Bài giảng

TOÁN CAO CẤP C1

Lê Văn Lai

Ngày 13 tháng 10 năm 2012

Mục lục

Chương1

GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

1.1 GIẢN YẾU VỀ SỐ THỰC

Tập hợp gồm các số hữu tỷ và vô tỷ được gọi là tập các số thực, được ký hiệu là $\mathbb{R}$.

1.1.1 Tiên đề về sup, inf

Định nghĩa 1.1.1. Cho A là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α được là một *chặn trên* của A nếu $\alpha \geqslant x$ với mọi $x \in A$. Khi A có một chặn trên, ta nói A *bị chặn trên* và khi đó, phần tử nhỏ nhất của tập tất cả các chặn trên, nếu có, được ký hiệu là $\sup A$.

- α được gọi là *phần tử lớn nhất* của A nếu $\alpha \in A$ và $\alpha \geqslant x$ với mọi $x \in A$. Phần tử lớn nhất của A, nếu có, thì duy nhất và được ký hiệu là $\max A$.

- α được gọi là một *chặn dưới* của A nếu $\alpha \leqslant x$ với mọi $x \in A$. Khi A có một chặn dưới, ta nói A *bị chặn dưới* và khi đó, phần tử lớn nhất của tập tất cả các dưới, nếu có, được ký hiệu là $\inf A$.

- α được gọi là *phần tử nhỏ nhất* của A nếu $\alpha \in A$ và $\alpha \leqslant x$ với mọi $x \in A$. Phần tử nhỏ nhất của A, nếu có, thì duy nhất và được ký hiệu là $\min A$.

Mệnh đề 1.1.1. *Cho A là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có*

1. $\alpha = \sup A$ *nếu*

(a) $\forall x \in A : x \leqslant \alpha$, *và*

(b) $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A : \alpha - \epsilon < x$.

2. $\alpha = \inf A$ *nếu*

   (a) $\forall x \in A : x \geqslant \alpha$, *và*

   (b) $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A : \alpha + \epsilon < x$.

Chứng minh. Dùng phản chứng, xem như bài tập. □

Dễ thấy rằng: với A là một tập con khác rỗng bất kỳ của $\mathbb{R}$, thì $\min A$, $\max A$, $\sup A$ và $\inf A$ không luôn luôn tồn tại. Tuy nhiên, ta chấp nhận

Tiên đề về sup. *Mọi tập con không rỗng và bị chặn trên của* $\mathbb{R}$ *đều có chặn trên nhỏ nhất.*

Cho A là tập con của $\mathbb{R}$. Ký hiệu $-A = \{-x | x \in A\}$. Có thể kiểm tra rằng A là tập con không rỗng và bị chặn trên khi A là tập không rỗng và bị chặn dưới. Hơn nữa, nếu $\sup(-A)$ tồn tại thì $\inf A$ tồn tại và $\inf A = -\sup(-A)$. Ta suy ra

Hệ quả về inf. *Mọi tập con không rỗng và bị chặn dưới của* $\mathbb{R}$ *đều có chặn dưới lớn nhất.*

Ví dụ 1.1.1. Cho $A = [1;3), B = (3;\infty), C = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. Ta có

$$\inf A = 1, \sup A = 3, \inf B = 3, \text{ không tồn tại } \sup B.$$

Tập các số nguyên tự nhiên $\mathbb{N}$ được coi là tập con nhỏ nhất của $\mathbb{R}$ thỏa ba tính chất:

1. $1 \in \mathbb{N}$;

2. $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 \in \mathbb{N}$;

3. Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất.

1.1.2 Tính chất Archimède

Định lý 1.1.1. *Cho số thực $b > 0$. Ta có*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, nb > a.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, tức là

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n.b \leqslant a$$

Đặt $S = \{nb | n \in \mathbb{N}\}$. Vì S là tập không rỗng và bị chặn trên của $\mathbb{R}$ nên ta có thể đặt $\alpha = \sup S$. Từ $(n+1)b \leqslant \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ ta suy ra $nb \leqslant \alpha - b, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy $\alpha - b$ là một chặn trên của S và do đó, $\alpha - b > \alpha$, vô lý. □

Đặc biệt, với $a = x \in \mathbb{R}, b = 1$ và $a = 1, b = \epsilon > 0$, ta nhận được hệ quả thường dùng:

Hệ quả 1.1.1. *1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$.*

2. $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n} < \epsilon$.

1.1.3 Đẳng thức và bất đẳng thức thường dùng

Với $x \in \mathbb{R}$, giá trị tuyệt đối của x, ký hiệu là $|x|$, được xác định như sau

$$|x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geqslant 0; \\ -x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

Mệnh đề 1.1.2. *1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 0$ và $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$;*

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$;

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leqslant |x| + |y|$;

Chứng minh. Xem như bài tập. □

Tiếp theo, ta nhắc lại hai đẳng thức đáng nhớ

Mệnh đề 1.1.3. *Với mọi số tự nhiên n,*

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, *trong đó* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;

2. $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$.

Cuối cùng, ta nhắc lại các bất đẳng thức đã gặp trong chương trình phổ thông

Mệnh đề 1.1.4. Bất đẳng thức Cauchy : *Với hai số thực a, b bất kỳ, ta có*

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab.$$

Bất đẳng thức Schwartz : *Với bốn số thực a, b, c và d bất kỳ, ta có*

$$(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2).$$

Bất đẳng thức Bernoulli : *Với $a \geqslant -1$, ta có*

$$(1+a)^n \geqslant 1+na, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh. Xem như bài tập. □

1.1.4 Tập số thực mở rộng

Trong nhiều trường hợp, để thuận lợi trong khảo sát, người ta bổ sung vào $\mathbb{R}$ hai phần tử, ký hiệu là $-\infty$ và ∞, để nhận được *tập số thực mở rộng* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Các phép toán và quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$ được mở rộng qua $\overline{\mathbb{R}}$ như sau :

$$\begin{aligned}
-\infty < x &< +\infty, \\
x + (\pm\infty) &= \pm\infty, \\
\pm\infty + (\pm\infty) &= \pm\infty, \\
x \times (\pm\infty) &= \begin{cases} \pm\infty, & x > 0 \\ \mp\infty, & x < 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(\pm\infty)\times(\pm\infty) = +\infty,$$
$$(\pm\infty)\times(\mp\infty) = -\infty,$$

với $x \in \mathbb{R}$.

Do không nới rộng khoảng cách giữa hai số thực qua khoảng cách giữa một số thực với các phần tử $\pm\infty$ hay giữa $-\infty$ và $+\infty$, người ta đưa ra khái niệm lân cận như sau :

- Với $x \in \mathbb{R}$ khoảng $(x-\delta; x+\delta)$ với $\delta > 0$ được gọi là $\delta-$ lân cận của x.
- Các tập $(\delta; +\infty)$ và $(-\infty; \delta)$ lần lượt được gọi là $\delta-$ lân cận của $+\infty$ và $-\infty$.

1.2 BỔ TÚC VỀ HÀM SỐ

1.2.1 Khái niệm hàm số

Định nghĩa 1.2.1. Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$. Quy tắc f làm tương ứng mỗi phần tử $x \in D$ với một và chỉ một phần tử $y \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số với một biến số thực.

Hàm số f như vậy thường được viết là

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

Trong đó,

- D được gọi là miền xác định của hàm f, và để rõ ràng hơn trong một vài ngữ cảnh, ta viết D_f thay cho D;
- y được gọi là giá trị của hàm f tại x, ký hiệu $y = f(x)$;
- miền giá trị của hàm f được ký hiệu là R_f,
$$R_f = \{f(x) | x \in D\};$$
- tập hợp $\{(x; y) | x \in D, y = f(x)\}$ được gọi là đồ thị của hàm f.

1.2.2 Một số tính chất của hàm số

Hàm $1-1$

Nếu với mỗi $y \in R_f$ mà tồn tại duy nhất phần tử $x \in D$ sao cho $y = f(x)$ thì ta nói f là hàm $1-1$.

Hàm đơn điệu

Định nghĩa 1.2.2. Cho hàm số $f(x)$ và I là một khoảng chứa trong miền xác định của f.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm tăng* trên I nếu

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm giảm* trên I nếu

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- Hàm tăng và hàm giảm trên I được gọi chung là *hàm đơn điệu* trên I.

Hàm chẵn, hàm lẻ

Định nghĩa 1.2.3. Xét hàm $f(x)$ có miền xác định D đối xứng qua gốc tọa độ O, nghĩa là nếu x thuộc D thì $-x$ cũng thuộc D. Khi đó,

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm chẵn nếu

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x);$$

- Hàm $f(x)$ được gọi là hàm lẻ nếu

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x).$$

Hàm tuần hoàn

Định nghĩa 1.2.4. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số dương T sao cho

$$\forall x \in D, (x \pm T \in D \text{ và } f(x+T) = f(x)).$$

Số dương T nhỏ nhất nếu có được gọi là chu kỳ tuần toàn của $f(x)$.

1.2.3 Hàm số ngược

Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm $1-1$ thì với mỗi $y \in R_f$, tồn tại duy nhất $x \in D$ sao cho $f(x) = y$. Do đó, ta có

Định nghĩa 1.2.5. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm $1-1$. Quy tắc làm tương ứng mỗi $y \in R_f$ với $x \in D$ sao cho $f(x) = y$ là một hàm số, và ta gọi đó là hàm ngược của hàm $y = f(x)$, ký hiệu là $x = f^{-1}(y)$.

Theo thói quen, ta dùng chữ x để chỉ biến số và chữ y để chỉ giá trị của hàm tại x nên hàm ngược của $y = f(x)$ được viết là $y = f^{-1}(x)$. Khi ấy, nếu điểm $(x; y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $(y; x)$ thuộc đồ thị hàm ngược $y = f^{-1}(x)$. Vì hai điểm $(x; y)$ và $(y; x)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$ nên suy ra đồ thị hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua đường $y = x$.

1.2.4 Hàm số hợp

Định nghĩa 1.2.6. Cho hai hàm số

$$\begin{aligned} f : D_f &\longrightarrow R_f, \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} g : D_g &\longrightarrow R_g, \\ y &\longmapsto z = g(y). \end{aligned}$$

trong đó, R_f là tập con của D_g. Mỗi $x \in A$, qua f sẽ có một và chỉ một $y \in R_f$ sao cho $f(x) = y$; và với y này, qua g, sẽ có một và chỉ một $z \in R_g$ sao cho $g(y) = z$. Quy tắc làm tương ứng mỗi $x \in A$ với một và chỉ một $z \in R_g$ như trên được gọi là hàm số hợp của g và f, được ký hiệu $g \circ f$. Vậy

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \forall x \in D_f.$$

1.2.5 Hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sau đây được gọi là hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm lũy thừa $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Miền xác định của hàm lũy thừa phụ thuộc vào α. Cụ thể:

- Nếu $\alpha \in \mathbb{N}$ thì miền xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Nếu α là số nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ thì miền xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Nếu α không nguyên thì miền xác định của hàm số là $(0; +\infty)$.

Hàm mũ $y = a^x, 0 < a \neq 1$

Số a được gọi là cơ số của hàm số mũ. Hàm $y = a^x$ có miền xác định là $\mathbb{R}$, tăng khi $a > 1$, và giảm khi $a < 1$.

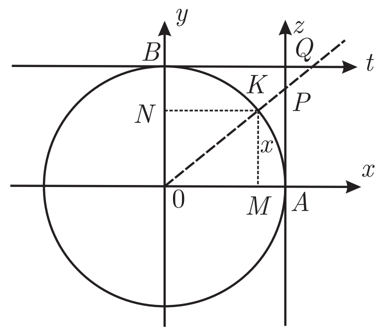
Hàm logarit $y = \log_a x, 0 < a \neq 1$

Là hàm ngược của hàm $y = a^x$. Số a được gọi là cơ số của hàm số logarit $y = \log_a x$. Hàm số logarit $y = \log_a x$ có miền xác định là $(0; +\infty)$, tăng khi $a > 1$, và giảm khi $a < 1$.

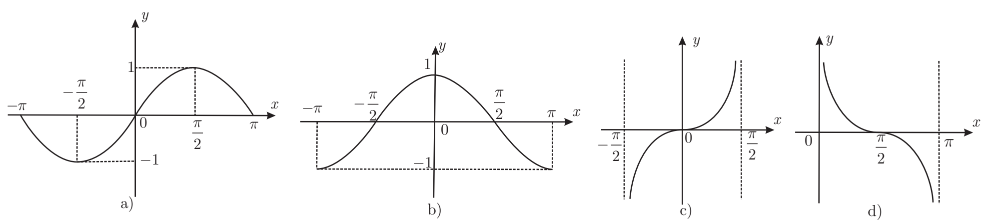
Các hàm lượng giác

Các hàm lượng giác $y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ được định nghĩa như sau, xem hình 1.1:

$$\cos x = \overline{OM}; \sin x = \overline{ON}; \tan x = \overline{AP}; \cot x = \overline{BQ}.$$



Hình 1.1: Định nghĩa các hàm lượng giác



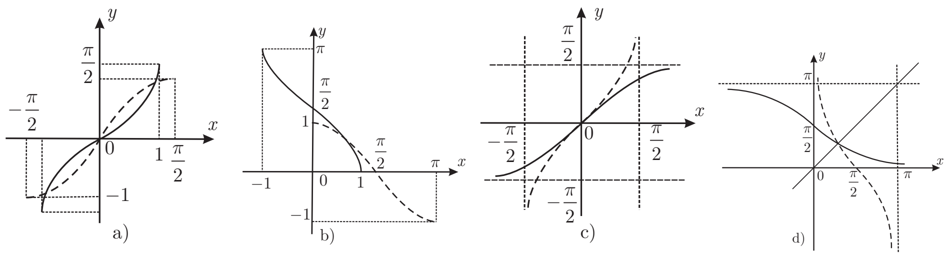
Hình 1.2: Đồ thị các hàm lượng giác

1. Hàm $y = \sin x$ có miền xác định là $\mathbb{R}$ và miền giá trị là $[-1; 1]$. Đó là một hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π. Đồ thị của hàm $y = \sin x$ trên $[-\pi; \pi]$ được cho bởi hình 1.2.a.

2. Hàm $y = \cos x$ có miền xác định là $\mathbb{R}$ và miền giá trị là $[-1; 1]$. Đó là một hàm chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π. Đồ thị của hàm $y = \cos x$ trên $[-\pi; \pi]$ được cho bởi hình 1.2.b

3. Hàm $y = \tan x$ xác định tại mọi $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, và miền giá trị là $\mathbb{R}$. Đó là một hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π. Đồ thị của hàm $y = \tan x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ được cho bởi hình 1.2.c.

4. Hàm $y = \cot x$ xác định tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, và miền giá trị là $\mathbb{R}$. Đó là một hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π. Đồ thị của hàm $y = \cot x$ trên $(0; \pi)$ được cho bởi hình 1.2.d.



Hình 1.3: Đồ thị các hàm lượng giác ngược

Các hàm lượng giác ngược

1. **Hàm arcsin.** Hàm số sin : $\mathbb{R} \to [-1;1]$ không là hàm 1 - 1 nhưng khi ta hạn chế miền xác định thành $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì sin : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$ là hàm 1 - 1. Khi đó, tồn tại hàm số ngược của hàm sin, ký hiệu arcsin,

$$\arcsin : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Ta có

$$\boxed{\begin{cases} y = \arcsin x, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

Tính chất: Với mọi $x \in [-1;1]$ ta có

(a) $\sin(\arcsin x) = x$

(b) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

Đồ thị: Hàm $y = \arcsin x$ có đồ thị là đường liền nét trong hình 1.3.a.

2. **Hàm arccos.** Tương tự, hàm số cos : $[0;\pi] \to [-1;1]$ là hàm 1 - 1 nên có hàm ngược, ký hiệu là arccos,

$$\cos : [-1;1] \to [0;\pi].$$

Ta có

$$\boxed{\begin{cases} y = \arccos x, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x, \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}}$$

Tính chất: Với mọi $x \in [-1;1]$ ta có

(a) $\cos(\arccos x) = x$,

(b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,

(c) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Đồ thị: Hàm $y = \arccos x$ có đồ thị là đường liền nét trong hình 1.3.b.

3. **Hàm arctan.** Hàm số $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty; \infty)$ là hàm 1 - 1 nên có hàm ngược, ký hiệu là arctan,

$$\arctan : (-\infty; \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có

$$\boxed{\begin{cases} y = \arctan x, \\ -\infty < x < \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan y = x, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Tính chất: Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

(a) $\tan(\arctan x) = x$,

(b) $\arctan(-x) = -\arctan x$.

Đồ thị: Hàm $y = \arctan x$ có đồ thị là đường liền nét trong hình 1.3.c.

4. **Hàm arccot.** Hàm số $\cot : (0; \pi) \to (-\infty; \infty)$ là hàm 1 - 1 nên có hàm ngược, ký hiệu là arccot,

$$\operatorname{arccot} : (-\infty; \infty) \to (0; \pi).$$

Ta có

$$\boxed{\begin{cases} y = \operatorname{arccot} x, \\ -\infty < x < \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot y = x, \\ 0 < y < \pi. \end{cases}}$$

Tính chất: Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

(a) $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$,

(b) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$,

(c) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.

Đồ thị: Hàm $y = \operatorname{arccot} x$ có đồ thị là đường liền nét trong hình 1.3.d.

1.2.6 Hàm số sơ cấp

Định nghĩa 1.2.7. Cho hai hàm f, g có miền xác định lần lượt là D_f và D_g ta định nghĩa các hàm tổng, hiệu, tích và thương của f và g như sau:

- Tổng của f và g, ký hiệu là $f + g$, là hàm số có miền xác định là $D = D_f \cap D_g$ và
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D.$$

- Hiệu của f và g, ký hiệu là $f - g$, là hàm số có miền xác định là $D = D_f \cap D_g$ và
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \forall x \in D.$$

- Tích của f và g, ký hiệu là $f.g$, là hàm số có miền xác định là $D = D_f \cap D_g$ và
$$(f.g)(x) = f(x).g(x), \forall x \in D.$$

- Thương của f và g, ký hiệu là $\frac{f}{g}$, là hàm số có miền xác định là $D = \{x \in D_f \cap D_g | \quad g(x) \neq 0\}$ và
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D.$$

Định nghĩa 1.2.8. Hàm số được tạo thành từ các hàm sơ cấp cơ bản bởi các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và phép hợp nối hàm số được gọi là hàm số sơ cấp.

1.3 DÃY SỐ

1.3.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.3.1. Hàm số $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được gọi là dãy số. Ta viết x_n thay cho $x(n)$ và dãy số $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được ký hiệu là $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hay ngắn gọn là (x_n). Với dãy (x_n) thì x_n được gọi là số hạng tổng quát hay số hạng thứ n của dãy.

Ví dụ 1.3.1. 1. $(n^2 + 1)$ là một dãy số;

2. $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ là một dãy số;

3. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ là một dãy số;

4. $\dfrac{1}{n^\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ là một dãy số.

Định nghĩa 1.3.2. Cho dãy số (x_n).

- Dãy (x_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số $M \in \mathbb{R}$ sao cho
$$x_n \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}.$$
- Dãy (x_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số $m \in \mathbb{R}$ sao cho
$$x_n \geqslant m, \forall n \in \mathbb{N}.$$
- Dãy (x_n) vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là dãy bị chặn.
- Dãy mà tất cả các số hạng bằng nhau được gọi là dãy số hằng.

Ví dụ 1.3.2. 1. $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ bị chặn trên bởi 1 và bị chặn dưới bởi 0 nên bị chặn;

2. (n^2+1) là một dãy số bị chặn dưới bởi 0 và không bị chặn trên;

1.3.2 Dãy số hội tụ

Định nghĩa 1.3.3. Dãy số (x_n) được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại số $a \in \mathbb{R}$ sao cho
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |x_n - a| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Khi ấy,

- ta nói dãy (x_n) hội tụ về a và a được gọi là giới hạn của dãy (x_n);

- và ta viết
$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$
hay
$$x_n \to a \text{ khi } n \to \infty.$$

Ví dụ 1.3.3. Xét dãy $\left(\frac{1}{n}\right)$. Cho $\epsilon > 0$, tùy ý. Theo tính chất Archimède, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_0.\epsilon > 1$. Suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$ thì $n.\epsilon > 1$, hay
$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$
Nghĩa là
$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_{0,} \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$
Vậy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Tính chất của giới hạn dãy số

Định lý 1.3.1. *Nếu dãy (x_n) hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử $x_n \to x$ và $x_n \to y$ khi $n \to \infty$. Ta chứng tỏ $x = y$. Nếu ngược lại, nghĩa là $x \neq y$, thì với $\epsilon = \frac{|x-y|}{2} > 0$ tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho
$$\forall n \geqslant n_1, |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ và } \forall n \geqslant n_2, |x_n - y| < \frac{\epsilon}{2}.$$
Đặt $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Với mọi $n \geqslant n_3$ ta có
$$|x - y| \leqslant |x_n - x| + |x_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = \frac{|x-y|}{2}.$$
Suy ra $\frac{|x-y|}{2} < 0$, vô lý. Vậy $x = y$. □

Định lý 1.3.2. *Nếu dãy (x_n) hội tụ thì nó bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử $x_n \to x$ khi $n \to \infty$. Với $\epsilon = 1$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho
$$|x_n - x| < 1, \forall n \geqslant n_0,$$
suy ra
$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x|, \forall n \geqslant n_0.$$
Do đó nếu ta đặt $M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, 1 + |x|)$ thì $|x_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$. Vậy (x_n) bị chặn. □

Hệ quả 1.3.1. *Nếu (x_n) không bị chặn thì nó không hội tụ.*

Quy tắc tính giới hạn dãy số

Định lý 1.3.3. *Nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$ khi $n \to \infty$ thì*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$;
4. *Khi* $y \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$.

Chứng minh. 1. Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ nên với $\epsilon > 0$ tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geqslant n_1 \text{ và } |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geqslant n_2.$$

Suy ra

$$|x_n + y_n - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall n \geqslant \max(n_1, n_2).$$

2. Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nên với $\epsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + 1}, \forall n \geqslant n_0.$$

Suy ra

$$|\alpha x_n - \alpha x| = |\alpha||x_n - x| < |\alpha|\frac{\epsilon}{|\alpha| + 1} < \epsilon, \forall n \geqslant n_0.$$

3. Theo giả thiết (x_n) hội tụ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|x_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$. Hơn nữa, với $\epsilon > 0$ tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{M + |x|}, \forall n \geqslant n_1 \text{ và } |y_n - y| < \frac{\epsilon}{M + |x|}, \forall n \geqslant n_2.$$

Suy ra với mọi $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$|x_n y_n - xy| \leqslant |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| < M\frac{\epsilon}{M + |x|} + |x|\frac{\epsilon}{M + |x|} = \epsilon.$$

4. Vì $y_n \to y$ khi $n \to \infty$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|y_n - y| < \frac{|y|}{2}, \forall n \geqslant n_0.$$

Suy ra

$$|y_n| - |y| > -\frac{|y|}{2}, \forall n \geqslant n_0$$

hay

$$|y_n| > \frac{|y|}{2}, \forall n \geqslant n_0. \tag{1.2}$$

Mặt khác, do $x_n \to x$ và $y_n \to y$ khi $n \to \infty$ nên với $\epsilon > 0$ tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \epsilon.\frac{y^2}{2(|x| + |y|)}, \forall n \geqslant n_1 \tag{1.3}$$

và

$$|y_n - y| < \epsilon.\frac{y^2}{2(|x| + |y|)}, \forall n \geqslant n_2. \tag{1.4}$$

Từ (1.2), (1.3) và (1.4), với $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2)$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{(x_n - x)y - x(y_n - y)}{y_n y}\right| \\
&\leqslant \frac{|(x_n - x)y| + |x(y_n - y)|}{|y_n||y|} \\
&\leqslant \frac{2}{y^2}\left(|(x_n - x)y| + |x(y_n - y)|\right) \\
&\leqslant \frac{2}{y^2}\epsilon.\frac{y^2}{2(|x| + |y|)}(|x| + |y|) = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

So sánh giới hạn dãy số

Định lý 1.3.4. *Nếu (x_n) hội tụ và $x_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$.*

Suy ra, nếu (x_n), (y_n) hội tụ và $x_n \geqslant y_n, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Chứng minh. Đặt $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Nếu $x < 0$ thì với $\epsilon = -\frac{x}{2} > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_{n_0} - x| < -\frac{x}{2},$$

suy ra

$$x_{n_0} < x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} < 0,$$

vô lý.

Ta có

$$x_n \geqslant y_n, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n - y_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mà

$$\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n)$$

nên suy ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□

Định lý 1.3.5 (Tính chất kẹp). *Nếu ba dãy số (x_n), (y_n) và (z_n) thỏa*

1. $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *và*

2. $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n$

thì $\lim_{n\to\infty} y_n = a$

Chứng minh. Vì $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n$ nên với $\epsilon > 0$ tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ ta có

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ và } |z_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Do đó, với mọi $n \geqslant n_0$,

$$|y_n - a| \leqslant |x_n - a| + |z_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Ví dụ 1.3.4. Với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Mà $-\frac{1}{n} \to 0$ và $\frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Mở rộng khái niệm hội tụ của dãy số

Định nghĩa 1.3.4. Dãy (x_n) được gọi là hội tụ về $+\infty$ khi $n \to \infty$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, nếu

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, x_n > M.$$

Tương tự, dãy (x_n) được gọi là hội tụ về $-\infty$ khi $n \to \infty$, ký hiệu $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, nếu

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, x_n < -M.$$

Chú ý 1.3.1. Với sự mở rộng này thì định lý 1.3.3 vẫn còn đúng miễn là các giới hạn không có dạng $\infty - \infty, 0.\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Một số giới hạn thường gặp

Định lý 1.3.6. *Ta có một số giới hạn thường gặp:*

1. $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0,$
2. $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1,$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
4. $\forall p \in \mathbb{R}, p > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0,$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 : \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0,$

Chứng minh. 1. Với $\epsilon > 0$, chọn $n_0 = \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{p}} + 1$ thì với mọi $n \geqslant n_0$ ta có $\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n_0^p} < \epsilon$.

2. Chia hai trường hợp.

   (a) Trường hợp $p > 1$. Đặt $x_n = \sqrt[n]{p} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có $x_n \geqslant 0$ và

   $$p = (1 + x_n)^n \geqslant C_n^1 x_n = n x_n.$$

   Suy ra

   $$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{p}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Do đó, theo tiêu chuẩn kẹp, $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

(b) Nếu $p = 1$ thì hiển nhiên. Xét $0 < p < 1$. Nếu đặt $q = \frac{1}{p}$ thì $q > 1$. Theo trường hợp trên thì $\sqrt[n]{q} \to 1$, do đó $\sqrt[n]{p} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{q}} \to 1$.

3. Vì $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$ nên

$$n = (1 + x_n)^n \geqslant C_n^2 x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2, \forall n \geqslant 2.$$

Suy ra

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}, \forall n \geqslant 2.$$

Do tiêu chuẩn kẹp và giới hạn ở 1, $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. Ta có $x_n = \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Mặt khác, nếu chọn $k \geqslant [\alpha] + 1$ thì với mọi $n \geqslant k$ ta có

$$(1+p)^n \geqslant C_n^k p^k = \frac{p^k}{k!} n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Suy ra, với mọi $n \geqslant k$ ta có

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{k!}{p^k} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{1-\frac{2}{n}} \cdots \frac{1}{1-\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n^{k-\alpha}},$$

Theo giới hạn ở 1 thì

$$\frac{k!}{p^k} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{1-\frac{2}{n}} \cdots \frac{1}{1-\frac{k-1}{n}} \frac{1}{n^{k-\alpha}} \to 0.$$

Áp dụng tính chất kẹp, $x_n \to 0$.

5. Nếu $x = 0$ thì hiển nhiên $x^n \to 0$. Khi $x \neq 0$, tồn tại $p > 0$ sao cho $|x| = \dfrac{1}{1+p}$, và do giới hạn ở 4, ta có

$$|x^n - 0| = |x|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \to 0$$

khi $n \to \infty$.

$\square$

1.3.3 Dãy đơn điệu

Định nghĩa 1.3.5. Dãy số (x_n) được gọi là dãy số *đơn điệu tăng* nếu với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \leqslant x_{n+1}.$$

Dãy số (x_n) được gọi là dãy số *đơn điệu giảm* nếu với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \geqslant x_{n+1}.$$

Dãy số đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm được gọi tắt là *dãy số đơn điệu*.

Nhận xét 1.3.1. Nếu (x_n) là dãy số đơn điệu tăng thì (x_n) bị chặn khi và chỉ khi (x_n) bị chặn trên. Tương tự, nếu (x_n) là dãy số đơn điệu giảm thì (x_n) bị chặn khi và chỉ khi (x_n) bị chặn dưới.

Định lý 1.3.7. *Mọi dãy số đơn điệu và bị chặn đều là dãy số hội tụ.*

Chứng minh. Xét dãy (x_n) tăng và bị chặn trên. Đặt $x = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Với $\epsilon > 0$ ta có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x - \epsilon < x_{n_0} \leqslant x$. Khi ấy, vì (x_n) tăng nên với mọi $n \geqslant n_0$ ta có

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant x < x + \epsilon,$$

suy ra $|x_n - x| < \epsilon$.

Khi (x_n) giảm và bị chặn dưới thì $(-x_n)$ tăng và bị chặn trên nên là dãy hội tụ. Do đó, (x_n) cũng là dãy hội tụ và giới hạn của dãy chính là $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. □

Ví dụ 1.3.5. Xét tính hội tụ của dãy (x_n) với $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Giải. Rõ ràng $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Mà

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right]^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \frac{n+2}{n+1} \\
&\geqslant \left[1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right] \frac{n+2}{n+1} \\
&\geqslant \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1.
\end{aligned}$$

nên (x_n) là dãy số tăng.

Tiếp theo, ta chứng tỏ (x_n) bị chặn trên và do đó dãy hội tụ. Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 3-\frac{1}{n} < 3.\end{aligned}$$

Vậy tồn tại giới hạn của dãy số $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Định nghĩa 1.3.6.

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Người ta tính được $\mathrm{e} \approx 2,718281828\dots$.

1.3.4 Dãy con

Cho hàm tăng $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nếu đặt $n_k = f(k)$ thì (n_k) là dãy tăng các số nguyên tự nhiên.

Định nghĩa 1.3.7. Cho dãy số (x_n). Dãy (y_k) xác định như sau

$$y_k = x_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

được gọi là dãy con của dãy (x_n) và được ký hiệu là (x_{n_k}).

Nhận xét 1.3.2. Dãy (x_n) là dãy con của chính nó. Hơn nữa, từ định nghĩa, ta suy ra mọi dãy con của một dãy bị chặn thì bị chặn cũng như mọi dãy con của một dãy đơn điệu cũng là dãy đơn điệu.

Định lý 1.3.8. *Dãy (x_n) hội tụ khi và chỉ khi mọi dãy con của nó đều là dãy hội tụ và có chung một giới hạn.*

Chứng minh. Chiều đảo của định lý là hiển nhiên vì (x_n) là dãy con của chính nó. Ta chứng minh chiều thuận của định lý. Giả sử $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Xét dãy con (x_{n_k}) của (x_n). Bằng quy nạp, ta có $n_k \geqslant k, \forall k \in \mathbb{N}$. Với $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \epsilon, \forall n \geqslant n_0.$$

Suy ra với mọi $k \geqslant n_0$ ta có

$$\left|x_{n_k} - x\right| < \epsilon,$$

nghĩa là $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. □

Ví dụ 1.3.6. Dãy số (x_n) với $x_n = (-1)^n$ có hai dãy con (x_{2k}) và (x_{2k+1}). Vì $x_{2k} = 1 \to 1$ và $x_{2k+1} = -1 \to -1$ nên (x_n) không hội tụ.

Định lý 1.3.9. *Mọi dãy đều có ít nhất một dãy con đơn điệu.*

Chứng minh. Với dãy (x_n), xét tập

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n, x_m \geqslant x_n\}.$$

Ta có hai trường hợp :

1. A có vô số phần tử: ta định nghĩa dãy (n_k) như sau
$$\begin{cases} n_1 = \min A, \\ n_{k+1} = \min A \backslash \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}, \end{cases}$$
thì (n_k) tăng ngặt và $x_{n_k} \leqslant x_{n_{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}$.
2. $A = \varnothing$ hoặc A có hữu hạn phần tử: khi đó tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho
$$\forall n \geqslant n_1, \exists m > n, x_m < x_n.$$
Đặt
$$n_{k+1} = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > n_k \text{ và } x_m < x_{n_k}\}, k \in \mathbb{N}.$$
Ta có (n_k) tăng ngặt và $x_{n_k} > x_{n_{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}$.

□

Bây giờ xét dãy (x_n) bị chặn. Theo định lý 1.3.9, (x_n) có dãy con (x_{n_k}) đơn điệu. Vì (x_{n_k}) cũng là dãy bị chặn nên là dãy hội tụ theo định lý 1.3.7. Và ta có định lý:

Định lý 1.3.10 (Bolzano - Weierstrass). *Mọi dãy bị chặn đều có ít nhất một dãy con hội tụ.*

1.4 GIỚI HẠN HÀM SỐ

1.4.1 Khái niệm giới hạn hàm số

Định nghĩa 1.4.1 (điểm tụ). Cho D là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta nói α là điểm tụ của D nếu trong mọi $\epsilon-$ lân cận của α đều có phần tử khác α của D, nghĩa là,

$$\forall \epsilon > 0, (\alpha - \epsilon; \alpha + \epsilon) \cap (D \backslash \{\alpha\}) \neq \varnothing.$$

Ta nói α là điểm cô lập của D nếu tồn tại $\delta-$ lân cận của α sao cho mọi điểm thuộc lân cận này không thuộc D, ngoại trừ α, nghĩa là

$$\exists \delta > 0, (\alpha - \delta; \alpha + \delta) \cap D = \{\alpha\}.$$

Mệnh đề 1.4.1. *Số thực $\alpha \in \mathbb{R}$ là điểm tụ của D nếu và chỉ nếu có một dãy $(x_n) \subset D \backslash \{\alpha\}$ sao cho $x_n \to \alpha$.*

Chứng minh. Chiều thuận. Lấy dãy (ϵ_n) dương và giảm về 0. Trong ϵ_1- lân cận của α tồn tại $x_1 \in D\backslash\{\alpha\}$. Trong ϵ_2- lân cận của α tồn tại $x_2 \in D\backslash\{\alpha, x_1\}$. Rồi trong ϵ_3- lân cận của α tồn tại $x_3 \in D\backslash\{\alpha, x_1, x_3\}$. Tiếp tục như vậy ta có dãy $(x_n) \subset D$ sao cho $|x_n - \alpha| < \epsilon_n \to 0$, nghĩa là $x_n \to \alpha$.

Chiều đảo. Giả sử có dãy $(x_n) \subset (D\backslash\{\alpha\}), x_n \to \alpha$. Với $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 < |x_n - \alpha| < \epsilon, \forall n \geqslant n_0,$$

suy ra

$$(\alpha - \epsilon; \alpha + \epsilon) \cap (D\backslash\{\alpha\}) \neq \varnothing.$$

Vậy α là điểm tụ của D. □

Định nghĩa 1.4.2. Cho $f : D \to \mathbb{R}$ và α là điểm tụ của D. Ta nói số thực β là giới hạn của f khi x tiến tới α nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, (0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - \beta| < \epsilon).$$

Khi đó ta viết $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$.

Định lý 1.4.1. *Cho $f : D \to \mathbb{R}$ và α là điểm tụ của D. Số thực β là giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới α nếu và chỉ nếu*

$$\forall (x_n) \subset (D\backslash\{\alpha\}), (x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n) \to \beta).$$

Chứng minh. Giả sử ta có $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, nghĩa là

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D, (0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - \beta| < \epsilon).$$

Xét dãy $(x_n) \subset (D\backslash\{\alpha\}), x_n \to \alpha$. Với $\delta > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - \alpha| < \delta, \forall n \geqslant n_0$$

và do đó

$$|f(x_n) - \beta| < \epsilon, \forall n \geqslant n_0.$$

Vậy $f(x_n) \to \beta$ khi $n \to \infty$.

Ngược lại, giả sử ta có

$$\forall (x_n) \subset (D\backslash\{\alpha\}), (x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n) \to \beta)$$

nhưng

$$\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x \in D, (0 < |x - \alpha| < \delta) \text{ và } |f(x) - \beta| \geqslant \epsilon.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta chọn $\delta = \frac{1}{n}$ khi đó tồn tại $x_n \in (D\backslash\{\alpha\})$ sao cho

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{n} \text{ và } |f(x_n) - \beta| \geqslant \epsilon.$$

Như vậy ta có $(x_n) \subset (D\backslash\{\alpha\}), x_n \to \alpha$ nhưng $f(x_n) \nrightarrow \beta$. Vô lý. □

Ví dụ 1.4.1. Xét hàm $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Miền xác định của $f(x)$ là $D_f = \mathbb{R}$. Rõ ràng $\alpha = 0$ là một điểm tụ của D_f. Với dãy $(x_n) \subset (D_f\backslash\{0\}), x_n \to 0$, ta có

$$f(x_n) = x_n^2 + 2x_n + 3 \to 0^2 + 2.0 + 3 = 3.$$

Vậy $\lim_{x\to 0} x^2 + 2x + 3 = 3$

Ví dụ 1.4.2. Xét hàm $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Miền xác định của $f(x)$ là $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Rõ ràng $\alpha = 0$ là một điểm tụ của D_f. Trong D_f ta có dãy $(x_n), x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \to 0$ và $(x_n'), x_n' = \frac{1}{n\pi} \to 0$ nhưng khi $n \to +\infty$ thì

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$$

và

$$f(x_n') = \sin\frac{1}{x_n'} = \sin n\pi = 0 \to 0.$$

Vậy không tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại 0.

