BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP C1 ĐẠI HỌC
(Số đvhp: 2 – số tiết: 30)

Biên soạn: Đoàn Vương Nguyên

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Toán cao cấp* A1 – C1 – ĐH Công nghiệp TP. HCM.
2. Nguyễn Đình Trí – *Toán cao cấp* (Tập 2, 3) – NXB Giáo dục.
3. Lê Văn Hốt – *Toán cao cấp C*2 – ĐH Kinh tế TP. HCM.
4. Lê Quang Hoàng Nhân – *Toán cao cấp* – ĐH Kinh tế - Tài chính TP. HCM – NXB Thống kê.
5. Đỗ Công Khanh – *Toán cao cấp* (Tập 1, 3, 4) – NXBĐHQG TP.HCM.
6. Nguyễn Viết Đông – *Toán cao cấp* (Tập 1, 2) – NXB Giáo dục.
7. James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, Sixth Edition – Copyright © 2008, 2003 Thomson Brooks
8. Robert Wrede, Murray. R. Spiegel, *Theory and Problems of Advanced Calculus*, Second Edition – Copyright © 2002, 1963 by The McGraw-Hill Companies, Inc

……………………………………………………

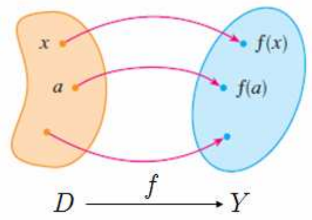
Chương 0. BỔ TÚC KIẾN THỨC CƠ BẢN

0.1. Bổ túc về hàm số

0.1.1. Định nghĩa

Xét hai tập con khác rỗng D và Y của $\mathbb{R}$. Hàm số f là một quy tắc (hay *ánh xạ*) cho tương ứng mỗi phần tử $x \in D$ với duy nhất một phần tử $y \in Y$, ký hiệu là $f(x)$

$$f : \mathbb{R} \supset D \to Y \subset \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$



• Tập D được gọi là *miền xác định* (MXĐ) của hàm số f, ký hiệu là D_f.

• Tập $f(D_f) = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ được gọi là *miền giá trị* của hàm f.

• *Đồ thị* của hàm f có MXĐ D là tập hợp điểm $\left\{\left(x, f(x)\right) \middle| x \in D\right\}$ trên mặt phẳng Oxy.

• Nếu hàm f thỏa mãn $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$ thì f được gọi là *hàm số chẵn*.

• Nếu hàm f thỏa mãn $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$ thì f được gọi là *hàm số lẻ*.

• Hàm f được gọi là *đồng biến* trên $(a;b)$ nếu $f(x_1) < f(x_2)$ khi $x_1 < x_2$ với $x_1, x_2 \in (a;b)$; f được gọi là *nghịch biến* trên $(a;b)$ nếu $f(x_1) > f(x_2)$ khi $x_1 < x_2$ với $x_1, x_2 \in (a;b)$.

0.1.2. Hàm số hợp

Giả sử hai hàm số f và g thỏa mãn $G_g \subset D_f$. Khi đó, hàm số $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ được gọi là *hàm số hợp* của f và g.

VD. Xét $f(x) = 3x^2$ và $g(x) = x - 1$, ta có:

• Hàm số hợp của f và g là $f(g(x)) = 3(g(x))^2 = 3x^2 - 6x + 3$.

• Hàm số hợp của g và f là $g(f(x)) = f(x) - 1 = 3x^2 - 1$.

0.1.3. Hàm số ngược

• Hàm số f được gọi là *song ánh* nếu $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

• Xét hàm song ánh f có MXĐ D và miền giá trị G. Khi đó, hàm số ngược của f, ký hiệu là f^{-1}, có MXĐ G và miền giá trị D được định nghĩa

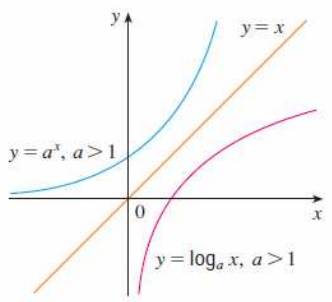
$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \ (x \in D, y \in G).$$

VD. Nếu $f(x) = 2^x$ thì $f^{-1}(x) = \log_2 x \ (x > 0)$.

▪ **Chú ý**

• MXĐ của f^{-1} = miền giá trị của f, và miền giá trị của f^{-1} = MXĐ của f.

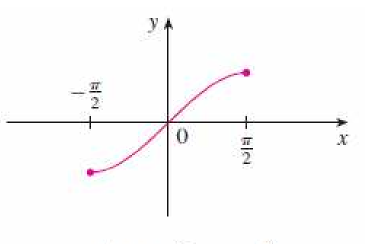
• Đồ thị của hàm $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$.



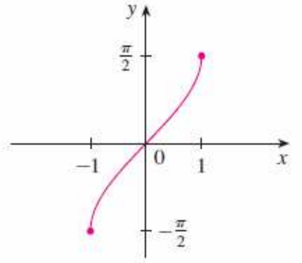
0.1.4. Hàm số Lượng giác ngược

0.1.4.1. Hàm số *y* = arcsin *x*

$$\boxed{\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$$



$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

VD. Tính $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ và $\cot\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

Giải.

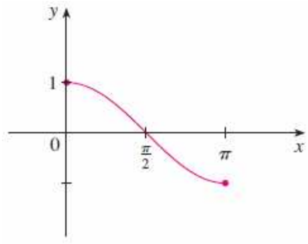
• Ta có $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$, vì $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ và $-\dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• Đặt $\arcsin\dfrac{1}{4} = \varphi$, ta được $\sin\varphi = \dfrac{1}{4}$ và $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

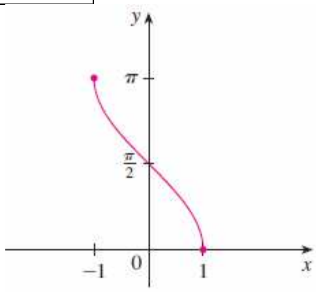
Vậy, ta có $\cos\varphi = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, và $\cot\left(\arcsin\dfrac{1}{4}\right) = \cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \sqrt{15}$.

0.1.4.2. Hàm số *y* = arccos *x*

$$\boxed{\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x,\ y \in [0; \pi]}$$



$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$

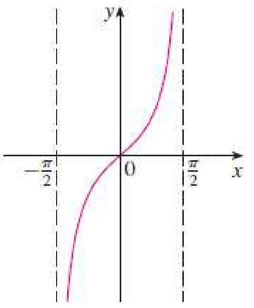


$y = \cos^{-1} x = \arccos x$

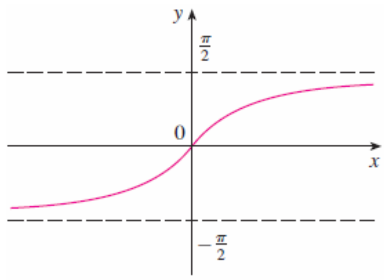
VD. $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$; $\quad \arccos(-1) = \pi$; $\quad \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$; $\quad \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

0.1.4.3. Hàm số *y* = arctan *x*

$$\boxed{\arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x,\ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)}$$



$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = \tan^{-1} x = \arctan x$

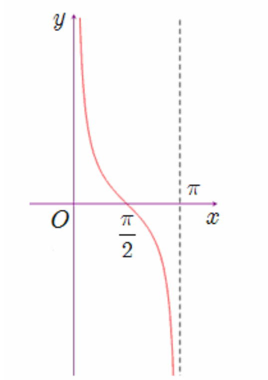
▪ **Quy ước**

$$\boxed{\arctan(+\infty) = \dfrac{\pi}{2},\ \arctan(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}}$$

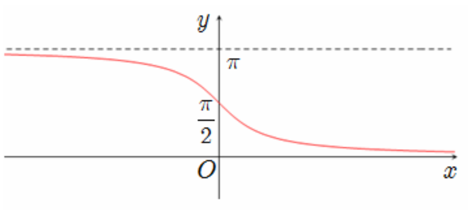
VD. $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$; $\quad \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

0.1.4.4. Hàm số *y* = arccot *x*

$$\boxed{\operatorname{arccot} x = y \Leftrightarrow \cot y = x,\ y \in (0; \pi)}$$



$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$



$y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$

- **Quy ước**

$$\boxed{\operatorname{arccot}(+\infty) = 0,\ \operatorname{arccot}(-\infty) = \pi}$$

VD. $\operatorname{arccot}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$; $\operatorname{arccot}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

0.2. Giới hạn của hàm số

- **Quy tắc tính giới hạn**

Giả sử k là hằng số và $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó

1) $\lim\limits_{x\to a}[k.f(x)] = k.\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

- **Định lý**

Nếu $f(x) \le g(x)$ khi x tiến đến a $(x \neq a)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ tồn tại thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

- **Định lý kẹp giữa**

Nếu $f(x) \le h(x) \le g(x)$ khi x tiến đến a $(x \neq a)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

- **Chú ý**

$$\boxed{\frac{1}{0^+} = +\infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty,\ \frac{1}{\pm\infty} = 0}$$

- **Một số kết quả giới hạn cần nhớ**

1) $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0} \dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{\alpha(x)\to 0} \dfrac{\tan\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

4) $\lim\limits_{x\to a}\left\{[f(x)]^{g(x)}\right\} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

5) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (nếu n lẻ, ta giả sử rằng $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$)

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{\beta^{x}} = 0$ nếu $\alpha \ge 1,\ \beta > 1$.

0.3. Hàm số liên tục

▪ **Định nghĩa**

• Hàm số f được gọi là *liên tục tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

• Hàm số f được gọi là *liên tục bên trái tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

• Hàm số f được gọi là *liên tục bên phải tại điểm* a nếu $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

• Hàm số f được gọi là *liên tục trên khoảng* $(a;b)$ nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc $(a;b)$. (Nếu f liên tục phải tại a và liên tục trái tại b thì f liên tục trên đoạn $[a;b]$).

▪ **Chú ý**

• Mọi đa thức đều liên tục trên $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$.

• Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục trên miền xác định của nó.

0.4. Đạo hàm và vi phân

▪ **Định nghĩa vi phân**

Đại lượng $dy = f'(x)dx$ được gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$.

▪ **Chú ý**

$$\boxed{dy = f'(x)dx \Leftrightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

▪ **Các quy tắc tính đạo hàm**

Giả sử f, g và h là các hàm số khả vi, ta có:

1) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

2) $[Cf(x)]' = C.f'(x)$ $(C \in \mathbb{R})$;

3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

4) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x) \ne 0)$;

5) Nếu $y = f(u)$ với $u = g(x)$ thì $y'(x) = y'(u).u'(x)$;

6) Nếu $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ thì $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$;

7) Nếu $y = f(x)$ cho bởi $x = \varphi(t)$ và $y = \psi(t)$ thì $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

▪ **Đạo hàm của các hàm số sơ cấp**

1) $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$
2) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
3) $(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
4) $(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
5) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$
6) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
7) $(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$
8) $(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
9) $\left(\ln \mid x \mid\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln \mid u \mid\right)' = \dfrac{u'}{u}$
10) $\left(\log_a \mid x \mid\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	$\left(\log_a \mid u \mid\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$
11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
14) $(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccot}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

0.5. Quy tắc L'Hospital

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ đồng thời bằng 0 (hoặc bằng vô cùng) thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là dạng vô định $0 / 0$ (hoặc ∞ / ∞). Các dạng giới hạn này được giải quyết nhờ quy tắc L'Hospital sau

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trên (a,b) (có thể không khả vi tại x_0) và $g'(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

▪ **Chú ý**

Các dạng vô định: $0.\infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞, và $\infty - \infty$ đều có thể biến đổi để áp dụng quy tắc L'Hospital.

0.6. Tích phân

- **Công thức đổi biến số**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và hàm số $x = \varphi(t)$ khả vi thì

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C}$$

- **Công thức tích phân từng phần**

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

- **Các dạng tích phân từng phần thường gặp**

• Đối với dạng tích phân $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx$ thì ta đặt $u = P(x),\ dv = e^{\alpha x}dx$.

