Bài giải ĐỀ THI TOÁN CAO CẤP C1 08-09

Bài 1.

a) $I=\lim\limits_{x\to 0}\ln x^{acrtgx}=\lim\limits_{x\to 0} arctgx\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{\dfrac{1}{\ln x}}\underline{\underline{L}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}\dfrac{1}{x}}$

C1. $I=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}}\underline{\underline{L}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x}{\dfrac{1}{x}}$

$I\underline{\underline{L}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-2x\right)=0$

C2. $I=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2 x}{\dfrac{1}{x}+x}\underline{\underline{L}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x}{\dfrac{1}{x}-x}\underline{\underline{L}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{1+x^2}=0$

b)

$I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}\underline{\underline{L}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\underline{\underline{L}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$

Bài 2.

Vẽ hình.

Diện tích hình phẳng:

$S=\int_0^{\pi/4}\left(\cos x-\sin x\right)dx=\left(\sin x+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/4}=\sqrt{2}-1.$

Bài 3.

Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

$\int\limits_0^{\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+x^2}dx=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{2\sin^2 x}{1+x^2}dx<2\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$

Mà: $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^{\infty}=\dfrac{\pi}{2}$ (hội tụ)

Theo tiêu chuẩn so sánh 1, suy ra tích phân đã cho hội tụ.

Bài 4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\dfrac{1}{n}$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{tg\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kì.

Theo tiêu chuẩn so sánh 2, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\dfrac{1}{n}$ phân kì.

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n\ln n}$

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{-n-1}}{(n+1)\ln(n+1)}\frac{n\ln n}{2^{-n}}=\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$

Suy ra $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi số đã cho hội tụ.

Bài 5. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi lũy thừa.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$

Đặt $X=(x-2)^2$, chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{2n}$$

Bán kính hội tụ $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2(n+1)}}=1$

Suy ra, miền hội tụ là $|X|<1\Leftrightarrow(x-2)^2<1\Leftrightarrow|x-2|<1\Leftrightarrow 1<x<3$

Khi x = 1, chuỗi đã cho trở thành chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$: chuỗi phân kì.

Khi x = 3, chuỗi trở thành chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$: chuỗi phân kì.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $1<x<3$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}$

Bán kính hội tụ $R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(1+n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$

Miền hội tụ $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$.

Khi $x=\frac{1}{e}$, chuỗi trở thành chuỗi số

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}$. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy, $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-1}n^n}{(1+n)^n}=\frac{1}{e^2}<1$, hội tụ.

Khi $x = -\frac{1}{e}$ chuỗi trở thành chuỗi số

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^{-n} n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}$. Xét chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-e)^{-n} n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} n^{n^2}}{(1+n)^{n^2}}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa trên là $-\frac{1}{e} \le x \le \frac{1}{e}$