1.4.2 Tính chất giới hạn hàm số

Từ định nghĩa 1.4.3 và tính chất của dãy số hội tụ ta có các tính chất sau:

Định lý 1.4.2. *Nếu hàm $f(x)$ có giới hạn tại α thì giới hạn đó là duy nhất.*

Định lý 1.4.3. *Nếu $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$ và $\lim_{x\to\alpha} g(x) = b$ thì*

1. $\lim_{x\to\alpha} k.f(x) = k.a, k \in \mathbb{R}$;
2. $\lim_{x\to\alpha}[f(x) + g(x)] = a + b$;
3. $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = ab$;
4. $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Đối với hàm hợp, ta có

Định lý 1.4.4. *Cho D_1, D_2 là hai tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ và α là điểm tụ của D_1. Xét hàm số $f : D_1 \to D_2$ và $g : D_2 \to \mathbb{R}$. Nếu $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ và $\lim_{y\to\beta} g(y) = \gamma$ thì $\lim_{x\to\alpha} g \circ f(x) = \gamma$.*

Chứng minh. Xét dãy tùy ý $(x_n) \subset (D_1 \backslash \{\alpha\}), x_n \to \alpha$. Vì $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ nên $f(x_n) \to \beta$. Và do $\lim_{y\to\beta} g(y) = \gamma$ nên

$$g \circ f(x_n) = g\,[f(x_n)] \to \gamma.$$

Vậy $\lim_{x\to\alpha} g \circ f(x) = \gamma$. □

Ví dụ 1.4.3. Vì

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 1, \\ \lim_{y\to 1} y^{2006} + 2 = 3 \end{cases}$$

nên

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 1)^{2006} + 2 = 3.$$

Từ định lý 1.3.4 và 1.3.5, ta có

Định lý 1.4.5. *1. Cho f, g xác định trên $(a; b)\backslash\{\alpha\}$ và $\alpha \in [a; b]$. Nếu*

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \forall x \in (a; b)\backslash\{\alpha\}, \\ \lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta, \lim_{x\to\alpha} g(x) = \gamma \end{cases}$$

thì $\beta \leqslant \gamma$.

2. *Cho* $f(x), g(x)$ *và* $h(x)$ *xác định trên* $(a;b)\backslash\{\alpha\}$ *và* $\alpha \in [a;b]$. *Nếu*

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \forall x \in (a;b)\backslash\{\alpha\}, \\ \lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta = \lim_{x\to\alpha} h(x) \end{cases}$$

thì $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta$.

Ví dụ 1.4.4. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Giải. Ta có

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

suy ra

$$-|x| \leqslant x \sin \frac{1}{x} \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

mà

$$\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x\to 0}|x|$$

nên

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Ví dụ 1.4.5. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$.

Giải. Ta có

$$|\sin x| \leqslant |x|, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

suy ra

$$-|x| \leqslant \sin x \leqslant |x|, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

mà

$$\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x\to 0}|x|$$

nên $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Ví dụ 1.4.6. Chứng tỏ $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Giải. Ta có

$$|\sin x - \sin x_0| = 2.\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|.\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2.\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \to 0$$

khi $x \to x_0$, ta suy ra $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

Tương tự ta cũng có được $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

1.4.3 Mở rộng khái niệm giới hạn hàm số

Trong mục này ta mở rộng khái niệm giới hạn hàm số: giới hạn là vô cùng, giới hạn ở vô cùng.

Định nghĩa 1.4.3. Cho $f : D \to \mathbb{R}$ và $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ là điểm tụ của D. Ta nói hàm f có giới hạn là $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ khi x tiến tới α nếu

$$\forall (x_n) \subset (D \backslash \{\alpha\}), (x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n) \to \beta).$$

Khi đó ta viết $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.

Chú ý 1.4.1. α và β có thể là $\pm\infty$, do đó ta đã định nghĩa các giới hạn: $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta, \lim_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \beta, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Ví dụ 1.4.7. Lấy $(x_n) \subset \mathbb{R}, x_n \to +\infty$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \left(x_n^2 + 2x_n + 1\right) = \lim_{n\to+\infty} x_n^2 \left(1 + \frac{2}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}\right) = +\infty(1 + 2.0 + 0) = +\infty.$$

Vậy

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x + 1) = +\infty.$$

Chú ý 1.4.2. Các tính chất giới hạn đã trình bày trong 1.4.2 hoàn toàn có thể mở rộng cho giới hạn được định nghĩa trong 1.4.3.

1.4.4 Giới hạn một phía

Định nghĩa 1.4.4. Cho $f : D \to \mathbb{R}$ và α là điểm tụ của D. Ta nói số thực β là *giới hạn bên trái* của $f(x)$ khi x tiến tới α nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, (0 < \alpha - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \beta| < \epsilon).$$

Khi đó ta viết $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \beta$ hay $f(\alpha^-) = \beta$.

Tương tự, ta có *giới hạn bên phải* của $f(x)$ khi x tiến tới α, $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \beta$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, (0 < x - \alpha < \delta \Rightarrow |f(x) - \beta| < \epsilon).$$

Định lý 1.4.6. *Hàm f có giới hạn tại α khi và chỉ khi tồn tại giới hạn bên trái, giới hạn bên phải tại α và hai giới hạn này bằng nhau. Khi đó*

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x).$$

Chứng minh. Chiều thuận là hiển nhiên. Ta chứng minh chiều đảo. Giả sử tồn tại $f(\alpha^+), f(\alpha^-)$ và $f(\alpha^+) = f(\alpha^-) = \beta$. Với $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta_1, \delta_2 > 0$ để cho với mọi $x \in D$ nếu $0 < x - \alpha < \delta_1$ hoặc $0 < \alpha - x < \delta_2$ thì $|f(x) - \beta| < \epsilon$. Do đó, nếu đặt $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ thì ta có

$$\forall x \in D, (0 < |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - \beta| < \epsilon).$$

Vậy tồn tại giới hạn của f tại α và $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$. □

Định lý 1.4.7. *Cho hàm f đơn điệu trong $(a; b)$, với $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ta có:*

1. *Nếu f bị chặn trên thì tồn tại giới hạn bên trái tại b;*
2. *Nếu f bị chặn dưới thì tồn tại giới hạn bên phải a.*

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp f tăng và bị chặn trên, các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự. Do f bị chặn trên trong $(a; b)$ nên tập

$$A = \{f(x) | x \in (a; b)\}$$

khác rỗng và bị chặn trên. Nếu ta đặt $\alpha = \sup A$ thì với $\epsilon > 0$, nhỏ tùy ý, tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho

$$\alpha - \epsilon < f(x_0) \leqslant \alpha.$$

Vì f tăng trong $(a; b)$ nên suy ra

$$\alpha - \epsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \alpha, \forall x \in (x_0; b).$$

Do đó, nếu xem $\delta = b - x_0$ ta có

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon, \forall x \in (a; b), 0 < b - x < \delta,$$

nghĩa là $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \alpha$. □

1.4.5 Hai giới hạn quan trọng

Định lý 1.4.8. *Ta có*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

2. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\,.$

Chứng minh. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ đã được chứng minh trong sách giáo khoa phổ thông. Ta chứng minh giới hạn thứ hai.

Trường hợp $x \to +\infty$. Từ định nghĩa 1.3.6, ta suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Do đó với $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m - \mathrm{e}\right| < \epsilon \text{ và } \left|\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} - \mathrm{e}\right| < \epsilon, \forall m \geqslant n_0. \tag{1.5}$$

Xét dãy tùy ý (x_n), $x_n \to +\infty$, khi đó tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ để cho $x_n > n_0 + 1, \forall n \geqslant n_1$. Với mỗi $x_n, n \geqslant n_1$ ta tìm được $m > n_0$ sao cho $m < x_n \leqslant m+1$, và do đó,

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}. \tag{1.6}$$

Kết hợp (1.5) và (1.6) ta suy ra

$$\left|\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} - \mathrm{e}\right| < \epsilon, \forall n \geqslant n_1.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$

Trường hợp $x \to -\infty$. Đặt $x = -t$, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = \mathrm{e}\,.\end{aligned}$$

□

Hệ quả 1.4.1. *Ta có*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1,$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$

1.5 HÀM SỐ LIÊN TỤC

1.5.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.5.1. Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$. Hàm số f được gọi là liên tục tại $\alpha \in D$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, (|x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \epsilon.)$$

Chú thích 1.5.1. Nếu α không là điểm tụ của D, nghĩa là, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $(\alpha - \delta; \alpha + \delta) \cap D = \{\alpha\}$, thì vì với mọi $x \in D, |x - \alpha| < \delta$ kéo theo $x = \alpha$ nên $|f(x) - f(\alpha)| = 0 < \epsilon$. Vậy hàm f liên tục tại các điểm cô lập thuộc miền xác định của nó. Do đó, trong phần tiếp theo ta chỉ khảo sát tính liên tục của hàm f tại các điểm tụ của D.

Đặc trưng tính liên tục tại điểm tụ bằng giới hạn:

Định lý 1.5.1. *Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ và α là điểm tụ của D. Hàm f liên tục tại α khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.*

Bằng ngôn ngữ dãy, ta có

Định lý 1.5.2. *Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ và α là điểm tụ của D. Hàm f liên tục tại α khi và chỉ khi*

$$\forall (x_n) \subset D, (x_n \to \alpha \Rightarrow f(x_n) \to f(\alpha)).$$

Chứng minh. Nếu f liên tục tại α, nghĩa là,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, (|x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \epsilon),$$

thì với mọi dãy $(x_n) \subset D, x_n \to \alpha$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - \alpha| < \delta, \forall n \geqslant n_0$$

và do đó

$$|f(x_n) - f(\alpha)| < \epsilon, \forall n \geqslant n_0.$$

Vậy $f(x_n) \to f(\alpha)$ khi $n \to \infty$.

Ngược lại, nếu f không liên tục tại α, nghĩa là,

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in D, (|x_\delta - \alpha| < \delta \text{ và } |f(x_\delta) - f(\alpha)| \geqslant \epsilon),$$

thì bằng cách chọn $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ta có dãy $x_n \in D$ sao cho

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{n} \text{ và } |f(x_n) - f(\alpha)| \geqslant \epsilon.$$

Suy ra $x_n \to \alpha$ và $f(x_n) \nrightarrow f(\alpha)$. □

Tương tự như trong phần giới hạn hàm số, định lý 1.5.2 kết hợp với các tính chất của dãy hội tụ sẽ cho ta tính liên tục của các hàm tổng, hiệu, tích, thương và hàm hợp.

Định lý 1.5.3. *Xét hai hàm $f, g : D \to \mathbb{R}$. Nếu f và g liên tục tại $\alpha \in D$ thì các hàm $f + g, f.g$ cũng liên tục tại α. Ngoài ra, khi $g(\alpha) \neq 0$ thì hàm $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại α.*

Suy ra nếu f và g liên tục trên D thì các hàm $f + g, f.g$ cũng liên tục trên D và $\dfrac{f}{g}$ liên tục trên $\{x \in D \big| g(x) \neq 0\}$.

Chú thích 1.5.2. Vì hàm hằng $f(x) = a$ và hàm $f(x) = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên theo định lý 1.5.3 ta suy ra hàm đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$ và hàm hữu tỷ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, với $p(x)$ và $q(x)$ là hai đa thức, là hàm liên tục tại mọi điểm thuộc $\{x \in \mathbb{R} | \quad q(x) \neq 0\}$.

Định lý 1.5.4. *Xét hàm số $f : D_1 \to D_2$ và $g : D_2 \to \mathbb{R}$. Nếu f liên tục tại $\alpha \in D_1$ và g liên tục tại $\beta = f(\alpha)$ thì $g \circ f$ liên tục tại α.*

1.5.2 Liên tục một phía. Phân loại điểm gián đoạn

Định nghĩa 1.5.2. Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ và $\alpha \in D$. Hàm f được gọi là *liên tục trái* tại α nếu $\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = f(\alpha)$.

Tương tự, f được gọi là *liên tục phải* tại α nếu $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$.

Kết hợp định lý 1.4.6 và định lý 1.5.1 ta có

Định lý 1.5.5. *Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ là điểm tụ của D. Hàm f liên tục tại α khi và chỉ khi f liên tục trái và liên tục phải tại α.*

Ví dụ 1.5.1. Định a, b để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leqslant -\frac{\pi}{2}; \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x, & x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

liên tục tại $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2}$.
Giải. Hàm $f(x)$ liên tục tại $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) & = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) & = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) & = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) & = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b & = 2 \\ a + b & = 0 \end{cases}$$

Suy ra $a = -1$ và $b = 1$.

Định nghĩa 1.5.3. Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ và $\alpha \in D$. Nếu hàm f không liên tục tại α thì α được gọi là điểm gián đoạn của hàm f. Điểm gián đoạn được phân loại như sau:

1. **Điểm gián đoạn loại 1**: Nếu tồn tại $f(\alpha^+), f(\alpha^-)$ nhưng ba số $f(\alpha^+)$, $f(\alpha^-)$ và $f(\alpha)$ không đồng thời bằng nhau thì α được gọi là điểm gián đoạn loại 1. Điểm gián đoạn loại 1 được chia thành 2 loại:
   - **Điểm khử được** nếu $f(\alpha^+) = f(\alpha^-) \neq f(\alpha)$,
   - **Điểm nhảy** nếu $f(\alpha^+) \neq f(\alpha^-)$. Khi đó $h = f(\alpha^+) - f(\alpha^-)$ được gọi là bước nhảy của f tại α.
2. **Điểm gián đoạn loại 2**: Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn một phía của f tại α thì α được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Ví dụ 1.5.2. Xét hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}, & x \in \mathbb{R} \backslash \{-1; 0; 1\}; \\ 2, & x \in \{-1; 0; 1\}. \end{cases}$$

Ta có

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{x-1}{x+1} = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$$

nên $x = -1$ là điểm gián đoạn loại 2. Hai điểm $x = 0$ và $x = 1$ là điểm gián đoạn khử được.

1.5.3 Hàm liên tục trên một đoạn

Xét hàm f xác định trên $[a;b]$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.5.4. Hàm f được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a;b)$ và liên tục phải tại a, liên tục trái tại b.

Tính chất của hàm f liên tục trên $[a;b]$.

Định lý 1.5.6. *Cho f liên tục trên $[a;b]$. Thế thì:*

1. *f là hàm bị chặn trên $[a;b]$, nghĩa là $f([a;b])$ là tập con bị chặn của $\mathbb{R}$.*
2. *f đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[a;b]$, nghĩa là tồn tại $x_0, x_1 \in [a;b]$ sao cho*
$$f(x_0) = \inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) \text{ và } f(x_1) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

Chứng minh. 1. Giả sử $f([a;b])$ không bị chặn, nghĩa là

$$\forall M > 0, \exists x_M \in [a;b], |f(x_M)| > M.$$

Lấy $M = n, n \in \mathbb{N}$, ta nhận được dãy $(x_n) \subset [a;b]$ thỏa $f(x_n) > n, \forall n \in \mathbb{N}$. Do định lý Bolzano - Weierstrass, dãy (x_n) có dãy con (x_{n_k}), $x_{n_k} \to x \in [a;b]$ khi $k \to \infty$. Và vì f là hàm liên tục tại x nên $f(x_{n_k}) \to f(x)$, suy ra $\left|f(x_{n_k})\right| \to |f(x)| \in \mathbb{R}$ khi $k \to \infty$. Điều này mâu thuẫn với

$$f(x_{n_k}) > n_k \geqslant k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

2. Đặt $m = \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Vì

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in [a;b], m \leqslant f(x_\epsilon) < m + \epsilon,$$

nên với $\epsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ta nhận được dãy $(x_n) \subset [a;b]$ thỏa $m \leqslant f(x_n) < m + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Mặt khác, do định lý Bolzano - Weierstrass, dãy (x_n) có dãy con

(x_{n_k}), $x_{n_k} \to x_0 \in [a;b]$ khi $k \to \infty$ và vì tính liên tục của f, ta suy ra $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Vậy $f(x_0) = m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta suy ra f đạt giá trị lớn nhất trên $[a;b]$. $\square$

Định lý 1.5.7. *Nếu f liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

Suy ra nếu f liên tục trên $[a;b]$ thì $f([a;b]) = [m;M]$ với $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ và $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

Chứng minh. Giả sử $f(a) < 0 < f(b)$. Ta định nghĩa hai dãy $(a_n), (b_n) \subset [a;b]$ như sau:

$$a_1 = 1; b_1 = b;$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{nếu } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0, \\ a_n, & \text{nếu } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0, \end{cases}$$

và

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n, & \text{nếu } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0, \\ \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{nếu } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

Ta có (a_n) là dãy tăng, (b_n) là dãy giảm thỏa

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \text{ và } |b_n - a_n| \leqslant \frac{b-a}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đó, suy ra $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c \in [a;b]$. Do tính liên tục của f ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leqslant 0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \geqslant 0.$$

Vậy $f(c) = 0$ và vì $f(a) < 0 < f(b)$ nên $c \notin \{a, b\}$.

Hiển nhiên $f([a;b]) \subset [m;M]$. Ta chứng tỏ $f([a;b]) \supset [m;M]$. Theo Định lý 1.5.6, có $x_0, x_1 \in [a;b], f(x_0) = m, f(x_1) = M$, nghĩa là $m, M \in f([a;b])$. Giả sử $x_0 < x_1$. Với $y \in (m;M)$, vì hàm $\varphi(x) = f(x) - y$ liên tục trong $[x_0;x_1]$ và $\varphi(x_0).\varphi(x_1) = (m-y)(M-y) < 0$ nên tồn tại $x \in (x_0;x_1)$ sao cho $\varphi(x) = 0$, tức là $f(x) = y$ và do đó $y \in f([a;b])$. Vậy $f([a;b]) \supset [m;M]$. $\square$

Định lý 1.5.8. *Cho $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ liên tục, $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ và $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Nếu f là hàm $1-1$ thì hàm ngược $f^{-1} : [m;M] \to [a;b]$ là hàm liên tục.*

Chứng minh. Giả sử f^{-1} không liên tục tại $y \in [m; M]$, nghĩa là, tồn tại dãy $(y_n) \subset [m; M]$ sao cho $y_n \to y$ và $f^{-1}(y_n) \nrightarrow f^{-1}(y)$. Đặt $x_n = f^{-1}(y_n), x = f^{-1}(y)$ thì $y_n = f(x_n) \to y = f(x)$ và $x_n \nrightarrow x$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử

$$\exists \epsilon > 0, |x_n - x| \geqslant \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó, và theo định lý Bolzano - Weierstrass, dãy (x_n) có dãy con $(x_{n_k}), x_{n_k} \to x' \neq x$. Vì f liên tục nên $f\left(x_{n_k}\right) \to f(x')$. Mà $f(x_n) \to f(x)$ nên $f(x) = f(x')$. Điều này mâu thuẫn với tính $1-1$ của f. □

Bây giờ, cho D là một khoảng (nửa khoảng, đoạn, nửa đoạn) trong $\overline{\mathbb{R}}$ và hàm số $f : D \to \mathbb{R}$. Nếu f liên tục trên D và là hàm $1-1$ thì f sẽ là hàm đơn điệu trên D. Đặt $a = \inf D, b = \sup D, c = \inf f(D)$ và $d = \sup f(D)$, ta có

Định lý 1.5.9. *Cho D là một khoảng trong $\overline{\mathbb{R}}$ và $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục, $1-1$ và là hàm tăng. Khi đó hàm ngược $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $\lim_{y\to c} f^{-1}(y) = a, \lim_{y\to d} f^{-1}(y) = b$.*

1.6 GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM SƠ CẤP

1.6.1 Hàm lũy thừa, căn thức

Hàm $f(x) = x^n$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ khi n chẵn và $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ khi n lẻ. Từ đó, và theo định lý 1.5.9, ta suy ra khi n chẵn thì hàm $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$; khi n lẻ thì hàm $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x\to\pm\infty} f^{-1}(x) = \pm\infty$.

Tóm lại ta có

Định lý 1.6.1. *1. $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n, \forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ và*

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ -\infty, & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

2. Với n chẵn, thì

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \forall x_0 \geqslant 0$$

và

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Với n lẻ thì

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

và

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{x} = \pm\infty$$

1.6.2 Hàm mũ và hàm logarit

Định lý 1.6.2. *1. Hàm $f(x) = \mathrm{e}^x$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

2. Hàm $f(x) = \ln x$ là hàm liên tục trên $(0; +\infty)$, và

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty.$$

Chứng minh. Người ta chứng minh được,

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}, \forall x \in (-1; 1).$$

Vì $\lim\limits_{x\to0}(1+x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{1-x} = 1$ nên, theo tiêu chuẩn giới hạn kẹp, ta suy ra $\lim\limits_{x\to0} \mathrm{e}^x = 0$. Hơn nữa, bằng cách viết $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0} = \mathrm{e}^{x_0}(\mathrm{e}^{x-x_0} - 1)$ và vì $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^{x-x_0} = 1$ ta suy ra $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x_0}$.

Ngoài ra, từ bất đẳng thức $\mathrm{e}^x \geqslant x, \forall x \in \mathbb{R}$ ta suy ra $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ và $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x} = 0$. □

Từ tính liên tục và giới hạn của hàm $f(x) = \mathrm{e}^x$ và $f(x) = \ln x$ ta suy ra tình liên tục và giới hạn của các hàm

$$f(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0,$$
$$f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}, 0 < a \neq 1, x \in \mathbb{R},$$
$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, 0 < a \neq 1, x > 0.$$

Ngoài ra, ta có các giới hạn sau cho hàm mũ và hàm logarit cơ số e,

Định lý 1.6.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Chứng minh. Sinh viên tự chứng minh bằng cách dùng định lý 1.4.8 và tính liên tục của hàm $\ln$. □

1.6.3 Hàm lượng giác, lượng giác ngược

Định lý 1.6.4. *1. $f(x)=\sin x$ và $f(x)=\cos x$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.*

2. $f(x)=\tan x$ là hàm liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ và

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}}\tan x=\mp\infty,\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^{\pm}}\tan x=\pm\infty.$$

3. $f(x)=\cot x$ là hàm liên tục trên $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ và

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}\cot x=\pm\infty,\ \lim_{x\to\pi^{\pm}}\cot x=\pm\infty.$$

Chứng minh. 1. Xem ví dụ 1.4.6.
2. Vì $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\forall x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ nên $\tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, và $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}}\tan x=\mp\infty,\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^{\pm}}\tan x=\pm\infty$ là do từ định nghĩa hàm tan.
3. Vì $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\forall x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$, và $\lim_{x\to 0^{\pm}}\cot x=\pm\infty$, $\lim_{x\to\pi^{\pm}}\cot x=\pm\infty$ là do từ định nghĩa hàm $\cot$. □

Kết hợp định lý 1.5.9 và định lý 1.6.4 ta thu được tính liên tục của hàm lượng giác ngược,

Định lý 1.6.5. *Ta có*

1. $f(x)=\arcsin x$ và $f(x)=\arccos x$ là các hàm liên tục trên $[-1;1]$.

2. $f(x)=\arctan x$ và $f(x)=\operatorname{arccot} x$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0,\ \text{và}\ \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi.$$

1.7 VÔ CÙNG BÉ, VÔ CÙNG LỚN

1.7.1 Hàm tương đương

Khái niệm hàm tương đương

Định nghĩa 1.7.1. Cho hai hàm $f(x), g(x)$ xác định trong lân cận của $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ta nói hàm $f(x)$ và $g(x)$ tương đương khi $x \to a$ nếu

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Khi ấy, ta ký hiệu $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to a$.

Chú thích 1.7.1. Trong định nghĩa 1.7.1, khi a hữu hạn, ta có thể thay $x \to a$ bởi $x \to a^+$ hay $x \to a^-$.

Tính chất

Định lý 1.7.1. *Xét quá trình $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ta có:*

1. *Nếu $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ thì $f(x) \to L$.*
2. *Nếu $f(x) \sim f_1(x)$ và $g(x) \sim g_1(x)$ thì $f(x)g(x) \sim f_1(x)g_1(x)$ và $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.*
3. *Nếu $f(x) \sim g(x)$ thì $\sqrt[n]{f(x)} \sim \sqrt[n]{g(x)}$, giả sử các căn thức có nghĩa.*

Chứng minh. 1. Giả sử $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ khi $x \to a$. Ta có

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x) \to 1.L = L,$$

khi $x \to a$.

2. Giả sử $f(x) \sim f_1(x)$ và $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to a$. Ta có

$$\frac{f(x)g(x)}{f_1(x)g_1(x)} = \frac{f(x)}{f_1(x)} . \frac{g(x)}{g_1(x)} \to 1.1 = 1,$$

khi $x \to a$, và

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{f_1(x)}{g_1(x)}} = \frac{f(x)}{f_1(x)}.\frac{g_1(x)}{g(x)} \to 1.1 = 1,$$

khi $x \to a$.

3. Giả sử $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to a$. Ta có

$$\frac{\sqrt[n]{f(x)}}{\sqrt[n]{g(x)}} = \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}} \to 1,$$

khi $x \to a$.

□

Các tương đương cơ bản

Khi $x \to 0$ ta có các tương đương cơ bản sau đây:

1. $\sin x \sim x$;
2. $\tan x \sim x$;
3 $\arcsin x \sim x$;
4. $\arctan x \sim x$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;
6. $\ln(1+x) \sim x$;
7. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$;
8. $a^x - 1 \sim x \ln a$;
9. $e^x - 1 \sim x$;
10. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

Đặc biệt, ta có

11. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_p x^p \sim a_p x^p$ khi $x \to 0, n \geqslant p, a_p \neq 0$;
12. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_p x^p \sim a_n x^n$ khi $x \to \infty, n \geqslant p, a_n \neq 0$.

1.7.2 Vô cùng bé (VCB)

Khái niệm VCB

Định nghĩa 1.7.2. Cho $a \in \overline{\mathbb{R}}$ và hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của a. Hàm số $f(x)$ được gọi là vô cùng bé khi $x \to a$ nếu $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Chú thích 1.7.2. Trong định nghĩa 1.7.2, khi a hữu hạn, ta có thể thay $x \to a$ bởi $x \to a^+$ hay $x \to a^-$.

Ví dụ 1.7.1.

1. $\sin x, \tan x, 1 - \cos x$ là những VCB khi $x \to 0$.
2. $\cos x, \cot x$ là những VCB khi $x \to \frac{\pi}{2}$.
3. $\dfrac{x+1}{x^2+3}$ là VCB khi $x \to \infty$.

So sánh hai VCB

Định nghĩa 1.7.3. Cho $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to a$. Ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB so sánh được nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Khi ấy :

1. Nếu $K = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCB cấp cao hơn $g(x)$, và ký hiệu $f(x) = 0(g(x))$ khi $x \to a$.
2. Nếu $K = \infty$ thì ta nói $g(x)$ là VCB cấp cao hơn $f(x)$, và ký hiệu $g(x) = 0(f(x))$ khi $x \to a$.
3. Nếu $K \notin \{0, \infty\}$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ cùng cấp.

Ví dụ 1.7.2.

1. Khi $x \to 0$, x^2 và $1 - \cos x$ là hai VCB so sánh được vì

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

và do đó, x^2 cùng cấp với $1 - \cos x$.

2. Khi $x \to 0$, x^3 và $2\sin^2 x$ là hai VCB so sánh được vì

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{2\sin^2 x} = 0,$$

và do đó, x^3 cấp cao hơn $2\sin^2 x$.

Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

Bổ đề 1.7.1. *Cho $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to a$. Khi đó:*

1. *Nếu cấp của $f(x)$ nhỏ hơn cấp của $g(x)$ thì*

$$f(x) + g(x) \sim f(x), x \to a.$$

2. *Giả sử $f(x) \sim f_1(x)$ và $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to a$. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ cùng cấp nhưng không tương đương, nghĩa là, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \notin \{0, 1, \infty\}$ thì*

$$f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x), x \to a.$$

Chứng minh. 1. Ta có

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a}\left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1.$$

2. Ta có

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{f_1(x)-g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{g_1(x)}.\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-1}{\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-1} = 1.\frac{b-1}{b-1} = 1.$$

□

Định lý 1.7.2. *Giả sử $f(x), g(x), f_1(x)$ và $g_1(x)$ là các VCB khi $x \to a$. Nếu $f(x) = 0(f_1(x))$ và $g(x) = 0(g_1(x))$ thì*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Chứng minh. Áp dụng bổ đề 1.7.1 và định lý 1.7.1 (tính chất 1). □

Ví dụ 1.7.3. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+3\sin^2 x}{5x+x^3}$.

Giải. Khi $x \to 0$, ta có $3\sin^2 x \sim 3x^2 = 0(x)$ và $x^3 = 0(x)$, do đó,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+3\sin^2 x}{5x+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}.$$

Ví dụ 1.7.4. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\tan x)}{x+\sin^3 x}$.

Giải. Khi $x \to 0$, ta có $\ln(1+\tan x) \sim \tan x \sim x$ và $\sin^3 x \sim x^3 = 0(x)$, do đó,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\tan x)}{x+\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

1.7.3 Vô cùng lớn (VCL)

Khái niệm VCL

Định nghĩa 1.7.4. Cho $a \in \overline{\mathbb{R}}$ và hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của a. Hàm số $f(x)$ được gọi là VCL khi $x \to a$ nếu $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$

Chú thích 1.7.3. Trong định nghĩa 1.7.4, khi a hữu hạn, ta có thể thay $x \to a$ bởi $x \to a^+$ hay $x \to a^-$.

Ví dụ 1.7.5.

1. Khi $x \to 0$, $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sin x}$ và $\cot x$ là các VCL.
2. $\tan x$ là VCL khi $x \to \frac{\pi}{2}, x \to -\frac{\pi}{2}$.
3. $x^2 + 2x, x^3 + 1$ là VCL khi $x \to \infty$.

So sánh hai VCL đồng thời

Định nghĩa 1.7.5. Cho $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to a$. Ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL so sánh được nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Khi ấy:

1. Nếu $K = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCL cấp thấp hơn $g(x)$.
2. Nếu $K = \infty$ thì ta nói $g(x)$ là VCL cấp cao hơn $f(x)$.
3. Nếu $K \notin \{0, \infty\}$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ cùng cấp.

Ví dụ 1.7.6. 1. Khi $x \to +\infty$, $x^2 + 1$ và $\sqrt{x}$ là hai VCL so sánh được vì

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty,$$

và do đó, $x^2 + 1$ là VCL cấp cao hơn $\sqrt{x}$.

2. Khi $x \to +\infty$, $\sqrt[3]{x^6 + 3x^2 + 1}$ và $\sqrt[4]{2x^8 + 3x + 2x}$ là hai VCL cùng cấp vì

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 3x^2 + 1}}{\sqrt[4]{2x^8 + 3x^4 + 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^6}}}{\sqrt[4]{2 + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^7}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Quy tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp

Bổ đề 1.7.2. *Cho $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to a$. Khi đó:*

1. *Nếu cấp của $f(x)$ nhỏ hơn cấp của $g(x)$ thì*

$$f(x) + g(x) \sim g(x), x \to a.$$

2. *Giả sử $f(x) \sim f_1(x)$ và $g(x) \sim g_1(x)$ khi $x \to a$. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ cùng cấp nhưng không tương đương, nghĩa là, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \notin \{0, 1, \infty\}$ thì*

$$f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x), x \to a.$$

Chứng minh. Tương tự chứng minh bổ đề 1.7.1. □

Định lý 1.7.3. *Giả sử $f(x), g(x), f_1(x)$ và $g_1(x)$ là các VCL khi $x \to a$. Nếu $f(x)$ cấp cao hơn $f_1(x)$ và $g(x)$ cấp cao hơn $g_1(x)$ thì*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Chứng minh. Áp dụng bổ đề 1.7.2 và định lý 1.7.1 (tính chất 1). □

Ví dụ 1.7.7. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{5x+2}}{\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^3}}$.

Giải. Khi $x \to +\infty$ ta có

$$\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{5x+2} \sim \sqrt{3x^2+2x+1} \sim \sqrt{3x^2}$$

và

$$\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^3} \sim \sqrt[3]{x^3+x} \sim \sqrt[3]{x^3}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{5x+2}}{\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^3}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{x^3+x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}\\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1.1. Tính giới hạn dãy số

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+1}{2n^3+4n}$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{2n^3+4n}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n+1}{2n^2+4n}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin n}{n^2+1}$; 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$; 8. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{n}$; 9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{n}}}{1+\sqrt[6]{n}}$.

Bài 1.2. Tính giới hạn hàm số

1. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$; 4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$;

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$; 6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 5x}{\tan 8x}$;

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x\right)$; 8. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\cot x\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$;

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$;

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

Bài 1.3. Tính giới hạn dạng 1^∞

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}$;

2. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

3. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

5. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Bài 1.4. Dùng vô cùng bé tương đương tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x\sin x)}{\tan^2 x}$;

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1-2x)}$;

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-e^x)(1-\cos x)}{x^3+\sin^4 x}$;

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

Bài 1.5. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

1. $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x^2}}$;

2. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

Bài 1.6. Xác định a, b sao cho các hàm số sau liên tục trên miền xác định của chúng:

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}, & x<0,\\ a\cos x+b, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ \frac{\pi}{x}, & x>\pi;\end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ a\cos^2 x + b, & -\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0, \\ \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, & x > 0. \end{cases}$

ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN

Bài 1.1. **1**. $\frac{1}{2}$; **2**. 0; **3**. $+\infty$; **4**. 0; **5**. 0; **6**. 3; **7**. 4; **8**. π; **9**. 1.

Bài 1.2. **1**. $\frac{4}{3}$; **2**. $\frac{4}{5}$; **3**. $\frac{1}{2}$; **4**. $-\frac{1}{2}$; **5**. 1; **6**. $\frac{5}{8}$; **7**. $\frac{3}{2}$; **8**. 0; **9**. 1; **10**. $\frac{1}{4}$; **11**. $-\frac{1}{2}$; **12**. $\frac{1}{12}$; **13**. $\ln\frac{5}{4}$; **14**. 1.

Bài 1.3. **1**. e^{15}; **2**. $e^{-\frac{1}{2}}$; **3**. 1; **4**. e; **5**. e; **6**. e^{-1}.

Bài 1.4. **1**. 2; **2**. $\frac{9}{4}$; **3**. 1; **4**. $\frac{1}{8}$; **5**. $-\frac{1}{2}$; **6**. $-\frac{1}{2}$.

Bài 1.5. **1**. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; **2**. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; **3**. $f(x)$ iên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; **4**. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 1.6. **1**. $\begin{cases} a = -\frac{3}{4}, \\ b = \frac{1}{4}; \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 0. \end{cases}$

Chương2

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

2.1 ĐẠO HÀM

2.1.1 Khái niệm đạo hàm

Định nghĩa 2.1.1. Cho hàm f xác định trên $(a;b)$. Ta nói f có đạo hàm tại $x \in (a;b)$ nếu tỷ số $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$. Khi ấy, giá trị của giới hạn này được gọi là *đạo hàm* của f tại x, ký hiệu là $f'(x)$, nghĩa là

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Ví dụ 2.1.1. 1. $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0 = f'(x).$$

2. $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = f'(x).$$

3. $f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \\ &= \cos x = f'(x).\end{aligned}$$

4. $f(x) = \mathrm{e}^x, \forall x \in \mathbb{R}$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= \mathrm{e}^x = f'(x).\end{aligned}$$

Chú ý 2.1.1. 1. Nếu đặt $s = x + \Delta x \to x$ khi $\Delta x \to 0$ thì (4.1) trở thành

$$f'(x) = \lim_{s \to x} \frac{f(s) - f(x)}{s - x}. \tag{2.2}$$

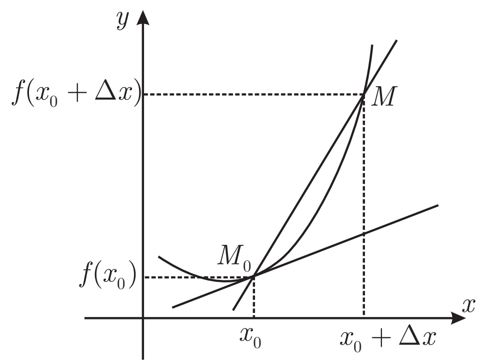
2. Nếu đặt $h = \Delta x \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ thì (4.1) trở thành

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.3}$$

2.1.2 Ý nghĩa của đạo hàm

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Với điểm $M_0(x_0, f(x_0)) \in (C)$ và điểm $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in (C)$ thì tỷ số $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ là hệ số góc của đường thẳng M_0M. Khi $\Delta x \to 0$ thì M tiến về M_0 trên (C), vị trí giới hạn M_0t, nếu có, của cát tuyến M_0M được gọi là tiếp tuyến tại M_0 của (C) (hình 2.1). Do đó,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Hình 2.1: Ý nghĩa hình học của đạo hàm

cho ta hệ số góc của tiếp tuyến M_0t.

