thì $3F \leq 2E$.

9. Tìm V, E và g của:

a) K_n; b)$K_{m,n}$

10. Chứng minh rằng:

a) K_n phẳng $\Leftrightarrow n \leq 4$

b) $K_{m,n}$ phẳng $\Leftrightarrow m \leq 2$ hay $n \leq 2$.

11. Đồ thị tam phân đầy đủ (Complete tripattile graph) $K_{m,n,r}$ là một đơn đồ thị có m + n + r đỉnh được phân cắt thành 3 tập hợp cách biệt V_1 gồm m đỉnh, V_2 gồm m đỉnh và V_3 gồm r đỉnh.

Ngoài ra có cạnh nối 2 đỉnh nếu và chỉ nếu 2 đỉnh này không cùng trong một V_i ($1 \le i \le 3$).

a) Vẽ $K_{1,2,3}$, $K_{2,2,3}$

b) Tìm số cạnh và đai của $K_{m,n,r}$

c) Với giá trị nào của m, n, r thì $K_{m,n,r}$ phẳng?

12. Ký hiệu L(G) là đồ thị đường của G.

a) Chứng minh rằng $L(K_5)$ và $L(K_{3,3})$ không phẳng. Suy ra rằng nếu G không phẳng thì L(G) cũng không phẳng.

b) Tìm đồ thị phẳng G sao cho L(G) không phẳng.

13. Gọi G là 1 đồ thị.

a) Giả sử G phẳng. Chứng minh rằng tồn tại 1 đỉnh của G có bậc ≤ 5.

b) Suy ra rằng nếu mọi đỉnh của G đều có bậc ≥ 6 thì G không phẳng.

14. Một đồ thị Platon (Platonic graph) là 1 đồ thị phẳng liên thông mà mọi đỉnh đều có cùng bậc d_1 ($d_1 \ge 3$) và mọi mặt đều có d_2 cạnh biên ($d_2 \ge 3$).

Xét một đồ thị Platon có số đỉnh, số cạnh và số mặt lần lượt là V, E, F.

a) Chứng minh rằng $E = \frac{1}{2}d_1V$ và $F = \frac{d_1}{d_2}V$

B) Chứng minh rằng $(2d_1 + 2d_2 - d_1d_2)V = 4d_2$

Suy ra bất đẳng thức $(d1 - 2)(d2 - 2) < 4$

c) Tìm tất cả các cặp (d_1, d_2) có thể có và vẽ các đồ thị Platon tương ứng.

15. Bất đẳng thức EV có còn đúng trong trường hợp đồ thị G không liên thông?

IV
CÂY

4.1. Khảo sát tổng quát

4.1.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.1.1. Định nghĩa

Cây (Tree) còn gọi là cây tự do (Free tree) là một đồ thị liên thông không có chu trình.

4.1.1.2. Định lí

Cho T là một cây, thì giữa hai đỉnh bất kì của T luôn luôn tồn tại một và chỉ một đường trong T nối chúng.

Chứng minh: Gọi x, y là 2 đỉnh trong cây T. Vì T liên thông nên có ít nhất một đường trong T nối x và y. Giả sử có 2 đường khác nhau cùng nối x, y:

$P_1 = a_0a_1...a_n$; $P_2 = b_0b_1...b_n$

trong đó $a_0 = b_0 = x$ và $a_n = b_n = y$

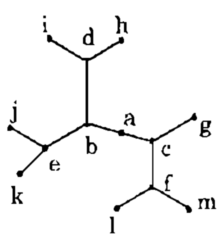
Gọi i là chỉ số nhỏ nhất sao cho $\overline{a_ia_{i+1}} \neq \overline{b_ib_{i+1}}$

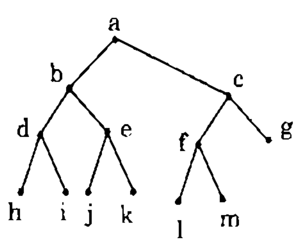
Gọi j là chỉ số nhỏ nhất $\geq y$ sao cho có $k > y$ để $b_k = a_j$

Dễ thấy y, j, k tồn tại và $a_1a_{i+1}...a_jb_{k-1}...b_i$ là chu trình trong T: vô lí

Chiều dài của đường (duy nhất) nối 2 đỉnh x, y trong T gọi là khoảng cách (distance) giữa hai đỉnh x, y và được ký hiệu là $\delta(x, y)$.Cây có gốc (rooted tre) là 1 cây có hướng các cạnh được định hướng sao cho với đỉnh, luôn luôn có 1 đường định hướng từ gốc đi đến đỉnh đó. Hiển nhiên, gốc của cây là duy nhất. Do định lí 4.1.1.2, ta thấy ngay mọi cây tự do đều có thể chọn bất kì một đỉnh của nó làm gốc để trở thành 1 cây có gốc.

Thí dụ: Với cây tự do T sau, chọn đỉnh a làm gốc thành cây có gốc T'.





4.1.1.3. Định lí

Nếu cây có n đỉnh thì có n −1 cạnh.

Chứng minh: Ta có thể giả sử là cây có gốc. Mỗi đỉnh khác gốc đều có bậc trong bằng 1, còn gốc cò bậc trong bằng 0. Mà ta có tất cả n – 1 đỉnh khác gốc, vậy cò n – 1 cạnh.

4.1.2. Định lí (Daisy chain Theorem)

Giả sử T là một đồ thị có n đỉnh, thì 6 mệnh đề sau đây tương đương:

(i) T là một cây

(ii) T không có chu trình và có n – 1 cạnh

(iii) T liên thông và nếu hủy bất kì một cạnh nào của nó cũng làm mất tính liên thông.

(iv) Giữa 2 đỉnh bất kì của T luôn luôn tồn tại một đường duy nhất nối chúng.

(v) T không có chu trình, và nếu thêm một cạnh mới nối 2 đỉnh bất kì của T thì sẽ tạo ra một chu trình.

(vi) T liên thông và có n – 1 cạnh.

Chứng minh:

(i) ⇒ (ii): do định lí 4.1.1.2

(ii) ⇒ (iii): Mỗi thành phần liên thông của T đều là cây T không có chu trình. Trong mỗi cây này, số cạnh + 1 bằng số đỉnh. Mà theo giả thiết trong T có số cạnh + 1 = số đỉnh, vây T chỉ có thể có một thành phần, nghĩa là T liên thông.

Bây giờ huỷ đi một cạnh của T, ta nhận được một đồ thị T' có n đỉnh và n – 2 cạnh, hơn nữa T' cũng không có chu trình. Nếu T' liên thông thì T' là một cây: vô lí.

(iii) ⇒ (iv): Gọi x, y là 2 đỉnh bất kỳ của T. Vì T liên thông nên tồn tại một đường lối chúng. Giả sử có 2 đường khác nhau cùng nối c với y, thì khi đó, nếu huỷ đi một cạnh nằm trên đường thứ nhất nhưng không nằm trên đường thứ hai thì sẽ làm mất tính chất liên thông của đồ thị: mâu thuẫn với giả thiết.

(iv) ⇒ (v): Nếu T có một chu trình, gọi v, w là 2 đỉnh phân biệt của chu trình này, rõ ràng, ta có 2 đường khác nhau nối v và w trên chu trình này: vô lí, vậy T không có chu trình.

Bây giờ, thêm vào T cạnh mới nối đỉnh x với đỉnh y. theo giả thiết, có một đường trong T (không chứa cạnh mới) nối x và y. Rõ ràng đường này thêm cạnh mới sẽ thành một chu trình.

(v) ⇒ (vi): Xét 2 đỉnh bất kỳ x, y của T. Thêm vào T cạnh mới nối x với y thì ta tạo được một chu trình. Huỷ cạnh mới này khỏi chu trình, ta được một đường trong T nối x với y. Vậy T liên thông. Mà theo giả thiết, T không có chu trình nên T là cây có n đỉnh. Vậy T có n – 1 cạnh.

(vi) ⇒ (i): Giả sử T có chu trình. Hủy một cạnh trong chu trình này không làm mất tính liên thông. Nếu đồ thị nhận được vẫn còn có chu trình thì ta lại huỷ một cạnh trong chu trình mới, cứ như thế cho đến khi ta nhận được đồ thị liên thông và không có chu trình. Đồ thị này là một cây có n đỉnh nhưng số cạnh < n – 1: vô lí.
Vậy T không có chu trình, nghĩa là T là một cây.

4.1.3. Tâm và bán kính của cây

4.1.3.1 Định nghĩa

Xét một cây có gốc T.

Mức (level) của một đỉnh v trong T là khoảng cánh từ gốc đến v. Mức lớn nhất của một đỉnh bất kì trong cây gọi là chiều cao (height) của cây. Nếu $\overline{xy}$ là cạnh của T thì ta gọi x là cha (parent) của y, y là con (child) của x. Hai đỉnh cùng cha gọi là anh em (siblings) của nhau. Nếu có một đường (có hướng) đi từ v đến w thì v gọi là đỉnh trước (ancestoer) của w, w gọi là đỉnh sau (descendant) của v.

Những đỉnh không có con gọi là lá (leaves), những đỉnh không là lá được gọi là đỉnh trong (internal vertices). Một tập hợp gồm nhiều cây đội một không có đỉnh chung gọi là mọt rừng (forest). Mỗi đỉnh x của T là gốc một cây con của T gồm x và các đỉnh sau nó. Như vậy, nếu hủy gốc khỏi câu T, ta sẽ được một rừng.

Bây giờ ta xét một cây tự do T.
Độ lệch tâm (eccentricity) của đỉnh x, ký hiệu là E(x), là khoảng cách lớn nhất từ x đến một đỉnh bất kỳ của T.

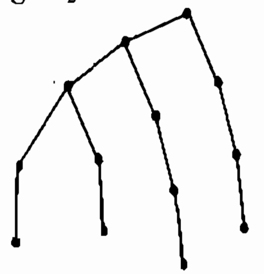
$E((x) = \max_{y \in T} \delta(x, y)$

Đỉnh có độ lệnh tâm nhỏ nhất trong T được gọi là tâm (center) của T, độ lệch tâm của tâm được gọi là bán kính (radius) của T. Nhận xét rằng nếu ta trọng tâm là gốc thì cây có gốc tương ứng sẽ có chiều cao nhỏ nhất (bằng bán kính của cây)

4.1.3.2. Định lí

Một cây tự do có nhiều nhất 2 tâm.

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh rằng nếu a, b là tâm của T thì chúng được nối với nhau bởi một cạnh. Thực vây, chọn a làm gốc. Giả sử $\delta(a,b) > 1$ thì có một đỉnh u đứng trước b và đừng sau a. Với mọi x trong cây.



- Nếu x đứng sau hay trùng với u thì

$\delta(u,x) = \delta(a,x) - \delta(a,u) < E(A)$

- Nếu x không đứng sau và không trùng với u thì

$\delta(u,x) = \delta(b,u) < E(b)$

Suy ra $E(u) < E(a) = E(b)$: vô lí

Bây giờ nếu a, b, c là 3 tâm đôi một khác nhau của cây thì:

$\delta(a, b) = \delta(b,c) = \delta(c,a) = 1$

Điều này đưa đến cây có chu trình abca. Vô lí.

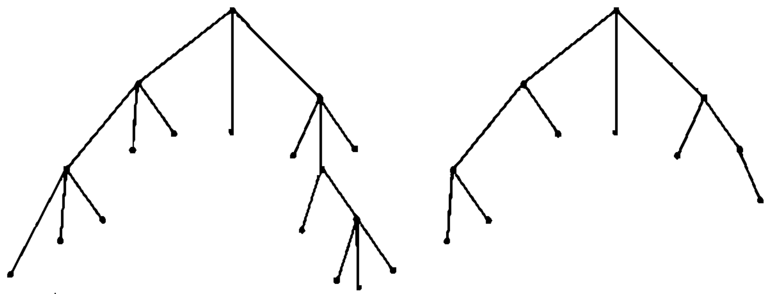
Vậy, cây có nhiều nhất 2 tâm.

4.1.4. Cây m – Phân

4.1.4.1 Định nghĩa

Cho một cây có gốc T. Nếu số con tối đa của một đỉnh trong T là một cây m – phân (m–ary tree).

Nếu mọi đỉnh trong của T đều có đúng m con thì T gọi là một cây m – phân đầy đủ (complete m –ary tree).



4.1.4.2. Định lí

Một cây m–phân đầy đủ có i đỉnh trong thì có mi + 1 đỉnh.