• Đối với dạng tích phân $\int P(x)\ln^{\alpha} x\,dx$ thì ta đặt $u = \ln^{\alpha} x,\ dv = P(x)dx$.

MỘT SỐ NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

1) $\int a.dx = ax + C,\ \ a \in \mathbb{R}$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \ne -1$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|\,x\,| + C$;

4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

5) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$;

6) $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$;

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

8) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$;

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$;

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ a > 0$;

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

14) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + C$;

15) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$;

17) $\int \sqrt{x^2 + a}\ \ dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \dfrac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$;

18) $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{|\,a\,|} + C$.

………………………………………………………………………………

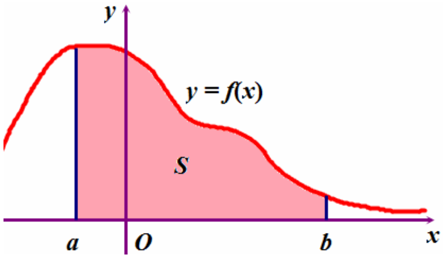
Chương 1. TÍCH PHÂN SUY RỘNG VÀ CHUỖI SỐ

Bài 1. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

- **Khái niệm mở đầu**

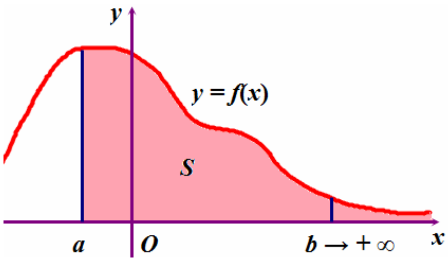
• Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;\ b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



• Cho hàm số $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;+\infty)$ ($b \to +\infty$).
Khi đó, diện tích *S* có thể tính được cũng có thể không tính được. Trong trường hợp tính được hữu hạn thì

$$S = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$



1.1. Tích phân suy rộng loại 1

1.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;+\infty)$, khả tích trên mọi đoạn $[a;b]$. Giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là *tích phân suy rộng loại* 1 của $f(x)$ trên $[a;+\infty)$, ký hiệu là

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx}$$

Định nghĩa tương tự:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{b} f(x)dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx\end{aligned}}$$

- **Chú ý**

• Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn, ta nói *tích phân hội tụ*; ngược lại là *tích phân phân kỳ*.

• Nghiên cứu về tích phân suy rộng là *khảo sát sự hội tụ* và *tính giá trị hội tụ* (nếu được).

VD 1. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

• *Trường hợp* $\alpha = 1$: $I = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) = +\infty$ (phân kỳ).

• *Trường hợp α khác* 1: $I = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{b \to +\infty} \left(x^{1-\alpha} \Big|_1^b \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{b \to +\infty} \left(b^{1-\alpha} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1}, \ \alpha > 1 \\ +\infty, \ \alpha < 1. \end{cases}$

Vậy

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha > 1: \textit{tích phân hội tụ và } I = \dfrac{1}{\alpha - 1} \\ \alpha \le 1: \textit{tích phân phân kỳ và } I = +\infty \end{array}}$$

VD 2. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2}$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

- **Chú ý**

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$, ta dùng công thức $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

• Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty)$, ta dùng công thức $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$.

• Tương tự: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$.

VD 3. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

1.1.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

1.1.2.1. Tiêu chuẩn 1

$$\boxed{\begin{cases} 0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a; +\infty) \\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \ \textit{hội tụ} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \ \textit{hội tụ}}$$

Các trường hợp khác tương tự.

VD 4. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^{10}} dx$.

………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

1.1.2.2. Tiêu chuẩn 2

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx \ \textit{hội tụ} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \ \textit{hội tụ}}$$

Các trường hợp khác tương tự.

VD 5. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} e^{-x} \cos 3x \, dx$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

1.1.2.3. Tiêu chuẩn 3

Giả sử $f(x), g(x)$ liên tục, dương trên $[a; +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

• Nếu $0 < k < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ* hoặc *phân kỳ*.

• Nếu $k = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ* thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*.

• Nếu $\begin{cases} k = +\infty \\ \int_a^{+\infty} g(x)dx \ \textit{phân kỳ} \end{cases}$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ*.

• Các trường hợp khác tương tự.

VD 6. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^2 + 2x^3}$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

- **Chú ý**

Nếu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *có cùng tính chất*.

VD 7. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + \sin x + x}$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

VD 8. Điều kiện của α để $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln^\alpha x + 1}}$ hội tụ là:

A. $\alpha > 3$; B. $\alpha > \frac{3}{2}$; C. $\alpha > 2$; D. $\alpha > \frac{1}{2}$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

VD 9. Tìm điều kiện của α để $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{2x^\alpha + x^4 - 3}$ hội tụ ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

1.2. Tích phân suy rộng loại 2

1.2.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;\, b)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ và khả tích trên mọi đoạn $[a;\, b - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$.

Giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ được gọi là *tích phân suy rộng loại* 2 của $f(x)$ trên $[a;\, b)$, ký hiệu là

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx}$$

Định nghĩa tương tự:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \left(\lim_{x \to a^+} = \infty\right);\quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \left(\lim_{x \to a^+} = \infty, \lim_{x \to b^-} = \infty\right)}$$

- **Chú ý**

Nếu các giới hạn trên tồn tại hữu hạn thì ta nói *tích phân hội tụ*; ngược lại là *tích phân phân kỳ*.

VD 10. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $I = \int\limits_0^b \frac{dx}{x^\alpha},\, b > 0$.

• *Trường hợp α* = 1: $I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln x \Big|_\varepsilon^b\right) = \ln b - \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = +\infty$.

• *Trường hợp α khác* 1: $I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^b x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(x^{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^b\right)$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(b^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha},\ \alpha < 1 \\ +\infty,\ \alpha > 1. \end{cases}$$

Vậy

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha < 1: \textit{tích phân hội tụ và } I = \dfrac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ \alpha \geq 1: \textit{tích phân phân kỳ và } I = +\infty \end{array}}$$

VD 11. Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_{1/6}^{1/3} \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

....
....
....

VD 12. Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln^2 x}}$.

....
....
....

VD 13. Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2 - x}$.

....
....
....

1.1.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

Các tiêu chuẩn hội tụ như tích phân suy rộng loại 1.

- **Chú ý**

Nếu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to b$ (với b là cận suy rộng) thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ *có cùng tính chất.*

VD 14. Tích phân suy rộng $I = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{x(x+1)(2-x)}} dx$ hội tụ khi và chỉ khi:

A. $\alpha < -1$; B. $\alpha < -\frac{1}{2}$; C. $\alpha > -\frac{1}{2}$; D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

....
....
....
....
....

VD 15. Tích phân suy rộng $I = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha + 1}{\sqrt{(x^2+1)\sin x}} dx$ phân kỳ khi và chỉ khi:

A. $\alpha \leq -1$ B. $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ C. $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

- **Chú ý**

Giả sử $I = I_1 + I_2$ với $I,\ I_1,\ I_2$ là các tích phân suy rộng ta có:

1) I_1 và I_2 hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

2) $\begin{cases} I_1 \to -\infty\,(\textit{phân kỳ}) \\ I_2 \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} I_1 \to +\infty\,(\textit{phân kỳ}) \\ I_2 \ge 0 \end{cases}$ thì I phân kỳ.

3) $\begin{cases} I_1 \to -\infty\,(\textit{phân kỳ}) \\ I_2 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} I_1 \to +\infty\,(\textit{phân kỳ}) \\ I_2 < 0 \end{cases}$ thì ta chưa thể kết luận I phân kỳ.

VD 16. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^\alpha + 1}{\sqrt{x^2 \sin x}}\,dx$ phân kỳ khi và chỉ khi:

A. $\alpha \le \dfrac{1}{4}$ B. $\alpha \le -\dfrac{1}{4}$ C. $\alpha \le -\dfrac{1}{2}$ D. $\alpha \in \mathbb{R}$.

....
....
....
....
....
....
....

VD. Xét tích phân $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$, ta có: $I = -\dfrac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}\,dx$.

• $-\dfrac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 = \cos 1$ (1).

• $\int\limits_1^{+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| dx \le \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2}\,dx$ hội tụ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra I hội tụ.

Bài 2. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ

2.1. Định nghĩa

• Cho dãy số có vô hạn các số hạng $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Biểu thức

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

được gọi là *chuỗi số*.

• Các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ là các số hạng và u_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi số.

• Tổng n số hạng đầu tiên $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được gọi là *tổng riêng thứ* n của chuỗi số.

• Nếu dãy $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số S hữu hạn thì ta nói chuỗi số *hội tụ* và có tổng là S, ta ghi là

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Ngược lại, ta nói chuỗi số *phân kỳ*.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a \neq 0)$.

• *Trường hợp* $q = 1$: $S_n = na \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

• *Trường hợp* $q \neq 1$: $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = a.\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Nếu $|\,q\,| < 1$ thì $S_n \to \dfrac{a}{1-q} \Rightarrow$ chuỗi hội tụ; nếu $|\,q\,| > 1$ thì $S_n \to +\infty \Rightarrow$ chuỗi phân kỳ.

Vậy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \ \textit{hội tụ} \Leftrightarrow |\,q\,| < 1}$$

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

VD 4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

....

....

....

....

2.2. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$, ngược lại nếu $\lim_{n\to\infty}u_n \neq 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

VD 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{3n^4+n+2}$.

....

....

....

VD 6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^4+1}$.

....

....

....

2.3. Tính chất

1) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

2) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha u_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

3) Tính chất hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số không đổi nếu ta thêm hoặc bớt đi hữu hạn số hạng.

Bài 3. CHUỖI SỐ DƯƠNG

3.1. Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ được gọi là *chuỗi số dương* nếu $u_n \geq 0,\ \forall n$.

Khi $u_n > 0,\ \forall n$ thì chuỗi số là dương thực sự.

3.2. Các định lý so sánh

- **Định lý 1**

Giả sử hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ thỏa $0 \leq u_n \leq v_n, \forall n \geq n_0$. Khi đó:

• Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ* thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ*.

• Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ* thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kỳ*.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bằng cách so sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

- **Định lý 2**

Giả sử hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ thỏa mãn $u_n > 0$ và $v_n > 0$ với n đủ lớn và $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$.

• $k = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kỳ*.

• $k = +\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ*.

• $0 < k < +\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *cùng tính chất*.

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n.3^{n+1}}$ bằng cách so sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

- **Chú ý**

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

VD 4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+3}}$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

……
……

3.3. Các tiêu chuẩn hội tụ

3.3.1. Tiêu chuẩn D'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$. Ta có:

• Nếu $D < 1$ thì *chuỗi số hội tụ*;

• Nếu $D > 1$ thì *chuỗi số phân kỳ*;

• Nếu $D = 1$ thì ta chưa thể kết luận.

VD 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

……
……
……
……

VD 6. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$.

……
……
……
……

3.3.2. Tiêu chuẩn Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$. Ta có:

• Nếu $C < 1$ thì *chuỗi số hội tụ*;

• Nếu $C > 1$ thì *chuỗi số phân kỳ*;

• Nếu $C = 1$ thì ta chưa thể kết luận.

VD 7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

……
……
……

VD 8. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$.

……
……
……

3.3.3. Tiêu chuẩn Tích phân Maclaurin – Cauchy

Giả sử hàm số $f(x)$ *liên tục*, $f(x) \ge 0$ và *giảm trên* $[k;+\infty), k \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} f(n) \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \int_{k}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ}}$$

VD 9. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n}}$.

....

....

....

VD 10. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^3 n}$.

....

....

....

Bài 4. CHUỖI SỐ CÓ DẤU TÙY Ý

4.1. Chuỗi số đan dấu

4.1.1. Định nghĩa

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ được gọi là *chuỗi số đan dấu* nếu $u_n > 0, \forall n$.

VD. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}}$ là các chuỗi số đan dấu.

4.1.2. Định lý Leibnitz

Nếu dãy $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ giảm và $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ hội tụ.

Khi đó, ta gọi chuỗi số là *chuỗi Leibnitz*.