Trong cơ học, với một chất điểm chuyển động trên một trục $x'Ox$ sao cho tại thời điểm x_0, $f(x_0)$ chỉ khoảng cách (đại số) $\overline{OM}$. Tại thời điểm $x_0 + \Delta x$, chất điểm di chuyển đến vị trí M' và $\overline{OM'} = f(x_0 + \Delta x)$. Trong khoảng thời gian Δx, chất điểm di chuyển được quảng đường có độ dài (đại số) là $\overline{MM'} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và do đó ta gọi $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ là vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$. Khi ấy, giá trị

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

cho ta vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm x_0.

2.1.3 Điều kiện cần để có đạo hàm

Định lý 2.1.1. *Nếu f xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$ thì f liên tục tại x.*

Chứng minh. Đặt $\epsilon(s - x) = \dfrac{f(s) - f(x)}{s - x} - f'(x)$. Ta có $\epsilon(s - x) \to 0$ khi $s \to x$ và do đó

$$f(s) - f(x) = f'(x).(s - x) + (s - x).\epsilon(s - x) \to 0,$$

khi $s \to x$. Vậy f liên tục tại x. □

Chiều ngược lại của định lý không đúng. Chẳng hạn, hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ mà vì

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$

và

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

nên $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

2.1.4 Các quy tắc tính đạo hàm

Định lý 2.1.2. *Nếu f, g xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$ thì các hàm $f + g, \alpha f (\alpha \in \mathbb{R})$ và $f.g$ có đạo hàm tại x và*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$,
3. $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. *Hơn nữa, nếu $g(x) \neq 0$ trong một lân cận của x thì hàm $\dfrac{f}{g}$ có đạo hàm tại x với*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Chứng minh. Do định lý 4.4.1 nên f và g là hai hàm liên tục tại x và khi $\Delta x \to 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&\to f'(x) + g'(x), \\
\frac{(\alpha f)(x+\Delta x) - (\alpha f)(x)}{\Delta x} &= \alpha \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&\to \alpha f'(x), \\
\frac{(f.g)(x+\Delta x) - (f.g)(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + \\
&\quad + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\to f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Vậy các đẳng thức 1, 2, 3 được chứng minh.

Khi $g(x) \neq 0$, thì vì g liên tục tại x nên g khác không trên một lân cận của x và do đó hàm $\frac{f}{g}$ xác định trên lân cận này. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f}{g}(x+\Delta x) - \frac{f}{g}(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x) - \right. \\ &\quad \left. \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)\right] \\ &\to \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

khi $\Delta x \to 0$. Vậy đẳng thức trong 4 được chứng minh. □

Ví dụ 2.1.2. Chứng minh rằng $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Giải. Ta có $x' = 1 = 1.x^{1-1}$ nên đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử $(x^n)' = nx^{n-1}$, ta có

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x^n.x)' = (x^n)'x + x^n x' \\ &= nx^{n-1}.x + x^n.1 = (n+1)x^n.\end{aligned}$$

2.1.5 Đạo hàm của hàm hợp

Định lý 2.1.3. *Nếu f có đạo hàm tại x, g xác định trong một lân cận của $y = f(x)$ và có đạo hàm tại y thì $g \circ f$ có đạo hàm tại x và*

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Chứng minh. Do f có đạo hàm tại x và g có đạo hàm tại y nên ta có

$$f(s) - f(x) = f'(x)(s-x) + (s-x)\epsilon_1(s-x)$$

và

$$g(t) - g(y) = g'(y)(t-y) + (t-y)\epsilon_2(t-y)$$

trong đó, $\lim_{h\to 0}\epsilon_1(h) = 0$ và $\lim_{k\to 0}\epsilon_2(k) = 0$.

Bây giờ, với $t = f(s) \to f(x) = y$ khi $s \to x$, ta có

$$(g \circ f)(s) - (g \circ f)(x) = g'(y)f'(x)(s-x) + (s-x)\epsilon(s-x),$$

trong đó

$$\epsilon(s-x) = g'(y)\epsilon_1(s-x) + f'(x)\epsilon_2(t-y) + \epsilon_2(t-y)\epsilon_1(s-x) \to 0$$

khi $s \to x$. Suy ra

$$\lim_{s\to x} \frac{(g \circ f)(s) - (g \circ f)(x)}{s-x} = g'(y)f'(x).$$

Định lý được chứng minh xong. □

2.1.6 Đạo hàm của hàm ngược

Định lý 2.1.4. *Cho $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm $1-1$. Nếu f có đạo hàm tại x và $f'(x) \neq 0$ thì $f^{-1} : f(D) \to D$ có đạo hàm tại $y = f(x)$ và*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Chứng minh. Do f là hàm $1-1$ nên có hàm ngược $f^{-1} : f(D) \to D$. Với $s = f^{-1}(t), x = f^{-1}(y) \in D$ ta có $s \neq x$ khi $t \neq y$ và $s \to x \Leftrightarrow t \to y$ nên

$$\frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(y)}{t-y} = \frac{1}{\frac{f(s)-f(x)}{s-x}} \to \frac{1}{f'(x)}$$

khi $t \to y$. □

2.1.7 Đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản

Định lý 2.1.5. *Đạo hàm các hàm sơ cấp được cho ở bảng sau:*

	$f(x)$, *miền có đạo hàm*	$f'(x)$
1	$e^x, x \in \mathbb{R}$	e^x
2	$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$
3	$x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
4	$a^x, 0 < a \neq 1$	$a^x \ln a$
5	$\log_a x, 0 < a \neq 1, x > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$
6	$\sin x, x \in \mathbb{R}$	$\cos x$
7	$\cos x, x \in \mathbb{R}$	$-\sin x$
8	$\tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
9	$\cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{-\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
10	$\arcsin x, -1 < x < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x, -1 < x < 1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arctan x, x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
13	$\operatorname{arccot} x, x \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Chứng minh. Xét hàm $f(x) = e^x$, theo ví dụ 2.1.1, $f'(x) = e^x$. Áp dụng định lý 2.1.4 với $f^{-1}(x) = \ln x$, ta có

$$(\ln x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Dùng công thức 1 và 2, các công thức 3, 4, và 5 được suy ra từ định lý 4.4.2, 4.4.3 và các đẳng thức

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, a^x = e^{x.\ln a} \text{ và } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Theo ví dụ 2.1.1, ta có $(\sin x)' = \cos x$. Từ đó, các công thức 7, 8, và 9 được suy ra từ định lý 4.4.2, 4.4.3 với chú ý

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ và } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Xét $f(x) = \sin x$ ta có $f'(x) = \cos x \neq 0$ khi $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, suy ra, theo định lý 2.1.4, $f^{-1}(x) = \arcsin x$ có đạo hàm tại mọi $-1 < x < 1$, và

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

và

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccot} x)}} = -\frac{1}{1+\cot^2(\operatorname{arccot} x)} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□

2.1.8 Đạo hàm một phía, đạo hàm vô cùng

Định nghĩa 2.1.2. Cho hàm f xác định trong lân cận phải của x, $(x; x+\delta), \delta > 0$. Ta nói f có đạo hàm bên phải tại x nếu tỷ số $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ có giới hạn khi $\Delta x \to 0^+$. Khi ấy, giá trị của giới hạn này được gọi là *đạo hàm bên phải* của f tại x, ký hiệu là $f'_+(x)$, nghĩa là

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.4}$$

Tương tự, *đạo hàm bên trái* của f tại x, nếu có, được ký hiệu là $f'_-(x)$,

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.5}$$

Ví dụ 2.1.3. Cho$f(x) = |x|$. Tính $f'_+(0), f'_-(0)$.
Giải. Ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 = f'_+(0)$$

và

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1 = f'_-(0).$$

Do đạo hàm tại x của f được định nghĩa bằng giới hạn hàm số theo biến là Δx nên ta có

Định lý 2.1.6. *Hàm f có đạo hàm tại x khi và chỉ khi f có đạo hàm bên trái và bên phải tại x bằng nhau.*

Chứng minh. Sinh viên tự chứng minh. □

Định nghĩa 2.1.3. Cho hàm f xác định trên $(a;b)$ và $x \in (a;b)$. Nếu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \pm\infty$$

ta nói f có *đạo hàm vô cùng* tại x.

Về mặt hình học thì nếu f có đạo hàm vô cùng tại x thì tiếp tuyến với đồ thị hàm $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x song song với trục tung.

Tương tự, ta cũng có khái niệm đạo hàm bên trái, bên phải bằng vô cùng.

Ví dụ 2.1.4. Cho$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Tính $f'_+(0), f'_-(0)$.
Giải. Ta có

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}$$

nên suy ra

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}} = +\infty = f'_+(0)$$

và

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}} = -\infty = f'_-(0).$$

Ví dụ 2.1.5. Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tính $f'(x)$.
Giải. Tại $x \neq 0$, ta có $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ nên

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0 = f'(0).$$

Vậy

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2.2 VI PHÂN

2.2.1 Khả vi, vi phân

Định nghĩa 2.2.1. Cho hàm f xác định trên $(a;b)$ và $x \in (a;b)$. Hàm f được gọi là *khả vi* tại x nếu

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A.\Delta x + 0(\Delta x),$$

trong đó, A là hằng số chỉ phụ thuộc x và $0(\Delta x)$ là vô cùng bé cấp cao so với Δx khi $\Delta x \to 0$. Khi ấy, biểu thức $A.\Delta x$ được gọi là vi phân của f tại x, ký hiệu là

$$df(x) = A.\Delta x. \tag{2.6}$$

2.2.2 Điều kiện cần và đủ để hàm khả vi tại một điểm

Ta có mối liên hệ giữa tính khả vi và có đạo hàm như sau

Định lý 2.2.1. *Hàm f khả vi tại x khi và chỉ khi f có đạo hàm tại x. Khi ấy ta có*

$$df(x) = f'(x).\Delta x. \tag{2.7}$$

Chứng minh. Giả sử f khả vi tại x. Ta có

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A.\Delta x + 0(\Delta x),$$

suy ra

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x} \to A,$$

khi $\Delta x \to 0$. Vậy f có đạo hàm tại x và $f'(x) = A$.

Ngược lại, nếu f có đạo hàm tại x ta có

$$\epsilon(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \to 0$$

khi $\Delta x \to 0$. Do đó,

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \Delta x\epsilon(\Delta x) = f'(x).\Delta x + 0(\Delta x)$$

vì $\dfrac{\Delta x\epsilon(\Delta x)}{\Delta x} = \epsilon(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Vậy f khả vi tại x. □

Chú thích 2.2.1. Với hàm $f(x) = x$ khả vi mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$dx = df(x) = f'(x).\Delta x = 1.\Delta x = \Delta x.$$

Do đó, (4.6) được viết dưới dạng

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{2.8}$$

2.2.3 Tính chất vi phân

Do định lý 2.2.1, 4.4.2, và công thức (4.7), ta có

Định lý 2.2.2. *Nếu f, g xác định trên $(a;b)$ và khả tại $x \in (a;b)$ thì các hàm $f+g, \alpha f (\alpha \in \mathbb{R})$ và $f.g$ khả tại x,*

1. $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$,
2. $d(\alpha f)(x) = \alpha df(x)$,
3. $d(f.g)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$.
4. *Hơn nữa, nếu $g(x) \neq 0$ trong một lân cận của x thì hàm $\dfrac{f}{g}$ khả vi tại x với*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}.$$

2.2.4 Vi phân của hàm hợp, tính bất biến của dạng vi phân cấp một

Trước hết, cho hàm $y = f(x)$, với x là biến độc lập, khả vi tại x. Ta có (4.7).

Bây giờ, xét $x = \varphi(t)$ là hàm khả vi. Ta có hàm $f(x) = f(\varphi(t)) \equiv F(t)$ là hàm khả vi theo biến (độc lập) t và

$$df(x) = dF(t) = F'(t)dt = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f'(\varphi(t))d\varphi(t) = f'(x)dx.$$

Vậy ta cũng có

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{2.9}$$

So sánh (4.7) và (4.8) ta thấy vi phân của hàm f không thay đổi về dạng cho dù x là biến độc lập hay là một hàm số. Ta nói vi phân cấp một có tính bất biến về dạng.

Như vậy, với hàm f khả vi, x là biến độc lập hay phụ thuộc, ta luôn có

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \tag{2.10}$$

2.2.5 Tính gần đúng bằng vi phân

Cho hàm f khả vi tại x_0, ta có

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + 0(\Delta x).$$

Do đó, khi $\Delta x \approx 0$ ta có thể xem

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$

với sai số rất bé so với Δx, là $0(\Delta x)$.

Ví dụ 2.2.1. Tính gần đúng $\ln(1,001)$.

Giải. Đặt $f(x) = \ln x, x_0 = 1$ và $\Delta x = 0,001$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{x}, f'(x_0) = f'(1) = 1$ và

$$\ln(1,001) = \ln(1 + 0,001) \approx \ln 1 + 1.0,001 = 0,001.$$

Ví dụ 2.2.2. Tính gần đúng $\sin 29°$.

Giải. Ta có $29° = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$. Đặt $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$ và $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$. Ta có $f'(x) = \cos x, f'(x_0) = f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và

$$\sin 29° = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,484.$$

2.3 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

2.3.1 Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa 2.3.1. Cho hàm f xác định trên $(a;b)$. Nếu f có đạo hàm trên $(a;b)$, nghĩa là f có đạo hàm tại mọi $x \in (a;b)$, thì f' cũng là một hàm xác định trên $(a;b)$. Khi đó, nếu f' có đạo hàm trên $(a;b)$ thì ta gọi $(f')'$ là đạo hàm cấp hai của hàm f và ký hiệu là f''. Tổng quát, đạo hàm cấp $n \geqslant 2$ của f, ký hiệu là $f^{(n)}$, là đạo hàm, nếu có, của $f^{(n-1)}$ trên $(a;b)$. Vậy

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \geqslant 2.$$

Bằng quy nạp, ta có đạo hàm cấp cao của một số hàm sơ cấp sau đây:

1. Với $f(x) = \mathrm{e}^x$ thì $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$;

2. Với $f(x) = \sin x$ thì
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & \text{nếu } n = 2k \\ (-1)^k \cos x, & \text{nếu } n = 2k+1. \end{cases};$$

3. Với $f(x) = \cos x$ thì
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & \text{nếu } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x, & \text{nếu } n = 2k+1. \end{cases};$$

4. Với $f(x) = (1+x)^{-1}$ thì
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)};$$

5. Với $f(x) = (1-x)^{-1}$ thì
$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)};$$

6. Với $f(x) = (1+x)^\alpha$ thì
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n};$$

7. Với $f(x) = (1-x)^{-1}$ thì
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

2.3.2 Công thức Leibnitz

Định lý 2.3.1. *Cho f và g có đạo hàm đến cấp n trên $(a;b)$. Khi ấy, ta có*

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}.g^{(n-k)}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.11}$$

Chứng minh. Rõ ràng (2.11) với $n = 1$. Giả sử (2.11) đúng. Ta chứng minh

$$(f.g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}.g^{(n+1-k)}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
(f.g)^{(n+1)} &= ((f.g)^{(n)})' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}.g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k)}.g^{(n-k)}]' \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k+1)}.g^{(n-k)} + f^{(k)}.g^{(n-k+1)}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}.g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}.g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)}.g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}.g^{(n-k+1)} \\
&= C_n^n f^{(n+1)}.g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)}.g^{(n-k+1)} + C_n^0 f^{(0)}.g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}.g^{(n+1-k)},
\end{aligned}$$

vì $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, $C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$, và $C_n^0 = C_{n+1}^0$. □

2.3.3 Vi phân cấp cao

Khái niệm vi phân cấp cao

Định nghĩa 2.3.2. Cho hàm f xác định trên $(a;b)$. Nếu f khả vi trên $(a;b)$, nghĩa là f khả vi tại mọi $x \in (a;b)$, thì df cũng là một hàm xác định trên

$(a;b)$. Khi đó, nếu df khả vi trên $(a;b)$ thì ta gọi $d(df)$ là vi phân cấp hai của hàm f và ký hiệu là d^2f. Tổng quát, vi phân cấp $n \geqslant 2$ của f, ký hiệu là d^nf, là vi phân, nếu có, của $d^{n-1}f$ trên $(a;b)$.

Vậy
$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)), \quad n \geqslant 2.$$

Vi phân cấp cao không bất biến về dạng

Nếu x là biến độc lập thì dx là hằng số, do đó, ta có

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx.d(f'(x)) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Tương tự, ta cũng có
$$d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n \tag{2.12}$$

Nếu $x = \phi(t)$ thì dx không là hằng số, mà là hàm theo t. Do đó, $d^2x = d(dx) \neq 0$. Khi ấy, ta có

$$\begin{aligned} d^2f(x) &= d(f'(x)dx) \\ &= dx.d(f'(x)) + f'(x)d(dx) \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x \\ &\neq f''(x)dx^2. \end{aligned}$$

Vậy d^2f không bất biến về dạng. Do đó, ta kết luận vi phân cấp cao cũng không bất biến về dạng.

2.4 CÁC ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

2.4.1 Khái niệm cực trị

Định nghĩa 2.4.1. Cho hàm f xác định trên D.

1. Điểm $x_0 \in D$ được gọi là *điểm cực tiểu* của hàm f nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$f(x_0) < f(x), \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap D.$$

Khi đó, ta nói f *đạt cực tiểu* tại x_0, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của f tại x_0 và điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực tiểu* của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

2. Điểm $x_0 \in D$ được gọi là *điểm cực đại* của hàm f nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$f(x_0) > f(x), \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap D.$$
Khi đó, ta nói f *đạt cực đại* tại x_0, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của f tại x_0 và điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm cực đại* của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

3. Các điểm cực tiểu và cực đại được gọi chung là *điểm cực trị*. Giá trị của hàm số tại điểm cực trị được gọi là *cực trị* của hàm số.

2.4.2 Định lý Fermat

Định lý 2.4.1. *Cho f xác định trên D. Nếu f có đạo hàm tại $x_0 \in D$ và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*

Chứng minh. Giả sử x_0 là điểm cực đại. Khi $|\Delta x|$ đủ bé, ta có
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0.$$
Do đó, và vì f có đạo hàm tại x_0 nên
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0$$
và
$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$$
Vậy $f'(x_0) = 0$. □

2.4.3 Định lý Rolle

Định lý 2.4.2. *Cho hàm f thỏa các điều kiện sau:*

1. *Liên tục trên $[a; b]$;*

2. *Có đạo hàm trên $(a; b)$;*

3. $f(a) = f(b)$.

Khi ấy, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh. Theo định lý 1.5.6, tồn tại $x_0, x_1 \in [a;b]$ sao cho

$$m = f(x_0) = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_1) = M.$$

Nếu $m = M$ thì $f(x) = m, \forall x \in [a;b]$ nên $f'(c) = 0, \forall c \in (a;b)$. Ngược lại, khi $m < M$ thì $m \neq f(a)$ hoặc $M \neq f(a)$. Suy ra f đạt cực trị địa phương tại $c = x_0 \in (a;b)$ hoặc tại $c = x_1 \in (a;b)$, và do f có đạo hàm trên $(a;b)$ nên theo định lý 2.4.1, $f'(c) = 0$. □

2.4.4 Định lý Cauchy

Định lý 2.4.3. *Cho hai hàm f và g thỏa các điều kiện sau:*

1. *Liên tục trên $[a;b]$;*
2. *Có đạo hàm trên $(a;b)$.*

Khi ấy, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho

$$[g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c). \tag{2.13}$$

và khi $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a;b)$, ta có

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2.14}$$

Chứng minh. Đặt $\varphi(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$. Hàm φ thỏa mãn các giả thiết của định lý Rolle trên $[a;b]$ nên tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$, nghĩa là, ta có (5.14).

Khi $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì $g(b) - g(a) \neq 0$ vì nếu ngược lại thì, theo định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $g'(x_0) = 0$. Do đó, từ (5.14) suy ra (5.15). □

Trường hợp đặc biệt với hàm $g(x) = x, x \in [a;b]$, ta thu được

2.4.5 Định lý Lagrange

Định lý 2.4.4. *Cho hàm f thỏa các điều kiện sau:*

1. *Liên tục trên $[a;b]$,*
2. *Có đạo hàm trên $(a;b)$.*

Khi ấy, tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{2.15}$$

2.5 QUY TẮC L'HOSPITAL

2.5.1 Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

Định lý 2.5.1. *Cho hai hàm f, g có đạo hàm trên $(a;b)$, $-\infty < b < +\infty$ và*

1. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0,$
2. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a;b),$
3. $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L, -\infty \leqslant L \leqslant +\infty.$

Khi ấy

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Chứng minh. Đặt

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } x \in (a;b), \\ 0, & \text{nếu } x = b, \end{cases}$$

và

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{nếu } x \in (a;b), \\ 0, & \text{nếu } x = b. \end{cases}$$

Hàm f_1 và hàm g_1 thỏa giả thiết định lý Cauchy trên $[x;b]$ và $g_1'(\xi) = g'(\xi) \neq 0$, với mọi $\xi \in (x;b)$, nên tồn tại $x < c < b$ sao cho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x) - f_1(b)}{g_1(x) - g_1(b)} = \frac{f_1'(c)}{g_1'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Cho $x \to b^-$ ta có $c \to b^-$ nên

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

□

Chú thích 2.5.1. 1. Định lý 2.5.1 cũng đúng khi thay $x \to b^-$ bởi $x \to a^+$, việc chứng minh hoàn toàn tương tự.

2. Định lý 2.5.1 cũng đúng khi $b = +\infty$.
Thật vậy, coi $a > 0$. Đặt

$$x = \frac{1}{t}, F(t) = f(x) \text{ và } G(t) = g(x).$$

Ta có $0 < t < a^{-1}$ và hai hàm F, G thỏa các điều kiện của giả thiết định lý 2.5.1 trên $(0; a^{-1})$, cụ thể, F và G khả vi trên $(0; a^{-1})$ và

(a) $\lim\limits_{t \to 0^+} F(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} G(t) = 0$,

(b) $G'(t) = -t^{-2} g'(t^{-1}) \neq 0$ trên $(0; a^{-1})$

(c) $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{F'(t)}{G'(t)} = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{-t^{-2} f'(t^{-1})}{-t^{-2} g'(t^{-1})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L.$

Vậy theo định lý 2.5.1, ta thu được

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L,$$

suy ra

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L.$$

Ví dụ 2.5.1. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.5.2. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$, $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}, \quad (\sin^2 x\sim x^2, x\to 0)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ví dụ 2.5.3. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Giải. Ta có

$$\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Khi $x\to 0$, vì $2x\sin\frac{1}{x}\to 0, \cos x\to 1$ và $\cos\frac{1}{x}$ không có giới hạn nên $\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ không tồn tại giới hạn. Do đó, ta không dùng được quy tắc L'hospital cho giới hạn đã cho. Ta tính giới hạn này như sau

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}.x\sin\frac{1}{x} = 1.0 = 0.$$

2.5.2 Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Định lý 2.5.2. *Cho hai hàm f, g có đạo hàm trên $(a;b)$, $-\infty < b < +\infty$ và*

1. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \infty$,
2. $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a;b)$,
3. $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L, -\infty\leqslant L\leqslant +\infty$.

Khi ấy

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Chứng minh. Trường hợp $-\infty < L < +\infty$. Cho $\epsilon > 0$, bé tùy ý. Vì $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ nên tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho với mọi $x \in (c;b)$ ta có

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\epsilon}{4} \tag{2.16}$$

Áp dụng định lý Cauchy cho hai hàm f và g trên $[c;x], x \in (c;b)$, tồn tại $\theta \in (c;x)$ sao cho

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} \tag{2.17}$$

Kết hợp (2.16) và (2.17) ta thu được

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - L\right| < \frac{\epsilon}{4}, \forall x \in (c;b). \tag{2.18}$$

Ta viết

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(c)-Lg(c)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - L\right]. \tag{2.19}$$

Vì $g(x) \to \infty$ khi $x \to b^-$ nên tồn tại $c_1 \in (c;b)$ sao cho

$$\left|\frac{f(c)-Lg(c)}{g(x)}\right| < \frac{\epsilon}{2}, \left|1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right| < 2, \forall x \in (c_1;b). \tag{2.20}$$

Kết hợp (2.18), (2.19) và (2.20), với mọi $x \in (c_1;b)$ ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\leqslant \left|\frac{f(c)-Lg(c)}{g(x)}\right| + \left|1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right| . \left|\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - L\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + 2.\frac{\epsilon}{4} = \epsilon\end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Trường hợp $L = \pm\infty$. Ta có $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, suy ra $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0^{\pm}$. Áp dụng trường hợp $-\infty < L < +\infty$ ở trên ta thu được $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^{\pm}$, do đó, $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. □

Chú thích 2.5.2. 1. Định lý vẫn đúng khi $b = +\infty$, cách chứng minh hoàn toàn tương tự.

2. Định lý vẫn còn đúng khi thay $x \to b^-$ bởi $x \to a^+$ với $-\infty \leqslant a < +\infty$.

Ví dụ 2.5.4. Tính $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} = \lim_{x\to a^+} \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}} = \lim_{x\to a^+} \frac{e^x-e^a}{(x-a)\,e^a} = \lim_{x\to a^+} \frac{e^x}{1.\,e^a} = 1.$$

Ví dụ 2.5.5. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\tan(\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)}$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\tan(\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}}{\frac{-1}{1-x}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{\sin(\pi x)} = -\infty.$$

Ví dụ 2.5.6. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x}$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}.2\ln x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 0.$$

Ví dụ 2.5.7. Tính $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x}$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Giải. Ta có

$$\frac{(x+\cos x)'}{(x)'} = \frac{1-\sin x}{1}.$$

Khi $x \to \infty$, vì $\sin x$ không có giới hạn nên $\dfrac{1-\sin x}{1}$ cũng không có giới hạn. Do đó, ta không dùng được quy tắc L'hospital cho giới hạn đã cho. Ta tính giới hạn này như sau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

2.5.3 Khử dạng các dạng vô định khác

Trong mục này ta đưa ra cách khử cho các dạng vô định sau đây: $0.\infty$, $\infty - \infty, 1^\infty, \infty^0$ và 0^0.

Khử dạng $0.\infty$

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ trong đó $f(x) \to 0$ và $g(x) \to \infty$ khi $x \to a$.

Ta có hai cách khử như sau:

Cách 1: Bằng cách viết $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, ta thu được dạng vô định $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, đã biết cách khử.

Cách 2: Bằng cách viết $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, ta thu được dạng vô định $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, đã biết cách khử.

Ví dụ 2.5.8. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$, $\quad (0.\infty)$.
Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Ví dụ 2.5.9. Tính $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$, $\quad (0.\infty)$.
Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 1} \sin(x-1)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi x}{2})} = -\frac{2}{\pi}.$$

Khử dạng $\infty - \infty$

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ với $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \to \pm\infty$ và, tương ứng, $g(x) \to \pm\infty$ khi $x \to a$.
Cách khử. Ta viết

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right].$$

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$, có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$:

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = L \neq 1$ thì giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)\left[1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ là dạng xác định;

- Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ thì giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)\left[1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ là dạng vô định $\infty.0$.

- Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ thì giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)\left[1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ cũng không tồn tại.

Ví dụ 2.5.10. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln^2 x), (\infty - \infty)$.
Giải. Vì

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x.\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\frac{1}{x}}{1} = 0$$

nên

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \ln^2 x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln^2 x}{x}\right) = +\infty.1 = +\infty.$$

Ví dụ 2.5.11. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right), \quad (\infty - \infty)$.
Giải. Vì $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\cot x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ nên khi ta viết

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \cot x\left(1 - \frac{\tan x}{x}\right)$$

thì giới hạn có dạng $\infty.0$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \cot x\left(1 - \frac{\tan x}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\tan x}{x}}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = 0.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Khử các dạng $1^\infty, \infty^0, 0^0$

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ với $a \in \overline{\mathbb{R}}$ và khi $x \to a$ thì

$$\begin{cases} f(x) & \to 1 \\ g(x) & \to \infty, \end{cases} \quad \text{hoặc} \begin{cases} f(x) & \to +\infty \\ g(x) & \to 0, \end{cases} \quad \text{hoặc} \begin{cases} f(x) & \to 0^+ \\ g(x) & \to 0. \end{cases}$$

Cách khử. Do e^u liên tục, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x\to a} e^{\ln\left([f(x)]^{g(x)}\right)} \\ &= e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)}. \end{aligned}$$

Giới hạn ở mũ, $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, có dạng $0.\infty$. Nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x) = \alpha$ thì

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^\alpha.$$

Nếu không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ thì giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ cũng không tồn tại.

Ví dụ 2.5.12. Tính $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \quad (1^\infty)$.
Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}.$$

Ví dụ 2.5.13. Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}, \quad (\infty^0)$.
Giải. Ta có

$$\lim_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+2^x)}.$$

Tính giới hạn ở mũ.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+2^x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln 2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln^2 2} = \ln 2. \end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}} = 2.$$

Ví dụ 2.5.14. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}, \quad (0^0)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} &= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x}\\ &= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x} \quad (\sin x \sim x, x \to 0)\\ &= \mathrm{e}^0 = 1, \quad \text{(theo ví dụ 2.5.8)}\end{aligned}$$

2.6 KHẢO SÁT ĐƯỜNG CONG $y = f(x)$

2.6.1 Sự biến thiên của hàm số

Định nghĩa 2.6.1. Cho hàm f xác định trên $(a; b)$.

- Hàm f được gọi là tăng chặt trên $[a; b]$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in [a; b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Hàm f được gọi là giảm chặt trên $[a; b]$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in [a; b], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Điều kiện cần và đủ để hàm tăng

Định lý 2.6.1. *Cho hàm f xác định trên $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$. Hàm f tăng trên $[a; b]$ khi và chỉ khi $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in (a; b)$.*

Chứng minh. Cho f là hàm tăng trên $[a; b]$. Khi đó, ta có

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0, \forall x \in (a; b).$$

Ngược lại, nếu $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in (a; b)$ thì với $x_1, x_2 \in [a; b]$ và $x_1 < x_2$, do định lý Lagrange, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Vậy f là hàm tăng trên $[a; b]$. □

Điều kiện cần và đủ để hàm tăng chặt

Định lý 2.6.2. *Cho hàm f xác định trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$. Hàm f tăng chặt trên $[a;b]$ khi và chỉ khi*

1. $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in (a;b)$
2. *và không tồn tại khoảng $(\alpha;\beta) \subset [a;b]$ sao cho $f'(x) = 0, \forall x \in (\alpha;\beta)$.*

Chứng minh. Cho f là hàm tăng chặt trên $[a;b]$. Khi đó, theo định lý 4.5.1, ta có $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in (a;b)$. Nếu tồn tại khoảng $(\alpha;\beta) \subset [a;b]$ sao cho $f'(x) = 0, \forall x \in (\alpha;\beta)$ thì sẽ có $x_1, x_2 \in (\alpha;\beta) \subset [a;b]$ và $x_1 < x_2$ mà

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0,$$

với $c \in (x_1;x_2) \subset (\alpha;\beta)$. Điều này vô lý vì f tăng chặt trên $[a;b]$.

Ngược lại, giả sử 1. và 2. được thỏa. Khi ấy, với mọi $x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2$, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

với $c \in (x_1;x_2) \subset [a;b]$. Nếu có $x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2$, sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$$

thì do

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \forall x \in (x_1;x_2),$$

ta suy ra $f(x) = f(x_1), \forall x \in (x_1;x_2)$, dẫn đến $f'(x) = 0, \forall x \in (x_1;x_2)$. Vô lý. Vậy f tăng chặt trên $[a;b]$. □

Chú thích 2.6.1. Định lý 4.5.1 và 4.5.2 được phát biểu tương tự cho hàm giảm và giảm chặt.

Ví dụ 2.6.1. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1)$$

Giải. Với $x > 0$, xét hàm

$$f(t) = \ln(t+1) - \frac{t}{t+1}$$

trên $[0; x]$, ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in (0; x).$$

Suy ra, $f(0) < f(x)$, nghĩa là,

$$0 < \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

Vậy với mọi $x > 0$ ta có

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1)$$

2.6.2 Điều kiện của cực trị

2.6.3 Điều kiện cần của cực trị

Đã xét trong định lý Fermat, trang 72.

Điều kiện đủ thứ nhất của cực trị

Định lý 2.6.3. *Cho hàm f xác định tại c và khả vi trên $(a; b) \ni c$, có thể không khả vi tại c.*

1. *Nếu $f'(x) < 0$ trên $(a; c)$ và $f'(x) > 0$ trên $(c; b)$ thì f đạt cực tiểu tại c.*
2. *Nếu $f'(x) > 0$ trên $(a; c)$ và $f'(x) < 0$ trên $(c; b)$ thì f đạt cực đại tại c.*
3. *Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên $(a; b) \setminus \{c\}$ thì f không đạt cực trị tại c.*

Chứng minh. Ta chứng minh trường hợp thứ nhất, hai trường hợp còn lại lập luận tương tự.

Với $x \in (a; c)$, ta có $f'(t) < 0, \forall t \in (x; c)$, do đó, theo định lý 4.5.2, f giảm chặt trên $[x; c]$, suy ra, $f(x) > f(c)$. Tương tự, với $x \in (c; b)$, ta cũng có $f(x) > f(c)$. Vậy $f(x) > f(c)$, với mọi $x \in (a; b) \setminus \{c\}$, nghĩa là, f đạt cực tiểu tại c. ☐

Điều kiện đủ thứ hai của cực trị

Định lý 2.6.4. *Cho hàm f có đạo hàm đến cấp 2 trên $(a;b) \ni x_0$ và $f'(x_0) = 0$.*

1. *Nếu $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0.*
2. *Nếu $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.*

Chứng minh. Công thức Taylor cấp hai với phần dư Peano trong lân cận điểm x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + 0((x - x_0)^2).$$

Suy ra

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^2 \left[\frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{0((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \right].$$

Vì $\frac{0((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \to 0$ khi $x \to x_0$ nên khi x gần x_0 thì $f(x) - f(x_0)$ cùng dấu với $f''(x_0)$, từ đó, suy ra điều phải chứng minh. □

Điều kiện đủ tổng quát của cực trị

Định lý 2.6.5. *Cho hàm f có đạo hàm đến cấp $n - 1$ trên $(a;b) \ni x_0$ và thỏa hai điều kiện:*

1. *Tồn tại $f^n(x_0) \neq 0$.*
2. $f^k(x_0) = 0, \forall k = \overline{1, n-1}$.

Khi ấy:

1. *Nếu n chẵn thì f đạt cực trị tại x_0, cụ thể,*
   (a) *nếu $f^n(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0;*
   (b) *nếu $f^n(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0.*
2. *Nếu n lẻ thì f không đạt cực trị tại x_0*

Chứng minh. Công thức Taylor cấp n với phần dư Peano trong lân cận điểm x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + 0((x - x_0)^n).$$

Suy ra

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{0((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} \right].$$

Vì $\frac{0((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} \to 0$ khi $x \to x_0$ nên khi x gần x_0 thì $f(x) - f(x_0)$ cùng dấu với $(x - x_0)^n . f^{(n)}(x_0)$, từ đó, suy ra điều phải chứng minh. □

2.6.4 Lồi, lõm, điểm uốn

Khái niệm hàm lồi, hàm lõm

Định nghĩa 2.6.2. Hàm f xác định và liên tục trên $(a; b)$ được gọi là lõm trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b), \forall t \in (0; 1)$ ta có

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1 - t)f(x_2). \tag{2.21}$$

Ý nghĩa hình học. Xét phần đồ thị của hàm f lồi trên $(a; b)$. Với $x_1, x_2 \in (a; b)$, giả sử $x_1 < x_2$, hai điểm $A_1(x_1; f(x_1)), A_2(x_2; f(x_2))$ thuộc về phần đồ thị đang xét. Khi ấy, với mọi $t \in (0; 1)$, ta có $x_1 \leqslant tx_1 + (1 - t)x_2 \leqslant x_2$ và điểm $M(tx_1 + (1 - t)x_2; f(tx_1 + (1 - t)x_2))$ nằm trên phần đồ thị giới hạn bởi A_1 và A_2, ta gọi là cung $\overset{\frown}{A_1A_2}$; còn điểm $N(tx_1 + (1 - t)x_2, tf(x_1) + (1 - t)f(x_2))$ thì nằm trên đoạn thẳng A_1A_2, ta gọi là dây trương cung. Bất đẳng thức (4.10) chứng tỏ M nằm dưới N. Vậy $\overset{\frown}{A_1A_2}$ nằm dưới A_1A_2.

Tương tự, ta có

Định nghĩa 2.6.3. Hàm f xác định và liên tục trên $(a; b)$ được gọi là lồi trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b), \forall t \in [0; 1]$ ta có

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1 - t)f(x_2). \tag{2.22}$$

Nhận xét 2.6.1. Trên $(a; b)$, hàm f lồi khi và chỉ khi $-f$ lõm.