Chứng minh: Mọi đỉnh trong đều có bậc ngoài là m, còn lá có bậc ngoài là 0, vậy số cạnh của cây là mi và do đó, số đỉnh của cây là mi + 1.

4.1.4.3. Hệ luận

Cho T là một cây m–phân đầy đủ thì:

(y) T có y đỉnh trong $\Rightarrow$ T có $l = (m-1)y + 1$ lá

(ii) T có l lá $\Rightarrow$ T có $i = \dfrac{l-1}{m-1}$ đỉnh trong

và $n = \dfrac{ml-1}{m-1}$ đỉnh

(iii) T có n đỉnh $\Rightarrow$ T có $i = \dfrac{n-1}{m-1}$ đỉnh trong

và $l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$ lá

Chứng minh: Do định lí trên và đẳng thức n = y + 1

Một cây có chiều cao h gọi là cân bằng (balanced) nếu mọi lá của nó đều ở mức h hoặc h – 1.

4.1.4.4. Định lí

(y) Một cây m – phân có chiều cao h thì có nhiều nhất là m^h lá.

(ii) Một cây m– phân có l lá thì có chiều cao $h \geq [\log_m l]$

(iii) Một cây m–phân đầy đủ và cân bằng có lá thì có chiều cao $h = [\log_m l]$

(Ở đây, ký hiệu [r] chỉ số nguyên nhỏ nhất $\geq$ r)

Chứng minh: (y) Dùng qui nạp trên h.

Định líhiển nhiên đúng khi $h = 1$

Cho $h \geq 2$. Giả sử mọi cây có chiều cao $k \leq h - 1$ đều có nhiều nhất là m^{k-1} ($\leq m^{h-1}$) lá. Xét cây T có chiều cao là h. Gốc khỏi cây ta được 1 rừng gồm không quá m cây con, mỗi cây con này có chiều cao $\leq h - 1$. Do giả thiết qui nạp, mỗi cây con này có nhiều nhất là m^{h-1} lá. Mà lá của những cây con này cũng là lá của T, vậy T có nhiều nhất là $m.m^{h-1} = m^h$ lá.

(ii) Nhận xét rằng:

$h \geq [\log_m l] \Leftrightarrow l \leq m^h$.

(iii) Nhận xét rằng:

$h = [\log_m l] \Leftrightarrow m^h < l \leq m^h$.

4.2. Cây nhị phân và phép duyệt cây

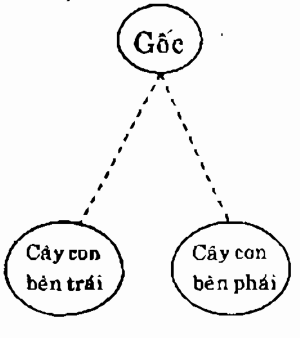
4.2.1. Định nghĩa

Ta nhắc lại định nghĩa của cây nhị phân (binary tree):

Cây nhị phân là 1 cây có gốc sao cho mọi đỉnh đều có nhiều nhất là 2 con. Từ gốc, có thể có 1 hay 2 cạnh đi xuống, đỉnh nối với gốc ở phía trái (phải) bằng cạnh này gọi là con bên trái (phải) bằng các cạnh này gọi là con bên trái (lét child) (con bên phải right child)). Mỗi một trong các đỉnh con này lại có con bên trái hay con bên phải của nó và cứ thế cho đến cuối cùng là các lá.

Người ta còn dùng dạng định nghĩa đệ qui của cây nhị phân sau: Một cây nhị phân hoặc là tập rỗng, hoặc gồm 1 gốc với hai cây nhị phân cách biệt gọi là cây con bên trái và cây con bên phải (left subtree and right subtree).

Cây nhị phân = ∅ hay



4.2.2. Phép duyệt cây

Duyệt cây (Tree searching) là đưa ra một 1 danh sách liệt kệ tất cả các đỉnh của cây, mỗi đỉnh 1 lần.

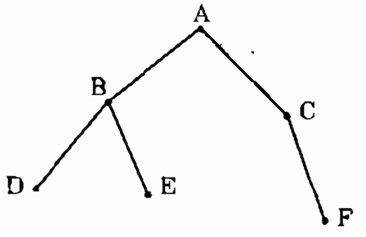
Có 3 giải thuật thường dùng để duyệt cây nhị phân là Preorder Search, Inorder Search và Postorder Search.

Có 3 giải thuật vừa nêu đều qui định

Giải thuật preorder search

1. Đến gốc.
2. Đến cây con bên trái, dùng Preorder
3. Đến cây con bên phải, dùng Preorder

Thí dụ 2: Xét cây nhị phân:



Giải thuật Preorder cho ta thứ tự các đỉnh là: A, [cây con bên trái], [cây con bên phải].

Trong đó, thứ tự các đỉnh của cây con bên trái của A là: B D E và thứ tự các đỉnh của cây con bên phải của A là: CF

Vậy kết quả: A B D E C F.

Giải thuật Inorder search

1. Đến cây con bên trái, dùng Inorder
2. Đến gốc.
3. Đến cây con bên phải, dùng Inorder

Thí dụ 3: Vẫn xét cây trong thí dụ trên

Giải thuật Inorder cho ta thứ tự các đỉnh là:

[cây con bên trái], A, [cây con bên phải]

Trong đó, thứ tự các đỉnh của các cây con bên trái của A là: D B E và thứ tự các đỉnh của cây con bên trái của A là: CF

Vậy kết quả: A B E A C F.

Giải thuật Postorder search

1. Đến cây con bên trái, dùng Postorder
2. Đến cây con bên phải, dùng Postorder
3. Đến gốc.

và thứ tự các đỉnh của cây con bên phải của A là: F C

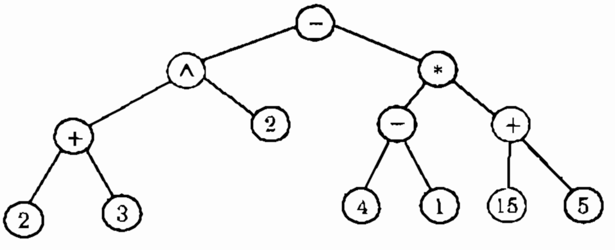
Vậy kết quả: D E B F C A.

4.2.3. Ký pháp nghịch đảo Ba lan

Xét biểu thức đại số sau:

E = (2 + 3)^2 – (4 – 1)*(15÷ 5

Cây nhị phân sau đây cho ta thấy cách tính trị của E:



Trên 1 máy tính sử dụng logic RPN, để tính trị của E, ta phải đưa vào máy các dữ liệu theo thứ tự sau:

2 3 + 2^4 1 – 15 5 + 8*–

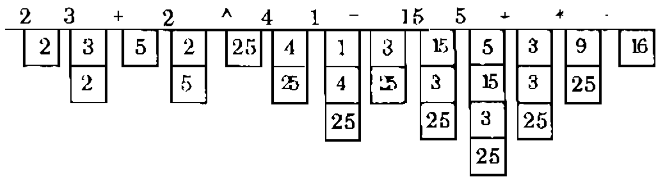
Dạng thức trên gọi là ký pháp nghịch đảo Balan (Reverse Polish notation), gọi tắt là RPN của biểu thức của E.

Nhận xét rằng nếu áp dụng giải thuật Postorder search vào cây vẽ ở trên thì được kết quả chính thức là biểu thức RPN của E.

Ta hãy xem máy tính đã tính ra trị của E như thế nào: Máy lưu giữ các con số trong stack, mỗi khi 1 phép toán được đưa vào máy thì máy sẽ thực hiện phép toán này với 2 toán hạng là 2 số lấy từ stack ra rồi lại đẩy lại kết quả vào stack, cứ như thế cho đến khi có kết quả cuối cùng.

Hình vẽ sau đây minh hoạ cách làm của máy:

Dữ liệu



4.3. Cây bao trùm

4.3.1. Định nghĩa

Cho đồ thị vô hướng G. Một cây T gọi là 1 cây bao trùm (spanning tree) của G nếu T là 1 đồ thị con chứa mọi đỉnh của G.

4.3.2. Định lí

Đồ thị G có cây bao trùm nếu và chỉ nếu G liên thông.

Chứng minh

Phần thuận là hiển nhiên.

Ta chứng minh phần đảo. Coi đồ thị liên thông G.

Xét giải thuật xây dựng đồ thị con T sau đây:

1. Chọn tuỳ ý 1 đỉnh của G đặt vào T

2. Nếu mỗi đỉnh của G đều đã nằm trong T thì dừng.

3. Nếu không, tìm 1 đỉnh của T bằng 1 cạnh. Thêm đỉnh và cạnh này vào T. Trở về bước 2.

Ta sẽ chứng minh 2 điều:

a) Bước 3 khả thi, nghĩa là nếu T chưa chứa hết mọi đỉnh của G, ta luôn luôn tìm được 1 cạnh nối 1 đỉnh trong T với 1 đỉnh ở ngoài T.

b) Khi giải thuật kết thúc thì T là 1 cây bao trùm của G. Để chứng minh a), gọi v là 1 đỉnh ở trong T và w là 1 đỉnh ở ngoài T. Vì T liên thông nên tồn tại 1 đường trong G nối v với w, đường này nối v $\in$ T với w $\notin$ T nên phải chứa ít nhất 1 cạnh có tính chất mong muốn, nghĩa là nó nối 1 đỉnh v' $\notin$ T với đỉnh w' $\notin$ T với đỉnh W' $\notin$ T. Vậy bước 3 luôn luôn thực hiện được cho đến khi mọi đỉnh của G đều nằm trong T.

Để chứng minh b), ta chỉ cần chứng minh rằng sau mỗi lần thực hiện bước 3. Đồ thị T nhận được 1 cây. Gọi T_k là đồ thị nhận được sau khi thực hiện bước 3 lần thứ k. Hiển nhiên T_0 là 1 cây. Giả sử T_k là cây sau khi thực hiện bước 3 lần thứ k + 1, ta đã thêm vào T_k cạnh mới $\overline{v_k w_{k+1}}$ trong đó $v_k \in T_k$ và $w_{k+1} \notin T_k$.

Giả sử T_{k+1} có chu trình thì chu trình này phải chứng minh cạnh $\overline{v_k w_{k+1}}$. Huỷ cạnh này khỏi chu trình, ta được 1 đường trong T_k nối v_k với w_{k+1}: vô lí vì $w_{k+1} \notin T_k$. Vậy T_{k+1} không có chu trình. Hơn nữa dễ thấy rằng T_{k+1} có k + 1 cạnh và k + 2 đỉnh. Vậy T_{k+1} là 1 cây.

4.3.3. DFS và BFS

Giải thuật nêu trên được áp dụng để tìm cây bao trùm của 1 đồ thị liên thông theo 2 cách:

1. Phép duyệt theo bề sâu (Depth-First Search)

1. Chọn 1 đỉnh bất kỳ của G làm gốc của T

2. Tạo 1 đường từ gốc đi qua các đỉnh không trong T, kéo dài đường này đến khi không thể kéo dài thêm. Đặt đường này vào T rồi quay trở về đỉnh ngay trước đó, xem đỉnh gốc này là gốc. Lập lại thủ tục này cho đền khi mọi đỉnh của G nằm trong T.

Cây bao trùm nhận được bằng phương pháp này gọi là cây bao trùm tạo theo bề sâu (DepthFirst Spanning Tree).

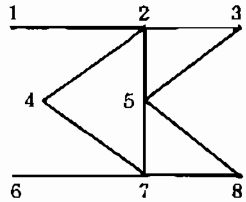
2) Phép duyệt cây theo bề rộng (Breadth-First Search):

1. Chọn 1 đỉnh bất kì của G làm gốc của T.

2. Đặt mọi cạnh nối gốc với 1 đỉnh ngoài T vào T. Lần lượt xét từng đỉnh con của gốc, xem đỉnh này là gốc mới. Lập lại thủ tục này cho đế khi mỗi đỉnh của G đều nằm trong T.

Cây bao trùm nhận được bằng phương pháp này gọi là cây bao trùm tạo theo bề rộng (Breadth–First Spanning Tree).