VD 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

....

....

VD 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}}$.

....

....

....

....

....

....

VD 3. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

....

....

....

....

....

4.2. Chuỗi số có dấu tùy ý

4.2.1. Định nghĩa

• Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \; (u_n \in \mathbb{R})$ được gọi là *chuỗi có dấu tùy ý*.

• Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ hội tụ.

• Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *bán hội tụ* nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ phân kỳ.

VD. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là bán hội tụ vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ (VD 1) và $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

4.2.2. Định lý

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ *hội tụ* thì chuỗi có dấu tùy ý $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ*.

VD 4. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^n)}{n^2}$.

....

....

....

....

....

....

VD 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (-2)^{n+1}}{3^n}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Chương 2. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Bài 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Tập hợp trong R^n

Xét không gian Euclide n chiều $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) và tập hợp $D \subset \mathbb{R}^n$.

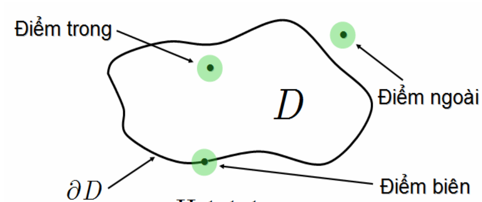
• Một phần tử $x \in \mathbb{R}^n$ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Điểm M biểu diễn phần tử x được gọi là có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ký hiệu là $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Khoảng cách giữa $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, $N(y_1, y_2, ..., y_n)$ được ký hiệu và định nghĩa là

$$d(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}\,.$$

• Xét điểm $M_0 \in \mathbb{R}^n$ và số thực $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, ta gọi $\varepsilon -$ *lân cận* (gọi tắt là lân cận) của điểm M_0 là tập hợp tất cả các điểm $M \in \mathbb{R}^n$ sao cho $d(M_0, M) < \varepsilon$.

• Điểm $M \in D$ được gọi là *điểm trong* của D nếu tồn tại một lân cận của điểm M nằm hoàn toàn trong D. Tập hợp D được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm $M \in D$ đều là điểm trong của D.

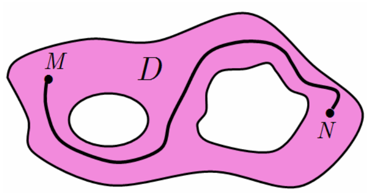
• Điểm $M \in D$ được gọi là *điểm biên* của D nếu mọi lân cận của điểm M vừa chứa điểm thuộc D vừa chứa điểm không thuộc D (điểm biên của D có thể không thuộc D). Tập hợp tất cả các điểm biên của D được gọi là *biên* của D, ký hiệu là ∂D (xem H.1.1.1). Tập hợp D được gọi là *tập đóng*, ký hiệu là $\overline{D}$, nếu $\partial D \subset D$.



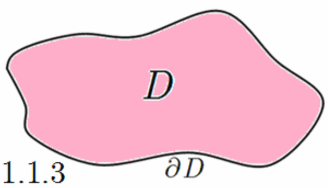
H.1.1.1

• Xét điểm M_0 cố định và số thực $r > 0$. Tập hợp tất cả các điểm M sao cho $d(M_0, M) < r$ được gọi là *quả cầu mở* tâm M_0, bán kính r; tập hợp các điểm M thỏa $d(M_0, M) \leq r$ được gọi là *quả cầu đóng* tâm M_0, bán kính r; tập hợp các điểm M thỏa $d(M_0, M) = r$ được gọi là *mặt cầu* tâm M_0, bán kính r. Tập hợp D được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một quả cầu đóng chứa D.

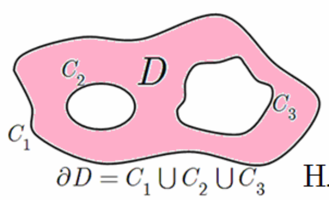
• Tập hợp D được gọi là *tập liên thông* nếu ta có thể nối hai điểm bất kỳ thuộc D bởi một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong D (H.1.1.2). Tập liên thông D được gọi là *đơn liên* nếu D có biên là một mặt cong kín (H.1.1.3); tập liên thông D có biên là hợp của nhiều mặt cong kín rời nhau được gọi là *đa liên* (H.1.1.4).



H.1.1.2



H.1.1.3



H.1.1.4

1.2. Hàm số nhiều biến

• Trong $\mathbb{R}^n$ cho tập $D \neq \phi$. Ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$D \ni (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$$

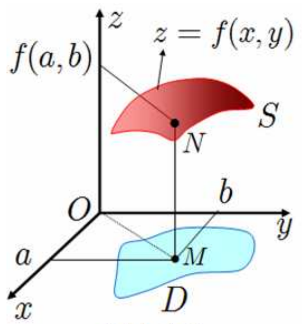
được gọi là hàm số n biến số. Tập D được gọi là miền xác định của hàm số f, ký hiệu là D_f. Các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến độc lập. Nếu $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ thì ta có thể viết $u = f(M)$.

Khi $n = 3$, ta được hàm số ba biến số và thường được viết là $u = f(x, y, z)$.

• Khi $n = 2$, ta được hàm số hai biến số và thường được viết là $z = f(x, y)$. Giá trị $z = f(x, y)$ được gọi là giá trị của f tại (x, y) và miền giá trị của hàm f là

$$G = \{z \in \mathbb{R} \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}.$$

Đồ thị của hàm $z = f(x, y)$ là tập hợp tất cả các điểm $N(x, y, f(M))$ trong không gian $Oxyz$, với $M(x, y) \in D_f$ (H.1.1.5).



H.1.1.5

▪ **Chú ý**

• Trong trường hợp khi xét hàm số $f(M)$ mà không nói gì thêm thì ta hiểu miền xác định của hàm số là tập tất cả các điểm $M \in \mathbb{R}^n$ sao cho $f(M)$ có nghĩa. Miền xác định của hàm f thường là tập liên thông.

• Trong chương trình, chủ yếu ta chỉ xét hàm số $f(x, y)$ và $f(x, y, z)$.

VD 1. Hàm số $f(x, y) = 3x^2y - \cos xy$ có $D_f = \mathbb{R}^2$.

VD 2. Hàm số $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ có miền xác định (MXĐ) là hình tròn đóng tâm $O(0, 0)$, bán kính $R = 2$ nằm trong mặt phẳng Oxy. Vì $M(x, y) \in D_z \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$.

VD 3. Hàm số $z = \dfrac{xy}{\sqrt{1 - x + y}}$ có MXĐ là nửa mặt phẳng trong Oxy, nằm phía trên đường thẳng $y = x - 1$. Vì $M(x, y) \in D_z \Leftrightarrow 1 - x + y > 0 \Leftrightarrow y > x - 1$.

Bài 2. ĐẠO HÀM RIÊNG – VI PHÂN

2.1. Đạo hàm riêng

2.1.1. Đạo hàm riêng cấp 1

▪ **Định nghĩa**

Giả sử hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ chứa điểm $M_0(x_0, y_0)$. Cố định $y = y_0$, nếu hàm số một biến $f(x, y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì ta gọi đạo hàm đó là *đạo hàm riêng theo biến* x của hàm số $f(x, y)$ tại (x_0, y_0), ký hiệu là:

$$f'_x(x_0, y_0) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ hay } f_x(x_0, y_0).$$

Vậy

$$\boxed{f'_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}}$$

Tương tự, *đạo hàm riêng theo biến* y tại (x_0,y_0) là

$$\boxed{f'_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}}$$

- **Chú ý**

• Các quy tắc tính đạo hàm của hàm số một biến đều đúng cho đạo hàm riêng của hàm số nhiều biến.

• Hàm số nhiều hơn hai biến có định nghĩa tương tự, chẳng hạn

$$f'_x(x_0,y_0,z_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}.$$

VD 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số $f(x,y) = x^4y^5 - 4x^3y^2 - 3x^2 + y^3$ tại $(1;-1)$.

....

....

....

VD 2. Tính các đạo hàm riêng của hàm số $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

....

....

....

VD 3. Tính các đạo hàm riêng của hàm số $z = \arctan\dfrac{y^2}{x}$.

....

....

....

....

VD 4. Tính các đạo hàm riêng tại $(1,-1,-2)$ của hàm số $f(x,y,z) = \ln(xy^2+z^2)$.

....

....

....

....

2.1.2. Đạo hàm riêng cấp cao

• Các đạo hàm riêng (nếu có) của các hàm số $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ được gọi là các *đạo hàm riêng cấp hai* của hàm số $f(x,y)$, ký hiệu là:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x \text{ hay } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ hay } f_{xx} = (f_x)_x,$$

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y \text{ hay } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ hay } f_{yy} = (f_y)_y,$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y \text{ hay } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ hay } f_{xy} = (f_x)_y,$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x \text{ hay } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ hay } f_{yx} = (f_y)_x.$$

• Các hàm số nhiều hơn hai biến và đạo hàm riêng cấp cao hơn hai có định nghĩa tương tự, chẳng hạn:

$$f^{(5)}_{x^2y^3}(x,y) = ((((f'_x(x,y))'_x)'_y)'_y)'_y = (f''_{x^2}(x,y))'''_{y^3},\ f^{(6)}_{x^2yxz^2}(x,y,z) = (((f''_{x^2}(x,y,z))'_y)'_x)''_{z^2}.$$

VD 5. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số $f(x,y) = x^3y^4 - 2x^2y^3$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

VD 6. Cho hàm số $f(x,y) = x^5y^2 + x^2y^3 - x^4 + y^5$. Tính đạo hàm riêng cấp năm $f^{(5)}_{x^3y^2}(1,-1)$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

- **Định lý Schwarz**

Nếu hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai $f''_{xy}(x,y)$ và $f''_{yx}(x,y)$ liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ thì $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

- **Chú ý**

• Định lý Schwarz còn được phát biểu cho đạo hàm cấp n của hàm số n biến $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Chẳng hạn, hàm số $f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng cấp ba f'''_{xyz}, f'''_{xzy}, f'''_{yxz}, f'''_{yzx}, f'''_{zxy} và f'''_{zyx} liên tục trong miền mở $V \subset \mathbb{R}^3$ thì chúng bằng nhau.

• Ứng dụng của định lý là, khi hàm nhiều biến có các đạo hàm riêng liên tục thì ta có thể thay đổi thứ tự lấy đạo hàm theo các biến một cách tùy ý.

VD 7. Cho hàm số $z = e^{3x-2y}$. Tính $z^{(n+5)}_{x^5y^n}(x,y)$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2.2. Vi phân

2.2.1. Vi phân cấp 1

Giả sử hàm số $f(x,y)$ liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$. Cho x một số gia Δx và y một số gia Δy, khi đó hàm số $f(x,y)$ có tương ứng số gia là:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)$$
$$= [f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0 + \Delta y)] + [f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)] = \Delta_x f + \Delta_y f.$$

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại điểm M_0, áp dụng công thức số gia giới nội cho hàm số một biến ta có:

$$\Delta_x f = \Delta x. f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \text{ và } \Delta_y f = \Delta y. f'_y(x_0,\ y_0 + \theta_2 \Delta y)$$

(trong đó $0 < \theta_1 < 1$ và $0 < \theta_2 < 1$).

Bây giờ, nếu giả sử thêm f'_x và f'_y liên tục tại điểm M_0 thì:

$$\begin{cases} \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f'_y(x_0,\ y_0 + \theta_2\Delta y) = f'_y(x_0,y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_x f = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x \\ \Delta_y f = f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y \end{cases}$$

(trong đó $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$).

Suy ra

$$\Delta f = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Mặt khác, đặt $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, ta có:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = O(\rho).$$

Vậy

$$\boxed{\Delta f = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + O(\rho)} \quad (*).$$

- **Định nghĩa**

• Nếu khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y \to 0$ mà Δf có thể viết được dưới dạng $(*)$ thì ta nói rằng hàm số $f(x,y)$ *khả vi* tại điểm (x_0,y_0).

Đại lượng

$$\boxed{f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y}$$

ký hiệu $df(x_0,y_0)$, được gọi là *vi phân toàn phần* (gọi tắt là *vi phân*) của hàm số $f(x,y)$ tại điểm (x_0,y_0).