Điều kiện cần và đủ để hàm lõm

Định lý 2.6.6. *Hàm f có đạo hàm đến cấp 2 trên $(a;b)$. Khi ấy, hàm f lõm trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (a;b)$.*

Chứng minh. Với $x_1, x_2 \in (a;b), x_1 < x_2$, đặt $x = tx_1 + (1-t)x_2, 0 < t < 1$. Khi ấy, ta có

$$t = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, 1 - t = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
(4.10) \Leftrightarrow f(x) &\leqslant \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) \\
\Leftrightarrow f(x)(x_1 - x_2) &\leqslant (x - x_2) f(x_1) + (x_1 - x) f(x_2) \\
\Leftrightarrow (x - x_2)[f(x) - f(x_1)] &\leqslant (x_1 - x)[f(x_2) - f(x)] \\
\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &\leqslant \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Giả sử có (4.12). Ta chứng minh $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (a;b)$. Trong (4.12), cho $x \to x_1$ ta thu được

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \qquad (2.24)$$

và cho $x \to x_2$ ta được

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2). \qquad (2.25)$$

Kết hợp (4.13) và (4.14) ta sẽ có $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Vậy hàm f' tăng trên (a;b) nên, theo định lý 4.5.1, $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (a;b)$.

Ngược lại, giả sử $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (a;b)$. Với $x \in (x_1; x_2)$, theo định lý Lagrange, ta có

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1) \text{ và } \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(c_2)$$

với $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$. Vì $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (a;b)$ nên f' tăng trên $(a;b)$, do đó $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$. Vậy (4.12) đúng, nghĩa là (4.10) đúng. □

Nhận xét 2.6.2. Do nhận xét 2.6.1, hàm f lồi trên $(a;b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \leqslant 0, \forall x \in (a;b)$.

Điểm uốn

Định nghĩa 2.6.4. Điểm $M(x_0; f(x_0))$ phân cách cung lõm và cung lồi của đồ thị hàm f được gọi là *điểm uốn* của đồ thị.

Từ định lý 2.6.6, ta có

Định lý 2.6.7. *Hàm f có đạo hàm đến cấp 2 trong lân cận x_0. Khi ấy, nếu khi qua x_0, f'' đổi dấu thì điểm $(x_0; f(x_0))$ là điểm uốn.*

2.6.5 Đường thẳng tiệm cận

Cho hàm $f : D \to \mathbb{R}$ có đồ thị là (C). Ta nói (C) có nhánh vô cực nếu có $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ sao cho

$$\lim_{x\to\alpha} \sqrt{x^2 + f^2(x)} = +\infty.$$

Giả sử (C) có nhánh vô cực. Ta có

Định nghĩa 2.6.5. Đường thẳng Δ được gọi là tiệm cận của (C) nếu khoảng cách từ điểm $M \in (C)$ đến Δ tiến tới 0 khi M đi ra vô cực dọc theo đường cong.

Ta có một số kết quả sau:

1. Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, a hữu hạn, thì $x = a$ là đường tiệm cận song song với trục tung, được gọi là tiệm cận đứng.

2. Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ hữu hạn, thì $y = a$ là đường tiệm cận song song với trục hoành, được gọi là tiệm cận ngang.

3. Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ thì điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ, có phương trình $y = ax + b$, là một tiệm cận của (C) là

   $$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$$

   Khi ấy các hệ số a, b được xác định như sau:

   $$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] \tag{2.26}$$

   Ngược lại, nếu hai giới hạn trong (4.15) cùng tồn tại hữu hạn thì $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của (C).

Chú ý 2.6.1. Nếu thay $x \to \infty$ bởi $x \to +\infty(-\infty)$ thì đường thẳng $y = ax + b$ được gọi là *tiệm cận xiên bên phải* (*bên trái*).

Ví dụ 2.6.2. Tìm các đường tiệm cận của đường cong $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$
Giải. Hàm xác định với mọi x nên đồ thị không có tiệm cận đứng. Vì $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang, có thể có tiệm cận xiên. Ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = 1$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(y-x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+x}{(\sqrt[3]{x(x-1)^2})^2 + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} = -2\end{aligned}$$

nên đường cong có tiệm cận xiên hai bên là $y = x - 2$.

Ví dụ 2.6.3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.
Giải. Ta thực hiện như sau

1. **Miền xác định.** $D = \mathbb{R}$.

2. **Sự biến thiên và cực trị.** Ta có

$$y' = \frac{x - \frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}, x \notin \{0; 1\}.$$

Tại $x = 0$ thì

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \infty = y'(0),$$

và tại $x = 1$ thì

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x - 1} = \infty = y'(1).$$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$. Vậy ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. **Tính lồi, lõm và điểm uốn.** Đạo hàm cấp 2:
$$y'' = \frac{-\frac{2}{9}x}{\sqrt[3]{x^8(x-1)^4}},$$
Ta có
$$y'' > 0 \Leftrightarrow 0 < x \neq 1.$$
Do đó, khi $x < 0$ đồ thị lõm; khi $0 < x \neq 1$ đồ thị lồi. Vậy điểm $O(0;0)$ là điểm uốn của đồ thị.

4. **Giới hạn và tiệm cận.** Đồ thị có một tiệm cận xiên là $y = x - \dfrac{2}{3}$

5. **Đồ thị.** Hình 2.2

BÀI TẬP

Đạo hàm

Bài 2.1. Tính đạo hàm các hàm số sau :

1. $y = \dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2. $y = \cos^2\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)$; 3. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

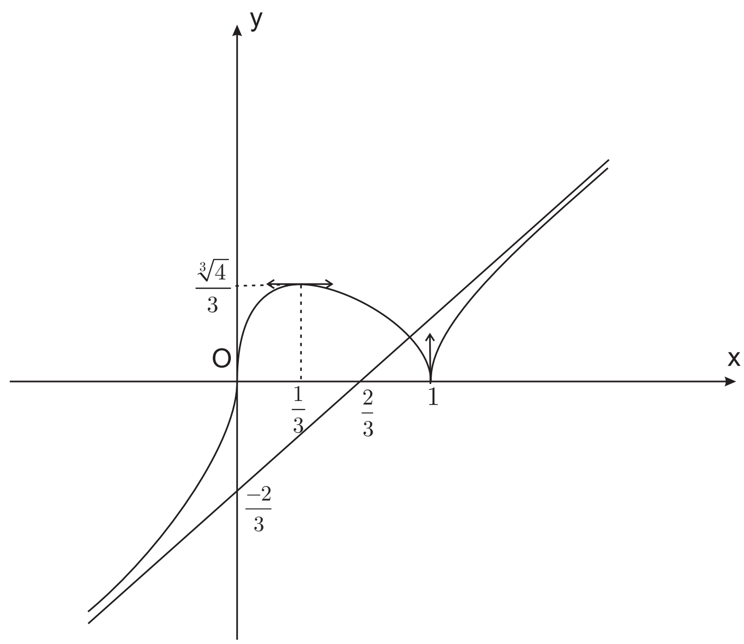
4. $y = \arcsin\dfrac{1}{|x|}$; 5. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$; 6. $y = 2^{\sqrt{\sin^2 x}}$;

7. $y = 3^{2^x}$; 8. $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 9. $y = x^{2^x}$;

10. $y = x^x$; 11. $y = x^{x^x}$; 12. $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

Bài 2.2. Tính đạo hàm $y'(x)$ của các hàm cho theo tham số:

1. $\begin{cases} x &= \ln(1+t^2) \\ y &= t - \arctan t; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x &= 2^{-t} \\ y &= 2^{2t}; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$ $(a > 0)$



Hình 2.2: Đồ thị hàm $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

Bài 2.3. Cho $f(x) = |x-1| + |x+1|$. Tính $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ tại $x_0 = \pm 1$.

Bài 2.4. Cho $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$. Tính $f'_+(0), f'_-(0)$.

Vi phân

Bài 2.5. Tính vi phân các hàm sau:

1. $y = \dfrac{a}{x} + \arctan \dfrac{x}{a}$; 2. $y = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$; 3. $y = \arccos \dfrac{1}{|x|}$.

Bài 2.6. Cho $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Tính $\Delta f(1), df(1)$.

Bài 2.7. Cho $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$. Tại $x_0 = a - b$, tìm Δx để $\Delta y(x_0) = \frac{1}{a-b}$.

Bài 2.8. Tìm a, b sao cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leqslant 0 \\ ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

khả vi tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 2.9. Tìm a, b sao cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geqslant 1 \\ ax^2 + b, & |x| < 1 \end{cases}$$

khả vi tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 2.10. Dùng vi phân cấp một tính gần đúng các giá trị sau:

1. $\sqrt[4]{17}$;
2. $\tan 46°$;
3. $\arctan 0,97$;
4. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{0,983}}$.

Các định lý giá trị trung bình

Bài 2.11. Chứng tỏ phương trình $16x^2 - 64x + 31 = 0$ không thể có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(0; 1)$.

Bài 2.12. Cho $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Chứng tỏ phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Bài 2.13. Chứng minh các bất đẳng thức:

1. $|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$;
2. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|, \forall x, y \in [1; +\infty)$;
3. $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x, \forall x > 0$.

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Bài 2.14. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm sau:

1. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$;
2. $y = x^{\sqrt{x}}$;
3. $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

Bài 2.15. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm cho bởi phương trình tham số:

1. $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t; \\ y = \mathrm{e}^t \sin t. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2); \\ y = t^2. \end{cases}$

Bài 2.16. Tính đạo hàm cấp cao của các hàm sau bằng cách dùng công thức Leibnitz:

1. $y = (x^2+1)\sin x$, tính $y^{(10)}$;
2. $y = \dfrac{e^x}{x}$, tính $y^{(10)}$;
3. $y = x^2 e^{ax}$, tính $y^{(n)}(0)$;
4. $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$, tính $y^{(n)}$.

Bài 2.17. Tính gần đúng các giá trị sau với sai số $\epsilon = 0,001$:

1. $\sqrt[3]{e}$;
2. $\sqrt[3]{29}$;
3. $\cos 41^\circ$.

Bài 2.18. Nếu tính gần đúng $e^{0,51}$ bằng công thức $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ với sai số $\epsilon = 0,001$ thì phải lấy đến bậc mấy?

Bài 2.19. Đánh giá sai số các công thức xấp xỉ sau:

1. $e \approx 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!}$;
2. $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}, |x| < 0,5$.

Tính giới hạn bằng quy tắc L'Hospital

Bài 2.20. Khử các dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 2x}{\sin x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$;
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;
5. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$.

Bài 2.21. Khử các dạng vô định $0.\infty, \infty - \infty$:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$;
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \ln(x-1)$;
3. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + e^{-x} - 2)\cot x$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$;
8. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$.

Bài 2.22. Khử các dạng vô định $1^\infty, \infty^0, 0^0$:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$; 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$; 9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\pi-2x)^{\cos x}$.

Khảo sát hàm số

Bài 2.23. Tìm các khoảng tăng giảm của các hàm sau

1. $y = x(1+\sqrt{x})$; 2. $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 3. $y = x^x$.

Bài 2.24. Tìm a, b để hàm số $y = a\ln x + bx^2 + x$ đạt cực trị tại $x_1 = 1, x_2 = 2$. Khi đó, chứng minh y đạt cực tiểu tại x_1 và cực đại tại x_2.

Bài 2.25. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của các đường cong sau:

1. $y = \ln(1+x^2)$; 2. $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; 3. $y = \mathrm{e}^{\arctan 2x}$.

Bài 2.26. Tìm tiệm cận của các đường cong sau:

1. $y = \dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$; 2. $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$; 3. $y = x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$.

Bài 2.27. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. $y = \sqrt{x(x-1)^2}$; 2. $y = \mathrm{e}^{-x^2}$; 3. $y = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN

Bài 2.1.

1. $y' = \dfrac{3x - \sin 2x}{3x\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}$; 2. $y' = \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}\sin\left(2\sin\dfrac{x}{3}\right)$;
3. $y' = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$; 4. $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

5. $y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ln 2$;

6. $y' = \dfrac{2^{\sqrt{\sin^2 x}} \sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x}}$;

7. $y' = 3^{2^x} \ln 3.2^x \ln 2$;

8. $y' = (\ln x)^{\frac{1}{x}} \dfrac{1 - \ln x. \ln(\ln x)}{x^2 \ln x}$;

9. $y' = x^{2^x} 2^x \left(\dfrac{1}{x} + \ln 2 \ln x \right)$;

10. $y' = x^x (\ln x + 1)$;

11. $y' = x^{x^x} x^x \left(\dfrac{1}{x} + (\ln x + 1) \ln x \right)$;

12. $y' = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left(\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{2 \ln x}{x} \right)$.

Bài 2.2. **1**. $y' = \frac{t}{2}$; **2**. $y' = -2^{3t+1}$; **3**. $y' = \frac{t(t^3-2)}{2t^3-1}$.

Bài 2.3. $f'_+(1) = 2$; $f'_-(1) = 0$; $f'_+(-1) = 0$; $f'_-(1) = -2$.

Bài 2.4. $f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = -1$.

Bài 2.5. **1**. $dy = -\frac{a^3 dx}{x^2(x^2+a^2)}$; **2**. $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$; **3**. $dy = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Bài 2.6. $df(1) = \Delta x, \Delta f(1) = \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x$.

Bài 2.7. $\Delta x = a + b$.

Bài 2.8. $a = 2$ và $b = 0$.

Bài 2.9. $a = -\frac{1}{2}$ và $b = \frac{3}{2}$.

Bài 2.10. **1**. $2,033$; **2**. $1,035$; **3**. $0,770$; **4**. $1,004$.

Bài 2.11. Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt, $x_1 < x_2$, trong khoảng $(0;1)$. Áp dụng định lý Rolle cho hàm f trên đoạn $[x_1; x_2]$. Suy ra điều vô lý.

Bài 2.12. Chú ý $f'(x)$ là đa thức bậc ba nên số nghiệm nhiều nhất là ba. Áp dụng định lý Rolle cho hàm f trên các đoạn : $[-3;-2], [-2;-1]$ và $[-1;0]$

Bài 2.13. Áp dụng định lý Lagrange.

Bài 2.14. **1**. $y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$; **2**. $y'' = \frac{1}{4} x^{\sqrt{x}-1} \left(\ln^2 x + 4 \ln x + 4 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)$; **3**. $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$.

Bài 2.15. **1**. $y'' = \frac{1}{(1+\sin t)^2 a}$; **2**. $y'' = \frac{2\,e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}$; **3**. $y'' = 1 + t^2$.

Bài 2.16. **1**. $y^{(10)} = 90 \sin x + 20x \cos x - (x^2+1) \sin x$; **2**. $y^{(10)} = e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{10}^k \frac{k!}{x^{k+1}}$; **3**. $y^{(n)}(0) = C_n^2 2a^{n-2}$; **4**. $y^{(n)} = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right)$.

Bài 2.17. $6 + 7(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)^3$.

Bài 2.18. **1**. $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2-\frac{15}{16}x^3+\frac{31}{12}x^4+0(x^4)$; **2**. $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+0(x^3)$; **3**. $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+0(x^5)$; **4**. $x+\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{15}x^5+0(x^5)$; **5**. $2\ln 2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{192}x^6+0(x^6)$; **6**. $2+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{288}x^4+0(x^5)$.

Bài 2.19. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^5+\frac{1}{64}x^9-\frac{1}{256}x^{13}+\frac{1}{1024}x^{17}+0(x^{18})$. Suy ra $f^{(17)}(0)=\frac{17!}{1024}$.

Bài 2.20. $\frac{1}{30}-\frac{11}{900}(x-4)+\frac{91}{27000}(x-4)^2-\frac{671}{81000}(x-4)^3+0((x-4)^3)$.

Bài 2.21. **1**. $1,396$; **2**. $3,072$; **3**. $0,755$.

Bài 2.22. $n=4$.

Bài 2.23. **1**. $|R_4|<\frac{3}{5!}$; **2**. $|R_5|=\left|\frac{\sin\theta x}{5!}x^5\right|<\frac{1}{5!}\frac{1}{2^5}$.

Bài 2.24. **1**. 2; **2**. 0; **3**. $\frac{a}{\sqrt{b}}$; **4**. 2; **5**. 0; **6**. $\frac{1}{2}$.

Bài 2.25. **1**. 0; **2**. 0; **3**. 1; **4**. 0; **5**. $\frac{1}{2}$; **6**. $\frac{1}{6}$; **7**. $\frac{2}{3}$; **8**. -1.

Bài 2.26. **1**. 1; **2**. $e^{\frac{1}{3}}$; **3**. e^{-1}; **4**. 2; **5**. 1; **6**. e^{-1}; **7**. 1; **8**. 1; **9**. 1.

Chương3

TÍCH PHÂN

3.1 TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

3.1.1 Nguyên hàm

Định nghĩa 3.1.1. Cho hàm $f(x)$ xác định trên $(a;b)$. Hàm $F(x)$ xác định trên $(a;b)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $(a;b)$ nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b).$$

Chú ý 3.1.1. *a có thể là $-\infty$, và b có thể là $+\infty$.*

Ví dụ 3.1.1.
1. $\sin x$ là nguyên hàm của $\cos x$ trên $(-\infty;+\infty)$,
2. $\arcsin x$ là nguyên hàm của $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ trên $(-1;1)$.

Định lý 3.1.1. *Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $(a;b)$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số.*

Chứng minh. Sinh viên tự chứng minh. □

3.1.2 Tích phân bất định

Định nghĩa 3.1.2. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $(a;b)$. Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên $(a;b)$, ký hiệu là $\int f(x)dx$.

Vậy, theo định lý 3.1.1, ta có

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ với } C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

Trong ký hiệu $\int f(x)dx$ thì $\int$ được gọi là *dấu tích phân*, x là *biến lấy tích phân*, $f(x)$ là *hàm dưới dấu tích phân* và $f(x)dx$ là *biểu thức dưới dấu tích phân*.

Ví dụ 3.1.2. Theo ví dụ 3.1.1, ta có

1. $\int \cos x dx = \sin x + C$ trên $(-\infty; +\infty)$,

2. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ trên $(-1; 1)$.

Chú ý 3.1.2. Trong một vài trường hợp, ta sử dụng khái niệm nguyên hàm trên $[a; b]$ như sau: $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$ nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $(a; b)$ và

$$F'_+(a) = f(a), F'_-(b) = f(b).$$

Tính chất cơ bản

Định lý 3.1.2. *Tích phân bất định có hai tính chất cơ bản:*

1. *Nếu $f(x)$ có nguyên hàm trên $(a; b)$ và k là một hằng số thực thì*

$$\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx.$$

2. *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên hàm trên $(a; b)$ thì*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Bảng các tích phân bất định cơ bản

Từ bảng các đạo hàm cơ bản ta suy ra các tích phân bất định cơ bản.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int e^x dx = e^x + C;$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1;$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C;$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

3.1.3 Phương pháp tính tích phân bất định

Phương pháp phân tích

Phân tích hàm cần lấy tích phân thành tổng các hàm đã biết nguyên hàm rồi dùng tính chất cơ bản thứ 2.

Ví dụ 3.1.3. Tính các tích phân bất định sau:

1. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx;$
2. $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx;$
3. $\int \tan^n x dx, n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0.$

Giải.
1. Ta có

$$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx = \int (x\sqrt{x}+1)dx = \int (x^{\frac{3}{2}}+1)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C$$

2. Ta có

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \left((x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$$

3. Đặt $I_n = \int \tan^n x dx$. Ta có

$$\begin{aligned} I_0 &= \int dx = x + C \\ I_1 &= \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{d(\cos x)}{\sin x} = -\ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

Với $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \left(\tan^n x + \tan^{n-2} x - \tan^{n-2} x\right) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \left(\tan^2 x + 1\right) dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - I_{n-2} \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x + C - I_{n-2} \end{aligned}$$

Phương pháp đổi biến

Phương pháp đổi biến dựa vào định lý sau

Định lý 3.1.3. *Nếu*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

thì

$$\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt = F[\phi(t)] + C,$$

với $\phi(t)$ là hàm khả vi.

Chứng minh.

$$(F[\phi(t)])' = F'[\phi(t)]\phi'(t) = f[\phi(t)]\phi'(t).$$

□

Phương pháp đổi biến thường được sử dụng ở hai dạng sau đây

Dạng 1: Phương pháp đổi biến dưới dấu tích phân. Cần tính tích phân $\int f(x)dx$.

Giả sử có thể tìm được hàm $u = \phi(x)$ khả vi và hàm $g(u)$ sao cho

$$f(x)dx = g[\phi(x)]\phi'(x)dx = g(u)du.$$

Khi đó ta có

$$\int f(x)dx = \int g[\phi(x)]\phi'(x)dx = \int g(u)du. \tag{3.1}$$

Nếu tính được

$$\int g(u)du = G(u) + C$$

thì

$$\int f(x)dx = G[\phi(x)] + C.$$

Dạng 2: Phương pháp thế. Giả sử ta có thể đặt $x = \phi(u)$ với $\phi(u)$ là hàm khả vi và có hàm ngược là $u = \phi^{-1}(x)$. Khi ấy

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(u)]\phi'(u)du = \int g(u)du.$$

Giả sử tìm được

$$\int g(u)du = G(u) + C.$$

Suy ra

$$\int f(x)dx = G[\phi^{-1}(x)] + C.$$

Ví dụ 3.1.4. Tính $\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}dx$.

Giải. Ta có

$$\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}dx = \int \sqrt[3]{(2x+1)^2}\frac{d(2x+1)}{2}.$$

Đặt $u = 2x + 1$ ta có $du = 2dx$, $\frac{du}{2} = dx$. Vậy

$$\int \sqrt[3]{(2x+1)^2}dx = \int \sqrt[3]{u^2}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{2}{3}}du = \frac{1}{2}\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{10}(2x+1)^{\frac{5}{3}} + C$$

Ví dụ 3.1.5. Tính $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx, a > 0.$

Giải. Ta có

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}d\left(\frac{x}{a}\right).$$

Đặt $u = \frac{x}{a}$, suy ra $dx = adu$. Vậy

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

Ví dụ 3.1.6. Tính $\int \sqrt{1-x^2}dx, -1 \leqslant x \leqslant 1.$

Giải. Đặt $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ta có $dx = \cos tdt$ và

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int \cos^2 tdt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt\\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,\end{aligned}$$

vì $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Ví dụ 3.1.7. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Giải. Đặt $x = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Ta có $dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$ và

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2 t+1}}\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\frac{1}{\cos^2 t}dt\\ &= \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos tdt}{\cos^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}}{1-\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}}\right| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\tan^2 t}+\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}-\tan t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right| + C\\ &= \ln(\sqrt{1+x^2}+x) + C.\end{aligned}$$

Chú ý 3.1.3. Trong ví dụ 3.1.7, ta tính được $\int \frac{dt}{\cos t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C$. Biến đổi tiếp tục ta thu được

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Tương tự, ta cũng tính được

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

Ví dụ 3.1.8. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx, x < -1 \vee x > 1.$

Giải. Đặt $x = \frac{1}{\sin t}, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, t \neq 0$. Ta có $dx = \frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt$ và

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sin t}\right)^2 - 1}}\frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt = \int \sqrt{\tan^2 t}\frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt$$
$$= \int |\tan t|\frac{-\cos t}{\sin^2 t}dt = -\int \frac{dt}{|\sin t|}$$

Trường hợp $x < -1$ ứng với $\sin t < 0$ nên

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{\sin t}{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}\right| + C = \ln\left|\frac{\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

Trường hợp $x > 1$ ứng với $\sin t > 0$ nên

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C = -\ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right| + C$$
$$= -\ln\left|\frac{\sin t}{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}\right| + C = -\ln\left|\frac{\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

Tóm lại

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C}$$

Phương pháp tích phân từng phần

Định lý 3.1.4. *Cho các hàm $u(x), v(x)$ khả vi và $v(x)u'(x)$ có nguyên hàm trên $(a;b)$. Khi ấy hàm $u(x)v'(x)$ cũng có nguyên hàm trên $(a;b)$ và*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \tag{3.2}$$

Chứng minh. Ta có

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \forall x \in (a;b)$$

suy ra

$$u'(x)v(x) = [u(x)v(x)]' - u(x)v'(x), \forall x \in (a;b)$$

nên $u'(x)v(x)$ có nguyên hàm trên $(a;b)$ và

$$\int u'(x)v(x)dx = \int \left([u(x)v(x)]' - u(x)v'(x)\right)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

□

Vì $u'(x)dx = du, v'(x)dx = dv$ nên (3.2) có thể được viết ở dạng

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \tag{3.3}$$

Ví dụ 3.1.9. Tính $\int x^2 \ln x dx$.

Giải. Ta có

$$\int x^2\ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x)$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Ví dụ 3.1.10. Tính $\int \arcsin x dx$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x d(\arcsin x) = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.11. Tính $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Với mọi $n \geqslant 1$ ta có

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x . \frac{-2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \right) \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}).\end{aligned}$$

Suy ra

$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với $n = 1$ ta có

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

3.1.4 Tích phân hàm hữu tỷ

Hàm hữu tỷ

Định nghĩa 3.1.3. Hàm hữu tỷ $R(x)$ là hàm có dạng

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

trong đó: $P(x)$ là đa thức bậc m và $Q(x)$ là đa thức bậc n.

- Nếu $m < n$ thì $R(x)$ được gọi là *phân thức thực sự*;
- Nếu $m > n$ thì $R(x)$ được gọi là *phân thức không thực sự.*

Nếu $R(x)$ là phân thức không thực sự thì bằng cách chia đa thức $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được $P(x) = Q(x).S(x) + D(x)$, với $S(x), D(x)$ là hai đa thức và bậc của $D(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$. Khi ấy

$$\int R(x)dx = \int \left(S(x) + \frac{D(x)}{Q(x)}\right) dx = \int S(x)dx + \int \frac{D(x)}{Q(x)}dx.$$

Vì $S(x)$ là đa thức nên tích phân $\int S(x)dx$ được tính dễ dàng. Và như vậy, việc tính tích phân $\int R(x)dx$ được đưa về việc tính tích phân của một phân thức thực sự, $\int \frac{D(x)}{Q(x)}dx$.

Tích phân của phân thức thực sự

Định lý 3.1.5. *Mọi đa thức $Q(x)$ bậc n đều có thể phân tích thành tích các nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai không có nghiệm thực, nghĩa là*

$$Q(x) = a_n(x-a)^{\alpha}\dots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\dots(x^2+rx+s)^{\nu},$$

trong đó, $a, \dots, b, p, q, \dots, r, s \in \mathbb{R}$; $p^2 - 4q < 0, \dots, r^2 - 4s < 0$ và $\alpha + \beta + \dots + 2(\mu + \dots + \nu) = n$

Để dễ định ý, ta giả sử

$$Q(x) = a_n(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}(x^2+rx+s)^{\nu}.$$

Khi ấy, phân thức thực sự $\dfrac{D(x)}{Q(x)}$ được phân tích một cách duy nhất dưới dạng

$$\begin{aligned}\frac{D(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}\\ + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}\\ + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}\\ + \frac{E_1x+F_1}{x^2+rx+s} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{E_\nu x+F_\nu}{(x^2+rx+s)^\nu},\end{aligned} \tag{3.4}$$

trong đó, $A_1, \ldots, A_\alpha, B_1, \ldots, B_\beta, M_1, N_1, \ldots, M_\mu, N_\mu$, và $E_1, F_1, \ldots, E_\nu, F_\nu$ là các hằng số được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

Nhờ phân tích (3.4), mà việc tính tích phân của một phân thức thực sự được đưa về việc tính tích phân của các phân thức sau, được gọi là *phân thức đơn giản*,

$$1.\ \frac{A}{x-b}, \quad 2.\ \frac{A}{(x-b)^n}, \quad 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

ở đó, $p^2 - 4q < 0$.

Ta chỉ cần tính tích phân $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ và $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ vì việc tính tích phân của phân thức thứ nhất và thứ hai là đơn giản. Ta có

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Đặt $u = x + \dfrac{p}{2}$ và $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$ do $p^2 - 4q < 0$. Khi ấy,

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx &= \frac{M}{2}\int \frac{2udu}{u^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{du}{u^2+a^2}\\ &= \frac{M}{2}\ln(u^2+a^2) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx &= \frac{M}{2}\int \frac{2udu}{(u^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}\\ &= -\frac{M}{2(n-1)}(u^2+a^2)^{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)I_n,\end{aligned}$$

với I_n được tính ở ví dụ 3.1.11.

Ví dụ 3.1.12. Tính $I = \displaystyle\int \frac{x^4}{x^3 - x^2 + x - 1}dx$.

Giải. Ta có

$$\frac{x^4}{x^3-x^2+x-1} = x + 1 + \frac{1}{x^3-x^2+x-1} = x + 1 + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Suy ra
$$I = \frac{1}{2}x^2 + x + C_1 + \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}.$$
Ta phân tích $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ thành tổng những phân thức đơn giản,
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \forall x \neq 1\\
\Leftrightarrow\ & 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1), \forall x \neq 1\\
\Leftrightarrow\ & 1 = (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C, \forall x \neq 1\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} A+B &= 0\\ C-B &= 0\\ A-C &= 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{2}\\ B &= -\frac{1}{2}\\ C &= -\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$
Suy ra
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}\\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + C_2
\end{aligned}$$
Vậy $I = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\arctan x + C$

Ví dụ 3.1.13. Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.
Giải. Với mọi $x \notin \{0;1\}$ ta có
$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$
Quy đồng mẫu ta được
$$\begin{aligned}
1 = {} & Ax(x-1)(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1)\\
& + Cx^2(x^2+x+1) + (Dx+E)x^2(x-1), \forall x \notin \{0;1\},
\end{aligned}$$
hay
$$1 = (A+C+D)x^4 + (B+C-D+E)x^3 + (C-E)x^2 - Ax - B, \forall x \notin \{0;1\}$$

Đồng nhất các hệ số, ta có

$$\begin{cases} A + C + D & = 0 \\ B + C - D + E & = 0 \\ C - E & = 0 \\ -A & = 0 \\ -B & = 1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $A = 0, B = -1, C = \frac{1}{3}, D = -\frac{1}{3}$ và $E = \frac{1}{3}$. Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^5 - x^2} &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Suy ra

$$I = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

3.1.5 Tích phân hàm lượng giác

$R(u, v)$ được gọi là biểu thức hữu tỷ đối với u, v nếu $R(u, v)$ được tạo thành từ u, v thông qua các phép toán cộng, trừ, nhân và chia. Trong mục này ta xét tích phân

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx.$$

Phương pháp chung

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$. Ta có

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

và do đó tích phân I được đưa về tích phân hàm hữu tỷ theo biến t,

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

đã biết cách tính ở 3.1.4.

Ví dụ 3.1.14. Tính $I = \displaystyle\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.

Giải. Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}, -\pi < x < \pi$, suy ra $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ta có

$$I = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{3+t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{4}{3+t^2}\right) dt$$
$$= 2\arctan t - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = x - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ví dụ 3.1.15. Tính $I = \displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$.

Giải. Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}, -\pi < x < \pi$, suy ra $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(t^2+1)}dt \\
&= 4\int\left(\frac{1}{t^2+3} - \frac{t}{(t^2+3)(t^2+1)}\right)dt \\
&= 4\int\left(\frac{1}{t^2+3} - \frac{t}{(t^2+3)(t^2+1)}\right)dt \\
&= 4\int\left(\frac{1}{t^2+3} + \frac{1}{4}\frac{2t}{(t^2+3)} - \frac{1}{4}\frac{2t}{(t^2+1)}\right)dt \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln(t^2+3) + \ln(t^2+1) + C \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right) + \ln\frac{\tan^2\frac{x}{2}+3}{\tan^2\frac{x}{2}+1} + C \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right) + \ln(2+\cos x) + C.
\end{aligned}$$

Một số trường hợp đặc biệt

Trong một vài trường hợp, phương pháp chung dẫn đến một tích phân hữu tỷ rất phức tạp. Sau đây, ta trình bày một số trường hợp đặc biệt, ở đó là các phép đổi biến thích hợp tùy theo dạng đặc biệt của $R(\sin x, \cos x)$:

1. Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$.

2. Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$.

3. Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$.

Ví dụ 3.1.16. Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$.

Giải. Xem $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$, ta nhận thấy

$$R(-\sin x, \cos x) = -\frac{\sin^3 x}{2+\cos x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Đặt $t = \cos x, \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x} \sin x dx = \int \frac{t^2-1}{2+t} dt = \int \frac{t^2-4+3}{2+t} dt \\ &= \int \left(t - 2 + \frac{3}{2+t} \right) dt = \frac{1}{2} t^2 - 2t + 3\ln(2+t) + C \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(2+\cos x) + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.17. Tính $I = \displaystyle\int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x - 4\sin^2 x + 4}$.

Giải. Xem $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos x}{\cos^4 x - 4\sin^2 x + 4}$, ta nhận thấy

$$R(\sin x, -\cos x) = -\frac{\cos x}{\cos^4 x - 4\sin^2 x + 4} = -R(\sin x, \cos x).$$

Đặt $t = \sin x, \Rightarrow dt = \cos x dx$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{(1-t^2)^2 - 4t^2 + 4} = \int \frac{dt}{t^4 - 6t^2 + 5} \\ &= \int \frac{dt}{(t^2-1)(t^2-5)} = \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t^2-5} - \frac{1}{t^2-1} \right) dt \\ &= \frac{1}{8\sqrt{5}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}} \right| - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{8\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sin x - \sqrt{5}}{\sin x + \sqrt{5}} \right| - \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.18. Tính $I = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos^2 x(\cos x - \sin x)}$.

Giải. Xem $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x(\cos x - \sin x)}$, ta nhận thấy

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x(\cos x - \sin x)} = R(\sin x, \cos x).$$

Đặt $t = \tan x, \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\sin x}{\cos x(1 - \tan x)} dx = \int \frac{\tan x(1 + \tan^2 x)}{1 - \tan x} dx \\ &= \int \frac{t}{1-t} dt = \int \frac{t - 1 + 1}{1 - t} dt = \int \left(-1 - \frac{1}{t-1}\right) dt \\ &= -t - \ln|t - 1| + C = -\tan x - \ln|\tan x - 1| + C. \end{aligned}$$

Chú ý 3.1.4. Đối với tích phân $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$ thay vì đặt $t = \tan x$ ta nên dùng các công thức hạ bậc.

Ví dụ 3.1.19. Tính $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 x \cos^2 x = \sin^2 x(\sin x \cos x)^2 &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \\ &= \frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \\ &= \frac{1 - \cos 4x}{16} - \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{16} - \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x\right) dx \\ &= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \end{aligned}$$

Như vậy tích phân của một hàm hữu tỷ theo $\sin x, \cos x$ được tính bằng cách đưa về tích phân của một hàm hữu tỷ theo biến lấy tích phân. Đôi khi, ta thực hiện theo chiều ngược lại để tính tích phân của hàm hữu tỷ.

Ví dụ 3.1.20. Tính $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

Giải. Thay vì dùng công thức truy hồi như ở ví dụ 3.1.11, ta đặt $x = \tan t$, suy ra $dx = (1+\tan^2 t)dt$. Khi ấy

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dt}{(1+\tan^2 t)^2} = \int \cos^4 t dt = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2t)^2 dt \\
&= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt \\
&= \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt + \frac{1}{4}\int \cos^2 2t dt \\
&= \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4t) dt \\
&= \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + C,
\end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}
t = \arctan x, \sin 2t &= \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \frac{2x}{1+x^2}, \\
\sin 4t = 2\sin 2t \cos 2t &= 2\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$I = \frac{3}{8}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{8}\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + C.$$

3.1.6 Tích phân một số hàm vô tỷ

Tích phân $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

Tùy thuộc vào dấu của a ta biến đổi tam thức ax^2+bx+c thành tổng hay hiệu hai bình phương. Khi ấy, tích phân I trở thành một trong trong ba dạng sau:

1. $I = \int R\left(x, \sqrt{(\alpha x+\beta)^2+\gamma^2}\right) dx$. Đặt $\alpha x + \beta = \gamma \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, và $t = \arctan \frac{\alpha x+\beta}{\gamma}$.

2. $I = \int R\left(x, \sqrt{(\alpha x+\beta)^2-\gamma^2}\right) dx$. Đặt $\alpha x+\beta = \frac{\gamma}{\cos t}, 0 \leqslant t \leqslant \pi, t \neq \frac{\pi}{2}$, và $t = \arccos \frac{\gamma}{\alpha x+\beta}$.

3. $I = \int R\left(x, \sqrt{\gamma^2-(\alpha x+\beta)^2}\right) dx$. Đặt $\alpha x+\beta = \gamma \sin t, -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, và $t = \arcsin \frac{\alpha x+\beta}{\gamma}$.

Ví dụ 3.1.21. Tính $I = \int \dfrac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$.

Giải. Đặt $x = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, t = \arctan x$. Ta có $dx = (1+\tan^2 t)dt$ và

$$I = \int \frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t(\tan t + \sqrt{1+\tan^2 t})} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t(\sin t+1)}.$$

Đặt $u = \sin t$, suy ra $du = \cos t dt$. Khi ấy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^2(u+1)} = \int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}\frac{1}{u+1}\right) du \\ &= \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u+1}\right) du = -\frac{1}{u} - \ln|u| + \ln|u+1| + C \\ &= -\frac{1}{u} + \ln\left|\frac{u+1}{u}\right| + C = -\frac{1}{\sin t} + \ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t}\right| + C. \end{aligned}$$

Mà $\sin t = \cos t \tan t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ nên

$$I = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C.$$

Ví dụ 3.1.22. Tính $I = \int \dfrac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$.