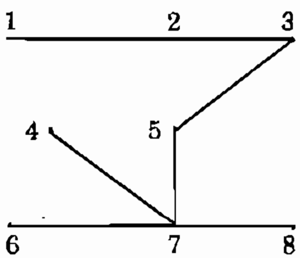
Thí dụ 5: Coi đồ thị liên thông G sau:

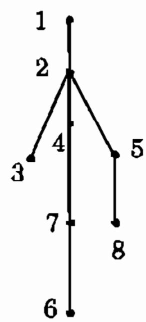


$$
\begin{array}{c}
\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
 & 1 & & & & & & \\
1 & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & & 1 & \\
 & 1 & 1 & & & & 1 & 1\\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & 1\\
 & & & & 1 & & 1 &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

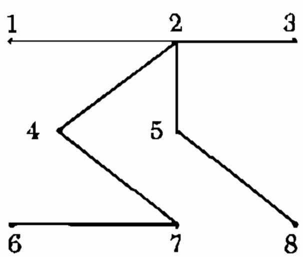
Lấy đỉnh 1 làm gốc

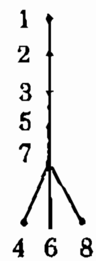
Cây bao trùm tạo theo bề sau là:





Cây bao trùm tạo theo bề rộng là:





Định lí sau đây cho ta tính chất cơ bản, mặc dù đơn giản nhưng rất quan trọng của cây bao trùm.

4.3.4. Định lí

Coi một cây bao trùm T của đồ thị G.
Thêm vào T một cạnh của G (không thuộc T), ta được 1 chu trình trong T. Hủy 1 cạnh bất kì trên chu trình này khỏi T, ta nhận được một cây bao trùm mới G.
Chứng minh: Hiển nhiên
Ta suy ra được ngay kết quả sau:

4.3.5. Giải thuật kiểm tra tính liên thông

Xét 1 đồ thị G.

Áp dụng giải thuật tìm cây bao trùm đã trình bày ở trên vào G. Khi giải thuật dừng.

- Nếu T chứa mọi đỉnh của G (nghĩa 12 điều kiện dừng nêu ở bước 2 thoả) thì G liên thông (và T là 1 cây bao trùm của G).
- Nếu T không chứa mọi đỉnh của G (nghĩa là ở lần sau cùng thực hiện bước 2, không tìm được cạnh nào nối 1 đỉnh trong T với 1 đỉnh ngoài T) thì G không liên thông (và T là cây bao trùm của 1 thành phần G).

4.4. Cây bao trùm nhỏ nhất

4.4.1 Định nghĩa

Cho 1 đồ thị G. Giả sử mỗi cạnh của G được gán 1 số gọi là trọng số (weight) của cạnh ấy. Thì G được gọi là một đồ thị có trọng (weighted graph).

Tổng trọng số tất cả các cạnh của 1 đường (chu trình, đồ thị con) gọi là trọng số của đường (chu trình, đồ thị con) ấy. Ta kí hiệu trọng số của cạnh e (đồ thị G) là c(e) (c(G)).

Bài toán đặt ra là đi tìm 1 cây bao trùm có trọng số nhỏ nhất (minimal spanning tree: MST) của 1 đồ thị có trọng số liên thông.

4.4.2. Định lí

Gọi T là 1 cây bao trùm của 1 đồ thị có trọng số liên thông G. Thì T là 1 MST nếu và chỉ nếu mỗi cạnh $e \notin T$ đều có trọng số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T.

Chứng minh

($\Rightarrow$) Giả sử T là một MST và cạnh $e \notin T$. Xét cạnh $u \notin T$ nằm trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T. Bằng cách thay u bởi e, ta nhận được 1 cây bao trùm mới T'. Vì T là MST nên $c(T') \geq C(T)$. Suy ra $c(e) \geq c(u)$.

($\Leftarrow$) Giả sử T là cây bao trùm có tính chất là mỗi cạnh $e \notin T$ đều có trọng số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với cạnh của T. Gọi $e_1, e_2, \dots e_n$ là các cạnh của T sắp xếp theo thứ tự trọng số tăng dần, nghĩa là:

$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_n)$

Gọi T_k là một cây bao trùm bất kỳ có k cạnh khác T. Gọi e_j là cạnh có chỉ số nhỏ nhất mà không thuộc T_k, nghĩa là e_1, e_2, ..., $e_{j-1} \in T \cap T_k$ và $e_j \in T \backslash T_k$. Thì $T_k \cup \{e_j\}$ có chu trình γ. Phải có một cạnh $u \in \gamma \backslash T$. Thì $T \cup \{u\}$ có chu trình T và theo giả thiết c(u) lớn nhất trên T. Ta chứng minh $c(u) \geq c(e_j)$. Thực vậy, có cạnh $w \in T \backslash T_k$ và vì $w \notin \{e_1, e_2, \dots e_{j-1}\} \subset T_k$ nên ta có:

$c(e_j) \leq c(w) \leq c(u)$

Bây giờ đặt $T_{k-1} = (T_k \cup \{e_j\} \backslash \{u\}$ thì T_{k-1} là 1 cây bao trùm thỏa 2 tính chất sau:

– T_{k-1} chỉ còn khác T ở k – 1 cạnh

– $c(T_{k-1}) = c(T_k) + c(e_j) - c(u) \leq c(T_k)$

Lập lại thủ tục trên, ta cây dựng được dãy cây bao trùm T_{k-1}, T_{k-2},..., $T_0 = T$ với $c(T) = c(T_0) \leq c(T_1) \dots \leq c(T_k)$

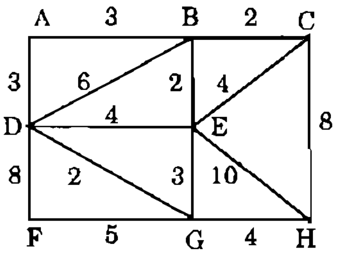
Từ chứng minh trên, ta suy ra một giải thuật tìm MST của đồ thị G như sau:

1. Xuất phát từ 1 cây bao trùm T bất kì của G.

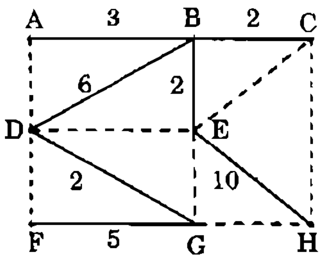
2. Nếu mọi cạnh $e \notin T$ đều có trọng số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T thì dừng.

3. Nếu không, nghĩa là có 1 cạnh $e \notin T$ có trọng số nhỏ hơn trọng số cạnh u trên chu trình tạo bởi e với các cạnh của T thì trong T, thay u bằng e. trở về bước 2.

Thí dụ 6: Xét đồ thị có trọng số G sau đây

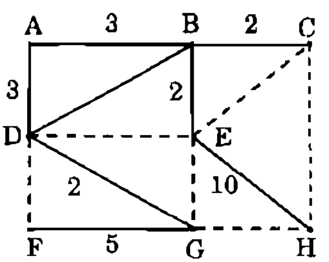


Ta bắt đầu từ cây bao trùm G:



Có 7 cạnh không thuộc cây bao trùm là $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EG}$, $\overline{CH}$, $\overline{GH}$. Ta kiểm tra dần từng cạnh.

• Cạnh $\overline{AD}$: thêm vào T thì tạo ra chu trình ADBA gồm 3 cạnh có trọng số là 3, 3, 6. Vậy thay $\overline{BD}$ (có trọng số 6) bởi cạnh $\overline{AD}$ (có trọng số 3). Bây giờ T là:



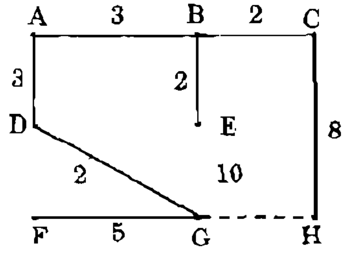
• Tiếp tục đến cạnh $\overline{DE}$: tạo ra chu trình DEBA, trên chu trình này $\overline{DE}$ có trọng số lớn nhất. Vậy giữ nguyên T.

• Cạnh $\overline{DF}$: có trọng số lớn nhất trên chu trình DFGD, giữ nguyên T.

• Cạnh $\overline{DF}$: giữ nguyên T

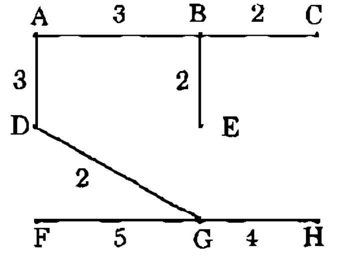
• Cạnh $\overline{EC}$: giữ nguyên T

• Cạnh $\overline{CH}$: có trọng số nhỏ hơn trọng số cạnh $\overline{EH}$ trên chu trình BCDEB, vậy thay $\overline{EH}$ bởi $\overline{CH}$. T trở thành:



• Cuối cùng, cạnh $\overline{GH}$: có trọng số là 4 nhỏ hơn trọng số $\overline{CH}$ trên chu trình GHCBDG, vậy thay $\overline{CH}$ bởi $\overline{GH}$.

Ta tìm được 1 MST của G là:



Trong thực hành, giải thuật trên ít được dùng mà ta thường dùng giải thuật Prim hoặc giải thuật Kruskal để tìm MST.

4.4.3. Giải thuật Prim

Cho G là một đồ thị có trọng số liên thông. Giải thuật Prim xây dựng đồ thị con T của G như sau:

1. Chọn tuỳ ý 1 đỉnh của G đặt vào T.

2. Nếu mọi đỉnh của G đều nằm trong T thì dừng.

3. Nếu không, tìm 1 cạnh có trọng số nhỏ nhất nối 1 đỉnh trong T với q đỉnh ngoài T: Thêm cạnh này vào T. Trở về bước 2.

Ta sẽ chứng minh rằng giải thuật Prim cho ta MST của đồ thị G.

Giả sử G có đỉnh vào T_k ($0 \le k \le n-1$) là đồ thị gồm k cạnh và k + 1 đỉnh nhận được khi thực hiện bước 3 lần lượt thứ k.

Xét mệnh đề

(A_k): Các cạnh của T_k nằm trong 1 MST

Ta chứng minh rằng (A_{n-1}) đúng. Dùng qui nạp.

(A_0) hiển nhiên đúng.

Giả sử (A_k) đúng ($0 \le k < n-1$). Gọi T* là 1 MST chứa T_k và cạnh $e_{k+1} = \overline{vw}$ ($v \in$ T* thì (A_{k+1}) đúng trong T* nối v với w. Dễ thấy rằng trên đường này phải chứa một cạnh $\overline{v'w'}$ với $v' \in T_k$ và $w' \notin T_k$.

Theo điều kiện chọn cạnh e_{k+1} của giải thuật Prim thì:

$c(e_{k+1}) \le c(\overline{v'w'})$

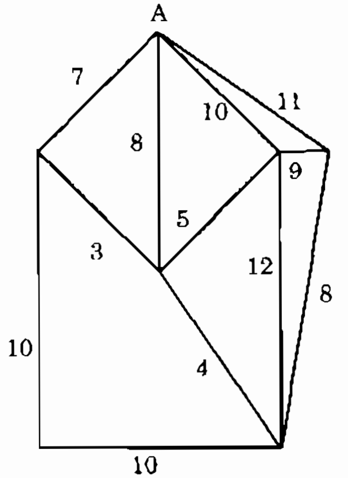
và theo tính chất của MST thì:

$c(e_{k+1}) \ge c(\overline{v'w'})$

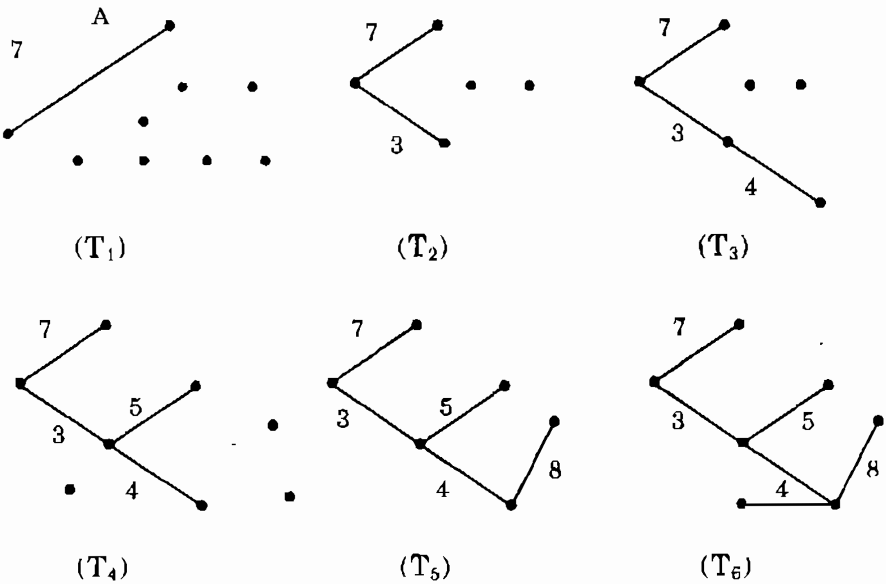
Suy ra: $c(e_{k+1}) = c(\overline{v'w'})$