• Tương tự như hàm số một biến, nếu x và y là biến độc lập thì $dx = \Delta x$ và $dy = \Delta y$.

Vậy, ta có công thức vi phân của $f(x,y)$ tại (x,y) là

$$\boxed{df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$

• Vi phân của hàm số nhiều hơn hai biến số có định nghĩa tương tự, chẳng hạn

$$\boxed{df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz}$$

• Hàm số f được gọi là khả vi trong miền $V \subset \mathbb{R}^n$ nếu f khả vi tại mọi điểm thuộc V.

VD 8. Tính $df(x,y)$ của hàm số $f(x,y) = \sin(x^2y)$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

VD 9. Cho $f(x,y,z) = z^3e^{x-3y}$. Tính $df(3,\,1,-1)$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

2.2.2. Vi phân cấp cao

2.2.2.1. Định nghĩa

• Giả sử $f(x,y)$ là hàm khả vi với x, y là hai biến độc lập và

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

Giả sử $df(x,y)$ cũng khả vi, khi đó vi phân của $df(x,y)$, ký hiệu là $d^2f(x,y) = d(df(x,y))$, được gọi là *vi phân toàn phần cấp hai* (gọi tắt là *vi phân cấp hai*) của hàm số $f(x,y)$.

• Tiếp tục định nghĩa như trên, ta được vi phân cấp ba của hàm số $f(x,y)$ là

$$d^3f(x,y) = d(d^2f(x,y)),$$

………………………,

vi phân cấp n của hàm số $f(x,y)$ là $d^nf(x,y) = d(d^{n-1}f(x,y))$.

2.2.2.2. Công thức tính

• Do x, y là hai biến độc lập nên các số gia $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ là hằng số đối với x và y.

Ký hiệu $(dx)^n = dx^n$ và $(dy)^n = dy^n$, ta có:

$$\begin{aligned}
d^2f(x,y) &= d(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy) \\
&= [f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy]'_x dx + [f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy]'_y dy \\
&= [f''_{x^2}(x,y)dx + f''_{xy}(x,y)dy]dx + [f''_{xy}(x,y)dx + f''_{y^2}(x,y)dy]dy \\
&= f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2.
\end{aligned}$$

Vậy ta có công thức vi phân cấp hai của $f(x,y)$ là

$$\boxed{d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2}$$

• Tương tự, ta có công thức vi phân cấp ba của $f(x,y)$ là

$$\boxed{d^3f = f'''_{x^3}dx^3 + 3f'''_{x^2y}dx^2dy + 3f'''_{xy^2}dxdy^2 + f'''_{y^3}dy^3}$$

▪ **Chú ý**

Nếu x và y là các biến trung gian phụ thuộc vào biến s và t thì $d^nx \neq dx^n$, $d^ny \neq dy^n$ nên các công thức trên không còn đúng nữa. Các ví dụ sau đây ta chỉ xét trường hợp các biến x và y độc lập.

VD 10. Cho hàm số $f(x,y)=e^{x^2-y}$. Tính $d^2f(1,-1)$.

....

....

....

....

VD 11. Tính vi phân cấp 2 của hàm số $f(x,y)=\ln(x-y^2)$.

....

....

....

....

VD 12. Tính vi phân cấp 3 của hàm số $f(x,y)=x^3y^2$.

....

....

....

....

....

....

VD 13. Tính vi phân d^3z của hàm số $z=e^{2x-3y}$.

....

....

....

....

....

....

VD 14. Tính $d^3f(x,y)$ của hàm số $f(x,y)=x^2\cos 2y$.

....

....

....

....

....

....

Bài 3. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HAI BIẾN

3.1. Cực trị địa phương

▪ **Định nghĩa**

• Giả sử hàm số $z=f(x,y)$ xác định trong miền D chứa $M_0(x_0,y_0)$. Nếu với mọi điểm $M(x,y)$ thuộc lân cận của M_0 nhưng khác M_0 mà hiệu $\Delta f=f(M)-f(M_0)$ có dấu không đổi thì ta nói rằng hàm số $z=f(x,y)$ đạt *cực trị địa phương* (gọi tắt là *cực trị*) tại M_0.

• Nếu $\Delta f > 0$ thì hàm số $f(x,y)$ đạt *cực tiểu* tại M_0. Điểm M_0 được gọi là *điểm cực tiểu* và $f(M_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của $f(x,y)$, ký hiệu là f_{CT}.

• Nếu $\Delta f < 0$ thì hàm số $f(x,y)$ đạt *cực đại* tại M_0. Điểm M_0 được gọi là *điểm cực đại* và $f(M_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của $f(x,y)$, ký hiệu là $f_{CĐ}$.

VD. Xét hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ xác định trên $\mathbb{R}^2$. Với mọi điểm $M(x,y)$ khác $O(0,0)$, ta có

$$f(M) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0 = f(O).$$

Vậy hàm số $f(x,y)$ đạt cực tiểu tại $O(0,0)$.

3.2. Cực trị tự do

3.2.1. Định lý

▪ **Điều kiện cần**

Nếu hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và tại đó hàm số có đạo hàm riêng thì

$$\boxed{f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0}$$

Điểm M_0 thỏa mãn $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$ được gọi là *điểm dừng* (hay *điểm tới hạn*). Điểm M_0 có thể không phải là điểm cực trị.

▪ **Điều kiện đủ**

Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0, y_0)$ và có đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một lân cận của điểm M_0. Ta đặt

$$A = f''_{x^2}(M_0),\ B = f''_{xy}(M_0),\ C = f''_{y^2}(M_0) \text{ và } \Delta = AC - B^2.$$

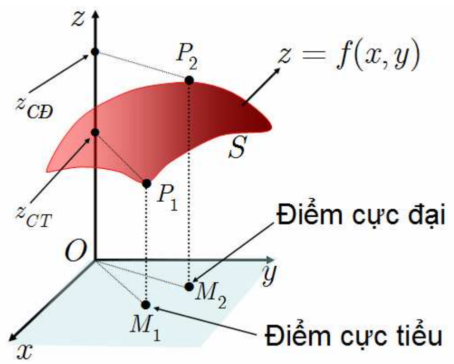
Khi đó, ta có:

1) nếu $\Delta > 0$ và $A > 0$ thì $f(x,y)$ *đạt cực tiểu* tại điểm M_0;

2) nếu $\Delta > 0$ và $A < 0$ thì $f(x,y)$ *đạt cực đại* tại điểm M_0;

3) nếu $\Delta < 0$ thì $f(x,y)$ *không đạt cực trị* tại M_0;

4) nếu $\Delta = 0$ thì ta *chưa thể kết luận*.



H.1.3.1

▪ **Chú thích**

Cực trị loại này được gọi là *cực trị tự do* vì khi đi tìm điểm cực trị, ta xét các điểm $M(x,y)$ chạy khắp D_f mà không có sự ràng buộc nào (H.1.3.1).

3.2.2. Phương pháp tìm cực trị tự do

Giả sử hàm số $f(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^2$.
Để tìm cực trị của $f(x,y)$, ta thực hiện các bước sau

• Bước 1. Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình

$$\boxed{\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}}$$

• Bước 2. Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ và $M_0(x_0, y_0) \in D$, ta tính:

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{y^2}(x_0,\ y_0) \Rightarrow \Delta = AC - B^2.$$

• Bước 3. Dựa vào điều kiện đủ của định lý để kết luận.

VD 1. Tìm điểm dừng của hàm số $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 12x - 5$.

....
....
....
....
....
....

VD 2. Tìm giá trị cực trị của hàm số $f(x,y) = -x^2 - 3y^2 - 2xy + 4x - 3$.

....
....
....
....
....
....
....

VD 3. Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....

VD 4. Tìm cực trị của hàm số $z = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

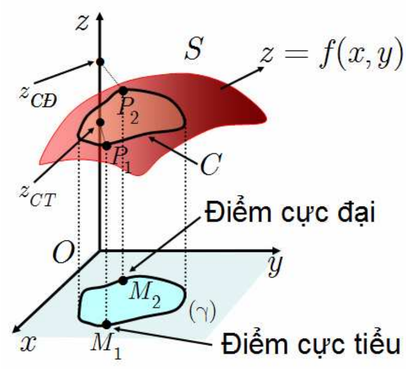
....
....
....
....
....
....
....

VD 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = 2x^3 + 5x^2 + xy^2 + y^2 - 4$.

....
....
....
....
....
....
....
....

3.3. Cực trị có điều kiện

Giả sử hàm số $z = f(x,y)$ có đồ thị là S cắt hình trụ theo giao tuyến là một đường cong C. Gọi hình chiếu của C trên Oxy là đường cong $(\gamma): \varphi(x,y) = 0$. Nếu tại điểm $M_0 \in (\gamma)$ hàm số $f(x,y)$ đạt cực trị thì ta nói M_0 là *điểm cực trị có điều kiện* của $f(x,y)$ với điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y) = 0$ (H.1.3.2).



H.1.3.2

▪ **Chú thích**

• Cực trị có điều kiện khác cực trị tự do ở chỗ khi đi tìm điểm cực trị, ta chỉ xét các điểm $M(x,y)$ chạy trên đường cong $(\gamma) \subset D_f$.

• Để tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$, ta dùng phương pháp *khử* hoặc phương pháp *nhân tử Lagrange*.

3.3.1. Phương pháp khử

Giả sử cần tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ liên tục trên miền D thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ ($\varphi(x,y)$ khả vi), ta thực hiện các bước sau

• *Bước* 1. Từ phương trình $\varphi(x,y) = 0$, ta giải y theo x (hoặc x theo y) và thế vào hàm số $z = f(x,y)$.

• *Bước* 2. Ta tìm cực trị của hàm hợp một biến $z = f(x, y(x))$.

VD 6. Tìm cực trị của hàm $z = x^2 + y^2$ thỏa mãn điều kiện $xy = 1$.

....
....
....
....
....
....

3.3.2. Phương pháp nhân tử Lagrange

Giả sử cần tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ liên tục trên miền D thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ ($\varphi(x,y)$ khả vi), ta thực hiện các bước sau

• *Bước* 1. Lập hàm phụ (hàm phụ còn được gọi là *hàm Lagrange*)

$$\boxed{L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)}$$

• *Bước* 2. Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình

$$\boxed{\begin{cases} L'_x(x,y) = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y) = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}}$$

Giả sử ta có n điểm dừng $M_k(x_k, y_k)$ ứng với λ_k $(k = 1,\ldots,n)$.

• *Bước* 3. Tính các vi phân: $d^2L(x,y) = L''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2L''_{xy}(x,y)dxdy + L''_{y^2}(x,y)dy^2$, và

$$d\varphi(x,y) = \varphi'_x(x,y)dx + \varphi'_y(x,y)dy.$$

• *Bước* 4. Tại điểm $M_k(x_k, y_k)$ ứng với λ_k, ta giải:

$\varphi'_x(M_k)dx + \varphi'_y(M_k)dy = 0 \Rightarrow dy$ theo dx (hoặc ngược lại).

Sau đó, thay vào $d^2L(M_k)$ (chú ý $dx^2 + dy^2 > 0$).

Kết luận:

1) nếu $d^2L(M_k) > 0$ thì hàm số $f(x,y)$ *đạt cực tiểu* tại điểm M_k;

2) nếu $d^2L(M_k) < 0$ thì hàm số $f(x,y)$ *đạt cực đại* tại điểm M_k.

▪ **Chú ý**

Nếu từ vi phân $d^2L(x,y)$ mà ta có thể kết luận được cực trị thì không cần phải tính $d\varphi(x,y)$.

VD 7. Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

▪ **Chú ý**

Khi ta thay $\varphi(x,y) = 0$ bởi một phương trình tương đương thì nhân tử λ sẽ thay đổi nhưng không làm thay đổi kết quả của bài toán.