Giải. Ta có

$$I = \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}.$$

Đặt $2x-1 = 2\sin t, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}, t = \arcsin \dfrac{2x-1}{2}$. Ta có $dx = \cos t dt$ và

$$I = \int \frac{\sin t + \frac{7}{2}}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \cos t dt = \int \frac{\sin t + \frac{7}{2}}{2\cos t} \cos t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin t + \frac{7}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(-\cos t + \frac{7}{2}t\right) + C.$$

Mà

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 = \frac{3+4x-4x^2}{4}$$

và do $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos t = \frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2}$. Suy ra

$$I = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-1}{2}\right) + C.$$

Ví dụ 3.1.23. Tính $I = \int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

Giải. Ta có

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}.$$

Đặt $x+1 = \frac{1}{\cos t}, 0 \leqslant t \leqslant \pi, t \neq \frac{\pi}{2}, t = \arccos\frac{1}{x+1}$. Ta có $dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t}$ và

$$I = \int\left(\frac{1}{\cos t} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int\left(\frac{1}{\cos t} - 1\right)\frac{|\cos t|}{\cos^2 t}dt.$$

Xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $x+1 > 0 \Leftrightarrow \cos t > 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$. Khi ấy

$$I = \int\left(\frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\cos t}\right)dt = \tan t + \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right| + C.$$

Mà

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{(x+1)^2-1} = \sqrt{x^2+2x},\\
\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) &= \frac{1-\tan\frac{t}{2}}{1+\tan\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}}\\
&= \frac{(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})^2}{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-\sin t}{\cos t}\\
&= \frac{1}{\cos t} - \tan t = x+1-\sqrt{x^2+2x},
\end{aligned}$$

nên

$$I = \sqrt{x^2+2x} + \ln\left|x+1-\sqrt{x^2+2x}\right| + C.$$

Trường hợp 2: $x+1<0 \Leftrightarrow \cos t<0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<t\leqslant \pi$. Khi ấy

$$I=-\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{1}{\cos t}\right)dt=-\tan t-\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)\right|+C.$$

Mà

$$\tan t=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=-\sqrt{(x+1)^2-1}=-\sqrt{x^2+2x},$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{\cos t}-\tan t=x+1+\sqrt{x^2+2x}$$

nên

$$\begin{aligned}I&=\sqrt{x^2+2x}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C\\&=\sqrt{x^2+2x}-\ln\left|\frac{(x+1)^2-(x^2+2x)}{x+1-\sqrt{x^2+2x}}\right|+C\\&=\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1-\sqrt{x^2+2x}\right|+C.\end{aligned}$$

Vậy

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x}}=\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1-\sqrt{x^2+2x}\right|+C.$$

Tích phân $I=\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ **với** $R(u,v,w)$ **là hàm hữu tỷ theo** u,v **và** w.

Ta dùng phép đổi biến

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$$

với k là bội số chung nhỏ nhất của m,n. Sau một số phép biến đổi ta đưa tích phân về dạng

$$I=\int R_1(t)dt,$$

với $R_1(t)$ là hàm hữu tỷ theo t.

Ví dụ 3.1.24. Tính $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Giải. Đặt $2x - 1 = t^4$. Ta có $dx = 2t^3 dt$ và

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t^3 dt}{t^2 - t} = 2\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 2\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt \\ &= (t+1)^2 + \ln(t-1)^2 + C = (\sqrt[4]{2x-1}+1)^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + C. \end{aligned}$$

Vậy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = (\sqrt[4]{2x-1}+1)^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + C.$$

Ví dụ 3.1.25. Tính $I = \int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \dfrac{dx}{x}$.

Giải. Đặt $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = t \Leftrightarrow x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Ta có $dx = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$ và

$$\begin{aligned} I &= -4\int t \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = -4\int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt \\ &= -2\int \left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2\arctan t + \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C \\ &= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C. \end{aligned}$$

Vậy

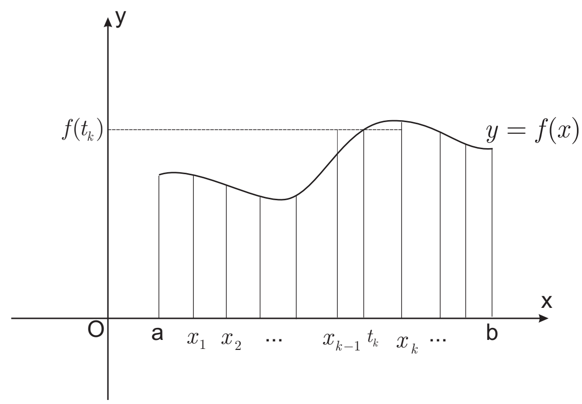
$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C.$$

3.2 TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.2.1 Định nghĩa và tính chất

Bài toán diện tích hình thang cong

Cho hàm $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $[a; b]$. Miền phẳng giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = 0$ và $y = f(x)$ được gọi là hình thang cong (hình 3.2.1). Hãy tính diện tích của hình thang cong này



Hình 3.1: Hình thang cong

- Chia đoạn $[a; b]$ thành n đoạn con bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

  Các đường thẳng $x = x_k(k = \overline{1, n-1})$, chia hình thang cong thành n hình thang cong nhỏ. Hình thang cong nhỏ thứ $k(k = \overline{1, n-1})$ ứng với hai điểm chia liên tiếp x_{k-1} và x_k.

- Vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên với n đủ lớn sao $\max\{x_k - x_{k-1}\}$ đủ nhỏ thì giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[x_{k-1}; x_k]$ thay đổi không đáng kể. Do đó, diện tích của hình thang nhỏ thứ k được xem là bằng diện tích của hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ và $f(t_k)$, với t_k tùy ý thuộc $[x_{k-1}; x_k]$. Vậy diện tích của hình thang cong được xấp xỉ bằng

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = S_n.$$

- Khi $n \to \infty$ sao cho $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$ mà $S_n \to S$, không phụ thuộc vào cách chia $[a; b]$ và cách chọn các t_k thì S được gọi là diện tích của hình thang cong.

Khái niệm tích phân xác định

Định nghĩa 3.2.1. Cho hàm số $f(x)$ xác định và bị chận trên $[a;b]$. Chia $[a;b]$ thành những đoạn nhỏ bằng các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

và lập tổng

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k,$$

trong đó t_k tùy ý thuộc $[x_{k-1};x_k], k = \overline{1, n-1}$. Tổng I_n được gọi là tổng tích phân Riemann.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$ mà $I_n \to I$, không phụ thuộc vào cách chia $[a;b]$ và cách chọn các t_k, thì ta nói hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a;b]$ và I được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$, được ký hiệu là

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Trong ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$, ta gọi $[a;b]$ là khoảng lấy tích phân, a là cận dưới, b là cận trên của tích phân, x là biến số lấy tích phân, $f(x)$ là hàm số lấy tích phân và $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân.

Điều kiện đủ để hàm khả tích

Định lý 3.2.1. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì nó khả tích trên $[a;b]$.*

Định nghĩa 3.2.2. Hàm số $f(x)$ được gọi liên tục từng khúc trên $[a;b]$ nếu $f(x)$ chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn loại một và không có điểm gián đoạn loại hai trên $[a;b]$.

Ta thừa nhận định lý sau

Định lý 3.2.2. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục từng khúc trên $[a;b]$ thì nó khả tích trên $[a;b]$.*

Định lý 3.2.1 và định lý 3.2.2 cho ta lớp khá nhiều các hàm khả tích. Tất cả các hàm sơ cấp đều khả tích.

Ví dụ 3.2.1. Tính $\int_0^1 x dx$.
Giải. Vì $f(x) = x$ liên tục trên $[0;1]$ nên khả tích trên đó. Chia $[0;1]$ bởi các điểm $x_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1,n}$:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{k}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1.$$

Ta có $\Delta x_k = \frac{1}{n}, k = \overline{1,n}$. Trên $[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$ ta lấy $t_k = \frac{k}{n}$. Khi ấy

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{1}{2}.$$

Vậy

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3.2.2. Tính $\int_0^1 a^x dx, 0 < a \neq 1$.
Giải. Vì $f(x) = a^x$ liên tục trên $[0;1]$ nên khả tích trên đó. Chia $[0;1]$ bởi các điểm $x_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1,n}$:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{k}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1.$$

Ta có $\Delta x_k = \frac{1}{n}, k = \overline{1,n}$. Trên $[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$ ta lấy $t_k = \frac{k}{n}$. Khi ấy

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} a^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (a^{\frac{1}{n}})^k = \frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}}\frac{1-a}{1-a^{\frac{1}{n}}} \to \frac{a-1}{\ln a}.$$

Vậy

$$\int_0^1 a^x dx = \frac{a-1}{\ln a}, 0 < a \neq 1.$$

Chú ý 3.2.1. 1. Do định nghĩa tích phân xác định và qua ví dụ 3.2.1, ví dụ 3.2.2 ta có thể kết luận tích phân $\int_a^b f(x)dx$ nếu tồn tại thì không phụ thuộc vào biến lấy tích phân, nghĩa là,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(u)du.$$

2. Khi định nghĩa tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$ ta giả thiết $a < b$. Bây giờ, nếu $a > b$ ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

và nếu $a = b$ thì ta định nghĩa

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Tính chất của tích phân xác định

Định lý 3.2.3. *Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a;b]$. Ta có*

1. *$f(x) + g(x), c.f(x)$, với $c \in \mathbb{R}$, là các hàm khả tích trên $[a;b]$ và*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx.$$

2. *Nếu $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a;b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$. Suy ra nếu $f(x) \geqslant g(x), \forall x \in [a;b]$, thì*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

3. *Hàm $|f(x)|$ khả tích trên $[a;b]$ và*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

4. *Với mọi $c \in (a;b)$, $f(x)$ khả tích trên $[a;c]$, trên $[c;b]$ thì*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Chứng minh. Chia $[a;b]$ bởi các điểm $x_k, k = \overline{1,n}$, sao cho khi $n \to \infty$ thì $\max \Delta x_k \to 0$. Gọi $S_n(f)$ là tổng tích phân Riemann của $f(x)$ ứng với cách chia đang xét.

1. Do $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a;b]$, ta có

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)dx,$$
$$S_n(g) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\Delta x_k \to \int_a^b g(x)dx.$$

Do đó,

$$S_n(c.f) = \sum_{k=1}^{n} cf(t_k)\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \to c\int_a^b f(x)dx,$$

và

$$\begin{aligned} S_n(f+g) &= \sum_{k=1}^{n} [f(t_k)+g(t_k)]\Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\Delta x_k \\ &= S_n(f) + S_n(g) \to \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

2. Vì $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a;b]$ nên

$$0 \leqslant S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \to \int_a^b f(x)dx.$$

Suy ra nếu $f(x) \geqslant g(x), \forall x \in [a;b]$ thì

$$0 \leqslant \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Ta công nhận 3 và 4. □

Kết hợp định lý 3.2.3 và định lý 1.5.7 ta có

Định lý 3.2.4. *Cho $f(x)$ là hàm số khả tích trên $[a;b]$. Ta có*

1. *Nếu $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất, m, và giá trị lớn nhất, M, trên $[a;b]$ thì*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

2. *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên* $[a;b]$ *thì tồn tại* $c \in [a;b]$ *sao cho*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

3.2.2 Công thức Newton - Leibnitz

Tích phân với cận trên thay đổi

Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[a;b]$. Với mỗi $x \in [a;b]$, đặt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Ta có

Định lý 3.2.5. $F(x)$ *là hàm liên tục trên* $[a;b]$. *Hơn nữa, nếu* $f(x)$ *liên tục tại* $x \in (a;b)$ *thì* $F(x)$ *có đạo hàm tại* x *và* $F'(x) = f(x)$.

Chứng minh. Đặt $M = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$. Với $a \leqslant x < x' \leqslant b$, ta có

$$\left|F(x') - F(x)\right| = \left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| \leqslant \int_x^{x'} |f(t)|dt \leqslant M(x'-x).$$

Suy ra $F(x)$ liên tục trên $[a;b]$.

Hơn nữa, với h đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt.\end{aligned}$$

Khi $f(x)$ liên tục tại $x \in (a;b)$, nghĩa là, ứng với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ với mọi t, $|t-x| < \delta$, thì với $|h| < \delta$, ta có

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \epsilon dt = \epsilon,$$

nghĩa là,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

□

Chú ý 3.2.2. Trong chứng minh trên, nếu $x = a$ thì dễ thấy $F'_+(a) = f(a)$; tương tự ta cũng có $F'_-(b) = f(b)$.

Từ đó, do định lý 3.2.5, ta có

Hệ quả 3.2.1. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì nó có nguyên hàm trên $[a;b]$, chẳng hạn là $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.*

Công thức Newton - Leibnitz

Định lý 3.2.6. *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đó thì*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \tag{3.5}$$

Chứng minh. Vì $G(x)$ và $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ cùng là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$ nên

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) + C, \forall x \in [a;b]. \tag{3.6}$$

Trong (3.6), cho $x = a$ ta được

$$0 = \int_a^a f(t)dt = G(a) + C \Leftrightarrow C = -G(a).$$

Thay $C = -G(a)$ vào trong (3.6) và cho $x = b$, ta thu được

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

□

Chú ý 3.2.3. Công thức (3.5) được gọi là Công thức Newton - Leibnitz. Ta ký hiệu

$$G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b.$$

Khi đó, (3.5) có dạng

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)}$$

3.2.3 Phương pháp tính tích phân xác định

Phương pháp đổi biến

Định lý 3.2.7. *Nếu*

1. $f(x)$ *liên tục trên* $[a; b]$,
2. $u(t)$ *và* $u'(t)$ *liên tục trên* $[\alpha; \beta]$,
3. $u([\alpha; \beta]) \subseteq [a; b]$ *và* $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$,

thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt} \tag{3.7}$$

Chứng minh. Trước hết, các tích phân trong (3.7) là tồn tại vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f[u(t)]u'(t)$ liên tục trên $[\alpha; \beta]$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Suy ra $G(t) = F[u(t)]$ là nguyên hàm của $f[u(t)]u'(t)$ trên $[\alpha; \beta]$. Theo công thức Newton - Leibnitz ta có

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3.8}$$

Mặt khác, theo công thức Newton - Leibnitz ta cũng có

$$\int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F[u(\beta)] - F[u(\alpha)] = F(b) - F(a). \tag{3.9}$$

Từ (3.8) và (3.9) suy ra

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt.$$

Định lý được chứng minh xong. □

Ví dụ 3.2.3. Tính $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$,.

Giải. Đặt $x = \sin t$, $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Suy ra $dx = \cos t dt$ và $x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Các giả thiết của định lý 3.2.7 được thỏa mãn, ta có

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt$$
$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

Ví dụ 3.2.4. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$.
Giải. Đặt $t = \sin x$. Suy ra $dt = \cos x dx$ và $x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Các giả thiết của định lý 3.2.7 được thỏa mãn, ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 3.2.5. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[-a;a], a>0$ thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } f(x) \text{ lẻ;} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{nếu } f(x) \text{ chẵn.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Giải. Ta có
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$
Mà
$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$$
nên
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} [f(x)+f(-x)]dx.$$
Dùng định nghĩa hàm chẵn, hàm lẻ và định lý 3.2.3 ta suy ra (3.10).

Phương pháp tích phân từng phần

Định lý 3.2.8. *Cho $u(x), v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Ta có*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \tag{3.11}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]\big|_a^b &= \int_a^b [u(x)v(x)]'dx \\ &= \int_a^b [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3.2.6. Tính $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x dx$.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x. \end{cases}$$

Các giả thiết của định lý 3.2.8 được thỏa mãn, ta có

$$\int_0^\pi x\sin x dx = (-x\cos x)\big|_0^\pi + \int_0^\pi x\cos x dx = \pi + \sin x\big|_0^\pi = \pi.$$

Ví dụ 3.2.7. Tính $\displaystyle\int_0^1 \arctan x dx$.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x. \end{cases}$$

ta có

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \arctan x dx &= (x\arctan x)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.2.8. Tính $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x. \end{cases}$$

Ta có

$$\int_1^e \ln x dx = (x\ln x)\big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1.$$

Ví dụ 3.2.9. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x dx$.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \mathrm{e}^x\, dx \\ v = \sin x. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x dx &= (\mathrm{e}^x \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\, d(\cos x) \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + (e^x \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x dx \end{aligned}$$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}\right).$$

3.3 TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Đối với tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ thì hai điều kiện buộc phải có là

1. Miền lấy tích phân là $[a;b]$ bị chặn,
2. Hàm lấy tích phân, $f(x)$, phải là hàm bị chặn trên $[a;b]$.

Trong mục này, chúng ta mở rộng khái niệm tích phân khi một trong hai điều kiện trên bị vi phạm. Cụ thể, ta sẽ khảo sát hai loại tích phân sau:

Loại 1: Miền lấy tích phân là miền không bị chặn, gồm:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^b f(x)dx \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Loại 2: Hàm lấy tích phân không bị chặn tại một điểm trong miền lấy tích phân $[a;b]$, tức là, $\int_a^b f(x)dx$ với $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ hay $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$, hoặc $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ với $a < c < b$.

3.3.1 Tích phân suy rộng loại một

Các định nghĩa

Định nghĩa 3.3.1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;+\infty)$ và $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a;b], b \in [a;+\infty)$. Đặt

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx, b \in [a;+\infty).$$

Nếu $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = \alpha \in \mathbb{R}$ thì ta nói α là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $[a;+\infty)$ và ký hiệu là

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \alpha.$$

Khi đó, ta cũng nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Ngược lại, khi $F(b)$ không có giới hạn hữu hạn khi $b \to +\infty$, ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Như vậy khi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ ta có

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ 3.3.1. Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

Giải. Hàm $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ xác định trên $[0;+\infty)$, và liên tục nên khả tích trên $[0;b], \forall b \geqslant a$. Ta có

$$F(b) = \int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^b = \arctan b$$

và

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ hội tụ và $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.3.2. Xét tính hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \alpha > 0.$

Giải. Hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ xác định trên $[1; +\infty)$, và liên tục nên khả tích trên $[1; b], \forall b \geqslant 1$. Ta có

$$F(b) = \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \ln b, & \text{nếu } \alpha = 1; \\ \dfrac{b^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}, & \text{nếu } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

nên khi $0 < \alpha \leqslant 1$ thì $F(b) \to +\infty$ và khi $\alpha > 1$ thì $F(b) \to \dfrac{1}{\alpha - 1}$ Vậy

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Tương tự, ta có các định nghĩa cho các dạng tích phân còn lại

Định nghĩa 3.3.2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(-\infty; a]$ và khả tích trên mọi đoạn $[b; a], b \in (-\infty; a]$. Nếu $F(b) = \displaystyle\int_b^a f(x)dx$ có giới hạn hữu hạn là β khi $b \to -\infty$ thì ta nói β là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; a]$ và ký hiệu là

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \beta.$$

Khi đó, ta cũng nói $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hội tụ.

Ngược lại, khi $F(b)$ không có giới hạn hữu hạn khi $b \to -\infty$, ta nói $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ phân kỳ.

Như vậy khi $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hội tụ ta có

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)dx.$$

Định nghĩa 3.3.3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(-\infty; +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a; b], -\infty < a \leqslant b < +\infty$. Nếu $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ và $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ và có giá trị lần lượt là β và α thì ta nói $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \beta$ hội tụ và có giá trị là $\beta + \alpha$.

Ví dụ 3.3.3. Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx$

Giải. Hàm $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ xác định trên $(-\infty; 0]$, và liên tục nên khả tích trên $[b; 0], \forall b \leqslant a$. Ta có

$$F(b) = \int_{b}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_{b}^{0} = -\arctan b$$

và

$$\lim_{b\to-\infty} F(b) = \lim_{b\to-\infty} -\arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx$ hội tụ và $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.3.4. Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Giải. Hàm $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ xác định trên $(-\infty; +\infty)$, và liên tục nên khả tích trên $[a; b], \forall -\infty < a \leqslant b < +\infty$. Ta có $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx$ và $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ cùng hội tụ nên $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ hội tụ và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Sử dụng công thức Newton - Leibnitz

Giả sử tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; +\infty)$. Khi đó

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(a)]$$
$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

Đặt $\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$. Một cách hình thức, ta viết

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Tương tự, nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty; a]$, ta có

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^a.$$

Các định lý so sánh

Trong mục này ta xét hàm số $f(x)$ xác định, không âm trên $[a; +\infty)$ và $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a; b], b \in [a; +\infty)$. Khi đó

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

là hàm không âm, tăng trên $[a; +\infty)$ vì với mọi $a \leqslant b < b'$ ta có

$$F(b') - F(b) = \int_b^{b'} f(x)dx \geqslant 0.$$

Do đó, $F(b)$ tồn tại giới hạn hữu hạn khi $b \to +\infty$ khi và chỉ khi

$$\exists M \in \mathbb{R}, F(b) \leqslant M, \forall b \geqslant a.$$

Ta có

Định lý 3.3.1.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \exists M > 0, \int_a^b f(x)dx \leqslant M, \forall b \geqslant a.$$

Định lý 3.3.2 (Tiêu chuẩn so sánh 1). *Cho hàm số $f(x), g(x)$ xác định, không âm và khả tích trên mọi đoạn $[a;b], b \in [a;+\infty)$ sao cho $f(x) \leqslant g(x), \forall x \geqslant a$. Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và khi đó*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Chứng minh. Vì

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx, \forall b \geqslant a$$

nên khi $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx \leqslant M, \forall b \geqslant a.$$

Vậy $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và trong bất đẳng thức

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx, \forall b \geqslant a$$

cho $b \to +\infty$ ta được

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

□

Ví dụ 3.3.5. Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$

Giải. Vì

$$0 \leqslant \frac{\cos^2 x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}, \forall x \geqslant 0,$$

mà $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ hội tụ nên $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ hội tụ.

Chú ý 3.3.1. Trong định lý 3.3.2, nếu ta thay điều kiện $f(x) \leqslant g(x), \forall x \geqslant a$ bởi điều kiện $f(x) \leqslant g(x), \forall x \geqslant M$, với $a < M$ khá lớn thì kết luận về tính hội tụ của $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ vẫn còn đúng.

Định lý 3.3.3 (Tiêu chuẩn so sánh 2). *Cho hàm số $f(x), g(x)$ xác định, không âm và khả tích trên mọi đoạn $[a;b], b \in [a;+\infty)$. Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

1. *Nếu $K = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*
2. *Nếu $0 < K < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*
3. *Nếu $K = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.*

Chứng minh. 1. $K = 0$, với $\epsilon > 0$, tồn tại $M > a$ sao cho

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon, \forall x \geqslant M,$$

hay

$$f(x) < \epsilon.g(x), \forall x \geqslant M.$$

Do đó, nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} \epsilon.g(x)dx$ hội tụ nên theo chú ý 3.3.1, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

2. $0 < K < +\infty$, với $0 < \epsilon < K$ tồn tại $M > a$ sao cho

$$K - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \epsilon, \forall x \geqslant M,$$

hay

$$(K-\epsilon)g(x) < f(x) < (K+\epsilon)g(x), \forall x \geqslant M.$$

Do đó, theo chú ý 3.3.1, nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} (K-\epsilon)g(x)dx$ hội tụ, suy ra $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ; ngược lại, nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} (K+\epsilon)g(x)dx$ hội tụ, suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

3. $K = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Áp dụng trường hợp 1. □

Ví dụ 3.3.6. Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.
Giải. Khi $x \to +\infty$ ta có

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^2}$$

mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ hội tụ.

Ví dụ 3.3.7. Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}dx$.
Giải. Khi $x \to +\infty$ ta có

$$\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\arctan x \sim \frac{x}{\sqrt{x^3}}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\pi}{2}$$

mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ phân kỳ nên $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}dx$ phân kỳ.

Hội tụ tuyệt đối

Định lý 3.3.4. *Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả tích trên mọi đoạn $[a;b], b \in [a;+\infty)$. Nếu $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.*

Chứng minh. Với mọi $x \geqslant a$, đặt

$$f^+(x) = \frac{1}{2}\left[|f(x)| + f(x)\right] \text{ và } f^-(x) = \frac{1}{2}\left[|f(x)| - f(x)\right]$$

ta có

$$0 \leqslant f^+(x), f^-(x) \leqslant |f(x)|, \forall x \geqslant a.$$

Do đó, nếu $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^+(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^-(x)dx$ hội tụ. Khi đó, vì $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ nên suy ra $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. □

Ví dụ 3.3.8. Khảo sát tính hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2}$.
Giải. Vì $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}, \forall x \geqslant 1$ và $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2}$ hội tụ.

Ví dụ 3.3.9. Khảo sát tính hội tụ của hai tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$; 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$.

Giải.

1. Với mọi $b \geqslant 1$ ta có

$$F(b) = \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^b \frac{1}{x} d(-\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^b + \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$
$$= \cos 1 - \frac{\cos b}{b} + \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Suy ra

$$\lim_{b \to +\infty} F(b) = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx < +\infty.$$

Vậy tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ hội tụ.

2. Vì $|\sin x| \geqslant \sin^2 x, \forall x \geqslant 1$ nên

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 x}{x} \leqslant \frac{|\sin x|}{x}, \forall x \geqslant 1.$$

Ta chứng tỏ $\displaystyle\int_1^b \frac{\sin^2 x}{x} dx$ phân kỳ. Với mọi $b \geqslant 1$, ta có

$$F(b) = \int_1^b \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^b \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \int_1^b \frac{dx}{x} - \int_1^b \frac{\cos 2x dx}{x}.$$

Dễ thấy, tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x}$ hội tụ, do đó,

$$\lim_{b \to +\infty} F(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} - \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\cos 2x dx}{x}$$
$$= \lim_{b \to +\infty} \ln b - \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\cos 2x dx}{x}$$

$$= +\infty - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x} = +\infty.$$

Vậy $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ phân kỳ.

3.3.2 Tích phân suy rộng loại hai

Các định nghĩa

Định nghĩa 3.3.4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(a;b]$, khả tích trên mọi đoạn $[t;b], a < t \leqslant b$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$. Đặt

$$F(t) = \int_t^b f(x)dx, a < t \leqslant b.$$

Nếu $F(t)$ có giới hạn hữu hạn là α khi $t \to a^+$ thì ta nói α là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$, và ký hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha.$$

Khi đó, ta cũng nói $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Ngược lại, khi $F(t)$ không có giới hạn hữu hạn khi $t \to a^+$, ta nói $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Như vậy khi $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Ví dụ 3.3.10. Khảo sát tính hội tụ tích phân $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải. Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ xác định trên $(-1;0]$ và $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Vì $f(x)$ liên tục trên mọi đoạn $[t;0], -1 < t \leqslant 1$, nên khả tích trên đó, ta có

$$F(t) = \int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_t^0 = -\arcsin t.$$

Suy ra

$$\lim_{t\to -1^+} F(t) = -\lim_{t\to -1^+} \arcsin t = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tích phân $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ và $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.3.11. Khảo sát tính hội tụ tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$.

Giải. Hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ xác định trên $(0;1]$ và $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Vì $f(x)$ liên tục trên mọi đoạn $[t;1], 0 < t \leqslant 1$, nên khả tích trên đó, ta có

$$F(t) = \int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\ln t, & \alpha = 1 \\ \dfrac{1-t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

với $0 < t \leqslant 1$.

- $\alpha = 1$, vì $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F(t) = -\lim_{t\to 0^+} \ln t = +\infty$ nên $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ phân kỳ.
- $\alpha > 1$, vì $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$ nên $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ phân kỳ.
- $\alpha < 1$, vì $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

Vậy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Khi đó,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Tương tự ta cũng có

Định nghĩa 3.3.5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b)$, khả tích trên mọi đoạn $[a;t], a \leqslant t < b$ và $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Đặt

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx, a \leqslant t < b.$$

Nếu $F(t)$ có giới hạn hữu hạn là β khi $t \to b^-$ thì ta nói β là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$, và ký hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx = \beta.$$

Khi đó, ta cũng nói $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Ngược lại, khi $F(t)$ không có giới hạn hữu hạn khi $t \to b^-$, ta nói $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Như vậy khi $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Ví dụ 3.3.12. Khảo sát tính hội tụ tích phân $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Giải. Hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ xác định trên $[0;1)$ và $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$. Vì $f(x)$ liên tục trên mọi đoạn $[0;t], 0 \leqslant t < 1$, nên khả tích trên đó, ta có

$$F(t) = \int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_t^0 = -\arcsin t.$$

Suy ra

$$\lim_{t\to 1^-} F(t) = -\lim_{t\to 1^-} \arcsin t = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tích phân $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ và $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\pi}{2}$.

Định nghĩa 3.3.6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]\backslash\{c\}, a < c < b$, khả tích trên các đoạn $[a;t], \forall t \in [a;c)$ và $[m;b], \forall m \in (c;b]$, và $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$. Nếu $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ, ta nói $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và đặt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ví dụ 3.3.13. Khảo sát tính hội tụ tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}, \alpha > 0.$

Giải. Khảo sát hai tích phân: $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$ và $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$.

Xét $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$. Với $0 \leqslant b < 1$, ta có

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^\alpha} \\ &= \begin{cases} \ln|b-1|, & \alpha = 1; \\ \dfrac{(b-1)^{1-\alpha} + (-1)^{2-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $F(b)$ có giới hạn hữu hạn, nghĩa là, $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $0 < \alpha < 1$ và khi đó

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \frac{(-1)^{2-\alpha}}{1-\alpha}$$

Tương tự, xét $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$. Với $1 < b \leqslant 2$, ta có

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_b^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} \\ &= \begin{cases} -\ln|b-1|, & \alpha = 1; \\ \dfrac{1-(b-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $0 < \alpha < 1$ và khi đó

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Như vậy

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Khi ấy,

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \frac{(-1)^{2-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} = \frac{(-1)^{2-\alpha}+1}{1-\alpha}.$$

Sử dụng công thức Newton - Leibnitz

Giả sử $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân suy rộng tại $x = a$, hội tụ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b]$. Khi ấy ta có

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx \\ &= \lim_{t\to a^+} [F(b) - F(t)] \\ &= F(b) - \lim_{t\to a^+} F(t).\end{aligned}$$

Đặt $F(a) = \lim\limits_{t\to a^+} F(t)$ ta thu được

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tương tự đối với tích phân $\int_a^b f(x)dx$ suy rộng tại $x = b$, hội tụ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b)$, ta cũng có

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

với $F(b) = \lim\limits_{t\to b^-} F(t)$.

Các định lý so sánh

Trong phần này ta khảo sát tích phân $\int_a^b f(x)dx$ suy rộng tại $x = a$, và $f(x) \geqslant 0$ trên $(a;b]$.

Định lý 3.3.5.

$$\int_a^b f(x)dx \textit{ hội tụ } \Leftrightarrow \exists M > 0, \int_t^b f(x)dx \leqslant M, \forall t \in (a;b].$$

Chứng minh. Hàm

$$F(t) = \int_t^b f(x)dx$$

giảm trên $(a; b]$ vì với mọi $a < t < t' \leqslant b$ ta có

$$F(t') - F(t) = -\int_t^{t'} f(x)dx \leqslant 0,$$

và do $F(t)$ bị chặn trên bởi M trên $(a; b]$ nên, theo chú thích **??**, tồn tại giới hạn hữu hạn của $F(t)$ khi $t \to a^+$. □

Định lý 3.3.6 (Tiêu chuẩn so sánh 1). *Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ không âm trên $(a; b]$ sao cho $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in (a; b]$. Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và khi đó,*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Chứng minh. Vì

$$\int_t^b f(x)dx \leqslant \int_t^b g(x)dx, \forall t \in (a; b]$$

nên khi $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\int_t^b f(x)dx \leqslant \int_t^b g(x)dx \leqslant M, \forall t \in (a; b].$$

Vậy $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và trong bất đẳng thức

$$\int_t^b f(x)dx \leqslant \int_t^b g(x)dx, \forall t \in (a; b]$$

cho $t \to a^+$ ta được

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

□

Chú ý 3.3.2. Trong định lý 3.3.6, nếu ta thay điều kiện $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in (a; b]$ bởi điều kiện $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in (a; a + \delta)$, với $\delta > 0$ bé thì kết luận về tính hội tụ của $\int_a^b f(x)dx$ vẫn còn đúng.

Ví dụ 3.3.14. Khảo sát tính hội tụ tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$.

Giải. Ta có
$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0;1],$$
mà $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ hội tụ.

Định lý 3.3.7 (Tiêu chuẩn so sánh 2). *Cho hàm số $f(x), g(x)$ xác định, không âm và khả tích trên mọi đoạn $[t;b], \forall t \in (a;b]$. Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)*
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

1. *Nếu $K = 0$ và $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.*
2. *Nếu $0 < K < +\infty$ thì $\int_a^b g(x)dx$ và $\int_a^b f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*
3. *Nếu $K = +\infty$ và $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.*

Chứng minh. 1. $K = 0$, với $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$\frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon, \forall x \in (a; a+\delta),$$
hay
$$f(x) < \epsilon.g(x), \forall x \in (a; a+\delta).$$
Do đó, nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b \epsilon.g(x)dx$ hội tụ nên, theo định lý 3.3.6, $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

2. $0 < K < +\infty$, với $0 < \epsilon < K$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho
$$K - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \epsilon, \forall x \in (a; a+\delta),$$
hay
$$(K-\epsilon)g(x) < f(x) < (K+\epsilon)g(x), \forall x \in (a; a+\delta).$$

Do đó, theo định lý 3.3.6, nếu $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b (K-\epsilon)g(x)dx$ hội tụ, suy ra $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ; ngược lại, nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b (K+\epsilon)g(x)dx$ hội tụ, suy ra $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

3. $K = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Áp dụng trường hợp 1. □

Ví dụ 3.3.15. Khảo sát tính hội tụ tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$.

Giải. Khi $x \to 0$, ta có

$$\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

mà $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$ hội tụ.

Hội tụ tuyệt đối

Định lý 3.3.8. *Cho hàm số $f(x)$ xác định và khả tích trên mọi đoạn $[t;b]$, $t \in (a;b]$. Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.*

Chứng minh. Với mọi $x \in (a;b]$, đặt

$$f^+(x) = \frac{1}{2}\left[|f(x)| + f(x)\right] \text{ và } f^-(x) = \frac{1}{2}\left[|f(x)| - f(x)\right]$$

ta có

$$0 \leqslant f^+(x), f^-(x) \leqslant |f(x)|, \forall x \in (a;b].$$

Do đó, nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f^+(x)dx$ và $\int_a^b f^-(x)dx$ hội tụ. Khi đó, vì $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ nên suy ra $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ. □

Ví dụ 3.3.16. Khảo sát tính hội tụ tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Giải. Ta có

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0;1]$$

mà $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ nên $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| dx$ hội tụ. Vậy $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ.

3.4 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.4.1 Tính diện tích hình phẳng

Descartes Ta đã biết diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = 0, x = a, x = b$ và $y = f(x)$ không âm, liên tục trên $[a; b]$, là

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{3.12}$$

Nếu $y = f(x)$ âm, liên tục trên $[a; b]$, thì

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{3.13}$$

Từ (3.12) và (3.13) suy ra, trong trường hợp $y = f(x)$ liên tục và có dấu thay đổi trên $[a; b]$ ta có

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{3.14}$$

Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = f_1(x), y = f_2(x)$ với $f_1(x), f_2(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì diện tích S được cho bởi

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx. \tag{3.15}$$

Tương tự, nếu hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = c, y = d, x = 0$ và $x = \phi(y)$ không âm, liên tục trên $[c; d]$, là

$$S = \int_c^d |\phi(y)|dy. \tag{3.16}$$

3.4.2 Tính thể tích vật thể

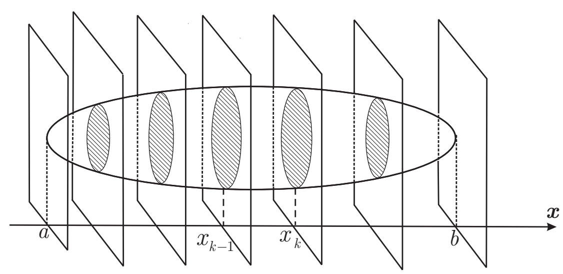
Trường hợp tổng quát

Cho một vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a, x = b(a < b)$. Giả sử mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là hàm liên tục $S(x)$ trên $[a;b]$. Tính thể tích của vật thể.

Chia $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Qua mỗi điểm chia $x_k, k = \overline{0,n}$, ta dựng mặt phẳng vuông góc với Ox. Các mặt phẳng này chia vật thể thành n vật thể nhỏ (xem hình 3.2).



Hình 3.2: Vật thể được chia nhỏ bởi các mặt phẳng vuông góc với Ox.