Bây giờ trong T', thay cạnh $\overline{v'w'}$ bởi e_{k+1}, ta nhận được T**, hiển nhiên T** là MST chứa T_{k+1}. Vậy (A_{k+1}) đúng

Thí dụ: Xét đồ thị sau:



Áp dụng giải thuật Prim, bắt đầu từ đỉnh A, ta xây dựng 1 MST của đồ thị trên



4.4.4. Giải thuật Kruskal

Cho G = (V, E) là 1 đồ thị có trọng số liên thông. Giải thuật Kruskal xây dựng 1 đồ thị con của G như sau:

1. T = (V, ∅)
2. Nếu T liên thông thì dừng.

3. Nếu không, chọn 1 cạnh có trọng số nhỏ nhất không trong T sao cho khi thêm cạnh này vào T. Trở về bước 2.

Ta sẽ chứng minh rằng giải thuật Kruskal cho ta 1 MST của đồ thị G. Chỉ cần chứng minh 2 điều:

a) Bước 2 là khả thi

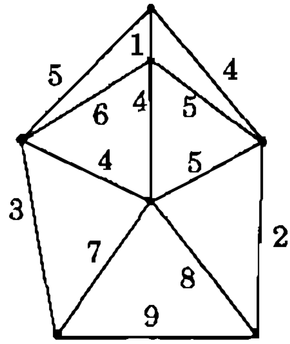
b) Khi giải thuật kết thúc thì đồ thị T là MST của G. Để chứng minh a), đặt: A = {cạnh e $\notin$ T| thêm e vào T thì không tao ra chu trình}

Ta cần chứng minh rằng nếu T không liên thông nên phải có 2 đỉnh u, v không nằm trong cùng 1 thành phần của T. Vì G liên thông nên có 1 đường nối u với v, dường này phải chứa cạnh e = $\overline{u', v'}$ với u' nằm trong cùng thành phần với u. Vậy e $\notin$ T và thêm cạnh e này vào T thì không tạo ra chu trình,. Nói cách khác A = ∅.

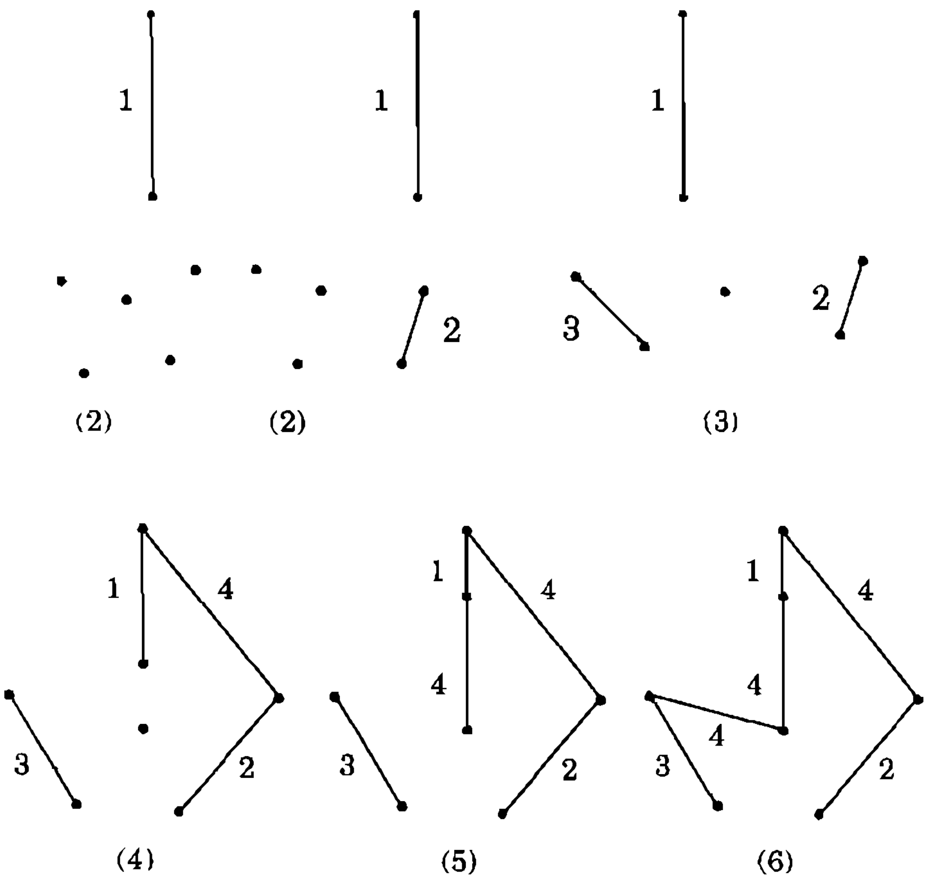
Để chứng minh b), ta gọi T_0 là đồ thị nhận được khi giải thuật Kruskal kết thúc. Hiển nhiên T_0 là 1 cây bào trùm của G. Lấy 1 cạnh e $\notin$ T_0. Trên chu trình tạo bởi e với các cạnh a bất kỳ. Xét lần thực hiện bước 3 của giải thuật để chọn được cạnh a. Với ký hiệu tập hợp A như trên, nhận xét rằng trong T_0 nếu huỷ tập hợp A như trên, nhận xét rằng trong T_0 nếu huỷ cạnh a và thêm cạnh e của giải thuật Kruskal thì c(a) ≤ c(e).

Vậy e có trong số lớn nhất trên chu trình tạo bởi e với các cạnh trong T_0. Suy ra T_0 là 1 MST của G.

Thí dụ 8: Xét đồ thị G



Áp dụng giải thuật Kruskal, ta xây dựng dần 1 MST của đồ thị trên



4.5 Cây mã Huffman

4.5.1. Mã tiền tố

Giả sử ta có một bản tin gồm một dãy kí hiệu lấy trong một tập hợp hữu hạn X. Biết rằng mỗi kí hiệu trong X xuất hiện trong bản tin theo một xác suất cho trước. Ta muốn mã các kí hiệu này thành những chuỗi bit nhị phân sao cho chiều dài chuỗi mã của bản tin mà là ngắn nhất.

Thí dụ 9: Xét một bản tin gồm 10^3 kí hiệu trong tập hợp X = {a, b, c, d, e, f}. Tần suất xuất hiện của các kí hiệu trong bản tin như sau:

Kí hiệu	a	b	c	d	e	f
Tần suất xuất hiện	45	10	12	3	20	10

Có 6 kí hiệu khác nhau nên với cách mã có chiều dài cố định cần tối thiểu 3 bit cho mỗi kí hiệu ($2^3 \geq 6$). Chẳng hạn:

Kí hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã 1	000	001	010	011	100	101

Cách mã này cho chiều dài chuỗi mã của bản tin là $3.10^{15} = 300\ 000$
Xem các mã thứ hai như sau:

Kí hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã 2	00	01	00	11	1	10

Cách mã này cho chiều dài chuỗi mã của bản tin là:

$10^5(1.45\% + 2.10\% + 2.12\% + 2.3\% + 2.3\% + 1.20\% + 2.10\%) = 135000$

Tuy nhiên cách mã này không dùng được vì lí do sau:

Xét 2 bản tin aa và c. Chúng cùng được mã thành 00. Do đó, khi nhận được bản mã, ta không thể giải được.

Báy giờ xem cách mã thứ ba như sau:

Kí hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã 3	1	0010	011	000	000	0011

Cách mã này cho chiều dài mỗi chuỗi mã của bản tin là:

$10^5(1.45\% + 4.10\% + 3.12\% + 3.3\% + 3.20\% + 4.10\%) = 230000$

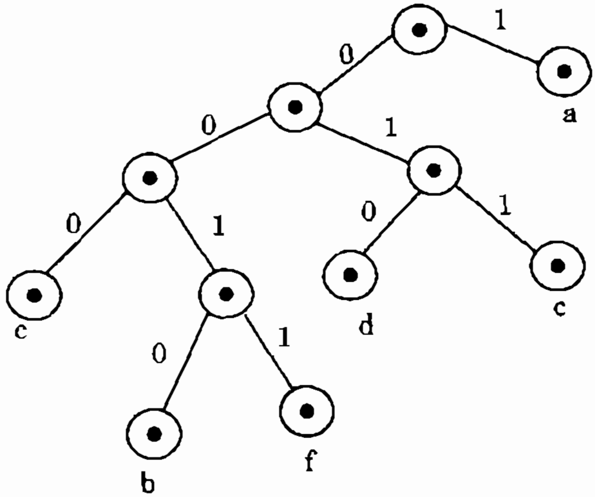
Nhận xét rằng cách mã này cho phép ta có thể giải mã được nhờ tính chất sau: không có chuỗi mã của 1 kí hiệu nào là tiền tố (prefix) của một chuỗi mã của 1 kí hiệu khác. Cách mã nào thoả mãn tính chất này, được gọi là mã tiền tố (prefix code).

Rõ ràng cách mã này cho chuỗi mã mả của bản tin có chiều dài ngắn hơn so với cách mã 1, nhưng đây có phải là cách mã tốt nhất chưa? Giải thuật Huffman sẽ trả lời câu hỏi này.

4.5.2. Giải thuật Huffman

Với mỗi cách mã tiền tố, ta có thể xây dựng một cây nhị phân sao cho mỗi kí hiệu tương ứng với một lá và đường đi từ gốc đến lá sẽ xác định mã của kí hiệu tương ứng theo cách sau: cạnh đi xuống con bên trái ứng với bit 0 và cạnh xuống con bên phải ứng với bít 1.

Thí dụ 10: Cây nhị phân của mã tiền tố (cách mã 3) trong thí dụ trên là:



Đảo lại xét một cây nhị phân T, trên đó mỗi lá được gán nhãn là một kí hiệu trong X. Thì cây T này sẽ xác định một mã tiền tố. Với mỗi lá x, mức $\Delta(x)$ của x chính là chiều dài chuỗi mã của kí hiệu x. Gọi f(x) là tần suất xuất hiện của kí hiệu x chiều dài chuỗi mã của bản tin là:

$$S\sum_{x} \Delta(x)f(x)$$

Trong đó D là số kí hiệu trong bản tin.

Cây mã T là tối ưu khi:

$$E(T) = \sum_{x} \Delta(x)f(x)$$

Đạt giá trị nhỏ nhất và khi đó, chiều dài chuỗi mã của bản tin là ngắn nhất.

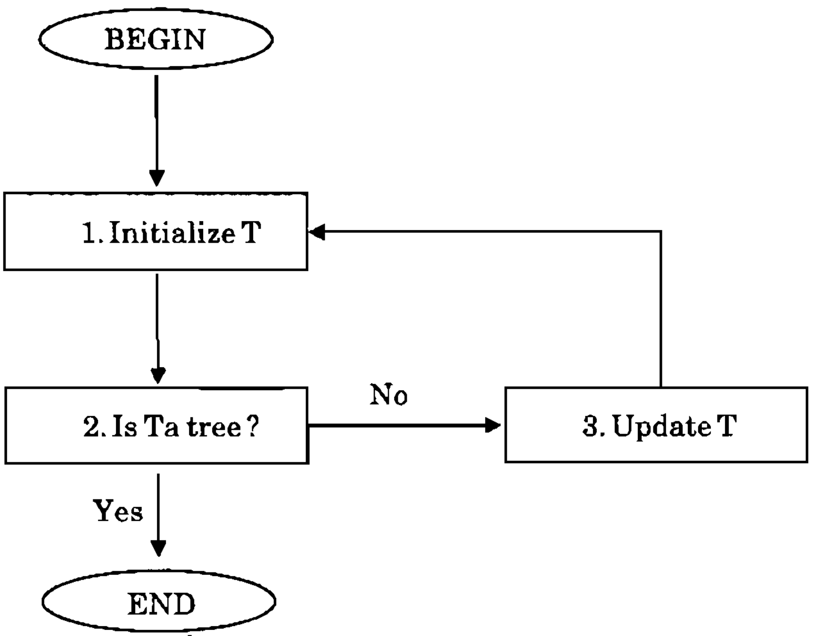
Giải thuật Huffman xây dựng cây mã T cho tập hợp X như sau:

Giải thuật Huffman

1. T là rừng có $|X|$ cây, mỗi cây có đúng 1 đỉnh (vừa là gốc vừa là lá) tương ứng với 1 kí hiệu trong X. Gán cho mỗi gốc x một nhãn là f(x).