VD 8. Tìm cực trị của hàm số $z = xy$ thỏa điều kiện $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

Chương 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN KINH TẾ

CÁC KHÁI NIỆM – KÝ HIỆU TRONG KINH TẾ

1. Trung bình của hàm

Xét hai đại lượng kinh tế H, V có mối quan hệ hàm với nhau: $H = H(V)$. Tỉ số $\dfrac{H(V)}{V}$ được gọi là *hàm trung bình* của H, ký hiệu là $AH(V)$.

VD. Một doanh nghiệp sản xuất lượng hàng Q và bán hết với đơn giá là P thì tổng doanh thu sẽ là $R = PQ$. Vậy $AR = \dfrac{PQ}{Q} = P$.

Trong kinh tế, đơn giá là trung bình của doanh thu.

2. Biên tế

Biên tế của hàm $H(V)$ theo biến V tại V_0 là đại lượng

$$\lim_{V \to V_0} \frac{H(V) - H(V_0)}{V - V_0} = H'(V_0)$$

ký hiệu là $MH_V(V_0)$.

Chẳng hạn, biên tế của doanh thu R theo sản lượng Q tại Q_0 là đại lượng mô tả độ tăng của doanh thu khi Q tăng thêm 1 đơn vị tại Q_0. Ta có $MR_Q(Q_0) = R'(Q_0)$.

VD. Giả sử chi phí C của 1 doanh nghiệp để sản xuất ra Q sản phẩm là:

$$C = \frac{1}{3}Q^3 - 10Q^2 + 1000Q + 70 \text{ (đơn vị tiền tệ).}$$

Sử dụng biên tế, ta ước lượng chi phí để doanh nghiệp sản xuất ra sản phẩm thứ 50 là:

$$C'(50) = 2500 \text{ (đơn vị tiền tệ).}$$

Bảng ký hiệu

Ký hiệu	***Ý nghĩa***
P	Đơn giá (***Price***)
Q	Số lượng (***Quantity***)
R	Doanh thu (***Revenue***)
Π	Lợi nhuận (***Profit***)
C	Chi phí (***Cost***)
D	Cầu (***Demand***)
S	Cung (***Supply***)
T	Thuế (***Tax***)

BÀI 1. BÀI TOÁN LÃI KÉP – ĐÁNH THUẾ DOANH THU

1.1. Bài toán lãi kép

• Giả sử một người gửi số tiền P_0 vào một ngân hàng với lãi suất $s(\%)$ trong thời gian t.
Sau thời gian t thì người đó có tổng số tiền là

$$\boxed{P = P_0 + sP_0 = P_0(1+s)}$$

• Nếu chia khoảng thời gian t ra làm n khoảng bằng nhau thì lãi suất mỗi khoảng là $\frac{s}{n}(\%)$.
Tổng số tiền cuối khoảng thời gian thứ nhất người đó có được là

$$\boxed{P = P_0 + \frac{s}{n}P_0 = P_0\left(1+\frac{s}{n}\right)}$$

• Người đó lại gửi tiếp số tiền có được vào ngân hàng thì cuối khoảng thứ hai số tiền có được là

$$\boxed{P = P_0\left(1+\frac{s}{n}\right) + \frac{s}{n}P_0\left(1+\frac{s}{n}\right) = P_0\left(1+\frac{s}{n}\right)^2}$$

Tiếp tục như vậy cho đến cuối kỳ thì tổng số tiền người đó có được là

$$\boxed{P_0\left(1+\frac{s}{n}\right)^n}$$

• Nếu tăng số lần rút và gửi lên vô hạn lần thì sau khoảng thời gian t, tổng số tiền người đó có, được tính theo công thức *lãi kép liên tục* là

$$\boxed{P \approx \lim_{n\to\infty} P_0\left(1+\frac{s}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[P_0\left(1+\frac{s}{n}\right)^{\frac{n}{s}}\right]^s = P_0e^s}$$

VD 1. Đầu tháng 1 năm 2010, một người gửi 100 triệu đồng ở 1 ngân hàng với lãi suất 8% trên một năm và cuối năm 2010 tới nhận. Tính tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó nhận được trong các trường hợp sau:

1) Đầu năm gửi đến cuối năm đến nhận;
2) Mỗi tháng đến rút tiền và gửi lại;
3) Mỗi ngày đến rút tiền và gửi lại;
4) Lãi kép liên tục.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1.2. Bài toán đánh thuế doanh thu

Giả sử một doanh nghiệp sản xuất *độc quyền* 1 loại sản phẩm. Gọi Q là sản lượng và P là giá bán 1 đơn vị sản phẩm. Biết hàm cầu của thị trường về loại sản phẩm trên trong 1 đơn vị thời gian là $Q_D(P) = D(P)$, tổng chi phí là $C = C(Q)$ và tổng số thuế là $T = T(t)$ (với t là mức thuế doanh thu định trên một đơn vị sản phẩm).

Ta có 3 bài toán sau đây

• Bài toán 1

Tìm mức sản lượng Q theo t để doanh nghiệp đạt mức lợi nhuận tối đa sau thuế. Mức sản lượng này được gọi là *sản lượng hợp lý nhất* của doanh nghiệp.

• Bài toán 2

Tìm t để khi doanh nghiệp đạt mức lợi nhuận tối đa thì thuế thu được từ doanh nghiệp là lớn nhất.

• Bài toán 3

Tìm t để *sản lượng hợp lý nhất* của doanh nghiệp đạt một mức tối thiểu hay tối đa.

▪ ***Cách giải***

***Bước* 1.** Từ hàm cầu ta tìm P theo Q.

***Bước* 2.** Lập các hàm:

• Tổng thuế doanh nghiệp phải đóng là $T = Qt$, doanh thu của doanh nghiệp là $R = R(Q) = PQ$.

• Lợi nhuận của doanh nghiệp thu được là:

$$\Pi = R - C - T \text{ (doanh thu “–” chi phí “–” thuế).}$$

***Bước* 3.**

• Tìm mức sản lượng $Q_0(t)$ theo t để hàm Π đạt giá trị lớn nhất (Bài toán 1).

• Từ $Q_0(t)$ tìm được, ta tìm t để hàm T đạt giá trị lớn nhất (Bài toán 2).

• Giải $Q_0(t) \geq \overline{Q}$ hay $Q_0(t) \leq \overline{Q}$ với $\overline{Q}$ là mức sản lượng tối thiểu hay tối đa (Bài toán 3).

VD 2. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền 1 loại sản phẩm. Biết hàm cầu của loại sản phẩm này và hàm tổng chi phí sản xuất lần lượt là $Q_D(P) = 800 - P$ và $C = Q^2 + 200Q + 100$.

1) Nếu biết mức thuế doanh thu định trên một đơn vị sản phẩm là t thì doanh nghiệp sẽ ấn định sản lượng như thế nào để lợi nhuận sau thuế là lớn nhất ?
2) Khi doanh nghiệp đạt lợi nhuận sau thuế lớn nhất, hãy tìm mức thuế doanh thu t áp trên một đơn vị sản phẩm để tổng thuế thu được từ doanh nghiệp này là lớn nhất ?
3) Nhu cầu xã hội cần có tối thiểu 125 đơn vị sản phẩm của doanh nghiệp này. Vậy mức thuế doanh thu chỉ được áp tối đa là bao nhiêu ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……
……
……
……
……
……
……
……
……

Bài 2. BÀI TOÁN TÌM MỨC SẢN LƯỢNG ĐỂ DOANH NGHIỆP ĐẠT LỢI NHUẬN TỐI ĐA (*Cực đại hóa lợi nhuận theo sản lượng*)

2.1. Sản xuất trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo

2.1.1. Doanh nghiệp sản xuất một loại sản phẩm

Trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo thì giá bán do thị trường quyết định và không phụ thuộc vào mức sản lượng của doanh nghiệp. Khi đó, tổng doanh thu là $R = PQ$ và hàm lợi nhuận là $\Pi = R - C$.
Ta tìm mức sản lượng Q để hàm Π đạt cực đại.

VD 1. Một doanh nghiệp sản xuất một loại sản phẩm trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo. Biết giá của sản phẩm trên thị trường là $P = 130$ (đơn vị tiền) và tổng chi phí để sản xuất ra Q $(Q > 1)$ đơn vị sản phẩm là $C = \frac{1}{3}Q^3 - Q^2 + 10Q + 20$. Hãy tìm mức sản lượng để lợi nhuận doanh nghiệp đạt cực đại ?

……
……
……
……
……
……
……
……
……

2.1.2. Doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm

Giả sử một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo. Biết giá bán của các sản phẩm là P_1, P_2; hàm tổng chi phí phụ thuộc vào mức sản lượng Q_1, Q_2 là $C = C(Q_1, Q_2)$. Tìm mức sản lượng tương ứng của từng sản phẩm mà doanh nghiệp cần sản xuất để có lợi nhuận tối đa.

- ***Cách giải***

***Bước* 1.** Lập các hàm doanh thu và lợi nhuận của doanh nghiệp:

$$R = P_1Q_1 + P_2Q_2 \text{ và } \Pi = R - C.$$

***Bước* 2.** Tìm hai mức sản lượng dương Q_1^*, Q_2^* để hàm lợi nhuận Π đạt cực đại.

VD 2. Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo. Giá bán hai sản phẩm này trên thị trường là $P_1 = 450$, $P_2 = 630$ (đơn vị tiền). Biết hàm tổng chi phí là:

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 210Q_1 + 360Q_2 + 100.$$

Hãy tìm mức sản lượng của mỗi sản phẩm mà doanh nghiệp cần sản xuất để có lợi nhuận tối đa ?

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

▪ **Chú ý**

Trong thực tế, nếu bị hạn chế về vốn thì doanh nghiệp phải tự ấn định mức phí tối đa là C_0. Khi đó, bài toán có thêm điều kiện ràng buộc $C \le C_0$ và trở thành bài toán cực đại trên miền đóng, bị chặn có biên gồm nhiều cạnh.

2.2. Sản xuất trong điều kiện độc quyền

2.2.1. Doanh nghiệp sản xuất một loại sản phẩm

• Trong điều kiện sản xuất độc quyền thì giá P của sản phẩm do doanh nghiệp (DN) quyết định. Lượng cầu Q_D do người tiêu dùng quyết định lại phụ thuộc vào P. Ta có quan hệ hàm $Q_D = Q_D(P)$.

• Muốn tiêu thụ hết sản phẩm, nghĩa là $Q = Q_D(P)$, thì DN phải ấn định mức giá $P = Q_D^{-1}(Q) = P(Q)$.
Hàm tổng doanh thu và lợi nhuận của doanh nghiệp lúc này là:

$$R(Q) = P(Q).Q \text{ và } \Pi = R(Q) - C(Q).$$

• Từ $\Pi = R(Q) - C(Q)$, ta tìm được mức sản lượng cần sản xuất và giá bán để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa.

VD 3. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu về loại sản phẩm này là $Q_D = 1200 - P$ và hàm tổng chi phí để đạt mức sản lượng Q là

$$C = 0,25Q^3 - 30,625Q^2 + 1528,5Q + 20000.$$

Tìm mức sản lượng và giá bán để doanh nghiệp có lợi nhuận cực đại ?

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2.2.2. Doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm

Giả sử một DN sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm với sản lượng Q_1, Q_2. Biết hàm cầu của thị trường về hai loại sản phẩm này là $Q_{D_1} = D_1(P_1, P_2)$, $Q_{D_2} = D_2(P_1, P_2)$ và hàm tổng chi phí là $C = C(Q_1, Q_2)$. Tìm mức sản lượng của hai loại sản phẩm trên mà doanh nghiệp cần sản xuất để có lợi nhuận tối đa ?