Trên mỗi đoạn $[x_{k-1}; x_k], k = \overline{1,n}$, lấy t_k tùy ý, dựng hình trụ đứng giới hạn bởi các mặt $x = x_{k-1}, x = x_k$ và mặt trụ có đường sinh song song với Ox, đi qua biên của thiết diện vật thể đã cho bởi mặt phẳng $x = t_k$. Thể tích hình trụ vừa dựng là $S(t_k)\Delta x_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Do $S(x)$ liên tục trên $[a;b]$ nên thể tích của vật thể được xấp xỉ bởi

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(t_k)\Delta x_k.$$

Mà V_n là tổng tích phân của hàm $S(x)$ trên $[a;b]$ nên khi cho $n \to +\infty$ sao cho $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$ thì giới hạn đó là thể tích V của vật thể. Vậy ta có

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx.} \tag{3.17}$$

Ví dụ 3.4.1. Tính thể tích hình cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2, a > 0.$$

Giải. Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \in [-a; a]$ cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn

$$y^2 + z^2 \leqslant a^2 - x^2$$

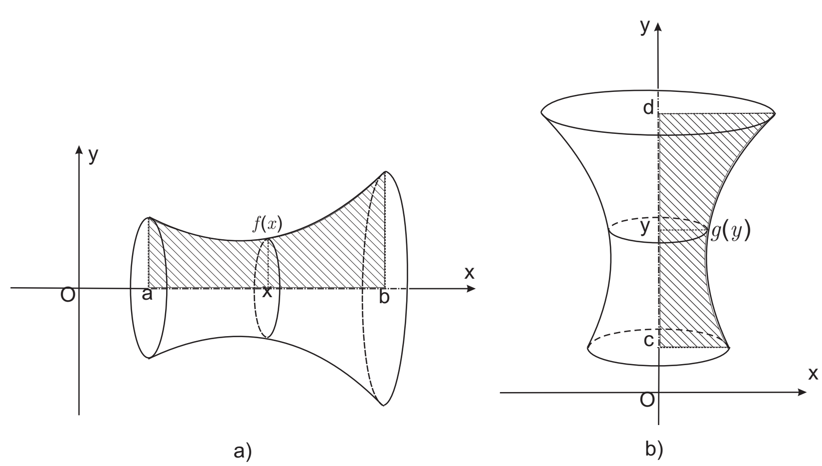
có diện tích là

$$S(x) = \pi(a^2 - x^2).$$

Áp dụng công thức (3.17), thể tích V của hình cầu là

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)dx = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Hình tròn xoay quanh Ox



Hình 3.3: a) Hình tròn xoay quanh Ox; b) Hình tròn xoay quanh Oy.

Hình thang cong giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = 0$ và $y = f(x) \geqslant 0$, liên tục trên $[a; b]$, quay quanh Ox tạo thành vật thể tròn xoay (xem hình 3.3.a). Tính thể tích vật thể tròn xoay.

Dễ thấy mọi thiết diện vuông góc với trục Ox, tại điểm có hoành độ là x, đều là hình tròn có tâm nằm trên Ox và có bán kính là $y = f(x)$ nên có diện tích $S(x)$ là

$$S(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2.$$

Do đó, từ (3.17), thể tích vật thể tròn xoay là

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.} \tag{3.18}$$

Ví dụ 3.4.2. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin x (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ và Ox khi quay quanh Ox.
Giải. Gọi V là thể tích của vật thể. Áp dụng công thức (3.18) ta có

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Hình tròn xoay quanh Oy

Tương tự, hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = c, y = d, x = 0$ và $x = g(y) \geqslant 0$, liên tục trên $[c; d]$, quay quanh Oy tạo nên vật thể tròn xoay (xem hình 3.3.b) có thể tích là

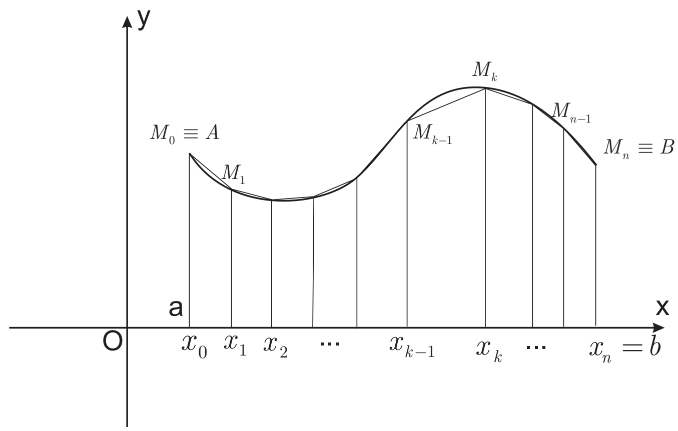
$$\boxed{V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.} \tag{3.19}$$

Trường hợp hình thang cong $0 \leqslant y \leqslant f(x), 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$ quay quanh Oy thì người ta chứng minh được vật thể tròn xoay có thể tích là

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.} \tag{3.20}$$

Ví dụ 3.4.3. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \sin x (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ và Ox khi quay quanh Oy.
Giải. Gọi V là thể tích của vật thể. Áp dụng công thức (3.20) ta có

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi(-x \cos x + \sin x)\Big|_0^\pi = 2\pi^2.$$



Hình 3.4: Cung $\widetilde{AB}$ được chia thành n cung nhỏ.

3.4.3 Tính độ dài cung phẳng

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$, cung $\widetilde{AB}$ là đồ thị của $y = f(x), x \in [a;b]$. Ta sẽ định nghĩa và tính độ dài l của cung $\widetilde{AB}$.

Chia $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Lấy trên cung $\widetilde{AB}$ các điểm (xem hình 3.4)

$$M_0(x_0; f(x_0)), M_1(x_1; f(x_1)), \ldots, M_k(x_k; f(x_k)), \ldots, M_n(x_n; f(x_n)).$$

Lập tổng

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k.$$

Ta có

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \tag{3.21}$$

Theo định lý Lagrange ta có

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}), x_{k-1} \leqslant t_k \leqslant x_k. \tag{3.22}$$

Thay (3.22) vào (3.21) ta được

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{1+[f'(t_k)]^2}(x_k - x_{k-1}) = \sqrt{1+[f'(t_k)]^2}\Delta x_k.$$

Do đó,

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(t_k)]^2}\Delta x_k.$$

Vì $f'(x)$ liên tục trên $[a;b]$ nên $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ liên tục, và do đó khả tích trên $[a;b]$. Mà l_n là tổng tích phân của hàm $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ trên $[a;b]$ nên có giới hạn hữu hạn, l, khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$. Ta gọi l là độ dài của cung $\widetilde{AB}$ và như vậy theo định nghĩa tích phân xác định ta thu được

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx} \tag{3.23}$$

Ví dụ 3.4.4. Tính độ dài của cung $y = \dfrac{x^2}{2}, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

Giải. Gọi l là độ dài cung. Áp dụng công thức (3.23) ta có

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln\sqrt{2}).$$

3.4.4 Tính diện tích mặt tròn xoay

Mặt tròn xoay quanh Ox

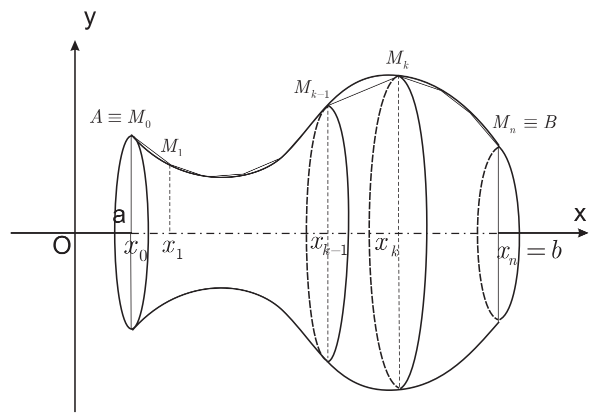
Cho hàm số $y = f(x) \geqslant 0$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$, cung $\widetilde{AB}$ là đồ thị của $y = f(x), x \in [a;b]$. Khi cung $\widetilde{AB}$ quay quanh Ox ta có được mặt tròn xoay. Ta sẽ định nghĩa và tính diện tích của mặt tròn xoay này như sau.

Chia $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Lấy trên cung $\widetilde{AB}$ các điểm

$$M_0(x_0; f(x_0)), M_1(x_1; f(x_1)), \ldots, M_k(x_k; f(x_k)), \ldots, M_n(x_n; f(x_n)).$$



Hình 3.5: Mặt tròn xoay được chia thành n mặt tròn xoay nhỏ.

Khi quay quanh Ox, dây cung $M_{k-1}M_k$ tạo nên một mặt nón cụt có diện tích xung quanh là

$$\pi M_{k-1}M_k[f(x_{k-1}) + f(x_k)] = \pi\sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\Delta x_k[f(x_{k-1}) + f(x_k)],$$

với $x_{k-1} \leqslant t_k \leqslant x_k$ (xem hình 3.5). Do đó, diện tích của mặt tròn xoay sinh ra bởi đường gấp khúc $M_0M_1 \dots M_n$ quay quanh Ox bằng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\Delta x_k[f(x_{k-1}) + f(x_k)].$$

Vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên với n khá lớn sao cho $\max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$ đủ nhỏ thì $f(x_{k-1}) + f(x_k) \approx 2f(t_k)$. Do đó, ta có

$$S_n \approx S'_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(t_k)\sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\Delta x_k.$$

Mà S'_n là tổng tích phân của hàm $2f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ liên tục trên $[a; b]$ nên có giới hạn hữu hạn là S. Người ta chứng minh được S_n cũng có giới hạn là S. Ta gọi S là diện tích của mặt tròn xoay đang xét. Vậy

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.} \tag{3.24}$$

Nếu $f(x)$ có dấu bất kỳ thì

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.} \tag{3.25}$$

Mặt tròn xoay quanh Oy

Trường hợp cung $\widetilde{AB}$ có phương trình là $x = f(y)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[c;d]$ thì diện tích mặt tròn xoay sinh bởi cung $\widetilde{AB}$ quay quanh Oy là

$$\boxed{S = 2\pi \int_c^d |f(y)|\sqrt{1 + [f'(y)]^2}dy.} \tag{3.26}$$

BÀI TẬP

Tích phân bất định

Bài 3.1. Dùng phương pháp đổi biến tính các tích phân sau đây:

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{4+x^2}$ 2. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ 3. $\displaystyle\int 3^{4x}dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 5. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4+\cos^2 x}}$ 6. $\displaystyle\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{x^6+1}}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+7}$ 8. $\displaystyle\int \frac{xdx}{4x^2+7}$ 9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x+1}$ 11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$ 12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Bài 3.2. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau đây:

1. $\displaystyle\int x\cos x dx$ 2. $\displaystyle\int x^3\ln x dx$ 3. $\displaystyle\int \arctan x dx$

4. $\displaystyle\int x^2\arctan x dx$ 5. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^x\,dx}{(x+1)^2}$ 6. $\displaystyle\int (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx$

7. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\cos 3x dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 9. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^{\arcsin x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\int x(\arctan x)^2 dx$ 11. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} dx$ 12. $\int \sin(\ln x) dx$.

Bài 3.3. Tính các tích phân hàm hữu tỷ sau đây:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ 2. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$ 3. $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$
4. $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$ 5. $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx$ 6. $\int \frac{1-x^4}{1+x^4} dx$
7. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$ 8. $\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x} dx$ 9. $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$.

Bài 3.4. Tính các tích phân hàm lượng giác sau đây:

1. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^8 x}$ 2. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x}$ 3. $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$
4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$ 5. $\int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x + 3}$ 6. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$
7. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$ 8. $\int \frac{dx}{3\cos x + 5\sin x + 3}$ 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}$
10. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$ 11. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}$ 12. $\int \frac{\sin 2x dx}{1+4\cos^2 x}$.

Bài 3.5. Tính các tích phân hàm vô tỷ sau đây:

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ 2. $\int \sqrt{\frac{1-x}{x^3}} dx$ 3. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$
4. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ 5. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$ 6. $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}} dx$
7. $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$ 8. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$ 9. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$
10. $\int \frac{xdx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ 11. $\int \sqrt{(x^2-1)^3} dx$ 12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Tích phân xác định

Bài 3.6. Tính các tích phân sau đây:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ 2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$ 3. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

4. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$ 5. $\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ 6. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

7. $\int_{-\ln 2}^{0} e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$ 8. $\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ 9. $\int_0^1 \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$

10. $\int_1^e \ln^2 x dx$ 11. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ 12. $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$

13. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arcsin x dx}{x^2}$ 14. $\int_1^e x^2\ln^2 x dx$ 15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

Bài 3.7. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}.$$

Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

Bài 3.8. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \text{ và } \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

Áp dụng tính hai tích phân sau:

1. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 2. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

Bài 3.9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$ 2. $y = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ 3. $y = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(t^2)dt$.

Bài 3.10. Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}dt}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t dt}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

Tích phân suy rộng

Bài 3.11. Tính các tích phân suy rộng sau:

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^x\,dx$ 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x dx$ 6. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}dx$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$ 8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,dx$ 9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Bài 3.12. Tính các tích phân suy rộng sau:

1. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$ 2. $\displaystyle\int_0^{1} \ln x dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

4. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2-x}}dx$ 5. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$ 6*. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arcsin x}{x}dx$ 8. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 9. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{3+4x-x^2}}$.

Bài 3.13. Xét tính hội tụ của các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-2}{x^2-2x+3}dx$ 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^3}\,dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+2x+1}$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)dx$ 5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x}$ 6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin 3x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$ 8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ 9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin^2 x+1}{x+1}dx$.

Bài 3.14. Xét tính hội tụ của các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$ 2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}dx$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\mathrm{e}^x-\cos x}dx$ 6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\tan x-x}$ 9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-1}dx$.

Bài 3.15. Cho biết $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ và $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Tính các tích phân sau:

1. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\, dx, a > 0$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$
4. $\int_0^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$

Ứng dụng tích phân

Bài 3.16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

1. $y = x^2, x + y = 2$
2. $y = x^2 - 5, y = 3 - x^2$
3. $y = x^3, y = x, y = 2x$
4. $y = \mathrm{e}^{-x} \sin x, y = 0, x = 0$ và $x = \pi$

Bài 3.17. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay các hình phẳng giới hạn bởi các đường quanh trục tương ứng:

1. $y = x \sin x, y = 0, 0 \leqslant x \leqslant \pi,$ trục Ox;
2. $y = x \sin x, y = 0, 0 \leqslant x \leqslant \pi,$ trục Oy;
3. $y = x^2, y = 4,$ trục $x = 2$;
4. $y = \mathrm{e}^{-x} \sqrt{\sin x}, 0 \leqslant x \leqslant \pi,$ trục Ox.

Bài 3.18. Tính độ dài các cung phẳng:

1. $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}, 0 \leqslant x \leqslant 3;$
2. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e};$

Bài 3.19. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay phần đường cong quanh trục tương ứng: $3y = x^3, 0 \leqslant x \leqslant a, Ox$.

ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN

Bài 3.1. **1**. $\frac{1}{2}\ln(4+x^2)$; **2**. $\frac{1}{2}\arcsin(x^2)$; **3**. $\frac{3^{4x}}{4\ln 3}$; **4**. $-\frac{1}{\ln x}$; **5**. $-\ln(\cos x+\sqrt{4+\cos^2 x})$; **6**. $\ln(x^3+\sqrt{x^6+1})$; **7**. $\frac{\sqrt{7}}{14}\arctan\frac{2x}{\sqrt{7}}$; **8**. $\frac{1}{8}\ln(4x^2+7)$; **9**. $\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1})$; **10**. $\frac{x\ln 2-\ln(2^x+1)}{\ln 2}$; **11**. $\ln(\tan x)$; **12**. $2\ln(\sqrt{x}+1)$.

Bài 3.2. **1**. $\cos x+x\sin x$; **2**. $\frac{1}{16}(4\ln x-1)$; **3**. $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; **4**. $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)$; **5**. $\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$; **6**. $-\frac{1}{4}(2x^2+2x+3)\,\mathrm{e}^{-2x}$; **7**. $\frac{1}{13}(3\sin 3x-2\cos 3x)\,\mathrm{e}^{-2x}$; **8**. $\frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}$; **9**. $\frac{1}{2}(x-\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{e}^{\arcsin x}$; **10**. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan^2 x-1)-x\arctan x$; **11**. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}$; **12**. $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))$.

Bài 3.3. **1**. $-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\ln|x+1|$; **2**. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; **3**. $\frac{1}{1-x}+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$; **4**. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|$; **5**. $\frac{x-1}{4(x^2+2x+3)}+\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}$; **6**. $-x+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(x\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(x\sqrt{2}-1)$; **7**. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; **8**. $-\ln(2x^2+1)+\frac{3}{4(2x^2+1)}+2\ln|x|$; **9**. $x-\frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\arctan x$.

Bài 3.4. **1**. $\frac{5-7\cos^2 x}{35\cos^7 x}$; **2**. $-\frac{1}{68}\ln|\tan x+4|+\frac{1}{4}\ln|\tan x|-\frac{2}{17}\ln|\tan^3 x+1|-\frac{x}{17}$; **3**. $\frac{1}{24}(3\cos^2 x-4)\cos^6 x$; **4**. $-\frac{\cos^6 x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\cos^4 x-\cos^2 x-2\ln|\sin x|$; **5**. $\arctan\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)$; **6**. $-\frac{1}{3}\tan^3 x$; **7**. $\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+x$; **8**. $\frac{1}{5}\ln\left|5+5\tan\frac{x}{2}\right|$; **9**. $-\frac{2\sqrt{15}}{75}\arctan\frac{4\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+\frac{2}{5\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)}$; **10**. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{x}{2}}\right|$; **11**. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\tan x-3}{2\tan x+3}\right|$; **12**. $-\frac{1}{4}\ln(1+4\cos^2 x)$.

Bài 3.5. **1**. $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right)$; **2**. $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}-2\sqrt{\frac{1-x}{x}}$; **3**. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{2-\sqrt{3+2x-x^2}}\right|$; **4**. $\frac{4}{3}t^3+2t^2-4t+4\arctan t-2\ln(1+t^2),\ t=\sqrt[4]{x}$; **5**. $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right|$; **6**. $\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+\frac{5}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{9}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}},\ t=\sqrt[3]{x+2}$; **7**. $\frac{t^2}{8}-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\ln|t+1|,\ t=\sqrt[3]{x^4+1}$; **8**. $-\frac{4}{\sqrt[4]{x}+1}+\frac{2}{(\sqrt[4]{x}+1)^2}$; **9**. $-\frac{9}{4}\ln(2t^2-t+1)-\frac{3\sqrt{7}}{14}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}}-\frac{3}{2}\ln(t+1)+6\ln t,\ t=\sqrt[6]{x}$; **10**. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}-\arcsin x$; **11**. $\frac{1}{4}x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}x\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$; **12**. $\frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{2\sqrt{x^2+x+1}+x+2}$.

Bài 3.6. **1**. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; **2**. $\ln\frac{\mathrm{e}+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}{1+\sqrt{2}}$; **3**. $\frac{1}{6}$; **4**. $2-\frac{\pi}{2}$; **5**. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; **6**. $\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\ln(2-\sqrt{3})$; **7**. $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$; **8**. $\frac{\pi}{3}$; **9**. $\pi\sqrt{2}-4$; **10**. $\mathrm{e}-2$; **11**. $\frac{\pi}{16}$; **12**. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **13**. $-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}-3}$; **14**. $\frac{5\,\mathrm{e}^2-2}{27}$; **15**. $\frac{\pi^2}{2}-4$.

Bài 3.7. $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{6}$

Bài 3.8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$; và

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int_0^{\pi}(x-\pi+\pi)f(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x)) d(\pi - x) + \int_0^{\pi} \pi f(\sin x) dx$$
$$= -\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx + \int_0^{\pi} \pi f(\sin x) dx$$

1. $\frac{\pi^2}{4}$; **2**. $\frac{\pi^2}{2} - \pi$.

Bài 3.9. **1**. $2x\sqrt{1+x^4}$; **2.** $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; **3**. $-\sin x \cos(\cos^2 x) - \cos x \cos(\sin^2 x)$.

Bài 3.10. **1**. 1; **2.** 1; **3**. 0.

Bài 3.11. **1**. $\frac{2}{3}\ln 2$; **2.** -1; **3**. $\frac{\pi}{2}$; **4**. $\frac{\pi}{2} - 1$; **5**. $\frac{1}{2}$; **6**. $\frac{1}{2}$; **7**. $\ln \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; **8**. 2; **9**. $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

Bài 3.12. **1**. $-\frac{4}{3}$; **2.** -1; **3**. $\frac{\pi}{2}$; **4**. $\pi + 2$; **5**. $\frac{9\pi}{2}$; **6**. $-\frac{\ln 2}{2}\pi$; **7**. $\frac{\ln 2}{2}\pi$; **8**. 2; **9**. $2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Bài 3.13. **1**. phân kỳ; **2.** phân kỳ; **3**. hội tụ; **4**. hội tụ; **5**. hội tụ; **6**. hội tụ tuyệt đối; **7**. hội tụ; **8**. hội tụ; **9**. phân kỳ.

Bài 3.14. **1**. hội tụ; **2.** phân kỳ; **3**. hội tụ; **4**. hội tụ; **5**. phân kỳ; **6**. hội tụ; **7**. hội tụ; **8**. hội tụ; **9**. hội tụ.

Bài 3.15. **1**. $\frac{1}{2}\frac{\pi}{a}$; **2.** $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$; **3**. $\frac{\pi}{2}$; **4**. $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Bài 3.16. **1**. $\frac{9}{2}$; **2.** $\frac{64}{3}$; **3**. $\frac{3}{4}$; **4**. $\frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$; **5**. a^2; **6**. $\frac{5\pi a^2}{4} - 2a^2$; **7**. $\frac{3}{8}\pi a^2$; **8**. $3\pi a^2$.

Bài 3.17. **1**. $\frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{4}$; **2.** $2\pi^3 - 8\pi$; **3**. $6\pi^3 a^3$; **4**. $\frac{128\pi}{3}$; **5**. $\frac{3}{4}\pi^2 a^3$; **6**. $\frac{\pi}{5}(e^{-2\pi} + 1)$.

Bài 3.18. **1**. $2\sqrt{3}$; **2.** $\frac{e^2+1}{4}$; **3**. $\frac{3}{2}a$; **4**. $8a$.

Bài 3.19. **1**. $\frac{\pi}{9}[\sqrt{(1+a^4)^3} - 1]$; **2.** $16\pi^2 a^2$; **3**. $\frac{6}{5}\pi a^2$; **4**. $4\pi a^2$; **5**. $4\pi^2 a^2$; **6**. $\frac{32}{5}\pi a^2$.

Chương4

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM HAI BIẾN

4.1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

4.1.1 Không gian $\mathbb{R}^2$

Định nghĩa 4.1.1.
$$\mathbb{R}^2 = \{(x;y)|x, y \in \mathbb{R}\}.$$
Mỗi phần tử của $\mathbb{R}^2$ là một cặp $(x;y)$, và được gọi là một điểm của $\mathbb{R}^2$.

Khoảng cách giữa hai điểm. Cho hai điểm $A(a_1;a_2)$ và $B(b_1;b_2)$. Khoảng cách giữa A và B là
$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_1 - a_1)^2}.$$

ϵ − lân cận, lân cận

- Hình tròn mở tâm M bán kính $r > 0$ là tập hợp những điểm nằm trong $\mathbb{R}^2$ có khoảng cách đến M nhỏ hơn r, được ký hiệu là $B(M,r)$. Vậy
$$B(M,r) = \{N \in \mathbb{R}^2 \mid MN < r\}.$$
- Cho $\epsilon > 0$. Hình tròn mở $B(M,\epsilon)$ được gọi là ϵ − *lân cận* của M.
- Tập V được gọi là *lân cận* của M nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(M,\epsilon) \subset V$.

Sau đây, ta xét D là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^2$.
Điểm trong, tập mở.

- Điểm M được gọi là *điểm trong* của tập D nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(M,\epsilon) \subset D$.
- Tập hợp tất cả các điểm trong của D được gọi là miền trong của D và được ký hiệu là $\operatorname{int} D$.

- Tập D được gọi là *tập mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong của nó, nghĩa là $D = \operatorname{int} D$.

Điểm tụ, điểm biên, biên và tập đóng.

- Điểm M được gọi là *điểm tụ* của D nếu mọi $\epsilon-$ lân cận của M đều chứa điểm thuộc D, và khác M.
- Điểm M được gọi là *cô lập* của D nếu tồn tại $\epsilon-$ lân cận của M không chứa điểm thuộc D, ngoại trừ M.
- Điểm M được gọi là *điểm biên* của D nếu M vừa là điểm tụ của D vừa là điểm tụ của $\mathbb{R}^2 \backslash D$.
- Tập hợp tất cảc các điểm biên của D được gọi là biên của D và được ký hiệu là ∂D.
- Tập D được gọi là tập đóng nếu nó chứa biên của nó, nghĩa là $\partial D \subset D$.

Tập bị chặn. Tập D được gọi là bị chặn nếu tồn tại một quả cầu chứa D.
Tập liên thông. Tập D được gọi là liên thông nếu hai điểm bất kỳ của D đều có thể nối với nhau bằng một đường cong liên tục nằm trong D.

4.1.2 Dãy điểm, giới hạn dãy điểm

Định nghĩa 4.1.2. Cho hai dãy số thực (x_n) và (y_n). Ta gọi $(x_n; y_n)$ là một dãy điểm trong $\mathbb{R}^2$.

Định nghĩa 4.1.3. Ta nói dãy điểm $M_n(x_n; y_n)$ hội tụ về điểm $M(x; y)$ nếu $M_nM \to 0$ khi $n \to \infty$ và viết

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M$$

hay

$$M_n \to M \text{ khi } n \to \infty.$$

Định lý 4.1.1. *Dãy điểm $M_n(x_n; y_n)$ hội tụ về điểm $M(x; y)$ khi và chỉ khi*

$$\begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases}, \text{ khi } n \to \infty$$

Ta có đặc trưng bằng dãy điểm của điểm tụ như sau:

Định lý 4.1.2. *Điểm M là điểm tụ của tập D khi và chỉ khi tồn tại $(M_n) \subset D \backslash \{M\}$ sao cho $M_n \to M$ khi $n \to \infty$.*

4.2 GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM 2 BIẾN

4.2.1 Khái niệm hàm hai biến.

Định nghĩa 4.2.1. Cho $\varnothing \neq D \subset \mathbb{R}^2$. Một quy tắc f làm tương ứng một cặp số $(x;y) \in D$ với một số thực duy nhất z, được gọi là hàm theo hai biến x, y. Khi đó, ta ký hiệu

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y) &\longmapsto z = f(x;y) \end{aligned}$$

và gọi:

- x, y là hai biến số của f;
- D là miền xác định của f;
- Miền giá trị của f là
$$f(D) = \{z \in \mathbb{R} | z = f(x;y)) \in D\}.$$

Chú ý 4.2.1.
1. Trong một vài ngữ cảnh, nếu M là điểm có toạ độ $(x;y)$ thì ta có thể viết $f(M)$ thay cho $f(x;y)$.
2. Khi cho hàm số $z = f(x;y)$ bằng công thức thì ta hiểu miền xác định của hàm số là tập hợp tất cả các điểm $(x;y)$ làm cho biểu thức $f(x;y)$ có nghĩa.

Ví dụ 4.2.1. Hàm $z = 2x + 3y$ có miền xác định là $D = \mathbb{R}^2$.

Ví dụ 4.2.2. Hàm $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ có miền xác định là

$$D = \{(x;y) \big| x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

4.2.2 Giới hạn của hàm nhiều biến

Định nghĩa 4.2.2 (Ngôn ngữ $\delta - \epsilon$)**.** Số L được gọi là giới hạn của hàm f tại điểm M_0 nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in D_f \backslash \{M_0\}, MM_0 < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \epsilon.$$

Khi đó, ta viết

$$L = \lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} f(x;y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$$

Ví dụ 4.2.3. Chứng tỏ $\lim\limits_{(x;y) \to (0;1)} x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Đặt $f(x;y) = x^2 + y^2$ và $MM_0 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}\rho$. Ta có

$$|f(x;y) - 1| = \left| x^2 + y^2 - 1 \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|x^2 + (y-1)^2 + 2(y-1)\right| \\
&\leqslant x^2 + (y-1)^2 + 2\,|y-1| \\
&= \rho^2 + 2\rho
\end{aligned}$$

Suy ra, với $\epsilon > 0$ tùy ý, nếu $\rho < \sqrt{\epsilon+1} - 1$ thì $|f(x;y) - 1| < \epsilon$.

Vậy

$$\lim_{(x;y)\to(0;1)} x^2 + y^2 = 1.$$

Dễ thấy, hàm f có giới hạn tại những điểm cô lập trong miền xác định của nó. Do đó chúng ta chỉ quan tâm đến giới hạn của hàm f tại các điểm tụ của D_f. Khi M_0 là điểm tụ của D_f thì định nghĩa trên tương đương với định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 4.2.3 (Ngôn ngữ dãy). Số L được gọi là giới hạn của hàm f tại điểm M_0 nếu

$$\forall (M_n) \subset D_f \backslash \{M_0\}, M_n \to M_0 \Rightarrow f(M_n) \to L$$

Ví dụ 4.2.4. Chứng tỏ $\lim\limits_{(x;y)\to(0;1)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 1$.

Giải. Đặt $f(x;y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. Lấy dãy điểm $((x_n;y_n)) \subset \mathbb{R}^2\backslash\{(0;1)\}$ sao cho $(x_n;y_n) \to (0;1)$. Ta có $x_n \to 0$ và $y_n \to 1$. Do đó, khi $n \to \infty$,

$$f(x_n;y_n) = \frac{x_n + y_n}{x_n^2 + y_n^2} \to \frac{1+0}{1^2+0^2} = 1$$

Vậy

$$\lim_{(x;y)\to(0;1)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 1.$$

Ví dụ 4.2.5. Chứng tỏ không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Giải. Đặt $f(x;y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Chọn hai dãy điểm $\left((\frac{1}{n};\frac{1}{n})\right)$, $\left((\frac{1}{n};\frac{-1}{n})\right)$ trong $\mathbb{R}^2\backslash(0;0)$. Ta có $(\frac{1}{n};\frac{1}{n}) \to (0;0)$ và $(\frac{1}{n};\frac{-1}{n}) \to (0;0)$ mà

$$f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right) = 1 \to 1 \text{ và } f\left(\frac{1}{n};\frac{-1}{n}\right) = -1 \to -1.$$

Vậy

$$\nexists \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Tính chất giới hạn hàm số

1. Hàm f nếu có giới hạn tại M_0 thì giới hạn đó là duy nhất.
2. Nếu $\lim_{M\to M_0} f(M) = L_1$ và $\lim_{M\to M_0} g(M) = L_2$ thì
   (a) $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)+g(M)] = L_1 + L_2$
   (b) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)g(M) = L_1.L_2$
   (c) $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$
3. Nếu
$$\begin{cases} f(M) \leqslant g(M) \leqslant h(M), \forall M \in B(M_0, r); \\ \lim_{M\to M_0} f(M) = L = \lim_{M\to M_0} h(M) \end{cases}$$
   thì $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) = L$.

Ví dụ 4.2.6. Tính $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.
Giải. Với $x^2 + y^2 \neq 0$, ta có
$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = |x| \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant |x|,$$
suy ra
$$-|x| \leqslant \frac{xy^2}{x^2+y^2} \leqslant |x|.$$
Mà
$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} (-|x|) = 0 = \lim_{(x;y)\to(0;0)} |x|$$
nên
$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

4.2.3 Khái niệm hàm liên tục

Định nghĩa 4.2.4. Hàm f được gọi là liên tục tại $M_0 \in D_f$ nếu f có giới hạn tại M_0 bằng $f(M_0)$.
Hàm f được gọi là liên tục trên tập D nếu f liên tục tại mọi điểm của D

Ví dụ 4.2.7. Các hàm $f_1(x;y) = x, f_2(x;y) = y$ liên tục tại mọi điểm trong $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 4.2.8. Theo ví dụ 4.2.3, ta có

$$\lim_{(x;y)\to(0;1)} f(x;y) = 1 = f(0;1).$$

Vậy hàm $f(x;y) = x^2 + y^2$ liên tục tại $(0;1)$.

Ví dụ 4.2.9. Cho hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Xét tính liên tục của f tại $(0;0)$.

Giải. Ta có $f(0;0) = 0$ và theo ví dụ 4.2.7 thì

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Vậy f liên tục tại $(0;0)$.

Ví dụ 4.2.10. Cho hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Xét tính liên tục của f tại $(0;0)$.
Giải. Ta có $f(0;0) = 0$ và theo ví dụ 4.2.5 thì

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

không tồn tại. Vậy f không liên tục tại $(0;0)$.

4.2.4 Tính chất của hàm liên tục

Ta có các tính chất sau đây của hàm liên tục:

1. Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm liên tục tại M_0 là hàm liên tục tại M_0, trường hợp của thương thì mẫu phải khác không.
2. Hợp của hai hàm liên tục thì liên tục, tại điểm tương ứng.
3. Nếu f liên tục trên một tập đóng và bị chặn thì nó đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đó.
4. Nếu f liên tục trên một tập D liên thông và $f(M_1).f(M_2) < 0$, với $M_1, M_2 \in D$ thì có $M_3 \in D$ sao cho $f(M_3) = 0$.

Nhận xét 4.2.1. Từ ví dụ 4.2.7 và tính chất 1, ta suy ra các hàm đa thức, hàm hữu tỷ theo x, y liên tục tại những điểm mà chúng xác định.

Ví dụ 4.2.11. Cho hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Xét tính liên tục của f.

Giải. Theo ví dụ 4.2.10, hàm f không liên tục tại $(0;0)$.

Theo nhận xét 4.2.1, tại điểm $(x;y) \neq (0;0)$,

$$f(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

nên liên tục tại đó.

Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0;0)\}$.

4.3 ĐẠO HÀM RIÊNG

4.3.1 Đạo hàm riêng cấp một

Định nghĩa 4.3.1. Cho hàm $z = f(x;y)$ và $M_0(x_0;y_0)$ là một điểm trong của D_f. Cho $y = y_0$, ta được $f(x;y_0) \equiv h(x)$ là hàm một biến x. Nếu $h(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì ta nói f có đạo hàm riêng theo biến x tại M_0 và $h'(x_0)$ được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của f tại M_0, được ký hiệu là

$$h'(x_0) = f'_x(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = z'_x(M_0).$$

Đạo hàm riêng của f theo biến y tại M_0 được định nghĩa tương tự, và được ký hiệu là

$$f'_y(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = z'_y(M_0).$$

Chú ý 4.3.1.

1. Các đạo hàm riêng của hàm có số biến từ ba trở lên được định nghĩa tương tự.
2. Khi tính đạo hàm riêng của một hàm số theo biến số này, ta xem các biến số còn lại là hằng và áp dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến.
3. Khi f có đạo hàm riêng theo biến x tại $M_0(x_0;y_0)$ thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x;y_0) - f(x_0;y_0)}{\Delta x}.$$

Ví dụ 4.3.1. Cho $f(x;y) = x^y, x > 0$. Ta có

$$f'_x(x;y) = yx^{y-1} \text{ và } f'_y(x;y) = x^y \ln x.$$

Ví dụ 4.3.2. $z = \arctan \frac{y}{x}, x \neq 0$. Ta có

$$z'_x = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_x}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

và

$$z'_y = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_y}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Ví dụ 4.3.3. Cho hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0); \\ 0, & \text{khi } (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Tính các đạo hàm riêng cấp một của $f(x;y)$.
Giải. Xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: $(x;y) \neq (0;0)$. Ta có

$$f'_x = \frac{(xy)'_x(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)'_x xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

và

$$f'_y = \frac{(xy)'_y(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)'_y xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Trường hợp 2: $(x;y) = (0;0)$. Ta có $f(x,0) = 0$ suy ra $f'_x(0;0) = 0$. Tương tự ta cũng có $f'_y(0;0) = 0$.

Ví dụ 4.3.4. Cho $f(x;y) = \sin(xy) + \arctan \frac{y}{x}$. Ta có

$$f'_x = y \cos(xy) - \frac{y}{x^2 + y^2},$$
$$f'_y = x \cos(xy) + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

4.3.2 Đạo hàm riêng cấp cao

Định nghĩa 4.3.2. Cho hàm $z = f(x;y)$ có hai đạo hàm riêng z'_x và z'_y. Đạo hàm riêng, nếu có, của z'_x và z'_y được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của z, và được ký hiệu là

$$z''_{xx} = z''_{x^2} = \left(z'_x\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$z''_{yy} = z''_{y^2} = \left(z'_y\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ví dụ 4.3.5. $z = x^2y^3 + x^4$. Ta có

$$\begin{aligned} z'_x &= 2xy^3 + 4x^3, & z'_y &= 3x^2y^2, \\ z''_{x^2} &= 2y^3 + 12x^2, & z''_{yx} &= 6xy^2, \\ z''_{xy} &= 6xy^2, & z''_{y^2} &= 6x^2y. \end{aligned}$$

Ví dụ 4.3.6. Cho

$$f(x;y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0); \\ 0, & \text{khi } (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Tại $(x;y) \neq (0;0)$, ta có

$$f'_x(x;y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

và

$$f'_y(x;y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Mặt khác tại $(0;0)$, ta lại có

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x;0) - f(0;0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{0-0}{\triangle x} = 0 = f'_x(0;0)$$

và

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0;\triangle y) - f(0;0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{0-0}{\triangle x} = 0 = f'_y(0;0).$$

Suy ra

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{f'_x(0;\triangle y) - f'_x(0;0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{-\triangle y - 0}{\triangle x} = -1 = f''_{xy}(0;0)$$

và

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f'_y(\triangle x;0) - f'_y(0;0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x - 0}{\triangle x} = 1 = f''_{yx}(0;0).$$

Vậy $f''_{yx}(0;0) \neq f''_{xy}(0;0)$.