2. Nếu T là cây thì dừng, nếu không qua bước 3.

3. Tìm 2 cây trong T sao cho gốc của chúng (gọi là y và z) có nhãn nhỏ nhất. Nối y với z với 1 đỉnh mới u để trở thành 1 cây mới gốc u (các cây gốc y và z trở thành cây con bên trái và cây con bên phải của cây mới). Gán nhãn cho u là tổng nhãn của y và z. Trở về bước 2.



4.3.5. Định lí

Khi giải thuật Huffman kết thúc, cây mã nhận được là tối ưu. Trước hết ta chú ý đến tính chất sau của cây mã tối ưu:

Bổ đề: Gọi X là tập hợp các kí hiệu x, y là 2 kí hiệu có tần suất xuất hiện nhỏ nhất. Thì có một cây mã tối ưu T cho X sao cho x và y là 2 lá anh em trong T.

Chứng minh bổ đề:

Gọi T_0 là 1 cây mã tối ưu cho X. Nếu x, y không là anh em, gọi u là có mức lớn nhất trong T_0. Thì phải có một lá c là anh em với u. Thực vậy nếu u không có anh em, gọi w là cha của u. Xoá đỉnh u và coi w là lá tương ứng kí hiệu u, ta nhận được cây mã mới T'_0 với $E(T'_0) < E(T_0)$: vô lí.

Bây giờ, nếu x không cùng mức với u, v thì $\Delta(x) < \Delta(u)$ và bằng cách hoán đổi giữa x và u, ta nhận được 1 cây mã mới T_1 với:

$E(T_1) = E(T_0) - \Delta(x)f(x) - \Delta(u)f(u) + \Delta(x)f(u) + \Delta(u)f(x)$

$= E(T_0) - (\Delta(u) - \Delta(x))(f(u) - f(x)) < E(T_0)$

Điều này mâu thuẫn với tính tối ưu của T_0. Vậy x tương tự y, có cùng mức với u và b. Bằng cách hoán đổi x với u và y với v, ta nhận được cây mã T với $E(T) = E(T_0)$, nghĩa là T cũng tối ưu.

Chứng minh định lí: Dùng qui nạp trên $n = |X|$. Trường hợp n = 2 là hiển nhiên. Giả sử định lí đúng với n. Coi $X = \{x_1, ...x_n, x_{n+1}\}$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử x_k và x_{k+1} là 2 kí hiệu có tần suất xuất hiện nhỏ nhất. Gọi T là cây mã tối ưu cho X sao cho x_k và x_{k+1} là anh em trong T (T tồn tại do bổ đề). Gọi H là cây mã nhận được từ giải thuật Huffman và x_k, x_{k+1} cũng là anh em trong H. Gọi H' là cây mã nhận được từ H bằng cách xoá x_k, x_{k+1}, gán cho đỉnh cha của x_k và x_{k+1} kí hiệu y với tần suất xuất hiện của y là $f(y) = f(x_k) + f(x_{k+1})$. Dễ thấy rằng H' chính là cây mã nhận được từ Huffman khi áp dụng vào tập kí hiệu $Y = \{x_k, x_{k-1}, y\}$. Tương tự, gọi T' là cây mã nhận được từ T bằng cách xoá các lá x_k, x_{k+1} và gán cho đỉnh của x_k, và x_{k+1} kí hiệu y với tần suất xuất hiện của y là $f(y) = f(x_k) + f(x_{k+1})$ thì T' là một cây mã cho tập hợp Y.

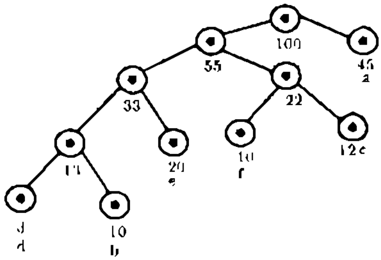
Do giả thiết qui nạp, ta có $E(H') = f(x_k) + f(x_{k+1})$

$$\le E(T') = f(x_k) + f(x_{k+1})$$

$$= E(T)$$

Vì T tối ưu nên E(H) = E(T), nghĩa là H tối ưu.

Thí dụ 11: Cây mã Huffman cho tập hợp X trong thí dụ 1 là:



Ta có cách mã tối ưu sau:

Kí hiệu	a	b	c	d	e	f
Mã Huffman	1	0001	011	0000	001	010

Với cách mã này, chiều dài chuỗi mã của bản tin là:

$$10^5(1.45\% + 4.10\% + 3.12\% + 4.3\% + 3.20\%) = 223\ 000$$

BÀI TẬP

1. Vẽ tất cả các cây (không đẳng hình với nhau) có:

a) 4 đỉnh; b) 5 đỉnh c) 6 đỉnh

2. Tìm số tối đa các đỉnh của 1 cây m phân có chiều cao h.

3. Có thể tìm được 1 cây có 8 đỉnh và thỏa điều kiện dưới đây không? Nếu có vẽ cây đó ra, nếu không, giải thích tại sao:

a) Mọi đỉnh đều có bậc 1.

b) Mọi đỉnh đều có bậc 2.

c) Có 6 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 1/

d) Có đỉnh bậc 7 bà 7 đỉnh bậc 1.

4. Các phát biểu sau đây đúng hay sai? Giải thích.

a) Nếu đồ thị G có n đỉnh và n – 1 cạnh thì G là 1 cây.

b) Nếu G liên thông thì G không có chu trình

c) Nếu hủy bất kì cạnh nào của 1 đồ thị liên thông G cũng làm mất tính liên thông của G thì không có chu trình.

d) Thêm 1 cạnh vào 1 cây sẽ sinh ra đúng chu trình.

e) Nếu G không có chu trình và có 25 cạnh, 26 đỉnh thì G liên thông.

f) Nếu G có 32 cạnh và 28 đỉnh thì G không là cây.

g) Nếu G liên thông. có 10 cạnh và 10 đỉnh thì G có ít nhất 1 chu trình.

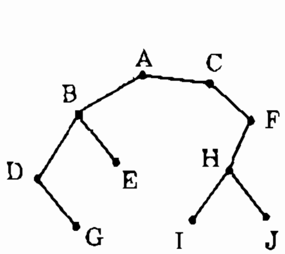
5. Giả sử đồ thị G có số cạnh bằng số đỉnh, chứng minh rằng G có ít nhất một chu trình.

6. Đồ thị G là 1 rừng gồm T cây và có n đỉnh. Tìm số cạnh của G

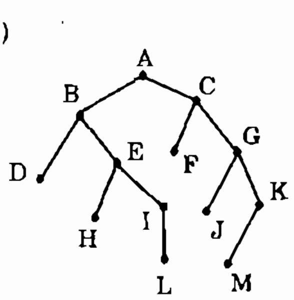
7. Chứng minh rằng mọi cây gốc đều có lá:

8. Duyệt các cây sau đây lần lượt bằng các giải thuật Preorder, Inorder và Postorder

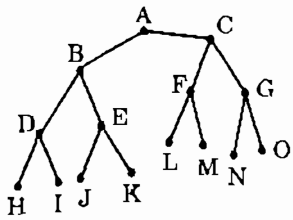
a)



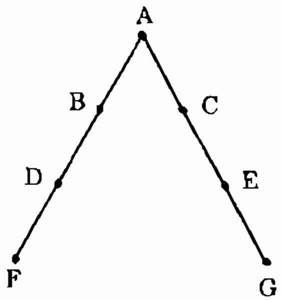
b)



c)



d)



9. Ta định nghĩa phép duyệt cây nhị phân "X–order" như sau:
Giải thuật X–order Seach.

1) Đến gốc
2) Đến cây con bên phải, dùng X – order.
3) Đến cây con bên trái, dùng X – order.

Dùng giải thuật này, hãy duyệt các cây ở bài tập 8.

10. Giả sử 1 cây nhị phân có danh sách các đỉnh khi duyệt theo giải thuật Preorder là A, B, D, E, C, F, G và khi duyệt theo giải thuật Inorder là D, B, E, A, F, G, C. Hãy vẽ cây này.

11. Viết biểu diễn bằng RPN của các biểu thức sau:

a) ((A – B)*C)+(D^E)　　　　b) (A ÷ (B*(C –D))) + E

a) ((A –D)* C)^((A + B) ÷ D)　　　　d) $A(B + \frac{C}{D^2} - E)$

e) $((N^N)^N)^N(MN - Q)$　　　　f) $\frac{(A+B)(C+D)}{(A-B)C+D} + \frac{A^2+BD}{C^2-BD}$

12. Tính giá trị các biểu thức RPN sau:

a) 5　　3 + 12　　4 ÷ *6　　2 * +

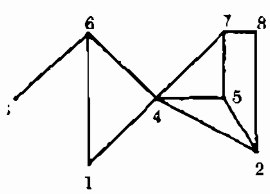
b) 4　　2^4　　+ 10 ÷ 16　　+

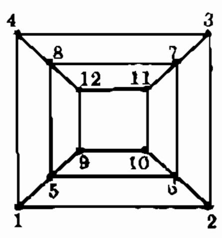
c) 3　　6*5　　2 ^ + 2　　3 + –

c) 2　　2^2　　^ 2 ^ 2　　^ 2 ^

13. Tìm cây bao trùm của các đồ thị sau lần lượt bằng DFS rồi BFS, chọn đỉnh 1 làm gốc.

a)





c)

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & & 1 & & & & 1 \\
2 & 1 & & 1 & & & \\
3 & & 1 & & 1 & & \\
4 & & & 1 & & 1 & \\
5 & 1 & & & 1 & & \\
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & & 1 & & & 1 & 1 & & & & \\
2 & 1 & & 1 & & & & 1 & & & \\
3 & & 1 & & 1 & & & & 1 & & \\
4 & & & 1 & & 1 & & & & 1 & \\
5 & 1 & & & 1 & & & & & & 1 \\
6 & 1 & & & & & & & 1 & 1 & \\
7 & & 1 & & & & & & & 1 & 1 \\
8 & & & 1 & & & 1 & & & & 1 \\
9 & & & & 1 & & 1 & 1 & & & \\
10 & & & & & 1 & & 1 & 1 & & \\
\end{array}
$$

14. Làm bài tập 13 nhưng bây giờ chọn tâm của đồ thị làm gốc

15. Giả sử đồ thị G liên thông có 13 đỉnh và 20 cạnh. Cây bao trùm G có bao nhiêu đỉnh? có bao nhiêu cạnh?

16. Chứng minh rằng nếu đồ thị G liên thông, có n đỉnh và có chu trình thì G có ít nhất n cạnh. Kết quả này có đúng khi bỏ giả thiết về tính liên thông của G không?

17. Dưới đây là 1 số giải thuật tìm cây bao trùm của 1 đồ thị liên thông G cho trước. Hãy cho biết các giải thuật này có đúng không:

a) Bắt đầu với G. Nếu G có chu trình, hủy 1 cạnh thuộc chu trình này khỏi G, lặp lại thủ tục này đến khi đồ thị nhận được không còn chu trình.

b) Bắt đầu bằng 1 cạnh, thêm dần mỗi lần 1 cạnh mới cho đến khi đồ thị nhận được có n – 1 cạnh.

c) Bặt đầu bằng 1 cạnh, thêm dần mỗi lần 1 cạnh mới với điều kiện thông tạo ra chu trình cho đến khi không thể thêm được cạnh mới nữa.

18. Đồ thị dưới đây có liên thông không?

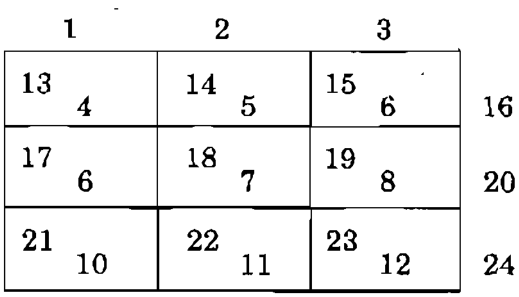
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

19. Gọi G là đồ thị có 25 đỉnh $x_2, x_3, \ldots, x_{26}$ và có cạnh $\overline{x_i y_j}$ nếu và chỉ nếu i, j không nguyên tố cùng nhau và khác nhau. Đồ thị G có bao nhiêu thành phần? Tìm cây bao trùm của mỗi thành phần.