- ***Cách giải***

***Bước* 1.** Khi doanh nghiệp định giá bán để bán hết sản phẩm thì:

$$D_1(P_1, P_2) = Q_1,\ D_2(P_1, P_2) = Q_2 \ (*).$$

Giải hệ (*) ta được:

$$P_1 = P_1(Q_1, Q_2),\ P_2 = P_2(Q_1, Q_2).$$

***Bước* 2.** Lập các hàm doanh thu và lợi nhuận của doanh nghiệp:

$$R = P_1(Q_1, Q_2).Q_1 + P_2(Q_1, Q_2).Q_2 \text{ và } \Pi = R - C.$$

***Bước* 3.** Từ hàm $\Pi = R - C$, ta tìm các giá trị dương Q_1^* và Q_2^* để Π đạt cực đại.

VD 4. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu về hai loại sản phẩm này là:

$$Q_{D_1} = 1200 - 2P_1 + P_2 \text{ và } Q_{D_2} = 1440 + P_1 - P_2$$

và hàm tổng chi phí sản xuất là $C = C(Q_1, Q_2) = 480Q_1 + 720Q_2 + 400$. Tìm mức sản lượng và giá bán tương ứng mà doanh nghiệp cần sản xuất để có lợi nhuận tối đa ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

- **Chú ý**

Trường hợp DN sản xuất độc quyền 1 loại sản phẩm nhưng được tiêu thụ ở 2 *thị trường tách biệt*. Biết hàm cầu của từng thị trường là $Q_{D_1} = D_1(P_1)$, $Q_{D_2} = D_2(P_2)$ thì ta vẫn giải như trên với $Q = Q_1 + Q_2$.

VD 5. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền 1 loại sản phẩm và có 2 thị trường tiêu thụ tách biệt. Biết hàm cầu về loại sản phẩm này trên 2 thị trường lần lượt là $Q_{D_1} = 310 - P_1$, $Q_{D_2} = 350 - P_2$, và hàm tổng chi phí là $C = C(Q) = 20 + 30Q + Q^2$. Tìm mức sản lượng và giá bán tương ứng trên mỗi thị trường để doanh nghiệp có lợi nhuận tối đa ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

BÀI 3. BÀI TOÁN NGƯỜI TIÊU DÙNG

TÌM ĐẦU VÀO SAO CHO CHI PHÍ SẢN XUẤT NHỎ NHẤT

3.1. Bài toán người tiêu dùng

- Giả sử một người tiêu dùng dự định dùng số tiền là B để mua sắm 2 loại hàng có giá là P_1, P_2 với số lượng hàng sẽ mua lần lượt là x và y.
- Người tiêu dùng sẽ nhận được lợi ích từ số hàng đã mua. Lợi ích này là một hàm phụ thuộc vào lượng hàng người đó mua và được gọi là *hàm lợi ích* hay hữu dụng (*utility function*), ký hiệu là $U = U(x, y)$.
- Tìm số lượng các loại hàng trên mà người tiêu dùng sẽ mua sao cho giá trị sử dụng lớn nhất là tìm điểm cực đại của hàm $U(x, y)$ với điều kiện $P_1x + P_2y = B$.

VD 1. Một người tiêu dùng dùng số tiền là $B = 178$ để mua sắm 2 loại hàng có giá là $P_1 = 4,\ P_2 = 6$. Hàm lợi ích cho 2 loại hàng là $U = (x + 2)(y + 1)$. Tìm số lượng $x,\ y$ của hai loại hàng trên mà người tiêu dùng sẽ mua sao cho giá trị sử dụng là lớn nhất ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

3.2. Bài toán tìm đầu vào để chi phí sản xuất nhỏ nhất

• Giả sử một DN sản xuất một loại sản phẩm cần 2 đầu vào với đơn giá tương ứng là P_1, P_2 cố định.

• Để có được mức sản lượng Q thì DN cần số lượng đầu vào tương ứng là x và y. Ta có hàm sản xuất $Q = Q(x, y)$ và chi phí là $C(x, y) = P_1x + P_2y$.

• Tìm số lượng đầu vào (x, y) để DN sản xuất Q sản phẩm với tổng chi phí bé nhất là tìm điểm cực tiểu của hàm $C(x, y) = P_1x + P_2y$ với điều kiện $Q(x, y) = Q$.

VD 2. Một DN sản xuất một loại sản phẩm cần lượng đầu vào (x, y) với đơn giá là $P_1 = 10$, $P_2 = 40$. Biết hàm sản xuất $Q(x, y) = 10\sqrt{xy}$. Tìm số lượng đầu vào để doanh nghiệp sản xuất 200 sản phẩm với tổng chi phí bé nhất ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I VÀ TÍCH PHÂN BỘI HAI CƠ BẢN

Bài 1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1.1. Định nghĩa phương trình vi phân

• Phương trình chứa đạo hàm hay vi phân của 1 hoặc vài hàm cần tìm được gọi là *phương trình vi phân*. Phương trình chứa đạo hàm của một biến độc lập được gọi là *phương trình vi phân thường* (*Differential Equation*), phương trình chứa đạo hàm riêng được gọi là *phương trình vi phân đạo hàm riêng* (*Partial Differential Equation*).

• Cấp cao nhất của đạo hàm trong phương trình vi phân được gọi là *cấp* của phương trình vi phân đó.

• Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n là $F(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n)}) = 0\ (*)$.

Nếu từ $(*)$ ta giải được theo $y^{(n)}$ thì phương trình vi phân có dạng $y^{(n)} = f(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n-1)})$.

• Nghiệm của $(*)$ trên khoảng D nào đó là hàm $y = \varphi(x)$ xác định trên D sao cho khi thay vào $(*)$ ta được đồng nhất thức trên D. Đồ thị nghiệm $y = \varphi(x)$ của một phương trình vi phân được gọi là *đường cong tích phân*.

• Giải một phương trình vi phân là đi tìm tất cả các nghiệm của phương trình vi phân đó. Nghiệm của một phương trình vi phân có thể được biểu diễn dưới dạng *hàm ẩn*.

1.2. Phương trình vi phân cấp 1

• Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 là $F(x, y, y') = 0 \ (*)$.

• Nghiệm của $(*)$ là hàm số $y = y(x)$ thỏa $(*)$.

• Nghiệm $y = y(x)$ của $(*)$ có chứa hằng số C được gọi là *nghiệm tổng quát*.

• Khi thế điều kiện đầu $x = x_0,\ y = y_0$ vào nghiệm tổng quát ta được giá trị C_0 cụ thể và nghiệm của $(*)$ lúc này được gọi là *nghiệm riêng*.

• Nghiệm thu được trực tiếp từ $(*)$ và không thỏa nghiệm tổng quát được gọi là *nghiệm kỳ dị*.

▪ **Chú ý**

Trong chương trình, ta không xét nghiệm kỳ dị và việc giải phương trình vi phân theo cách không đầy đủ (nghĩa là ta bỏ qua các điều kiện có nghĩa).

VD. Phương trình vi phân $y' - xy = 0$ có nghiệm tổng quát là $y = Ce^{x^2/2}$.

Thế $x = 0$ và $y = 2$ vào $y = Ce^{x^2/2}$ ta được nghiệm riêng là $y = 2e^{x^2/2}$.

Bài 2. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I

2.1. Phương trình với biến phân ly

2.1.1. Dạng cơ bản

Phương trình vi phân với biến phân ly có dạng

$$\boxed{f(y)dy = g(x)dx \ (1)}$$

▪ **Phương pháp giải**

Ta lấy tích phân hai vế của (1): $\int f(y)dy = \int g(x)dx$.

VD 1. Giải phương trình vi phân $y'y^2 - x^2 = 0$ với điều kiện đầu $y(0) = 2$.

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

VD 2. Giải phương trình vi phân $y' = 3x^2y$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

VD 3. Giải phương trình $(x^2+1)y'+3x(y-1)=0$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

VD 4. Giải pt: $x(2y+\cos y)y'-2x^2+1=0$.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

2.1.2. Dạng phương trình đưa về biến phân ly (tham khảo)

Phương trình vi phân đưa về biến phân ly có dạng

$$\boxed{y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)\quad(1')}$$

trong đó $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow a'x+b'y=\alpha(x+by)$.

▪ **Phương pháp giải**

***Bước* 1.** Đặt $u=ax+by \Rightarrow u'=a+by'$.

***Bước* 2.** $(1') \Rightarrow \dfrac{u'-a}{b}=g(u)$ (đây là phương trình vi phân có biến phân ly).

2.2. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

2.2.1. Dạng cơ bản

Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1 có dạng

$$\boxed{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)\quad(2)}$$

▪ **Phương pháp giải**

***Bước* 1.** Đặt $u=\dfrac{y}{x} \Rightarrow y'=u+xu'$.

***Bước* 2.** $(2) \Rightarrow u+xu'=f(u) \Rightarrow \dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$ (đây là phương trình vi phân có biến phân ly).

VD. Giải phương trình vi phân $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

Giải. Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, phương trình trở thành

$$u + xu' = u + u\ln u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = u\ln u \Rightarrow \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|\ln u| = \ln|x| + C \Rightarrow \ln|u| = \ln|Cx| \Rightarrow u = Ce^{x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = Cxe^{x}$ (chú ý các hằng số C !).

VD 5. Giải phương trình vi phân $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x}{y}$.

....
....
....
....
....
....

VD 6. Giải phương trình vi phân $xy' - y = x\tan\dfrac{y}{x}$ với điều kiện đầu $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

2.2.2. Phương trình vi phân đưa về đẳng cấp

Phương trình vi phân đưa về đẳng cấp có dạng

$$\boxed{y' = f(x,y) \quad (2')}$$

trong đó, $f(x,y)$ là hàm đẳng cấp bậc 0: $f(kx,ky) = f(x,y), \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

▪ **Phương pháp giải.** Ta biến đổi $(2') \Rightarrow y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, rồi giải tiếp như trên.

VD. Giải phương trình vi phân $y\,dx + (y - x)\,dy = 0,\ y(2) = 1$.

Giải. Phương trình trở thành

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - y} \Rightarrow y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} \Rightarrow u + xu' = \frac{u}{1-u}, \left(u = \frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-u}{u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1-u}{u^2}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u} - \ln|u| + C = \ln|x| \Rightarrow \ln|xu| = C - \frac{1}{u} \Rightarrow xu = e^{C - \frac{1}{u}} \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x}{y}}\ (*).$$

Thay $x = 2,\ y = 1$ vào nghiệm tổng quát $(*)$, ta được $C = e^2$. Vậy nghiệm riêng của $(*)$ là $y = e^{\frac{2y-x}{y}}$.

VD 7. Giải phương trình vi phân $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

VD 8. Giải phương trình $y' = \dfrac{4x^2 + xy + y^2}{x^2}$ với điều kiện đầu $y(1) = 2$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2.2.3. Phương trình vi phân khác đưa về đẳng cấp (tham khảo)

Phương trình vi phân đưa về đẳng cấp có dạng $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ $(2'')$, trong đó $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

▪ **Phương pháp giải**

***Bước* 1.** Giải hệ $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + by' + c' = 0 \end{cases}$ ta được nghiệm (x_0, y_0).

***Bước* 2.** Đổi biến $x = X + x_0,\ y = Y + y_0$ ta được:

$$(2'') \Rightarrow Y' = f\left(\frac{a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c}{a'(X + x_0) + b'(Y + y_0) + c'}\right) \Rightarrow Y' = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right) \Rightarrow Y' = f\left(\frac{a + b\dfrac{Y}{X}}{a' + b'\dfrac{Y}{X}}\right).$$

***Bước* 3.** Đặt $u = \dfrac{Y}{X} \Rightarrow Y' = u + Xu'$ ta được phương trình vi phân đẳng cấp.

2.3. Phương trình vi phân toàn phần

Nếu hai hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở D, thỏa điều kiện $Q'_x(x, y) = P'_y(x, y), \forall (x, y) \in D$ thì phương trình vi phân có dạng

$$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \ \ (3)}$$

được gọi là phương trình *vi phân toàn phần*.

Nếu tồn tại hàm $u(x, y)$ sao cho $d[u(x, y)] = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ thì nghiệm tổng quát của (3) là

$$\boxed{u(x, y) = C}$$

▪ **Nhận xét**

$$\boxed{u'_x(x,y) = P(x,y),\ u'_y(x,y) = Q(x,y)}$$

▪ **Phương pháp giải**

***Bước* 1.** Từ (3) ta có $\begin{cases} u'_x = P \ \ (3a) \\ u'_y = Q \ \ (3b). \end{cases}$

***Bước* 2.** Lấy tích phân (3*a*) theo biến x ta được $u(x,y) = \int P(x,y)dx = \varphi(x,y) + C(y)$ (3*c*), trong đó $C(y)$ là hàm theo biến y.