Ví dụ 4.3.5 và ví dụ 4.3.6 cho thấy hai đạo hàm f''_{xy} và f''_{yx} có thể bằng hoặc khác nhau. Định lý sau cho ta một điều kiện đủ để $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Định lý 4.3.1. *Nếu $f(x;y)$ có đạo hàm riêng đến cấp hai xác định và liên tục trên một tập mở $D \subseteq \mathbb{R}^2$ thì*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \forall (x;y) \in D.$$

4.4 VI PHÂN

4.4.1 Khái niệm vi phân

Cho $f(x;y)$ xác định trên tập mở D và $(x_0;y_0) \in D$. Nếu $\triangle x, \triangle y$ đủ nhỏ thì $(x_0 + \triangle x; y_0 + \triangle y) \in D$. Khi ấy, ta đặt

$$\triangle f(x_0;y_0) = f(x_0 + \triangle x; y_0 + \triangle y) - f(x_0;y_0).$$

Định nghĩa 4.4.1. Hàm $f(x;y)$ được gọi là khả vi tại $(x_0;y_0)$ nếu

$$\triangle f(x_0;y_0) = A.\triangle x + B.\triangle y + \alpha.\triangle x + \beta.\triangle y, \tag{4.1}$$

trong đó:

- A và B là hằng số, chỉ phụ thuộc $(x_0;y_0)$;
- α và $\beta \to 0$ khi $\triangle x, \triangle y \to 0$.

Khi đó, biểu thức $A.\triangle x + B.\triangle y$ được gọi là vi phân toàn phần của $f(x;y)$ tại $(x_0;y_0)$, và được ký hiệu là $df(x_0;y_0)$,

$$df(x_0;y_0) = A.\Delta x + B\Delta y.$$

Dùng bất đẳng thức B.C.S ta có

$$|\alpha.\triangle x + \beta.\triangle y| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}.$$

Suy ra

$$\frac{|\alpha.\triangle x + \beta.\triangle y|}{\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}} \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \to 0 \text{ khi } \triangle x, \triangle y \to 0.$$

Do đó,

$$\alpha.\triangle x + \beta.\triangle y = 0(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}) \text{ khi } \triangle x, \triangle y \to 0.$$

Vậy (4.1) có thể viết dưới dạng

$$\triangle f(x_0;y_0) = A.\triangle x + B.\triangle y + 0(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}) \tag{4.2}$$

4.4.2 Các điều kiện khả vi

Định lý 4.4.1. *Nếu $f(x;y)$ khả vi tại $(x_0;y_0)$ thì nó liên tục tại đó.*

Chứng minh. Giả sử $f(x;y)$ khả vi tại $(x_0;y_0)$, nghĩa là ta có (4.1). Khi $\triangle x, \triangle y \to 0$, từ (4.1) suy ra $\triangle f(x_0;y_0) \to 0$ hay $f(x_0+\triangle x; y_0+\triangle y) \to f(x_0;y_0)$. Vậy $f(x;y)$ liên tục tại $(x_0;y_0)$ □

Hệ quả 4.4.1. *Nếu $f(x;y)$ không liên tục tại $(x_0;y_0)$ thì nó không khả vi tại đó.*

Ví dụ 4.4.1. Xét hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0); \\ 0, & \text{khi } (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Hàm $f(x;y)$ không liên tục tại $(0;0)$ nên nó không khả vi tại đó.

Định lý 4.4.2. *Nếu $f(x;y)$ khả vi tại $(x_0;y_0)$ thì nó có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y tại đó và*

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0).\triangle x + f'_y(x_0;y_0).\triangle y \tag{4.3}$$

Chứng minh. Giả sử $f(x;y)$ khả vi tại $(x_0;y_0)$, nghĩa là ta có (4.1). Trong (4.1), cho $\triangle y = 0$ ta có

$$f(x_0+\triangle x; y_0) - f(x_0;y_0) = A.\triangle x + \alpha\triangle x.$$

Suy ra

$$\frac{f(x_0+\triangle x; y_0) - f(x_0;y_0)}{\triangle x} = A + \alpha.$$

Cho $\triangle x \to 0$ và nhớ rằng $\alpha \to 0$ ta được

$$f'_x(x_0;y_0) = A.$$

Tương tự,

$$f'_y(x_0;y_0) = B$$

và do đó, ta có (4.3). □

Định lý 4.4.1 và định lý 4.4.2 chỉ cho ta điều kiện cần để một hàm khả vi, đó chưa phải là điều kiện đủ. Thật vậy, ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 4.4.2. Hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0); \\ 0, & \text{khi } (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

có $f'_x(0;0) = 0 = f'_y(0;0)$ và không khả vi tại $(0;0)$.

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để hàm $f(x;y)$ khả vi tại điểm $(x_0;y_0)$.

Định lý 4.4.3. *Nếu $f(x;y)$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y xác định trong một hình tròn mở tâm $(x_0;y_0)$ và liên tục tại $(x_0;y_0)$ thì $f(x;y)$ khả vi tại $(x_0;y_0)$.*

Chứng minh. Với $\triangle x, \triangle y$ đủ nhỏ, bằng cách viết

$$\triangle f(x_0;y_0) = [f(x_0+\triangle x; y_0+\triangle y) - f(x_0;y_0+\triangle y)] + [f(x_0;y_0+\triangle y) - f(x_0;y_0)]$$

và dùng công thức số gia giới nội, ta có

$$\triangle f(x_0;y_0) = f'_x(x_0+\theta_1\triangle x; y_0+\triangle y).\triangle x + f'_y(x_0;y_0+\theta_2\triangle y).\triangle y, \tag{4.4}$$

với $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Đặt

$$\alpha = f'_x(x_0+\theta_1\triangle x; y_0+\triangle y) - f'_x(x_0;y_0), \tag{4.5}$$
$$\beta = f'_y(x_0;y_0+\theta_2\triangle y) - f'_y(x_0;y_0). \tag{4.6}$$

Vì f'_x, f'_y liên tục tại $(x_0;y_0)$ nên $\alpha, \beta \to 0$ khi $\triangle x, \triangle y \to 0$. Kết hợp (4.4), (4.5) và (4.6) ta thu được (4.1). □

Ví dụ 4.4.3. Hàm $f(x;y) = x^3y^2$ có $f'_x = 3x^2y^2$ và $f'_y = 2x^3y$ xác định và liên tục tại mọi điểm nên $f(x;y)$ khả vi tại mọi điểm.

4.4.3 Tính chất của vi phân

Trong (4.3) nếu lần lượt cho $f(x;y) = x, f(x;y) = y$ thì lần lượt ta có $\triangle x = dx, \Delta y = dy$. Như vậy (4.3) trở thành

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0;y_0).dx + f'_y(x_0;y_0).dy \tag{4.7}$$

Do (4.7) ta có

Định lý 4.4.4. *Nếu f, g khả vi thì*

$$\begin{aligned} d(f \pm g) &= df \pm dg, \\ d(f.g) &= gdf + fdg, \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{gdf - fdg}{g^2}, (\text{ nếu } g \neq 0) \end{aligned}$$

Ví dụ 4.4.4. Cho $f(x;y) = x^3y^2 + \sin(xy)$. Ta có

$$df(x;y) = [3x^2y^2 + y\cos(xy)]dx + [2x^3y + x\cos(xy)]dy.$$

4.4.4 Dùng vi phân tính gần đúng

Cho $f(x;y)$ khả vi tại $(x_0;y_0)$. Nếu $\Delta x, \Delta y$ gần bằng 0 thì $0\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$ rất gần 0, có thể bỏ qua. Khi ấy, từ (4.2) ta có

$$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y) \approx f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0).\Delta x + f'_y(x_0;y_0).\Delta y. \tag{4.8}$$

Ví dụ 4.4.5. Tính gần đúng $A=\sqrt{4,01^2+3,05^2}$.
Giải. Ta chọn $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0;y_0)=(4;3)$, $\Delta x=0,01$, $\Delta y=0,05$. Khi đó $f'_x(x;y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y(x;y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, và

$$\begin{aligned} f(x_0;y_0) &= \sqrt{4^2+3^2}=5,\\ f'_x(x_0;y_0) &= \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5},\\ f'_y(x_0;y_0) &= \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Vậy

$$A \approx 5+\frac{4}{5}.0,01+\frac{3}{5}.0,05=5,038.$$

4.4.5 Vi phân cấp hai

Định nghĩa 4.4.2. Vi phân $df(x;y)$ là hàm hai biến x,y. Vi phân nếu có của $df(x;y)$ được gọi là vi phân cấp hai của $f(x;y)$ và ký hiệu là $d^2f(x;y)$. Vậy

$$d^2f(x;y)=d\left(df(x;y)\right).$$

Bây giờ ta giả sử x,y là hai biến độc lập, nghĩa là chúng không phụ thuộc vào biến nào khác. Khi đó, dx, dy là các hằng số. Ta có

$$\begin{aligned} d^2f(x;y) &= d\left(df(x;y)\right)=d(f'_xdx+f'_ydy)\\ &= d(f'_xdx)+d(f'_ydy)=d(f'_x)dx+d(f'_y)dy\\ &= \left[f''_{x^2}dx+f''_{xy}dy\right]dx+\left[f''_{yx}dx+f''_{y^2}dy\right]dy\\ &= f''_{x^2}dx^2+f''_{xy}dxdy+f''_{yx}dxdy+f''_{y^2}dy^2. \end{aligned}$$

Nếu $f''_{xy}=f''_{yx}$ thì ta có

$$d^2f(x;y)=f''_{x^2}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{y^2}dy^2. \tag{4.9}$$

4.5 CỰC TRỊ TỰ DO

4.5.1 Khái niệm cực trị tự do

Định nghĩa 4.5.1. Xét hàm số hai biến f và M_0 là điểm trong của D_f. Ta nói

- M_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại số dương r sao cho

$$f(M) \leqslant f(M_0), \forall M \in B(M_0, r)$$

- M_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại số dương r sao cho

$$f(M) \geqslant f(M_0), \forall M \in B(M_0, r)$$

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi là điểm cực trị. Giá trị của hàm tại điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu, gọi chung là giá trị cực trị.

Ví dụ 4.5.1. Xét hàm $z = -(x-1)^2 - y^2 + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} & z(x;y) \leqslant 1 = z(1;0), \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \\ \Rightarrow\ & z(x;y) \leqslant 1 = z(1;0), \forall (x;y) \in B(M_0, r), \text{với } M_0(1;0). \end{aligned}$$

Vậy M_0 là điểm cực đại của z và $z_{\max}(1;0) = 1$.

Ví dụ 4.5.2. Xét hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$z(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0 = z(0;0), \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vậy $(0;0)$ là điểm cực tiểu của z và $z_{\min}(0;0) = 0$.

Ví dụ 4.5.3. $z = x^2 - y^2$. Điểm $(0;0)$ không là điểm cực trị của hàm z vì trong mọi hình tròn mở tâm $(0;0)$ hàm z có cả giá trị âm và dương mà $z(0;0) = 0$.

4.5.2 Điều kiện cần của cực trị

Một câu hỏi đặt ra là những điểm nào trong miền xác định của f có khả năng là điểm cực trị của f?

Định lý 4.5.1. *Nếu $f(x;y)$ đạt cực trị và có hai đạo hàm riêng tại $(x_0;y_0)$ thì*

$$f'_x(x_0;y_0) = 0 \text{ và } f'_y(x_0;y_0) = 0.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử hàm $f(x;y)$ đạt cực đại tại $(x_0;y_0)$ và có hai đạo hàm riêng $f'_x(x_0;y_0), f'_y(x_0;y_0)$. Vì $f(x;y)$ đạt cực đại tại $(x_0;y_0)$ nên hàm $g(x) = f(x;y_0)$ đạt cực đại tại x_0. Do đó, theo định lý Fermat, $g'(x_0) = 0$, nghĩa là $f'_x(x_0;y_0) = 0$. Tương tự, ta cũng có $f'_y(x_0;y_0) = 0$ □

Mệnh đề đảo của định lý này không đúng. Thật vậy, xét hàm $z = x^2 - y^2$ ta có

$$z'_x(0;0) = 0 \text{ và } z'_y(0;0) = 0$$

nhưng $(0;0)$ không là điểm cực trị.

Định lý (4.5.1) khẳng định rằng hàm f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó hoặc là cả hai đạo hàm riêng cùng tồn tại và bằng không hoặc là ít nhất một đạo hàm riêng không tồn tại.

Định nghĩa 4.5.2.

- Điểm mà tại đó hoặc là cả hai đạo hàm riêng cùng tồn tại và bằng không hoặc là ít nhất một đạo hàm riêng không tồn tại được gọi là *điểm tới hạn*;
- Điểm mà tại đó cả hai đạo hàm riêng cùng tồn tại và bằng không được gọi là *điểm dừng*.

Ví dụ 4.5.4. Tìm tất cả các điểm tới hạn, nếu có, của hàm số

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Giải. Vì z có hai đạo hàm riêng tại mọi điểm nên điểm tới hạn, nếu có, của z là điểm dừng. Tọa độ điểm dừng là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được ba điểm dừng: $O(0;0)$, $M_1(1;1)$ và $M_2(-1;-1)$.

4.5.3 Điều kiện đủ của cực trị

Tiếp theo, trong các điểm tới hạn của f điểm nào là điểm cực trị? Định lý sau đây, bằng đạo hàm riêng cấp hai, giúp ta biết được một điểm dừng có là điểm cực trị hay không.

Định lý 4.5.2. *Giả sử hàm $z = f(x;y)$ có điểm dừng là $M_0(x_0;y_0)$ và có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một hình tròn mở tâm M_0. Đặt*

$$A = z''_{x^2}(M_0), B = z''_{xy}(M_0) \text{ và } C = z''_{y^2}(M_0).$$

Khi đó:

1. *Nếu $B^2 - AC < 0$ và $A < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của z.*

2. *Nếu $B^2 - AC < 0$ và $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu của z.*
3. *Nếu $B^2 - AC > 0$ thì M_0 không là điểm cực trị của z.*

Chú ý 4.5.1. Trường hợp $B^2 - AC = 0$, ta chưa có kết luận điểm M_0 có là điểm cực trị hay không. Khi đó ta phải khảo sát thêm bằng định nghĩa điểm cực trị.

Ví dụ 4.5.5. Tìm cực trị của hàm

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

- Theo ví dụ 6.1.4, hàm z có ba điểm tới hạn và cũng là ba điểm dừng: $M_1(1;1)$, $M_2(-1;-1)$ và $O(0;0)$.
- Các đạo hàm riêng cấp hai

$$z''_{x^2} = 12x^2 - 2, z''_{xy} = -2, z''_{y^2} = 12y^2 - 2.$$

- Tại $M_1(1;1), M_2(-1;-1)$ ta có $A = 10, B = -2, C = 10$ và $B^2 - AC = (-2)^2 - 10.10 < 0$.Vậy hàm z đạt cực tiểu tại M_1, M_2 và $z_{\min} = -2$.
- Tại $O(0;0)$ ta có $A = -2, B = -2, C = -2$ và $B^2 - AC = 0$. Ta khảo sát thêm bằng định nghĩa điểm cực trị. Xét hình tròn mở tâm $O(0;0)$ bán kính $r > 0$ tùy ý. Trên đó luôn tồn tại hai điểm: $P(\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$, $Q(\frac{1}{n}; -\frac{1}{n})$ với n đủ lớn và

$$z(P) = \frac{2}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0 = z(O) < \frac{2}{n^4} = z(Q).$$

Vậy O không là điểm cực trị của hàm z.

4.6 CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

4.6.1 Khái niệm cực trị có điều kiện

Định nghĩa 4.6.1. Cho điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc đường cong có phương trình

$$\varphi(x;y) = 0 \tag{4.10}$$

và hàm $f(x;y)$ xác định trên một hình tròn mở tâm M_0. Ta nói

- Hàm $f(x;y)$ đạt cực đại tại M_0 thỏa (4.10) nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(M) \leqslant f(M_0), \forall M \in B(M_0, r), \varphi(M) = 0. \tag{4.11}$$

- Hàm $f(x;y)$ đạt cực tiểu tại M_0 thỏa (4.10) nếu tồn tại $r > 0$ sao cho

$$f(M) \geqslant f(M_0), \forall M \in B(M_0, r), \varphi(M) = 0. \tag{4.12}$$

4.6.2 Phương pháp khử

Giả sử từ điều kiện (4.10) ta tính được duy nhất $y = y(x)$, với x tùy ý hoặc thuộc một tập mở, rồi thay vào hàm $f(x;y) = f(x, y(x))$. Khi đó ta tìm cực trị của hàm một biến $g(x) = f(x, y(x))$.

Ví dụ 4.6.1. Tìm cực trị của hàm

$$f(x;y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$$

thỏa điều kiện $x + y = -3$.
Giải. Từ $x + y = -3$ suy ra $y = -3 - x$, thay vào hàm $f(x;y)$ ta được

$$f(x;y) = f(x;-3-x) = 3x^2 + 9x + 2.$$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 9x + 2$. Ta có

$$g'(x) = 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

và $g''(x) = 6 > 0$ nên $x = -\frac{3}{2}$ là điểm cực tiểu của $g(x)$. Suy ra $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm $f(x;y)$ thỏa $x + y = -3$ và

$$f_{\min} = f\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}.$$

4.6.3 Phương pháp nhân tử Lagrange

Định lý 4.6.1 (điều kiện cần). *Cho điểm $M_0(x_0;y_0)$ thỏa (4.10).Giả thiết:*

1. *Hai hàm $f(x;y), \varphi(x;y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên một hình tròn mở tâm M_0*
2. *Các đạo hàm riêng φ'_x, φ'_y không đồng thời bằng không tại M_0.*

Khi đó, nếu hàm $f(x;y)$ đạt cực trị tại M_0 với điều kiện (4.10) thì tồn tại số λ_0 sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0;y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0;y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0;y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0;y_0) &= 0 \\ \varphi(x_0;y_0) &= 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Nhận xét 4.6.1. Khi giả thiết của định lý (4.6.1) được thỏa thì hàm $f(x;y)$ chỉ có thể đạt cực trị với điều kiện (4.10) tại những điểm $(x;y)$ thỏa hệ

$$\begin{cases} f'_x(x;y) + \lambda \varphi'_x(x;y) &= 0 \\ f'_y(x;y) + \lambda \varphi'_y(x;y) &= 0 \\ \varphi(x;y) &= 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Giả sử hệ (4.14) có nghiệm $(x_0; y_0; \lambda_0)$. Đặt

$$L(x;y) = f(x;y) + \lambda_0 \varphi(x;y),$$

$L(x;y)$ được gọi là hàm Lagrange. Dựa vào hàm Lagrange, định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để kết luận điểm $(x_0; y_0)$ có là điểm cực trị hay không.

Định lý 4.6.2 (điều kiện đủ). *Cho giả thiết ở định lý (4.6.1) thỏa mãn, ta giả thiết thêm rằng các hàm $f(x;y)$, $\varphi(x;y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong một hình tròn mở tâm $M_0(x_0;y_0)$. Xét*

$$d^2L(M_0) = L''_{x^2}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{y^2}(M_0)dy^2,$$

với dx, dy không đồng thời bằng không và thỏa mãn phương trình

$$\varphi'_x(M_0)dx + \varphi'_y(M_0)dy = 0. \tag{4.15}$$

Ta có

1. *Nếu $d^2L(M_0) > 0$ thì $f(x;y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại M_0.*
2. *Nếu $d^2L(M_0) < 0$ thì $f(x;y)$ đạt cực đại có điều kiện tại M_0.*

Ví dụ 4.6.2. Tìm cực trị của hàm $f(x;y) = 2x + y$ với $x^2 + y^2 = 5$.
Giải. Đặt

$$L(x;y) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Hệ (4.14) được viết là

$$\begin{cases} L'_x = 2 + 2\lambda x & = & 0 & (1) \\ L'_y = 1 + 2\lambda y & = & 0 & (2) \\ \quad x^2 + y^2 - 5 & = & 0 & (3) \end{cases}$$

Giải hệ: (1) $\Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda}$, (2) $\Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda}$, thay vào (3) ta được

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 5 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

- $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -2, y = -1$ và

  $$L(x;y) = 2x + y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 5).$$

  Vì $d^2L(-2;-1) = dx^2 + dy^2 > 0$ với mọi dx, dy không đồng thời bằng không nên $f(x;y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại $(-2;-1)$,

  $$f_{\min} = f(-2;-1) = -5.$$

- $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2, y = 1$ và

  $$L(x;y) = 2x + y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 5).$$

  Vì $d^2L(2;1) = -dx^2 - dy^2 < 0$ với mọi dx, dy không đồng thời bằng không nên $f(x;y)$ đạt cực đại có điều kiện tại $(2;1)$,

  $$f_{\max} = f(2;1) = 5.$$

4.7 GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Cho $f(M)$ liên tục trên tập D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$. Người ta chứng minh được rằng : hàm $f(M)$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên D. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

Giả sử $f(M)$ đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) tại M_0 thuộc D. Khi ấy:

- Nếu M_0 là điểm trong của D thì M_0 là điểm cực trị (tự do) của $f(M)$ trên D nên là điểm tới hạn của $f(M)$ bên trong $\operatorname{int} D$.
- Nếu M_0 là điểm biên của D thì M_0 là điểm cực trị có điều kiện của $f(M)$ với điều kiện là $M \in \partial D$ nên M_0 là điểm tới hạn của $f(M)$ với điều kiện là ∂D.

Từ đó, ta có thuật toán sau đây để giải bài toán tìm GTLN, GTNN.

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn (tự do) của $f(M)$ trên $\operatorname{int} D$.

Bước 2: Tìm các điểm tới hạn (có điều kiện) của $f(M)$ trên ∂D.

Bước 3: Tính và so sánh giá trị của hàm $f(M)$ tại các điểm tìm được ở bước 1,2. Từ đó ta xác định được GTLN, GTNN của $f(M)$ trên D.

Chú ý 4.7.1. Nếu ∂D trơn từng khúc thì ta xem điểm nối các khúc là các điểm tới hạn ở bước 2.

Ví dụ 4.7.1. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm

$$f(x;y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

trên miền $D = \{(x;y) | \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 3\}$.
Giải. Ta thực hiện theo các bước như trong thuật toán.

Bước 1: $\operatorname{int} D = \{(x;y) | \quad x > 0, y > 0, x + y < 3\}$. Hàm $f(x;y)$ là đa thức nên điểm tới hạn trên $\operatorname{int} D$, nếu có, là điểm dừng. Ta có

$$\begin{cases} f'_x = 2x - y - 1 & = 0, \\ f'_y = -x + 2y - 1 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, M_0(1;1) \in \operatorname{int} D.$$

Bước 2: $\partial D = OA \cup AB \cup BO$. Các điểm $O(0;0)$, $A(0;3)$ và $B(3;0)$ là các điểm tới hạn. Ta xét trên từng khúc

- Trên $OA : x = 0, 0 < y < 3$. Ta có

  $$g(y) = f(0,y) = y^2 - y, g'(y) = 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}.$$

  Điểm tới hạn của f trên OA là $M_1(0;\frac{1}{2})$.

- Trên $AB: y = 3 - x, 0 < x < 3$,

$$h(x) = f(x, 3-x) = 3x^2 - 9x + 6, h'(x) = 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Điểm tới hạn của f trên AB là $M_2(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$.

- Trên $BO: y = 0, 0 < x < 3$. Ta có

$$k(x) = x^2 - x, k'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Điểm tới hạn của f trên BO là $M_3(\frac{1}{2}; 0)$.

Bước 3: Ta có $f(O) = 0, f(A) = f(B) = 6, f(M_0) = -1, f(M_1) = f(M_3) = -\frac{1}{4}, f(M_2) = -\frac{3}{4}$. Suy ra $f_{\text{lớn nhất}} = 6$ đạt tại A, B và $f_{\text{nhỏ nhất}} = -1$ đạt tại M_0.

BÀI TẬP

Bài 4.1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

1. $z = \ln(xy)$;
2. $z = \dfrac{1}{y - x^2}$;
3. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;
4. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;
5. $z = x^2 + y^2$;
6. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Bài 4.2. Cho $f(x; y) = x + y$ và $g(x; y) = x - y$. Tính

$$f(g(x;y), g(x;y)); f(g(x;y), f(x;y)); g(f(x;y), f(x;y)); g(g(x;y), f(x;y)).$$

Bài 4.3. Tính các giới hạn sau:

1. $\displaystyle\lim_{(x;y)\to(1,0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
2. $\displaystyle\lim_{(x;y)\to(1,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$
3. $\displaystyle\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy^2}{2 - \sqrt{4 + xy^2}}$
4. $\displaystyle\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sin(xy)}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}}$
5. $\displaystyle\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x}{x + y}$
6. $\displaystyle\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2[1 - \cos(xy)]}{y^2}$

Bài 4.4. Cho hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right), & \text{khi } (x;y) \neq (0;0) \\ a, & \text{khi } (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Chọn a để $f(x; y)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Bài 4.5. Cho hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0) \\ a, & \text{khi } (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Chọn a để $f(x; y)$ liên tục tại $(0; 0)$.

Bài 4.6. Cho hàm số

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{khi } (x;y) \neq (0;0) \\ a, & \text{khi } (x;y) = (0;0). \end{cases}$$

Chọn a để $f(x;y)$ liên tục tại $(0;0)$.

ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN

Bài 4.1.

1. $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | xy > 0\}$;
2. $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq x^2\}$;
3. $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geqslant 0\}$;
4. $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x > |y|\}$;
5. $D = \mathbb{R}^2$;
6. $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Bài 4.2.

$f(g(x;y), g(x;y)) = 2(x-y)$;
$f(g(x;y), f(x;y)) = 2x$;
$g(f(x;y), f(x;y)) = 0$;
$g(g(x;y), f(x;y)) = -2y$.

Bài 4.3. **1**. $\ln 2$; **2**. 0; **3**. -2; **4**. -3; **5**. không tồn tại; **6**. 0.

Bài 4.4. $a = 1$.

Bài 4.5. $(x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$ và

$$x^2y^2\ln(2|xy|) \leqslant x^2y^2\ln(x^2+y^2) \leqslant \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \ln(x^2+y^2).$$

Suy ra $a = 1$.

Bài 4.6. Không tồn tại a.

Chương5

CHUỖI SỐ

5.1 CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ

5.1.1 Các khái niệm về chuỗi số

Cho dãy số thực (u_n). Biểu thức

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{5.1}$$

được gọi là *chuỗi số*.

Các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ được gọi là các số hạng của chuỗi số; u_n được gọi là số hạng thứ n của chuỗi số.

Tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi số,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

được gọi là *tổng riêng thứ n*.

Nếu dãy số (S_n) có giới hạn hữu hạn là S thì S được gọi là tổng của chuỗi (5.1) và chuỗi (5.1) được gọi là chuỗi số *hội tụ*, ta viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Ngược lại, nếu dãy (S_n) không có giới hạn hữu hạn ta nói chuỗi (5.1) *phân kỳ* .

Phần dư (chuỗi dư) thứ n của chuỗi (5.1) được ký hiệu là R_n,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Ví dụ 5.1.1. Từ dãy $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ ta thành lập được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Chuỗi này có số hạng thứ n là $\frac{1}{n(n+1)}$ và tổng riêng thứ n là

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ và tổng chuỗi bằng 1, tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ví dụ 5.1.2. Xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Tổng riêng thứ n của chuỗi là

$$\begin{aligned} S_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

Vì $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$ nên chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 5.1.3. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \tag{5.2}$$

Tổng riêng thứ n là

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $q = 1$ thì $S_n = n$. Vì $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ nên chuỗi (5.2) phân kỳ.

Trường hợp 2: Nếu $q \neq 1$ thì ta có

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$$
$$qS_n = q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n.$$

Suy ra

$$(1-q)S_n = 1 - q^n$$

hay

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Xét $\lim_{n\to\infty} S_n$. Ta đã biết $\lim_{n\to\infty} q^n$ tồn tại khi và chỉ khi $-1 < q \leqslant 1$. Mà ở đây $q \neq 1$ nên suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n$ tồn tại khi và chỉ khi $-1 < q < 1$.

Vậy chuỗi (5.2) hội tụ khi và chỉ khi $-1 < q < 1$. Khi đó vì $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

5.1.2 Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 5.1.1. *Nếu chuỗi (5.1) hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Chứng minh. Chuỗi (5.1) hội tụ nên

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

với S hữu hạn. Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

□

Ví dụ 5.1.4. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ phân kỳ vì

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Chú ý 5.1.1. Định lý (5.1.1) chỉ là điều kiện cần, chưa phải là điều kiện đủ để chuỗi (5.1) hội tụ.

Ví dụ 5.1.5. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ có

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

nhưng phân kỳ, theo ví dụ (5.1.2).

Ví dụ 5.1.6. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kỳ vì

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

không tồn tại.

5.1.3 Tính chất của chuỗi hội tụ

Định lý 5.1.2. *Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c.u_n$, c là hằng số, cũng hội tụ và có tổng là $c.S$*

Chứng minh. Gọi $S_n, S_n^{(1)}$ lần lượt là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c.u_n$. Vì

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} c.u_n = c.\sum_{k=1}^{n} u_n = c.S_n$$

và $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ nên $\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = c.S$ □

Định lý 5.1.3. *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ *hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Chứng minh. Gọi $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}$ và $S_n^{(3)}$ lần lượt là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$. Ta có

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{n}(u_n + v_n) = \sum_{k=1}^{n} u_n + \sum_{k=1}^{n} v_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n^{(3)} &= \lim_{n\to\infty}(S_n^{(1)} + S_n^{(2)})\\ &= \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} + \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)}.\end{aligned}$$

Mà

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

nên suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

□

Định lý 5.1.4. *Nếu chuỗi (5.1) hội tụ thì chuỗi dư* $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *cũng hội tụ và ngược lại, nếu có chuỗi dư* $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} u_k$ *hội tụ thì chuỗi (5.1) hội tụ.*

Chứng minh. Cố định $n \in \mathbb{N}$. Gọi S'_m là tổng riêng thứ m của chuỗi dư, ta có

$$S'_m = \sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \sum_{k=1}^{n+m} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = S_{n+m} - S_n.$$

Vì chuỗi (5.1) hội tụ nên

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = S.$$

Do đó,

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = S - S_n.$$

Vậy chuỗi dư hội tụ. Ngược lại, giả sử $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} u_k$ hội tụ. Ta chứng tỏ (5.1) hội tụ. Xét $m > n_0$. Ta có

$$S_m = S_{n_0} + S'_{m-n_0}.$$

Vì chuỗi dư hội tụ nên
$$\lim_{m\to\infty} S'_{m-n_0} = S' \in \mathbb{R}.$$
Suy ra
$$\lim_{m\to\infty} S_m = S_{n_0} + S'.$$
Vậy (5.1) hội tụ. □

Hệ quả 5.1.1. *Tính hội tụ của chuỗi (5.1) sẽ không thay đổi nếu ta thêm hay bỏ đi một số hữu hạn các số hạng đầu tiên của nó.*

5.2 CHUỖI SỐ DƯƠNG

5.2.1 Định nghĩa và điều kiện hội tụ

Định nghĩa 5.2.1. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *chuỗi số dương* nếu tất cả các số hạng của nó *không âm*.

Ví dụ 5.2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ là chuỗi số không âm vì
$$u_n = \frac{n}{2n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi số không âm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ta có
$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n, \forall n \in \mathbb{N},$$
nghĩa là (S_n) là dãy số tăng. Do đó, ta có định lý

Định lý 5.2.1. *Chuỗi số không âm* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng bị chặn trên.*

Ví dụ 5.2.2. Xét chuỗi không âm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tổng riêng phần thứ n là
$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$
Dãy (S_n) không bị chặn nên chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 5.2.3. Xét chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots. \tag{5.3}$$

Ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n\frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (5.3). Theo (5.4) ta có

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> \frac{3}{2} + \underbrace{2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1}.\frac{1}{2^k}}_{k-1 \text{ số hạng}} \\ &= 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra (S_{2^k}) không bị chặn. Do đó, dãy (S_n) cũng không bị chặn. Vậy (5.3) phân kỳ.

5.2.2 Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý 5.2.2. *Cho hai chuỗi không âm*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{5.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{5.6}$$

thỏa điều kiện

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leqslant v_n. \tag{5.7}$$

Khi ấy chuỗi (5.6) hội tụ thì (5.5) hội tụ.

Chứng minh. Gọi $S_n^{(1)}$ và $S_n^{(2)}$ lần lượt là tổng riêng thứ n của (5.5) và (5.6). Ta có

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k = S_n^{(2)}.$$

Do đó, nếu (5.6) hội tụ, tức dãy $(S_n^{(2)})$ bị chặn trên thì dãy $(S_n^{(1)})$ cũng bị chặn trên. Vậy (5.5) hội tụ. □

Chú ý 5.2.1. Do hệ quả 5.1.1 nên điều kiện (5.7) có thể được thay bởi

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : u_n \leqslant v_n.$$

Ví dụ 5.2.4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Giải. Ta có

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, \forall n \geqslant 2.$$

Mà $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn so sánh 2

Định lý 5.2.3. *Xét hai chuỗi không âm (5.5), (5.6). Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)*

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}.$$

1. *Nếu $K = 0$ thì (5.6) hội tụ suy ra (5.5) hội tụ.*
2. *Nếu $0 < K < \infty$ thì (5.6) và (5.5) cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*
3. *Nếu $K = \infty$ thì (5.6) phân kỳ suy ra (5.5) phân kỳ.*

Chứng minh. 1. Nếu $K = 0$ thì với $\varepsilon > 0$, bé tùy ý, ta có

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, u_n < \varepsilon v_n.$$

Theo định lý 5.2.2, nếu (5.6) hội tụ thì (5.5) hội tụ.
2. Nếu $0 < K < \infty$ thì với $K > \varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho

$$\forall n \geqslant n_0, (K-\varepsilon)v_n < u_n < (K+\varepsilon)v_n.$$

Do đó, theo định lý 5.2.2 thì (5.6) và (5.5) cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
3. Nếu $K = \infty$ thì với $M > 0$ ta có

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant M v_n.$$

Nên theo định lý 5.2.2 thì (5.5) hội tụ suy ra (5.6) hội tụ. □

Ví dụ 5.2.5. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Giải. Đây là chuỗi không âm. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi đã cho phân kỳ.

Tiêu chuẩn d'Alembert

Định lý 5.2.4. *Xét chuỗi không âm* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D.$$

Khi đó:

1. *Nếu* $D < 1$ *thì chuỗi hội tụ.*
2. *Nếu* $D > 1$ *thì chuỗi phân kỳ.*

Chứng minh. 1. $D < 1$. Với $0 < \varepsilon < 1 - D$ tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < D + \varepsilon, \forall n \geqslant n_0.$$

Nếu ta đặt $D + \varepsilon = q, 0 < q < 1$, thì

$$u_{n+1} < q u_n, \forall n \geqslant n_0.$$

Suy ra

$$u_n < q u_{n-1} < q^2 u_{n-2} < \ldots < q^{n-n_0} u_{n_0} = q^{-n_0} u_{n_0} q^n.$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^{-n_0} u_{n_0} q^n$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

2. $D > 1$. Với $0 < \varepsilon < D - 1$ tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$D - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n}, \forall n \geqslant n_0.$$

Suy ra

$$u_{n+1} > (D - \varepsilon)u_n > u_n, \forall n \geqslant n_0.$$

Do đó,

$$u_n \geqslant u_{n_0} > 0, \forall n \geqslant n_0$$

nên $u_n \nrightarrow 0$. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

□

Ví dụ 5.2.6. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Giải. Đây là chuỗi không âm. Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3}.\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{3} < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ 5.2.7. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Giải. Đây là chuỗi không âm. Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}.\frac{(2n)!}{5^n(n!)^2} = \frac{5(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{5}{4} > 1.$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Chú ý 5.2.2. Định lý 5.2.4 chưa có kết luận trong trường hợp $D = 1$.

Ví dụ 5.2.8. Với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ và với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ta cũng có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2} \to 1$. Nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (ví dụ 5.2.3) còn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ thì hội tụ (ví dụ 5.1.1).

Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 5.2.5. *Xét chuỗi không âm* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$*. Giả sử tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô hạn)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C.$$

Khi đó:

1. *Nếu* $C < 1$ *thì chuỗi hội tụ.*
2. *Nếu* $C > 1$ *thì chuỗi phân kỳ.*

Chứng minh. 1. $C < 1$. Với $0 < \varepsilon < 1 - C$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sqrt[n]{u_n} < C + \varepsilon = q < 1, \forall n \geqslant n_0.$$

Suy ra

$$u_n < q^n, \forall n \geqslant n_0.$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
2. $C > 1$. Với $0 < \varepsilon < C - 1$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sqrt[n]{u_n} > C - \varepsilon > 1, \forall n \geqslant n_0.$$

Suy ra

$$u_n > 1, \forall n \geqslant n_0.$$

Do đó $u_n \nrightarrow 0$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ. □

Ví dụ 5.2.9. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ.

Ví dụ 5.2.10. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \to \frac{1}{2}e > 1.$$

Vậy chuỗi phân kỳ.

Chú ý 5.2.3. Định lý 5.2.5 không có kết luận trong trường hợp $C = 1$. Trong trường hợp này thì chuỗi có thể hội tụ hoặc có thể phân kỳ, phải khảo sát bằng phương pháp khác.