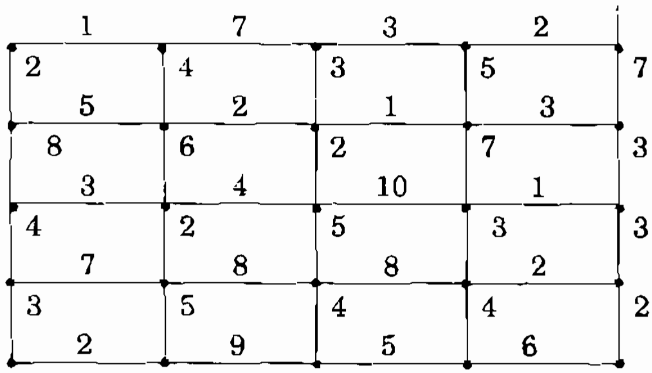
20. Chứng minh rằng nếu đồ thị G có duy nhất 1 cây bao trùm thì G là 1 cây.

21. a) Cho đô thị liên thông G và 1 đỉnh a của G. Chứng minh rằng chiều cao của cây bao trùm tạo theo bề sâu với gốc a luôn luôn lớn hơn hay bằng chiều cao của một cây bao trùm tạo theo bề rộng cùng với gốc a.
b) Tìm 1 thí dụ chứng tỏ kết quả ở phần a) sai nếu chọn các gốc khác nhau.

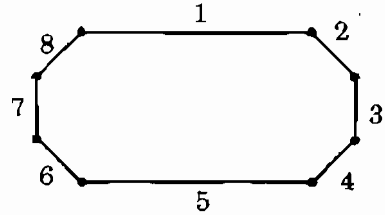
22. Tìm MST của đồ thị sau:
a)



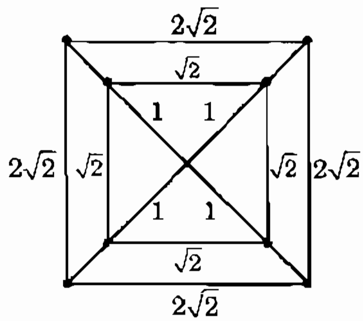
b)


1 7 3 2
2 4 3 5 7
5 2 1 3
8 6 2 7 3
3 4 10 1
4 2 5 3 3
7 8 8 2
3 5 4 4 2
2 9 5 6

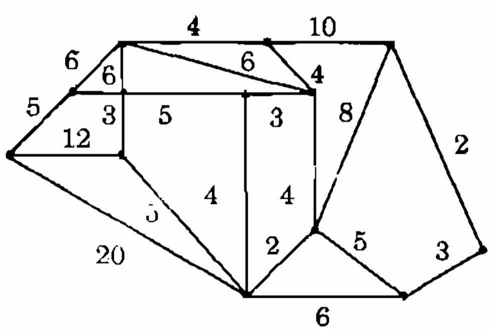
c)


1
8 2
7 3
6 4
5

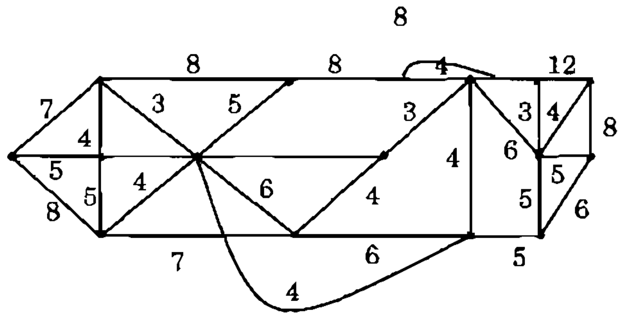
d)


$2\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$
1 1
$2\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}$
1 1
$\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$

e)


4 10
6 6 6 4
5 3 5 3 8
12 2
4 4
20 2 5 3
6

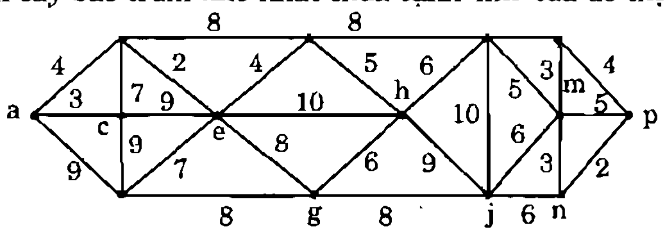
f)



23. Trình bày 1 giải thuật tìm cây trùm lớn nhất. Áp dụng: Tìm cây trùm lớn nhất của các đồ thị ở bài tập 1.

24. Trình bày 1 giải thuật tìm cây bao trùm nhỏ nhất chứa 1 cạnh cho trước.

Áp dụng: Tìm cây bao trùm nhỏ nhất chứa cạnh $\overline{km}$ của đồ thị sau:



25. Chứng minh rằng nếu trọng số các cạnh của một đồ thị liên thông G đôi một khác nhau thì 1 MST duy nhất.

26. Xét đơn đồ thị đầy đủ G gồm n đỉnh $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Giả sử trọng số của cạnh $\overline{ij}$ là $|i-j|$. Tìm 1 MST của G.

27. Làm lại bài tập 26, với trọng số của cạnh $\overline{ij}$ bây giờ là i + j

28. Xây dựng cây mả Huffman cho tập kí hiệu sau:

Kí hiệu	A	B	C	D	E	F	G	H
Tần suất	6	25	20	8	10	19	3	9

V

BÀI TOÁN CON ĐƯỜNG NGẮN NHẤT

5.1. Giới thiệu bài toán

Cho một đơn đồ thị có hương liên thông có trọng số G = (V, E), trọng số của mỗi cạnh ở đây được giả sử ≥ 0 và được xem như chiều dài của cạnh ấy.

Bài toán đặt ra là đi tìm con đường ngắn nhất nối 2 đỉnh cho trước của đồ thị.

Xét 2 đỉnh u, v $\in$ V. Nếu có cạnh $e = \overline{uv} \in E$ nối u với v thì đặt được $c(u, v) = c(e)$ = chiều dài cạnh e

Nếu không có cạnh nào nối u với v thì ta đặt $c(u, v) = \infty$

Lưu ý rằng c(u, v) = chiều dài con đường ngắn nhất (gồm ít nhất một cạnh) nối u với v.

Nhận xét rằng:

$c^*(u,u) < \infty \Leftrightarrow$ có 1 chu trình trong G chứa u.

$c^*(u,u) = \infty\ \forall u \in V \Leftrightarrow$ G không có chu trình.

5.2. Giải thuật DIJKSTRA

Trước hết, ta chú ý đến một tính chất rất quan trọng của con đường ngắn nhất nêu trong định lí sau:

5.2.1. Định lí

Nếu u, ... w, ... v là đường ngắn nhất thì v, ...w và w ...v cũng là đường ngắn nhất và ta có:

$c^*(u,v) = c^*(u,v) + c^*(w,v)$

Chứng minh: Hiển nhiên.

Bây giờ giả sử ta muốn tìm con đường ngắn nhất nối đỉnh $v_0 \in$ V với các đỉnh còn lại. Giải thuật sau đây sẽ xây dựng một cây L và các hàm γ: $V \rightarrow [0,\infty]$ và π: $V\setminus\{V_0\} \rightarrow V$

5.2.2. Giải thuật KIJKSTRA

1. Đặt $L = \{v_0\}$, $\delta(v_0)$

   đặt $\delta(v) = c(v_0v)$ và $\pi(v) = v_0$

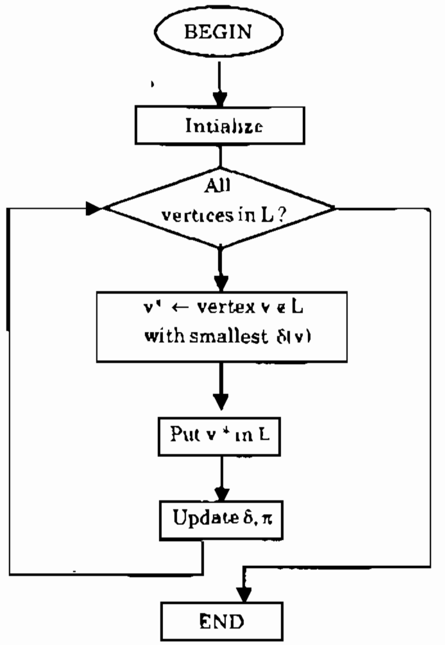
2. Nếu mọi đỉnh của G đều thuộc L thì dừng.

Đặt $v^* = v$. Đưa thêm đỉnh v^* và cạnh $\overline{\pi(v^*)v^*}$ vào L.

4. Với mọi $w \in V \backslash L$, nếu $\delta(w) > \delta(v^*)+c(v^*,w)$ thì đặt $\delta(w) = \delta(v^*) + c(v^*,w)$ và $\pi(w) = v^*$

Trở về bước 2

Sơ đồ khối của giải thuật Kijkstra là:



3.2.3. Định lí

Đặt $\delta^*(v)$ và $\pi^*(v)$ là trị số của $\delta(v)$ và $\pi(v)$ khi giải thuật Dijkstra dừng. Thì con đường ngắn nhất đi từ v_0 đến w có chiều dàu là $\delta^*(w)$ và được xác định bởi hàm π^*: đỉnh trước 1 đỉnh v trên đường ngắn nhất này là $\pi^*(v)$.

Chứng minh

Hiển nhiên giải thuật luôn luôn dừng.

Trước hết nhận xét rằng với mọi đỉnh $w \notin V$ và tại mọi thời điểm thực hiện giải thuật ta luôn có:

$c^*(v_0,w) \leq \delta(w) \Rightarrow c^*(v_0, w) \leq \delta^*(w)$

Giả sử thứ tự chọn các đỉnh đặt vào L là $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

Ta chứng minh rằng $\delta^*(v_i) \le \delta^*(v_{i+1})$, $\forall i$.

Ở vòng lặp thứ i (chọn đỉnh v_i đặt L) thì $v_{i+1} \notin$ L nên

$$\delta^*(v_i) = \delta_i(v_{i+1}) \le \delta_i(v_{i+1})$$

(δ_i là hàm δ ở vòng lặp thứ i)

Ở vòng lặp thứ i + 1 ta có:

$\delta^*(v_{i+1}) = \delta_{i+1}(v_{i+1})$.

$$= \begin{cases} \delta_i^*(v_i+1): \text{nếu } \delta^*(v_i+1) \le \delta^*(v_i) + c(v_i, v_{i+1}) \\ \delta^*(v_i) + c(v_i, v_{i+1}) \text{ nếu } \delta_i(v_i+1) > \delta^*(v_i) + c(v_i, v_{i+1}) \end{cases}$$

Do đó $\delta^*(v_i) \le \delta^*(v_{i+1})$

Như thế nếu đỉnh v được chọn đặt vào L trước w thì

$\delta^*(v) \le \delta^*(w)$

Bây giờ giả sử có đỉnh w sao cho $c^*(v_0, w) < \delta^*(w)$. Gọi $v_0w_1 \ldots w_pw$ là đường ngắn nhất nối v_0 với w, thì $c^*(w_p, w) = c(w_p, w)$ và có thể giả sử rằng $c^*(w_0, w_i) = \delta^*(w_i)$ $\forall i = 1, \ldots, p$

Ta có:

$\delta^*(w_p) \le \delta^*(w_p) + c^*(w_p, w) = c^*(v_0, w_p) + c^*(w_p, w) = c^*(v_0, w) < \delta^*(w)$

Vậy đỉnh w_p được chọn đặt vào L trước đỉnh w. Ở thời điểm chọn w_p được chọn đặt đặt vào L thì:

$c^*(v_0, w_p) = \delta^*(w_p)$

$c(v_0, w) = c^*(v_0, w_p) + c^*(w_p, w)$

$= \delta(w) \ge \delta^*(w)$

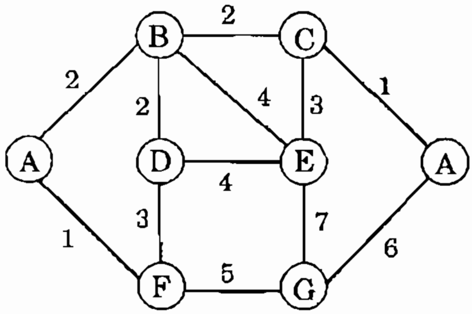
Vô lí.