***Bước* 3.** Đạo hàm (3*c*) theo biến y ta được $u'_y = \varphi'_y(x,y) + C'(y)$ (3*d*).

***Bước* 4.** So sánh (3*b*) và (3*d*) ta tìm được $C(y)$. Thay $C(y)$ vào (3*c*) ta được $u(x,y)$.

▪ **Các giải khác**

Nếu $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ thì

$$\boxed{u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy}$$

VD. Giải phương trình vi phân $(x^2 + 2xe^y - e^x)dx + (x^2e^y - y^3)dy = 0$.

Giải. Ta có

$$\begin{cases} u'_x = P = x^2 + 2xe^y - e^x \ \ (a) \\ u'_y = Q = x^2e^y - y^3 \qquad (b) \end{cases} \Rightarrow P'_y = Q'_x = 2xe^y.$$

$(a) \Rightarrow u(x,y) = \int Pdx = \dfrac{x^3}{3} + x^2e^y - e^x + C(y) \Rightarrow u'_y = x^2e^y + C'(y)\ \ (c)$.

So sánh (b) và (c) ta được $C'(y) = -y^3 \Rightarrow C(y) = -\dfrac{y^4}{4} \Rightarrow u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + x^2e^y - e^x - \dfrac{y^4}{4}$.

Vậy nghiệm tổng quát là $\dfrac{x^3}{3} + x^2e^y - e^x - \dfrac{y^4}{4} = C$.

Cách khác

$$u(x,y) = \int_0^x (x^2 + 2xe^0 - e^x)dx + \int_0^y (x^2e^y - y^3)dy = 0$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - e^x\right)\Bigg|_0^x + \left(x^2e^y - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^y = \frac{x^3}{3} + x^2e^y - e^x - \frac{y^4}{4} + 1.$$

Vậy nghiệm tổng quát là $\dfrac{x^3}{3} + x^2e^y - e^x - \dfrac{y^4}{4} = C$.

VD 9. Cho phương trình vi phân $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (x^2 + 6xy + 3)dy = 0\ (*)$.

1) Chứng tỏ $(*)$ là phương trình vi phân toàn phần.

2) Giải phương trình $(*)$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

VD 10. Giải phương trình vi phân $(2xye^{x^2}+\ln y)dx+\left(e^{x^2}+\dfrac{x}{y}\right)dy=0$, với $y(0)=1$.

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng

$$\boxed{y'+p(x)y=q(x)\ \ (4)}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm liên tục.

Khi $q(x)=0$ thì (4) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 *thuần nhất*.

• Xét phương trình thuần nhất $y'+p(x)y=0$, ta có:

$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx\Rightarrow\ln|y|=-\int p(x)dx\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}.$$

Nhân hai vế của (4) với $e^{\int p(x)dx}$, ta được:

$$y'.e^{\int p(x)dx}+y.p(x).e^{\int p(x)dx}=q(x).e^{\int p(x)dx}\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(y.e^{\int p(x)dx}\right)=q(x).e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow y.e^{\int p(x)dx}=\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx+C\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx+C\right].$$

▪ **Phương pháp giải**

***Bước* 1.** Tìm biểu thức $A(x)=e^{-\int p(x)dx}$.

***Bước* 2.** Tìm biểu thức $B(x)=\displaystyle\int\frac{q(x)}{A(x)}dx$.

***Bước* 3.** Nghiệm tổng quát là $y=A(x)\big[B(x)+C\big]$.

▪ **Chú ý**

• Khi tính các tích phân trên, ta chọn hằng số là 0.
• Phương pháp biến thiên hằng số là đi tìm nghiệm tổng quát của (4) dưới dạng

$$\boxed{y=C(x).e^{-\int p(x)dx}=C(x).A(x)}$$

VD. Trong phương pháp biến thiên hằng số, ta đi tìm nghiệm tổng quát của $y' + 2\dfrac{y}{x} = 4x\ln x$ dưới dạng:

A. $y = \dfrac{C(x)}{x^2}$; B. $y = \dfrac{C(x)}{x^3}$; C. $y = \dfrac{C(x)}{x}$; D. $y = -\dfrac{C(x)}{x}$.

Giải. Ta có: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = C(x)e^{-2\int \frac{dx}{x}} = C(x)e^{\ln x^{-2}} = \dfrac{C(x)}{x^2} \Rightarrow A$.

VD. Giải phương trình vi phân $(4xy - 3)dx + (x^2 + 1)dy = 0$ thỏa điều kiện đầu $y(0) = 1$.

Giải. Phương trình vi phân trở thành $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{x^2+1}y + \dfrac{3}{x^2+1} \Rightarrow y' + \dfrac{4x}{x^2+1}y = \dfrac{3}{x^2+1}$.

Ta có: $p(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$, $q(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$.

$$A(x) = e^{-\int \frac{4x}{x^2+1}dx} = e^{-2\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^2} \text{ và}$$

$$B(x) = \int \frac{q(x)}{A(x)}dx = \int 3(x^2+1)dx = x^3 + 3x.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}(x^3 + 3x + C)$.

Thay điều kiện đầu, ta được nghiệm riêng là $y = \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

VD. Giải phương trình vi phân $y'(x + y^2) = y$.

Giải. Biến đổi $y'(x + y^2) = y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}(x + y^2) = y \Rightarrow \dfrac{x}{y} + y = \dfrac{dx}{dy} \Rightarrow x' - \dfrac{1}{y}.x = y$ $(*)$.

Xem x là hàm, y là biến ta được: $p(y) = -\dfrac{1}{y}$, $q(y) = y$.

Ta có: $A(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} = y$ và $B(y) = \displaystyle\int \frac{q(y)}{A(y)}dy = y$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = y(y + C)$.

VD 11. Giải phương trình vi phân $y' + 3x^2y = 6x^2$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

VD 12. Giải phương trình vi phân $x^2y' + xy = 1$ thỏa điều kiện đầu $y(1) = 2$.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

………
………
………

VD 13. Giải phương trình vi phân $y'\sin x + y\cos x = x\sin(x^2)$.

………
………
………
………
………
………

VD 14. Giải phương trình vi phân $xy'\ln x = y + e^x(x\ln x)^2$, với $y(2) = \ln 2$.

………
………
………
………
………
………
………

2.5. Phương trình vi phân Bernoulli

Phương trình vi phân Bernoulli có dạng

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \ \ (5)}$$

trong đó $0 \neq \alpha \neq 1$, $p(x) \not\equiv 0$ và $q(x) \not\equiv 0$.

- **Phương pháp giải**

***Bước* 1.** Chia hai vế của (5) cho y^α ta được: $\dfrac{y'}{y^\alpha} + p(x)\dfrac{y}{y^\alpha} = q(x) \Rightarrow y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$.

***Bước* 2.** Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$, ta được: $(5) \Rightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$
(đây là phương trình tuyến tính cấp 1 với hàm $z(x)$).

VD. Giải phương trình vi phân $xy' - y = y^2\ln x$.

Giải. Chia 2 vế cho y^2, phương trình vi phân trở thành $y'.y^{-2} - \dfrac{1}{x}y^{-1} = \dfrac{\ln x}{x}$.

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y'y^{-2}$, ta được $z' + \dfrac{1}{x}z = -\dfrac{\ln x}{x}$.

Ta có: $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$.

$$A(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \text{ và } B(x) = \int \frac{q(x)}{A(x)}dx = -\int \ln x\,dx = x - \ln x \Rightarrow z = \frac{1}{x}(x - \ln x + C).$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y = \dfrac{x}{x - \ln x + C}$.

VD. Giải phương trình vi phân $(x^3 \sin y - x)y' + 2y = 0$.

Giải. Biến đổi: $pt \Rightarrow x^3 \sin y + 2y\dfrac{dx}{dy} = x$

$$\Rightarrow 2yx' - x = -x^3 \sin y \Rightarrow x' - \frac{x}{2y} = -x^3 \frac{\sin y}{2y}$$

$$\Rightarrow x'x^{-3} - \frac{1}{2y}.x^{-2} = -\frac{\sin y}{2y}.$$

Đặt $z = x^{-2} \Rightarrow z' = -2x'x^{-3}$.

$$pt \Rightarrow -\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2y}z = -\frac{\sin y}{2y} \Rightarrow z' + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}.$$

$$A(y) = e^{-\int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y},\ B(y) = \int \sin y\, dy = -\cos y.$$

Vậy phương trình có nghiệm $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y}(-\cos y + C)$.

VD 15. Giải phương trình vi phân $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

VD 16. Giải phương trình $\dfrac{3y'}{2} - \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{x+1}{x}y = 0$.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Bài đọc thêm

ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Điểm cân bằng giá

• Xét một loại hàng hóa. Giả sử hàm cầu Q_D và hàm cung Q_S cho bởi:

$$Q_D = a - bP \text{ và } Q_S = -c + dP \ \left(a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+\right).$$

Khi thị trường cân bằng, nghĩa là $Q_D = Q_S$, thì mức giá sẽ là $\overline{P} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

• Trong thực tế thì giá, lượng cung, lượng cầu luôn thay đổi và phụ thuộc vào thời gian t:

$$P = P(t),\ Q_D = Q_D(P(t)),\ Q_S = Q_S(P(t)).$$

• Tại thời điểm khảo sát $t = 0$, mức giá $P(0) \neq \overline{P}$.

Tốc độ tăng hay giảm giá $P'(t)$ tỉ lệ thuận với $Q_D - Q_S$.

Vậy $P'(t) = \lambda\left(Q_D - Q_S\right) = -\lambda(b+d)(P - \overline{P}),\ \lambda > 0$.

Đặt $k = \lambda(b+d) > 0$, ta có phương trình vi phân với biến phân ly $P' = -k(P - \overline{P})$.

Phương trình này có nghiệm tổng quát là $P(t) = \overline{P} + Ce^{-kt}$.

• Do $k > 0$, nên $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \overline{P}$. Vậy theo thời gian, thị trường sẽ tự điều chỉnh giá về mức cân bằng $\overline{P}$.

2. Các ví dụ

VD 1. Cho hàm cung và cầu của một loại hàng hóa:

$$Q_S = -6 + 8P \text{ và } Q_D = 42 - 4P - 4P' + P''.$$

Tại thời điểm $t = 0$, ta có $P(0) = 6$ và $P'(0) = 4$.

Giả sử hàng hóa được bán hết tại mọi thời điểm:

$$Q_D = Q_S \Rightarrow P'' - 4P' - 12P = -48 \text{ (*)}.$$

Giải (*), ta được nghiệm tổng quát:

$$P(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t}$$

và nghiệm riêng $P(t) = e^{-2t} + e^{6t} + 4$.

Do $\lim\limits_{t \to +\infty} = +\infty$, nên ta kết luận giá của mặt hàng này không ổn định theo thời gian.

VD 2. Cho hàm cung và cầu của một loại hàng hóa:

$$Q_S = -5 + 3P \text{ và } Q_D = 40 - 2P - 2P' - P''.$$

Tại thời điểm $t = 0$, ta có $P(0) = 12$ và $P'(0) = 1$.

Giả sử hàng hóa được bán hết tại mọi thời điểm:

$$Q_D = Q_S \Rightarrow P'' + 2P' + 5P = 45 \text{ (**)}.$$

Giải (**), ta được nghiệm tổng quát:

$$P(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 9.$$

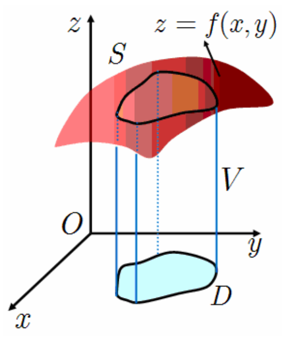
Và nghiệm riêng $P(t) = e^{-t}(3\cos 2t + 2\sin 2t) + 9$.