Lưu ý:

1) Để tìm con đường ngắn nhất nối đỉnh v_0 với một đỉnh w, ta áp dụng giải thuật Dijkstra với điều kiện dừng thay đổi như sau: Nếu $w \in L$ thì giải thuật dừng.

2) Giải thuật Dijkstra cũng áp dụng được cho đồ thị vô hướng.

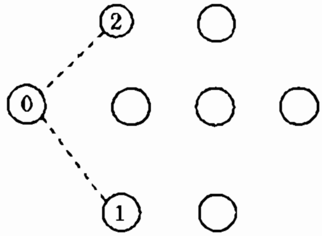
Thí dụ:



Ta dùng giải thuật Dijkstra để tìm đường ngắn nhất nối A đến các đỉnh khác.

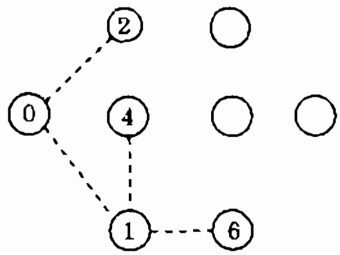
Ở bước thứ 1, ta lập được bảng sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L							
δ	0	2	∞	∞	∞	1	∞	∞
π		A	A	A	A	A	A	A



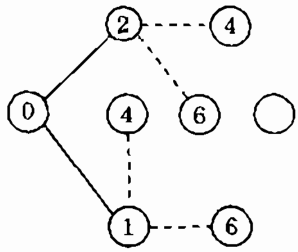
Chọn được đỉnh F đặt vào L và ta cho bảng sau:

	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L					L		
δ	0	2	∞	4	∞	1	6	∞
π		A	A	F	A	A	F	A

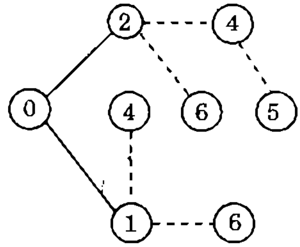


Cứ tiếp tục như trên, ta có lần lượt:

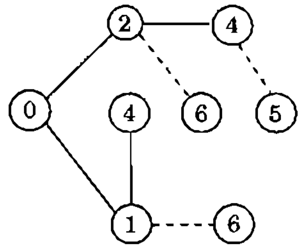
	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L				L		
δ	0	2	4	4	6	1	6	∞
π		A	B	F	B	A	F	A



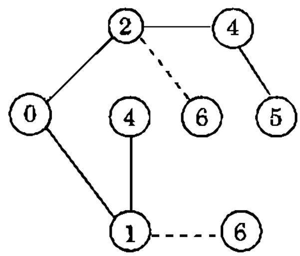
	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L			L		
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



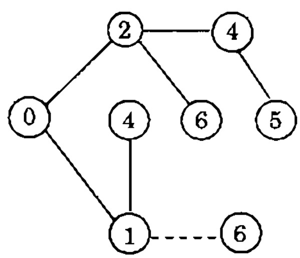
	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L		L		
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



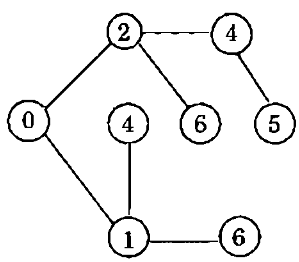
	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L		L		L
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L	L	L	L	L
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



	A	B	C	D	E	F	G	H
L	L	L	L	L	L	L	L	L
δ	0	2	4	4	6	1	6	5
π		A	B	F	B	A	F	C



Giải thuật chấm dứt và bảng lập được sau cùng cho ta con đường ngắn nhất nối A đến các đỉnh khác. Chẳng hạn đường ngắn nhấn nối A đến H và ABCH và chiều dài đường ngắn nhất này là 5. Nhận xét rằng khi giải thuật Dijkstra kết thúc, ta sẽ nhận được cây bao trùm L của G và đường ngắn nhất nối v_0 với đỉnh đó. Ta gọi L cây bao trùm Dijkstra gốc v_0 của G.

5.3. Giải thuật FLOYD

Xét 1 đồ thị có hướng có trọng số G.

Để tìm con đường ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh của G, ta có thể áp dụng giải thuật Dijkstra nhiều lần hoặc áp dụng một giải thuật đơn giản là giải thuật Floyd được trình bày dưới đây. Giả sử G có tập hợp các đỉnh là $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ và có ma trận khoảng cách là $W = W_0$.

Giải thuật Floyd xây dựng dãy các ma trận $W_{k-1}(1 \leq k \leq n)$ như sau:

với $i = 1$ đến n

Với $j = 1$ đến n

Nếu $w_{k-1}[i,j] > w_{k-1}[i,k] + w_{k-1}[k,j]$ thì đặt

$w_{k-1}[i,j] = w_{k-1}[i,k] + w_{k-1}[k,j]$

Nếu không, đặt: $w_k[i,j] = w_{k-1}[i,j]$

5.3.2. Định lí

Giải thuật Floyd cho ta ma trận $w^* = w_n$ là ma trận khoảng cách nhỏ nhất của đồ thị G.

Chứng minh:

Ta chứng minh bằng qui nạp theo k mệnh đề sau:

$w_k[i,j]$ là chiều dài đường ngắn nhất trong những đường nối đỉnh v_i với đỉnh v_j đi qua các đỉnh trong gian trong $\{v_1, v_2, ... v_k\}$. Trước hết mệnh đề hiển nhiên đúng với $k = 0$.

Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$.

Xét $w_k[i,j]$. Có hai trường hợp:

i) Trong những đường chiều dài nhắn nhất nối v_i với v_j và đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1,...,v_k\}$, có một đường γ sao cho $v_k \notin \gamma$ sao cho $v_k \notin \gamma$. Thì γ cũng là đường ngắn nhất nối v_i với v_j đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1,...,v_{k-1}\}$, nên theo giả thiết qui nạp

$w_{k-1}[i,k]$ = chiều dài $\gamma \le w_{k-1}[i,k] + w_{k-1}[k,j]$

Do theo định nghĩa của w_k thì $w_k[i,j] = w_{k-1}[i,j]$

ii) Mọi đường chiều dài ngắn nhất nối v_i với v_j và đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1,...,v_k\}$ đều chứa v_k.

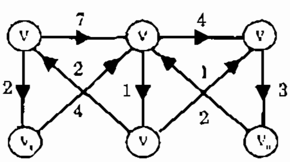
Gọi $\gamma = v_i... v_k... v_j$ là 1 đường ngắn nhất như thế thì $v_i... v_k$ và $v_k...v_j$ cũng là những đường ngắn nhất đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1,...,v_{k-1}\}$ và:

$w_{k-1}[i,j] + w_{k-1}[k,j]$ = chiều dài $(v_i,...v_k)$ + chiều dài $(v_k... vj)$ = chiều dài $(\gamma) < w_{k-1}[i,j]$

Do đó theo định nghĩa w_k thì:

$w_k[i,j] = w_{k-1}[i,k] + w_{k-1}[k,j]$

Thí dụ 2: xét đồ thị G sau:



Áp dụng giải thuật Floyd, ta tìm được (các ô trống là ∞)

$$w = w_0 = \begin{bmatrix} & 7 & & 2 & & \\ & & 4 & & 1 & \\ & & & & & 3 \\ & 4 & & & & \\ 2 & & 2 & & & 1 \\ & 1 & & & & \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} & 7 & & 2 & & \\ & & 4 & & 1 & \\ & & & & & 3 \\ & 4 & & & & \\ 2 & 9 & 2 & 4 & & \\ & 1 & & & & \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} & 7 & 11 & 2 & 8 & \\ & & 4 & & 1 & \\ & & & & & 3 \\ & 4 & 8 & & 5 & \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & \\ & 1 & 5 & & 2 & \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} & 7 & 11 & 2 & 8 & 14 \\ & & 4 & & 1 & 7 \\ & & & & & 3 \\ & 4 & 8 & & 5 & 11 \\ 2 & 9 & 2 & 4 & 10 & 5 \\ & 1 & 5 & & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} & 6 & 10 & 2 & 7 & 13 \\ & & 4 & & 1 & 7 \\ & & & & & 3 \\ & 4 & 8 & & 5 & 11 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ & 1 & 5 & & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$w_5 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 9 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ & & & & & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 8 & 2 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$w_6 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 9 & 2 & 7 & 12 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Chú y:

i) Giải thuật Flod có thể áp dụng cho đồ thị vô hướng cũng như đồ thị có hướng: ta chỉ cần đổi mỗi cạnh vô hướng $\overline{uv}$ và $\overrightarrow{vu}$ với $c(\overrightarrow{uv}) = c(\overrightarrow{vu})$. Tuy nhiên trong trường hợp này, các phần tử trên đường chéo của ma trận w cần đặt bằng 0.

ii) Đồ thị có hướng G là liên thông mạnh nếu và chỉ nếu mọi phần tử không nằm trên đường chéo trong ma trận khoảng cách ngắn nhất w* đều hữu hạn.

5.3.3. Giải thuật Floyd mở rộng

Bằng cách đặt $P_0[i,j] = v_j$ nếu có cạnh nối v_i với v_j, và $P_0[i,j]$ không xác định nếu không, xem giải thuật Floyd mở rộng sau:

với i = 1 đến n

Với j = 1 đến n

- Nếu $w_{k-1}[i,j] > w_{k-1}[i,k] + w_{k-1}[k,j]$

và $P_k[i,j] = P_{k-1}[i,k]$

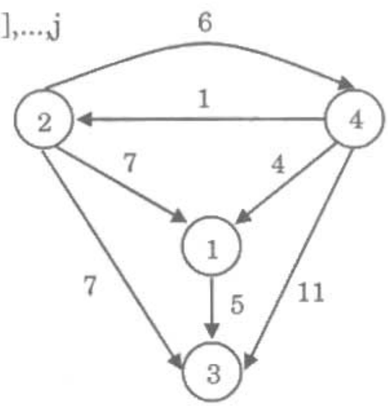
- Nếu không $w_k[i,j] = w_{k-1}[i,k]$

và $P_k[i,j] = P_{k-1}[i,j]$

Dễ thấy rằng khi giải thuật này kết thúc, ngoài ma trận khoảng cách ngắn nhất $w^* = w$ cho ta biết chiều dài đường ngắn nhất nối 2 đỉnh của đồ thị, ta còn có thêm ma trận $P^* = P_n$ cho ta xác định đường ngắn nhất này: đường ngắn nhất đi từ v_i đến v_j xác đỉnh bởi dãy:

i, P*[i,j], P*[P*[i,j],j], P*[P*[P*[i,j],j],...,j

Thí dụ: Xét đồ thị:



Ta tìm được:

$$w_0 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 11 & \end{bmatrix} \qquad P_0 = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 3 & \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 9 & \end{bmatrix} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 1 & \end{bmatrix}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & 13 \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & 2 \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} & 7 & 5 & 13 \\ & & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad w_3 = \begin{bmatrix} & 2 & 3 & 2 \\ & & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$w^* = w_4 = \begin{bmatrix} 17 & 7 & 5 & 13 \\ 10 & 7 & 7 & 6 \\ & & & \\ 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad p^* = p^* = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ & & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

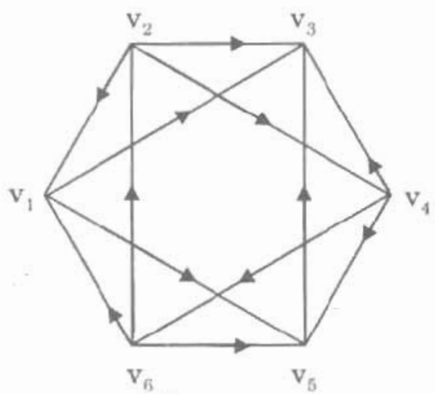
Giải thuật Floyd cũng có thể dùng để tìm quan hệ khả liên (reachebility relation) của đồ thị có hướng G: chỉ cần đặt trọng số mỗi cạnh đều là 1, khi đó ma trận w* tìm được sẽ cho ta biết có đường nối giữa 2 đỉnh hay không:

$w^*[i,j] < \infty \Leftrightarrow$ có đường nối từ v_i đến v_j.

Đặc biệt, $w^*[i,i] < \infty \Leftrightarrow$ có chu trình trong G chứa v_i.

Như vậy ta cũng có thể kiểm tra xem đồ thị có hướng G có chu trình hay không bằng giải thuật Floyd.

Thí dụ 4: Áp dụng giải thuật Floyd vào đồ thị



Ta tìm được:

$$w^* = w_6 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & 1 & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy rằng đồ này không liên thông mạnh (vì cò phần tử không nằm trên đường chéo của w* bằng ∞), nhưng có chu trình (vì có phần tử trên đường chéo của w* hữu hạn).

5.4. Giải thuật Warshall

5.4.1. Quan hệ khả liên

Xét đơn đồ thị G có tập hợp đỉnh là $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Đỉnh v_j gọi là khả liên (reachable) từ đỉnh v_i nếu có một đường đi từ v_i đến v_j. Gọi $M = [m_{ij}]$ là ma trận liên kết của G thì M là một ma trận Boole nghĩa là mỗi phần tử của M đều là 0 hay 1:
$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ có cạnh v_iv_j có trong G.

Kí hiệu $M^{(2)}$ là tích của ma trận M với chính nó nhưng phép cộng và nhân ở đây là những phép toán trong đại số Boole B = {0,1} định nghĩa như sau:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

	0	1
0	0	0
1	0	1

Thí dụ: Coi:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có $M^{(2)}[i,j] = \sum_{k=1}^{4} m_{ik}, m_{kj}$, và:

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tương tự, ta cũng kí hiệu $M^{(k+1} = M^{(K)}.M$

5.4.2. Định lí

Gọi M là ma trận liên kết của một đơn đồ thị G. Thì:
$M^{(k+1)}[i,j] = 1 \Leftrightarrow$ có một đường chiều dài k đi từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j.
Chứng minh

Dùng qui nạp trên k. kết quả hiển nhiên đúng với k = 1.
Giả sử kết quả đúng với k. Ta có:

$$M^{(k+1)}[i,j] = \sum_{k=1}^{n} M^{(k)}[i,k].m_{kj}$$

Rõ ràng $M^{k+1}[i,j] = 1$ nếu và chỉ nếu có ít nhất 1 số hạng trong tổng trên bằng 1, nghĩa là:
$\exists k, M^{(k)}[i,j] = 1$ và $m_{kj} = 1$
Do giả thiết qui nạp, có một đường chiều dài k đi từ v_i đến v_k và hơn nữa G lại có cạnh $\overline{v_k v_j}$. Vậy, có đường chiều dài k + 1 đi từ v_i đến v_j.
Bây giờ, ta đặt: $R = M + M^{(2)} + ... + M^{(n)}$
nghĩa là: $R[i,j] = \sum_{k=1}^{n} M^{(k)}[i,j]$ thì hiển nhiên.
$R[i,j] = 1 \Leftrightarrow$ có một đường đi từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j. Ma trận R gọi là ma trận khả liên của đồ thị G.
Ta có thể tìm R bằng cách tính $M^{(2)}, M^{(3)},..., M^{(n)}$ rồi cộng chúng lại. Tuy nhiên, Warshall đã đưa ra một giải thuật tốt hơn để tính R.

5.4.3. Giải thuật Warshall

Xét đồ thị G có ma trận liên kết là M. Giải thuật Warshall xây dựng dãy ma trận $W_0 \equiv M, W_1,..., W_n$ trong đó W_k $(1 \leq k \leq n)$ được xác định dựa vào ma trận W_{k-1} như sau:
Với i từ 1 đến n.
Với j từ 1 đến n
$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j] + W_{k-1}[i,k].W_{k-1}[k,j]$

5.4.4. Định lí

Giải thuật Warshall cho ta ma trận $R \equiv M_n$ là ma trận khả liên của đồ thị G.
Chứng minh
Ta chỉ cần chứng minh rằng với mọi k, $w_k[i,j] = 1 \Leftrightarrow$ có đường nối đỉnh v_i với v_j đi qua các đỉnh trung gian trong $\{v_1, v_2,...,v_k\}$.
Phần chứng minh chi tiết (dùng qui nạp trên k) dành cho độc giả.
Thí dụ 6: Coi đồ thị G có ma trận liên kết sau:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta tính được:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

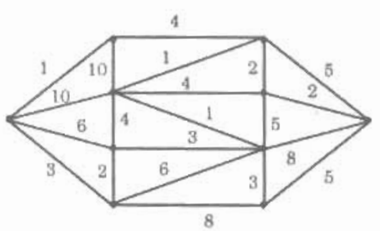
$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$M_3 = M_4 = M_5 = R$

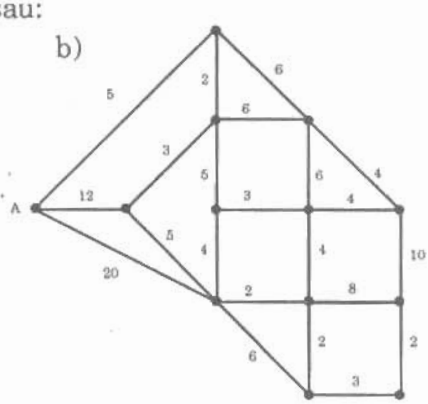
BÀI TẬP

1. Dùng giải thuật Dijkstra tìm đường ngắn nhất từ đỉnh A đến các đỉnh còn lại trên các đồ thị sau:

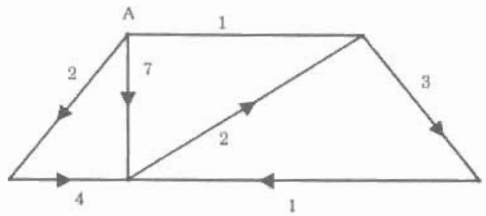
a)



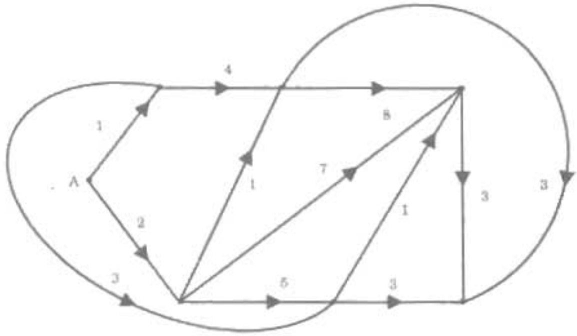
b)



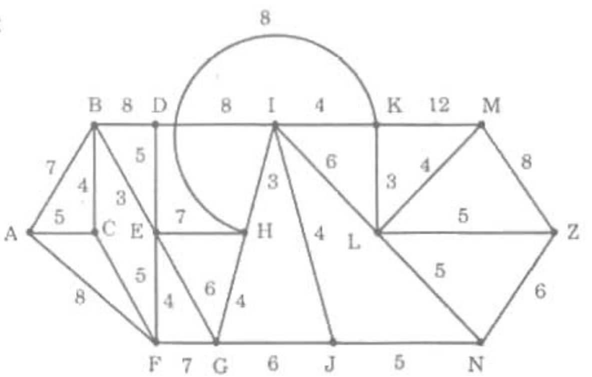
c)



d)



2. Cho đồ thị:



a) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z

b) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z có chứa cạnh $\overline{HG}$.

c) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z có chứa đỉnh K.

d) Tìm đường ngắn nhất từ A đến Z co chứa cạnh $\overline{IJ}$

3. Tìm đường ngắn nhất từ B đến các đỉnh khác của đồ thị có ma trận trong số là (các ô trống là ∞):

a)

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\
\begin{bmatrix} & 3 & 6 & & & & \\ 3 & & 2 & 4 & & & \\ 6 & 2 & & 1 & 4 & 2 & \\ & 4 & 1 & & 2 & & 4 \\ & & 4 & 2 & & 2 & 1 \\ & & 2 & & 2 & & 4 \\ & & & 4 & 1 & 4 & \end{bmatrix} \end{array}$$

b)

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
 & 2 & 2 & 2 & 4 & & & \\
2 & & & & & 1 & & \\
2 & & & & 3 & & & 1 \\
2 & & & & 4 & 3 & & \\
4 & & 3 & 4 & & & 7 & \\
 & 1 & & 3 & & & 5 & \\
 & & & & 7 & 5 & & 6 \\
 & & 1 & & & & 6 &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

c)

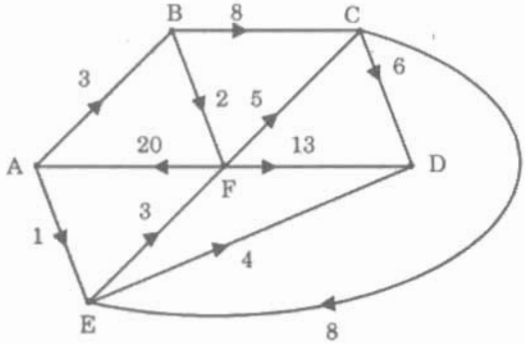
$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & 12 & 13 \\
31 & & & & 4 & & & \\
 & & & & & & 4 & 1 \\
 & & 3 & & & & 8 & \\
 & & & & & 3 & & \\
2 & & & 8 & & & & \\
 & & & & & & & 6 \\
2 & & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

4. Cho đồ thị sau:

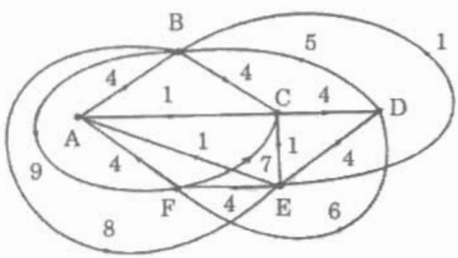
$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \\ K \\ L \\ M \\ N \\ P
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M & N & P \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 5 & 8 & 7 & & & & & & & & & & & \\
 & & 5 & 4 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 4 & & & & 7 & & & & & & \\
 & & & & 3 & 8 & & & & & & & & & \\
 & & & & & 5 & 7 & & 6 & & & & & & \\
 & & & & & & & 8 & & & & & & & \\
 & & & & & & & 3 & 4 & 8 & & & & & \\
 & & & & & & & & & 4 & 4 & 6 & & & \\
 & & & & & & 4 & 6 & & & 6 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 3 & 12 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 5 & \\
 & & & & & & & & & & & & 4 & 5 & 5 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 8 \\
 & & & & & & & & & & & & & & 9 \\
 & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

a) Tìm đường ngắn nhất từ A đến P.
b) Tìm đường ngắn nhất từ A đến P đi qua đỉnh I.

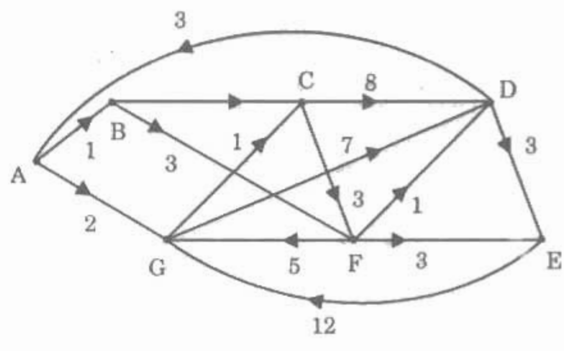
5. Gọi W_k là ma trận xây dựng được ở bước k theo giải thuật Floyd ($1 \leq k \leq n$).
a) Chứng minh rằng nếu trên hàng k (cột k) của W_k có phần tử bằng ∞ thì cột (hàng) chứa phần tử đó trong 2 ma trận w_{k-1} và W_k giống hệt nhau.
6. Áp dụng giải thuật Floyd vào các đồ thị sau để tìm W* và P*:
a)



b)



c)



d)

$$\begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & - & 5 & 8 & 13 & 6 \\ B & 4 & - & 7 & 10 & 9 \\ C & 6 & 3 & - & 2 & 7 \\ D & 8 & 4 & 5 & - & 4 \\ E & 12 & 8 & 13 & 3 & - \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{c|cccccc} & A & B & C & D & E & F \\ \hline A & - & 7 & 15 & 8 & 10 & - \\ B & - & - & 8 & 12 & 13 & 15 \\ C & 4 & 10 & - & 8 & 8 & 6 \\ D & 8 & 5 & 9 & - & - & 8 \\ E & 7 & 3 & - & 9 & - & 9 \\ F & 10 & 8 & 9 & 6 & 3 & - \end{array}$$

7. Tìm một phản thí dụ chứng tỏ chiều đảo của định lí 5.2.1 sai.

8. Tìm một thí dụ chứng tỏ định lí 5.2.1 sai nếu không có điều kiện trọng số tất cả các cạnh của đồ thị đều ≥ 0. Suy ra rằng giải thuật Dijkstra không áp dụng được cho những đồ thị có trọng số bất kì.

9. Tìm ma trận khả liên R của đồ thị có ma trận liên kết sau:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$