Do $\lim\limits_{t \to +\infty} = 9$, nên ta kết luận giá của mặt hàng này theo thời gian sẽ tự điều chỉnh về mức $\overline{P} = 9$.

Bài 3. TÍCH PHÂN BỘI HAI CƠ BẢN

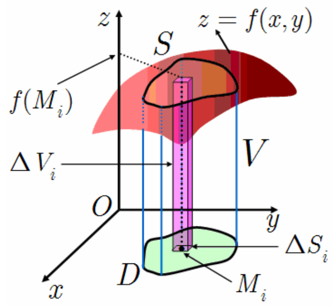
3.1. Bài toán mở đầu

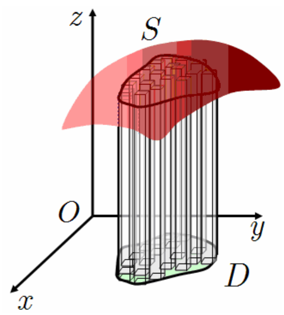
• Xét hàm số $z = f(x,y)$ không âm, liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và có đồ thị là S. Một khối trụ có các đường sinh song song với trục Oz, đáy dưới là miền D và đáy trên giới hạn bởi mặt S.



• Để tính thể tích V của khối trụ, ta chia đáy D thành n phần ΔS_i $(i = 1,\ldots,n)$ không dẫm lên nhau. Diện tích của mỗi phần cũng được ký hiệu là ΔS_i.

Trong mỗi ΔS_i ta lấy điểm $M_i(x_i, y_i)$ tùy ý. Khi đó, khối trụ được chia thành n khối trụ nhỏ ΔV_i có đáy là ΔS_i và chiều cao xấp xỉ $f(M_i)$.





Suy ra thể tích V của khối trụ xấp xỉ $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

Gọi $d_i = \max\left\{ d(A,B) \middle| \; A,B \in \Delta S_i \;\; (i = 1,\ldots,n) \right\}$ là *đường kính* của ΔS_i và đặt $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$.

Nếu ta chia miền D càng mịn, nghĩa là d càng bé, thì $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i$ càng gần với V. Vậy ta có

$$\boxed{V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i}$$

3.2. Tích phân bội hai

3.2.1. Định nghĩa

• Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên miền D đóng và bị chặn trong mặt phẳng Oxy. Ta chia miền D (còn được gọi là phân hoạch miền D) một cách tùy ý thành n phần ΔS_i $(i = 1,\ldots,n)$ không dẫm lên nhau, gọi diện tích mỗi phần là ΔS_i với đường kính tương ứng là d_i. Trong mỗi ΔS_i ta chọn điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$ và gọi

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

là *tổng tích phân* của hàm số $f(x,y)$ trên miền D ứng với phân hoạch miền D và cách chọn điểm M_i như trên.

• Đặt $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Nếu giới hạn

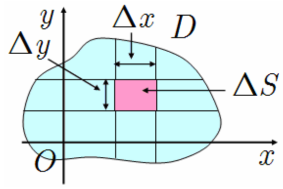
$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào cách phân hoạch miền D và cách chọn điểm M_i thì số thực I được gọi là *tích phân bội hai* (hay *tích phân kép*) của hàm số $f(x,y)$ trên miền D, ký hiệu là

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(x,y)dS}$$

• Xét phân hoạch miền D bởi các đường thẳng song song với Ox, Oy ta được $\Delta S = \Delta x.\Delta y$. Khi $d \to 0$ thì

$$\Delta S \to 0 \text{ và } \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Rightarrow dS = dxdy.$$



Vậy ta có

$$\boxed{I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy}$$

• Nếu tồn tại tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ thì ta nói hàm $f(x,y)$ *khả tích* trên miền D.

3.2.2. Tính chất của tích phân bội hai

Giả thiết rằng các tích phân dưới đây đều tồn tại. Từ định nghĩa, ta có các tính chất sau

1) $\iint\limits_D dxdy = S(D)$ (diện tích của miền D)

2) $\iint\limits_D k.f(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ (k \in \mathbb{R})$

3) $\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

4) Nếu D được chia thành hai miền D_1 và D_2 không dẫm nhau thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

5) Nếu $0 \le f(x,y) \le g(x,y), \forall (x,y) \in D$ thì $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

6) Nếu $\max\limits_D f(x,y) = M$ và $\min\limits_D f(x,y) = m$ thì $m.S(D) \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M.S(D)$.

3.3. Phương pháp tính tích phân bội hai

3.3.1. Định lý Fubini

Giả sử hàm số $f(x,y)$ khả tích trong hình thang cong

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\right\}$$

trong đó $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và với mỗi $x \in [a,b]$ cố định, tích phân $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ tồn tại thì tồn tại tích phân lặp

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx}$$

Tương tự, nếu $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\right\}$ *với* $x_1(y)$, $x_2(y)$ *liên tục trên* $[c,d]$ *và* $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \ \left(y\in[c,d]\right)$ *tồn tại thì*

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy}$$

▪ **Chú ý**

1) Tích phân lặp bội hai thường được viết dưới dạng

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\,,$$

$$\int\limits_c^d\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_c^d\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\,.$$

2) Cận tích phân $a\le x\le b$ hoặc $c\le y\le d$ được gọi là cận cụ thể, cận $x_1(y)\le x\le x_2(y)$ hoặc $y_1(x)\le y\le y_2(x)$ là cận không cụ thể (cận phụ thuộc). Trong tích phân lặp, tích phân có cận không cụ thể được đặt ở giữa (hoặc phía sau) để tính trước và tích phân có cận cụ thể được đưa ra ngoài (hoặc phía trước) để tính sau.

3) Khi tính tích phân $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, ta xem y là hằng số.

Khi tính tích phân $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, ta xem x là hằng số.

▪ **Các trường hợp riêng**

1) Nếu miền D là hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$, nghĩa là

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}, \text{ thì}$$

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)dydx=\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)dxdy}$$

2) Nếu $D=[a,b]\times[c,d]$ và $f(x,y)=u(x).v(y)$ thì

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\left(\int\limits_a^b u(x)dx\right)\times\left(\int\limits_c^d v(y)dy\right)}$$

3) Nếu $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$ với $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(x,y)=u(x).v(y)$ thì

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b u(x)dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} v(y)dy}$$

4) Nếu $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(y) \le x \le x_2(y),\ c \le y \le d\right\}$ với $x_1(y)$, $x_2(y)$ liên tục trên $[c,d]$ và $f(x,y) = u(x).v(y)$ thì

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d v(y)dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} u(x)dx}$$

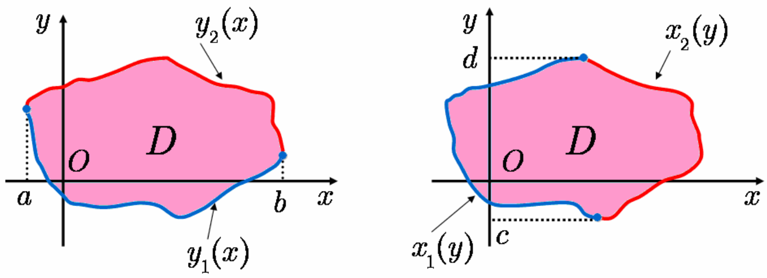
3.3.2. Phương pháp tính

1) Trường hợp miền D đã được biểu diễn như trong định lý thì ta viết thành tích phân lặp rồi tính.

2) Trường hợp miền D chưa được biểu diễn, ta thực hiện như sau

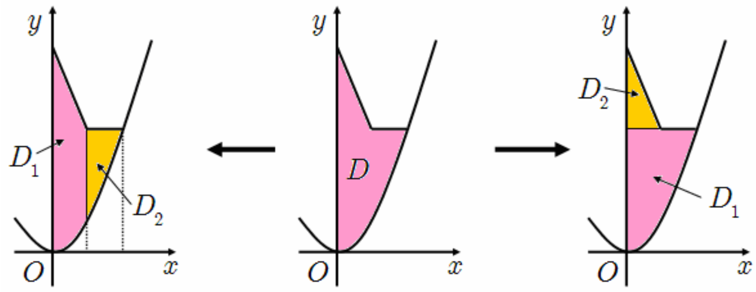
• ***Bước* 1.** Dựa vào phương trình của biên D, ta vẽ và xác định miền D trên mặt phẳng Oxy.

• ***Bước* 2.** Chiếu miền D lên trục Ox hoặc Oy sao cho biên của D được chia thành hai đường cong trơn.



• ***Bước* 3.** Biểu diễn D, viết tích phân thành tích phân lặp rồi tính.

3) Nếu khi chiếu miền D lên cả hai trục Ox và Oy mà biên của D bị chia thành hai đường cong trơn từng khúc thì ta phải chia D ra thành những miền đơn giản hơn.



VD. Tính tích phân $I = \iint\limits_D 2x\cos y\,dxdy$, trong đó $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 \le x \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Giải. Ta có: $I = \left(\int\limits_{-1}^{2} 2x\,dx\right) \times \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy\right) = \left(x^2\Big|_{-1}^{2}\right)\left(\sin y\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \dfrac{6 - 3\sqrt{2}}{2}$.

VD. Tính tích phân $I = \iint\limits_D (2x + y)dxdy$, trong đó $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x \le 1 - y,\ -2 \le y \le 0\}$.

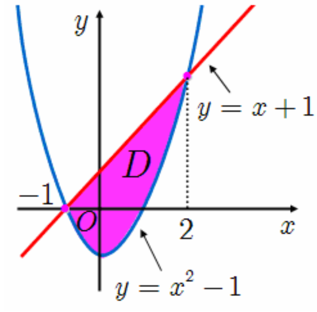
Giải. Ta có: $I = \int\limits_{-2}^{0}\left[\int\limits_{y}^{1-y}(2x + y)dx\right]dy = \int\limits_{-2}^{0}\left((x^2 + xy)\Big|_{y}^{1-y}\right)dy = -\dfrac{4}{3}$.

VD. Đưa $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ về dạng tích phân lặp, biết miền D được giới hạn bởi các đường:

$$y = x + 1 \text{ và } y = x^2 - 1.$$

Giải. Hoành độ giao điểm của $y = x + 1$ và $y = x^2 - 1$ là:

$$x = -1,\ x = 2.$$



Suy ra

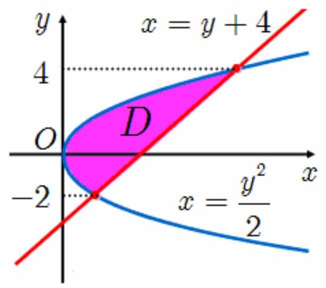
$$D = \{-1 \le x \le 2,\ x^2 - 1 \le y \le x + 1\}.$$

Vậy $I = \int\limits_{-1}^{2} \int\limits_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)\,dy\,dx$.

VD. Tính tích phân $I = \iint\limits_D y\,dxdy$, trong đó miền D được giới hạn bởi các đường:

$$y = x - 4 \text{ và } y^2 = 2x.$$

Giải. Trong hình vẽ bên phải ta thấy rằng, nếu ta chiếu miền D lên Ox thì D bị chia thành hai phần.
Do đó, ta chiếu miền D lên Oy và viết lại phương trình của các đường đã cho là:



$$y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4, \text{ và } y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}.$$

Suy ra $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{y^2}{2} \le x \le y + 4,\ -2 \le y \le 4 \right\}$.

Vậy $I = \int\limits_{-2}^{4} y\,dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dx = \int\limits_{-2}^{4} y\left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)dy = 18$.

VD 1. Tính tích phân $I = \iint\limits_D (x - 3y^2)\,dxdy$, với miền $D = [0,\ 2] \times [1,\ 2]$.

....

....

VD 2. Vẽ miền D và tính $I = \iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, với $D = \{0 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$.

....

....

....

VD 3. Tính $I = \iint\limits_D 2x\,dxdy$, trong đó miền D được giới hạn bởi $y = x + 1$ và $y = x^2 - 1$.

....

....

....

VD 4. Tính $I = \iint\limits_D xy\,dxdy$, biết miền D được giới hạn bởi $y = x - 1$ và $y^2 = 2x + 6$.

....

....

....Hết...