Ví dụ 5.2.11. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ và có $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$; còn chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và có $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} \to 1$.

Tiêu chuẩn tích phân của Cauchy - Maclaurin

Định lý 5.2.6. *Xét hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Giả sử $f(x)$ liên tục, không âm và giảm. Khi ấy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ hội tụ }.$$

Chứng minh. Do $f(x)$ giảm trên $[1, \infty)$ nên với mọi $k \geqslant 1$ ta có

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k).$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

hay

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Từ đó, ta có đpcm. □

Ví dụ 5.2.12. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Giải.

- Nếu $\alpha \leqslant 0$ thì $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ nên chuỗi phân kỳ.
- Với $\alpha > 0$, hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ là hàm không âm, giảm và liên tục trên $[1, \infty)$ nên, theo tiêu chuẩn tích phân Maclaurin- Cauchy, chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

5.3 CHUỖI CÓ DẤU BẤT KỲ

5.3.1 Chuỗi đan dấu

Định nghĩa 5.3.1. Cho (u_n) là dãy số không âm. Các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u2 + u_3 - u_4 + \dots,$$

và

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots$$

được gọi là chuỗi đan dấu.

Tiêu chuẩn Leibnitz

Định lý 5.3.1. *Nếu (u_n) giảm và tiến về 0 thì $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ hội tụ và tổng S của chuỗi thỏa*

$$u_1 - u_2 \leqslant S \leqslant u_1 \tag{5.8}$$

Chứng minh. Đặt $S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$. Ta có

$$S_{2n} - S_{2(n-1)} = u_{2n-1} - u_{2n} \geqslant 0$$

nên (S_{2n}) tăng. Mặt khác,

$$S_{2n} = u_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{(u_{2k} - u_{2k+1})}_{\geqslant 0} - u_{2n} \leqslant u_1,$$

nghĩa là (S_{2n}) bị chặn trên bởi u_1. Vậy (S_{2n}) có giới hạn và nếu ta đặt $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ thì $u_1 - u_2 = S_2 \leqslant S \leqslant u_1$. Đối với dãy (S_{2n+1}) ta có

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \to S + 0.$$

Tóm lại, $S_n \to S$ và $u_1 - u_2 \leqslant S \leqslant u_1$. □

Ví dụ 5.3.1. Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Ví dụ 5.3.2. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n}{n^2+n+1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz vì $\left(\dfrac{n}{n^2+n+1}\right) \downarrow 0$

Định nghĩa 5.3.2. Chuỗi thỏa tiêu chuẩn Leibnitz được gọi là *chuỗi Leibnitz*.

Chú thích 5.3.1. Với chuỗi Leibnitz thì chuỗi dư $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k$ cũng là chuỗi Leibnitz và tổng của nó thỏa

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k\right| \leqslant u_{n+1}.$$

Bất đẳng thức này thường được dùng đánh giá sai số khi tính gần đúng tổng của chuỗi đan dấu.

5.3.2 Hội tụ tuyệt đối

Xét chuỗi có dấu bất kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ta có

Định lý 5.3.2. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{5.9}$$

Chứng minh. Ta có

$$0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|, \forall n \geqslant 1$$

nên theo tiêu chuẩn so sánh 1 thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)$ hội tụ. Theo định lý 5.1.2, ta cũng có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -|u_n|$ hội tụ. Do đó, theo định lý 5.1.3, chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|) + \sum_{n=1}^{\infty} -|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

hội tụ.

Ta có

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k|$$

nên cho $n \to \infty$ thì được (5.9). □

Định nghĩa 5.3.3. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối.*

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ mà không hội tụ tuyệt đối thì được gọi là *bán hội tụ*.

Ví dụ 5.3.3. Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ Ta có

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}, \forall n \geqslant 1$$

mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 5.3.4. Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ bán hội tụ.

Chú thích 5.3.2. Nếu dùng tiêu chuẩn d'Alembert hoặc Cauchy mà biết được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ. Thật vậy, nếu biết $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ bằng tiêu chuẩn d'Alembert hoặc Cauchy thì $|u_n| \nrightarrow 0$, do đó, $u_n \nrightarrow 0$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

⋆ **Hàm** $f(x) = e^x$.

Ta có $f^{(n)}(0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ và với $A > 0$ thì $|f^{(n)}(x)| = e^x \leqslant e^A, \forall x \in (-A; A)$. Do đó, theo hệ quả **??**, hàm $f(x) = e^x$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin trên $(-A; A)$. Vì A là số dương bất kỳ nên hàm $f(x) = e^x$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin trên $\mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots . \tag{5.10}$$

⋆ **Hàm** $f(x) = \sin x$.

Vì
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$
nên
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Vậy hàm số $f(x) = \sin x$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin với mọi x và vì
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{nếu } n = 2k+1; \\ 0, & \text{nếu } n = 2k, \end{cases}$$
nên
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, x \in \mathbb{R}. \tag{5.11}$$

⋆ **Hàm** $f(x) = \cos x$.

Vì
$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$
nên
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Vậy hàm số $f(x) = \cos x$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin với mọi x và vì
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{nếu } n = 2k; \\ 0, & \text{nếu } n = 2k+1, \end{cases}$$
nên
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, x \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

⋆ **Hàm** $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > -1$.

Ta sẽ chứng tỏ
$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n, x \in (-1; 1), \tag{5.13}$$

với $C_\alpha^0 = 1, C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$.

Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n$ có bán kính hội tụ là

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{\alpha-n}\right| = 1.$$

Đặt $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n, x \in (-1;1)$. Ta có $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_\alpha^n n x^{n-1}, x \in (-1;1)$. Suy ra

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} C_\alpha^n n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_\alpha^n n x^n \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[C_\alpha^{n+1}(n+1) + C_\alpha^n n\right] x^n \\ &= \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{+\infty} C_\alpha^n x^n \\ &= \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} C_\alpha^n x^n = \alpha g(x).\end{aligned}$$

Từ đó, ta được

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{1+x},$$

suy ra

$$\ln|g(x)| = \ln(1+x)^\alpha + C.$$

Vậy

$$|g(x)| = e^C(1+x)^\alpha.$$

Chú ý $g(0) = 1$ ta nhận được $g(x) = (1+x)^\alpha$.

⋆ **Hàm** $f(x) = \ln(1+x)$.

Ta có $f'(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$. Lấy tích phân từ 0 đến x, ta được

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, x \in (-1;1). \tag{5.14}$$

⋆ **Hàm** $f(x) = \arctan x$.

Vì

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

nên suy ra

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, x \in (-1;1). \tag{5.15}$$

Chú ý khai triển (5.15) đúng trên $[-1;1]$.

BÀI TẬP

Bài 5.1. Tìm tổng riêng và tổng (nếu có) của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$; 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$;
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$; 5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$; 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n-3^n}{5^n}$.

Bài 5.2. Dùng điều kiện cần của sự hội tụ chứng minh các chuỗi sau phân kỳ:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{3n+1}$; 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{2}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$;
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$; 5. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\ln^2 n}$; 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^n \frac{n!}{n^n}$.

Bài 5.3. Dùng tiêu chuẩn so sánh xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3n^2+1}$; 2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{1+n^2}\right)^2$;
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; 5. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{4.2^n-1}$; 6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$; 9. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln \dfrac{n+1}{n-1}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$; 11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 12. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2^n+3^n}{4^n+2n}$.

Bài 5.4. Dùng tiêu chuẩn d'Alembert hay Cauchy xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(3n+1)!}{8^n n^2}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{2^{2n}(n-1)!}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{5^n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$; 6. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\left(\dfrac{n}{4n-3}\right)^{2n}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$; 9. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{5n^2+2n}\right)^{n}$.

Bài 5.5. Xét sự hội tụ của các chuỗi đan dấu sau:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2^{n-1}+1}{2^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n}{n^2+1}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$; 5. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\ln n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{(2n-1)!!}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \dfrac{n+1}{n}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \dfrac{1}{n}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

Bài 5.6. Xét sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối của các chuỗi có dấu bất kỳ sau:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos n^2}{2^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{n}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n}{2n^2-5}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{(-1)^n\sqrt{n}-n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+1}}$;

Bài 5.7. Tìm tổng của các chuỗi lũy thừa sau trên $(-1;1)$:

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$;

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$;

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right) x^n$;

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$;

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n-1}$.

Đáp số, hướng dẫn

Bài 5.1.

1. $S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$;
2. $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$;
3. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$;
4. $S_n = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$;
5. $S_n = \frac{5}{2} - \frac{3.2^{n+1}+3}{3^{n+1}}$;
6. $S_n = -\frac{5}{6} - \frac{5.2^{n+2}+5.3^{n+2}}{6.5^{n+1}}$.

Chương6

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

- Phương trình liên hệ giữa biến độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm (hay vi phân) của hàm phải tìm được gọi là phương trình vi phân. Một phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0$$

- Cấp cao nhất của đạo hàm hay vi phân của hàm phải tìm có mặt trong phương trình được gọi là cấp của phương trình.
- Phương trình vi phân được gọi là tuyến tính nếu F là bậc nhất đối với $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$.
- Nghiệm của phương trình vi phân là hàm số thỏa mãn phương trình ấy, tức là khi ta thay hàm số vào phương trình ta được đồng nhất thức.
- Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

6.1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

6.1.1 Đại cương về phương trình vi phân cấp một

Định nghĩa 6.1.1. Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6.1}$$

Nếu giải được phương trình (6.1) đối với y', phương trình sẽ có dạng

$$y' = f(x, y) \tag{6.2}$$

Định lý 6.1.1. *Xét phương trình (6.2). Giả sử hàm f liên tục trên miền D của mặt phẳng Oxy và $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm x_0 tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$của (6.2) và $y(x_0) = y_0$. Hơn nữa, nếu f'_y liên tục trên miền D thì nghiệm ấy là duy nhất.*

Điều kiện $y = y(x)$ lấy giá trị là y_0 khi $x = x_0$ được gọi là điều kiện đầu và viết là

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \text{ hay } y(x_0) = y_0.$$

Bài toán tìm nghiệm của (6.2) thỏa điều kiện đầu được gọi là bài toán Cauchy của phương trình (6.2).

Định nghĩa 6.1.2.

- Ta gọi *nghiệm tổng quát* của (6.1) là hàm

$$y = \varphi(x, C), \tag{6.3}$$

  trong đó C là thuộc một tập nào đó của $\mathbb{R}$, thỏa mãn (6.1) với mọi giá trị của C và với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, tồn tại duy nhất C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy của (6.35).

- Nghiệm riêng của (6.1) là nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho C một giá trị cụ thể.

- Nhiều khi nghiệm tổng quát của (6.1) không có dạng tường minh như (6.3) mà có dạng

$$\phi(x, y, C) = 0, \tag{6.4}$$

  thỏa (6.1) với mọi giá trị của C thuộc tập nào đó. (6.4) được gọi là *tích phân tổng quát*. Nếu cho $C = C_0$ ta thu được một *tích phân riêng.*

- Nghiệm của (6.1) không nhận được từ nghiệm tổng quát dù C lấy bất kỳ giá trị nào được gọi là *nghiệm kỳ dị*.

6.1.2 Phương trình khuyết

Khuyết y

Hai trường hợp thường gặp là:

- **Phương trình giải ra được đối với** $y', y' = f(x)$**:** Lấy tích phân hai vế ta được
$$y = \int f(x)dx.$$

- **Phương trình giải ra được đối với** $x, x = f(y')$**:** Đặt $t = y'$, ta có
$$x = f(t), dx = f'(t)dt, dy = tdx = tf'(t)dt.$$
Từ đó, ta suy ra được phương trình tham số của đường cong tích phân
$$x = f(t), y = \int tf'(t)dt$$

Ví dụ 6.1.1. Giải phương trình $x = y'^2 + y' + 1$.
Giải. Đặt $t = y'$, ta có
$$x = t^2 + t + 1, dx = (2t + 1)dt, dy = t(2t + 1)dt.$$
Suy ra được phương trình tham số của đường cong tích phân
$$x = t^2 + t + 1, y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Khuyết x

Hai trường hợp thường gặp là

- **Phương trình dạng** $y' = f(y)$**:** Phương trình được viết lại dưới dạng $\frac{dy}{dx} = f(y)$, suy ra $dx = \frac{dy}{f(y)}$. Lấy tích phân hai vế ta được $x = F(y) + C$, với $F(y)$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{f(y)}$.

- **Phương trình dạng** $y = f(y')$**:** Đặt $y' = t$, suy ra $y = f(t), dy = f'(t)dt$. Mà, do cách đặt, $dy = tdx$ nên $dx = \frac{f'(t)}{t}dt$. Từ đó ta thu được phương trình tham số của đường tích phân,
$$x = F(t) + C, y = f(t),$$
với $F(t)$ là một nguyên hàm của $\frac{f'(t)}{t}$.

Ví dụ 6.1.2. Giải phương trình $y' = -\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

Giải. Phương trình đã cho được viết lại

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

hay

$$dx = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy.$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$x = \sqrt{1-y^2} + C.$$

Ví dụ 6.1.3. Giải phương trình $y = y' + \ln y'$.

Giải. Đặt $y' = t$, suy ra $y = t + \ln t, dy = \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$. Mà, do cách đặt, $dy = tdx$ nên $dx = \frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t}dt$. Từ đó ta thu được phương trình tham số của đường tích phân,

$$x = \ln t - \frac{1}{t} + C, y = t + \ln t.$$

6.1.3 Phương trình tách biến

a. Định nghĩa

Phương trình tách biến là phương trình có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{6.5}$$

Ví dụ 6.1.4. Phương trình

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2}$$

là phương trình tách biến.

b. Cách giải

Từ (6.5) ta có
$$f(x)dx = -g(y)y'dx.$$
Lấy tích phân bất định hai vế ta được
$$\int f(x)dx = -\int g(y)y'dx + C.$$
Suy ra
$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$
là tich phân tổng quát của (6.5).

Ví dụ 6.1.5. Giải phương trình $xdx + ydy = 0$.
Giải. Phương trình được viết thành
$$xdx = -ydy.$$
Tích phân hai vế, ta được
$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$
hay
$$x^2 + y^2 = 2C.$$
Đó là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 6.1.6. Giải phương trình ở ví dụ 6.1.4.
Giải. Phương trình đã cho tương đương với
$$\frac{xdx}{1+x^2} = -\frac{ydy}{1+y^2}.$$
Tích phân hai vế, ta được
$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C$$
hay
$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1, C_1 > 0.$$
Đây là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Chú thích 6.1.1. Phương trình dạng $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ có thể đưa về dạng tách biến.

Ví dụ 6.1.7. Giải phương trình

$$x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0$$

Giải.

- Xét $x \neq 1$ và $y \neq -1$. Phương trình được đưa về dạng tách biến

$$\frac{x^2}{x^3-1}dx + \frac{y-1}{y+1}dy = 0.$$

  Tích phân lên ta được

$$\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right| + y - 2\ln|y+1| = C$$

- Với $x = 1$ ta có $dx = 0$ và $x^3 - 1 = 0$. Do đó, phương trình đúng với mọi y. Vậy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình.

- Tương tự, $y = -1$ cũng là một nghiệm của phương trình đã cho.

Chú thích 6.1.2. Phương trình dạng $y' = f(ax + by + c)$ có thể đưa về dạng tách biến bằng cách đổi biến $z = ax + by + c$.

Ví dụ 6.1.8. Giải phương trình

$$y' = x - y - 1.$$

Giải. Đặt $z = x - y - 1$. Ta có $z' = 1 - y'$. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$1 - z' = z \Leftrightarrow z' = 1 - z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - z.$$

- Dễ thấy $z = 1$ là nghiệm của phương trình cuối nên $x - y - 2 = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

- Xét $z \neq 1$, ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} = 1 - z \Leftrightarrow \frac{dz}{1-z} = dx \\
&\Leftrightarrow -\ln|1-z| + \ln|C| = x, C \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \ln\left|\frac{C}{1-z}\right| = x \\
&\Leftrightarrow \ln\left|\frac{C}{2-x+y}\right| = x \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{C}{2-x+y}\right| = e^x \\
&\Leftrightarrow C_1 = e^x(2-x+y), C_1 = \pm C.
\end{aligned}
$$

Dễ thấy nghiệm $x - y - 2 = 0$ nằm trong họ nghiệm $C_1 = e^x(2-x+y)$ ứng với $C_1 = 0$. Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$C_1 = e^x(2-x+y), C_1 \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 6.1.9. Giải bài toán điều kiện đầu

$$y' + 5x^4y^2 = 0, y(0) = 1.$$

Giải. Do $y(0) = 1$ nên ta chỉ tìm nghiệm $y \neq 0$. Tách biến ta được

$$\frac{dy}{y^2} + 5x^4 dx = 0.$$

Tích phân lên ta được

$$-\frac{1}{y} + x^5 = C.$$

Từ điều kiện đầu ta suy ra

$$-\frac{1}{y(0)} + 0 = C \Leftrightarrow C = -1.$$

Vậy

$$y = \frac{1}{x^5+1}.$$

6.1.4 Phương trình đẳng cấp cấp một

a. Định nghĩa

Phương trình đẳng cấp cấp một là phương trình có dạng

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.6}$$

b. Cách giải

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, suy ra $y = ux$. Ta có $y' = u'x + u$. Thay vào (6.6) ta được

$$u'x + u = f(u).$$

- Nếu $f(u) - u \neq 0$ thì phương trình có thể được tách biến và trở thành

  $$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}.$$

  Tích phân hai vế ta thu được

  $$\ln|x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + \ln|C| = \phi(u) + \ln|C|,$$

  trong đó $\phi(u) = \displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u}$. Do đó

  $$x = \pm Ce^{\phi(u)} = C_1 e^{\phi(u)} = C_1 e^{\phi(\frac{y}{x})},$$

  là tích phân tổng quát.

- Nếu $f(u) - u \equiv 0$ thì $f\left(\dfrac{y}{x}\right) \equiv \dfrac{y}{x}$. Thay vào (6.6) ta được $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$. Tách biến ta thu được nghiệm tổng quát $y = Cx$.

- Nếu $f(u) - u = 0$ tại $u = u_0$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy $y = u_0 x$ cũng là nghiệm của (6.6).

Ví dụ 6.1.10. Giải phương trình

$$y' = \frac{1 + a\dfrac{y}{x}}{a - \dfrac{y}{x}}.$$

Giải. Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, suy ra

$$u'x + u = \frac{1 - au}{a - u}$$

hay

$$u'x = \frac{1 + u^2}{a - u}.$$

Tách biến ta được

$$\frac{a - u}{1 + u^2}du = \frac{dx}{x},$$

và tích phân hai vế

$$a \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + \ln|C| = \ln|x|,$$

suy ra

$$x\sqrt{1 + u^2} = C \arctan u.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = C \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ví dụ 6.1.11. Giải phương trình

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0.$$

Giải. Vì $x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 ta được

$$2\frac{y}{x}y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$ và $y' = u'x + u$ vào phương trình ta sẽ có

$$2u(u'x + u) - u^2 + 1 = 0$$

hay

$$2uu'x = -(u^2+1).$$

Tách biến ta được

$$\frac{2udu}{u^2+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế dẫn đến

$$\ln(1+u^2) = -\ln|x| + \ln|C|.$$

Suy ra

$$u^2+1 = \frac{C}{x}$$

và thay $u = \dfrac{y}{x}$ ta thu được

$$x^2+y^2 = Cx.$$

Chú thích 6.1.3. Hàm $F(x,y)$ được gọi là đẳng cấp bậc k nếu với mọi λ, ta có

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x,y).$$

Nếu $F(x,y)$ là hàm đẳng cấp bậc không thì bằng cách đặt $\lambda = \frac{1}{x}$ ta có

$$F(x,y) = F\left(\frac{1}{x}x, \frac{y}{x}\right) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Do đó, phương trình dạng

$$y' = F(x,y),$$

với $F(x,y)$ là hàm đẳng cấp bậc không sẽ được giải bằng cách đưa về dạng (6.6).

Ví dụ 6.1.12. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' = \frac{y^2+2xy}{xy}.$$

Giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$y' = \frac{y}{x} + 2.$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ và $y' = u'x + u$ vào phương trình ta được

$$u'x + u = u + 2 \Leftrightarrow u'x = 2 \Leftrightarrow du = \frac{2}{x}dx.$$

Tích phân hai vế phương trình sau cùng dẫn đến

$$u = \ln x^2 + \ln C^2 \Leftrightarrow e^u = x^2C^2,$$

thay $u = \frac{y}{x}$, ta thu được

$$e^{\frac{y}{x}} = x^2C^2.$$

Chú thích 6.1.4. Phương trình dạng

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{6.7}$$

có thể đưa về phương trình đẳng cấp. Thật vậy, ta xét hai khả năng:

1. Hệ phương trình
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{6.8}$$
có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$. Khi ấy, nếu ta đặt $x = u + x_0$, $v = y + y_0$ thì $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$, và do đó,
$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u + x_0) + b_1(v + y_0) + c_1}{a_2(u + x_0) + b_2(v + y_0) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$
Đây là phương trình đẳng cấp.

2. Hệ phương trình (6.8) vô nghiệm. Khi đó,
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k, k - \text{hằng số}.$$
Đặt $z = a_2x + b_2y$, ta có $z' = a_2 + b_2y'$ hay
$$y' = \frac{z' - a_2}{b_2}.$$

Thay vào phương trình (6.7), ta được

$$z' = b_2 f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right) + a_2.$$

Đây là phương trình có biến phân ly.

Ví dụ 6.1.13. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$(x + y - 2)dx - (x - y + 4)dy = 0.$$

Giải. Phương trình đã cho được viết lại

$$y' = \frac{x + y - 2}{x - y + 4}. \tag{6.9}$$

Hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0; \\ x - y + 4 = 0, \end{cases} \tag{6.10}$$

có nghiệm duy nhất $(-1; 3)$. Đặt $x = u - 1, y = v + 3$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$, thay vào phương trình (6.9), ta được

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}. \tag{6.11}$$

Đây là phương trình đẳng cấp. Đặt $z = \frac{v}{u}$, ta có $v = z.u$ và

$$\frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z.$$

Thay vào (6.11), ta thu được

$$\begin{aligned}
& u\frac{dz}{du} + z = \frac{1 + z}{1 - z} \\
\Leftrightarrow & \frac{1 - z}{1 + z^2}dz = \frac{du}{u} \\
\Leftrightarrow & \int \frac{1 - z}{1 + z^2}dz = \int \frac{du}{u} \\
\Leftrightarrow & \arctan z - \ln\sqrt{1 + z^2} = \ln|u| + \ln|C| = \ln|uC| \\
\Leftrightarrow & \arctan z = \ln|uC\sqrt{1 + z^2}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow e^{\arctan z} = uC\sqrt{1+z^2}\\
&\Leftrightarrow e^{\arctan \frac{v}{u}} = Cu\sqrt{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}\\
&\Leftrightarrow e^{\arctan \frac{v}{u}} = C\sqrt{u^2+v^2}.
\end{aligned}$$

Thay $u = x+1, v = y-3$, ta được tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$e^{\arctan \frac{y-3}{x+1}} = C\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}.$$

Ví dụ 6.1.14. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$(2x-2y-1)dx + (x-y+1)dy = 0.$$

Giải. Phương trình đã cho được viết lại

$$y' = -\frac{2(x-y)-1}{x-y+1}. \tag{6.12}$$

Hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-2y-1=0;\\ x-y+1=0, \end{cases} \tag{6.13}$$

vô nghiệm. Đặt $z = x-y$, ta có $z' = 1-y'$; thay vào phương trình (6.12), ta được

$$1 - z' = -\frac{2z-1}{z+1}. \tag{6.14}$$

Phân ly biến số, rồi tích phân lên ta thu được

$$z + \ln|z| = 3x + C.$$

Thay $z = x-y$ ta được tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\ln|x-y| = 2x + y + C.$$

6.1.5 Phương trình vi phân toàn phần

a. Định nghĩa

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6.15}$$

trong đó $P(x,y), Q(x,y)$ là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng của chúng trong một miền đơn liên $D \subseteq \mathbb{R}^2$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x;y) \in D. \tag{6.16}$$

b. Cách giải

Vì (6.16) nên $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó trên D. Do đó, (6.15) được viết lại là

$$du(x,y) = 0.$$

Suy ra tích phân tổng quát là

$$u(x,y) = C,$$

trong đó, $u(x,y)$ được tính bằng công thức

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \tag{6.17}$$

hoặc

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt, \tag{6.18}$$

với, $(x_0;y_0)$ là một điểm trong D.

Ví dụ 6.1.15. Giải phương trình

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0.$$

Giải. Hai hàm $P(x,y) = x^3 + 3xy^2$, $Q(x,y) = 3x^2y + y^3$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2.$$

Do đó, có hàm $u(x,y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$. Ta tìm $u(x,y)$ bằng công thức (6.17) với $(x_0;y_0) = (0;0)$,

$$u(x,y) = \int_0^x t^3 dt + \int_0^y (3x^2t + t^3)dt$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C.$$

Ví dụ 6.1.16. Giải phương trình

$$[(1 + x + y)e^x + e^y]dx + [e^x + xe^y]dy = 0.$$

Giải. Ta có $P(x,y) = (1 + x + y)e^x + e^y$, $Q(x,y) = e^x + xe^y$ cùng các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vậy có hàm $u(x,y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$. Ta tìm $u(x,y)$ bằng công thức (6.17) với $(x_0;y_0) = (0;0)$,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x [(1+t)e^t + 1]dt + \int_0^y (e^x + xe^t)dt \\ &= xe^x + x + e^x y + xe^y - x \\ &= (x+y)e^x + xe^y. \end{aligned}$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$(x + y)e^x + xe^y = C.$$

Chú thích 6.1.5. Ta có thể tìm hàm $u(x,y)$ mà $du = Pdx + Qdy$ theo cách như sau:

- Từ $u'_x = P$, ta tích phân bất định theo x, xem y là hằng,

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = R(x,y) + k(y).$$

- Lấy đạo hàm $u(x,y)$ này theo y và sử dụng $u'_y = Q$ ta tính được $k(y)$.

Ví dụ 6.1.17. Giải phương trình ở ví dụ 6.1.15. Ta có

$$\begin{aligned} u &= \int (x^3 + 3xy^2)dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + k(y). \end{aligned}$$

Đạo hàm theo y, rồi cho kết quả đồng nhất với $Q(x, y)$ ta được

$$u'_y = 3x^2y + \frac{dk}{dy} = 3x^2y + y^3.$$

Do đó

$$\frac{dk}{dy} = y^3,$$

suy ra

$$k(y) = \frac{y^4}{4} + C_0.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C.$$

c. Thừa số tích phân

Khi điều kiện (6.16) không thỏa mãn thì phương trình (6.15) không phải là phương trình vi phân toàn phần. Trong một vài trường hợp, ta có thể tìm được hàm $\mu(x, y)$ sao cho phương trình

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \tag{6.19}$$

là phương trình vi phân toàn phần. Hàm $\mu(x, y)$ như thế được gọi là thừa số tích phân.

Không có phương pháp tổng quát để tìm thừa số tích phân. Ta thường tìm thừa số tích phân chỉ phụ thuộc một biến. Phương trình (6.19) là phương trình vi phân toàn phần khi và chỉ khi

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \tag{6.20}$$

- Nếu $\mu(x,y) \equiv \mu(x)$ thì (6.20) trở thành

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} = \mu' Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

hay

$$\mu' Q = \mu\frac{\partial P}{\partial y} - \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Chia hai vế cho μQ ta được

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \equiv R(x).$$

Bằng cách tách biến ta đi đến

$$\mu(x) = e^{\int R(x)dx} = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$$

- Tương tự, nếu $\mu(x,y) \equiv \mu(y)$ thì thừa số tích phân có thể tìm được bởi công thức

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}$$

Vậy ta có

Định lý 6.1.2. *Xét phương trình (6.15). Ta có:*

- *Nếu* $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ *chỉ phụ thuộc vào* x *thì (6.15) có thừa số tích phân là*

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}.$$

- *Nếu* $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ *chỉ phụ thuộc vào* y *thì (6.15) có thừa số tích phân là*

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}.$$

Ví dụ 6.1.18. Giải phương trình

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0$$

Giải. $P(x, y) = y, Q(x, y) = -(4x^2y + x)$ và

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq -8xy - 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Phương trình đã cho không phải là phương trình vi phân toàn phần. Ta có

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = -\frac{2}{x}.$$

Do đó, thừa số tích phân của phương trình là

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Dễ thấy $x \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình. Xét $x \neq 0$, nhân hai vế phương trình đã cho với thừa số tích phân ta được

$$\frac{y}{x^2}dx - (4y + \frac{1}{x})dy = 0.$$

Chọn $x_0 = 1, y_0 = 0$, tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int_1^x \frac{0}{t^2}dt - \int_0^y (4t + \frac{1}{x})dt = C \Leftrightarrow -2y^2 - \frac{y}{x} = C.$$

6.1.6 Phương trình tuyến tính cấp một

a. Định nghĩa

Phương trình tuyến tính cấp một là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{6.21}$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm liên tục đã cho. Nếu $q(x) \equiv 0$ trong khoảng của biến x mà ta xét phương trình thì (6.21) được gọi là phương trình tuyến tính cấp một *thuần nhất*. Nếu $q(x) \neq 0$ thì (6.21) được gọi là phương trình tuyến tính cấp một *không thuần nhất*.

b. Cách giải

⋆ **Phương pháp biến thiên hằng số**
Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng với (6.21),

$$y' + p(x)y = 0. \tag{6.22}$$

Nếu $y \neq 0$, tách biến ta được

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Suy ra

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|,$$

với C là hằng số tùy ý, khác 0. Vậy nghiệm tổng quát của (6.22) là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{6.23}$$

Chú ý rằng $y \equiv 0$ là một nghiệm riêng của (6.22) ứng với $C = 0$.
Bước 2: Xem $C \equiv C(x)$, ta tìm $C(x)$ để (6.23) là nghiệm của (6.21). Thế (6.23) vào (6.21), ta được

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

hay

$$\frac{dC(x)}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Tích phân lên,

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C_1,$$

với C_1 là hằng số tùy ý. Suy ra nghiệm tổng quát của (6.21) là

$$y = C_1e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{6.24}$$

Chú thích 6.1.6. Biểu thức thứ hai trong vế phải của (6.24) là nghiệm riêng của (6.21) ứng với $C_1 = 0$, và biểu thức thứ nhất là nghiệm tổng quát của (6.22). Ta có thể chứng minh rằng: nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

⋆ **Phương pháp thừa số tích phân**

Ta viết (6.21) ở dạng

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$$

thì

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = p(x),$$

và thừa số tích phân của phương trình này là $e^{\int p(x)dx}$. Nhân hai vế (6.21) cho $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

hay

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Tích phân hai vế theo x ta được

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Do đó

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + Ce^{-\int p(x)dx}$$

là nghiệm tổng quát của (6.21).

Ví dụ 6.1.19. Giải phương trình

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Giải. Ta có $p(x) = 2x$ nên $e^{\int p(x)dx} = e^{x^2}$. Nhân hai vế phương trình cho e^{x^2} ta được

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = 2x,$$

hay

$$\left(ye^{x^2}\right)' = 2x.$$

Tích phân hai vế dẫn đến

$$ye^{x^2} = x^2 + C.$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

Ví dụ 6.1.20. Tìm nghiệm của phương trình

$$(x^2+1)y' + xy = 1$$

thỏa điều kiện $y(0) = 2$.
Giải. Phương trình được viết lại là

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1}.$$

Ta có $p(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ nên $e^{\int p(x)dx} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = \sqrt{x^2+1}$. Nhân hai vế phương trình cho $\sqrt{x^2+1}$ ta được

$$y'\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Viết phương trình này dưới dạng

$$\left(y\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

và tích phân lên ta được

$$y\sqrt{x^2+1} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

Suy ra

$$y = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Điều kiện $y(0) = 2$ thỏa khi và chỉ khi $C = 2$. Vậy nghiệm cần tìm là

$$y = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6.1.7 Phương trình Bernoulli

a. Định nghĩa

Phương trình Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \tag{6.25}$$

trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm liên tục đã cho, α là một số thực.

b. Cách giải

Nếu $\alpha = 0$ hay $\alpha = 1$ thì (6.25) trở thành phương trình tuyến tính. Vì vậy, ta giả thiết $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$. Dễ thấy $y \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình nếu $\alpha > 0$. Xét $y \neq 0$. Chia hai vế (6.25) cho y^{α} ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, suy ra $\frac{z'}{1-\alpha} = y^{-\alpha}y'$, thay vào phương trình ngay trên đây ta thu được

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$$

hay

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là phương trình tuyến tính. Sau khi tích phân phương trình này ta thay $z = y^{1-\alpha}$ để có được tích phân của (6.25).

Ví dụ 6.1.21. Giải phương trình

$$3y' + y = y^{-2}.$$

Giải. Chia hai vế phương trình cho y^{-2} ta được

$$3y^2y' + y^3 = 1.$$

Đặt $z = y^3$, ta có $z' = 3y^2y'$. Khi đó, phương trình trở thành

$$z' + z = 1.$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$z = 1 + Ce^{-x}$$

suy ra nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \sqrt[3]{1 + Ce^{-x}}.$$

6.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

6.2.1 Đại cương về phương trình vi phân cấp hai

Định nghĩa 6.2.1. Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{6.26}$$

Nếu giải được phương trình (6.26) đối với y'' thì phương trình (6.26) có dạng

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{6.27}$$

Định lý 6.2.1. *Cho phương trình (6.27). Nếu hàm số f cùng hai đạo hàm riêng theo biến thứ hai và thứ ba liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^3$ thì với mọi điểm $(x_0, y_0, y_0') \in D$, tồn tại duy nhất một nghiệm của phương trình (6.27) thỏa mãn điều kiện*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'. \tag{6.28}$$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (6.27) thỏa điều kiện (6.28) được gọi là bài toán Cauchy của phương trình (6.27).

Định nghĩa 6.2.2.

- Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

  $$y = \varphi(x, y, C_1, C_2),$$

  trong đó C_1, C_2 tùy ý, thỏa mãn phương trình với mọi giá trị của C_1, C_2 và với mọi điểm $(x_0, y_0, y_0') \in D$, tồn tại duy nhất cặp số $(C_1^{(0)}, C_2^{(0)})$ sao cho $y = \varphi(x, y, C_1^{(0)}, C_2^{(0)})$ là nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình (6.27).

- Hệ thức

  $$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

  xác định nghiệm tổng quát của phương trình (6.27) dưới dạng ẩn được gọi là tích phân tổng quát của nó.

- Nghiệm có được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho C_1, C_2 các giá trị cụ thể được gọi là nghiệm riêng. Tích phân có được từ tích phân tổng quát C_1, C_2 các giá trị cụ thể được gọi là tích phân riêng.

6.2.2 Phương trình khuyết

Phương trình khuyết y, y'

Phương trình có dạng $F(x, y'') = 0$. Đặt $y' = p$, ta được $F(x, p') = 0$, đây là phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ 6.2.1. Giải phương trình $x = y''^2 + y'' + 1$.
Giải. Đặt $p = y'$, phương trình trở thành

$$x = p'^2 + p' + 1.$$

Đặt $p' = t$ ta có $x = t^2 + t + 1$ và $dp = tdx = t(2t+1)dt$. Do đó, phương trình tham số của đường tích phân tổng quát của phương trình cấp một này là

$$x = t^2 + t + 1, p = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1.$$

Ta tìm y. Theo cách đặt thì

$$dy = pdx = \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1\right)(2t+1)dt.$$

Do đó

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1\right)(2t+1)dt \\ &= \int \left(\frac{4}{3}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2C_1t + C_1\right)dt. \end{aligned}$$

Vậy phương trình tham số của đường tích phân tổng quát của phương trình cấp một này là

$$x = t^2 + t + 1, y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + C_1t^2 + C_1t + C_2.$$

Phương trình khuyết y

Phương trình có dạng $F(x, y', y'') = 0$. Đặt $y' = p$, ta được $F(x, p, p') = 0$, đây là phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ 6.2.2. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$(1-x^2)y'' - xy' = 2,$$

thỏa mãn điều kiện $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
Giải. Đặt $p = y'$, ta có $y'' = p'$. Phương trình trở thành

$$(1-x^2)p' - xp = 2.$$

Vì ta xét trong lân cận điểm $x = 0$ nên phương trình được viết lại ở dạng

$$p' - \frac{x}{1-x^2}p = \frac{2}{1-x^2}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$p = \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$\begin{aligned} y &= \int p dx \\ &= \int \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2 \end{aligned}$$

Điều kiện $y(0) = 0$ cho ta $C_2 = 0$ và điều kiện $y'(0) = 0$ cho ta $C_1 = 0$.

Vậy nghiệm riêng cần tìm là $y = (\arcsin x)^2$.

Phương trình khuyết x

Phương trình có dạng $F(y, y', y'') = 0$. Đặt $y' = p$, ta có

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}.p.$$

Xem p là hàm theo p ta thu được phương trình

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

đây là phương trình cấp một đối với p.

Ví dụ 6.2.3. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$2yy'' = y'^2 + 1.$$

Giải. Đặt $p = y', y'' = p\frac{dp}{dy}$, phương trình trở thành

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$$

hay

$$\frac{dy}{y} = \frac{2pdp}{p^2+1}.$$

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = \ln(1+p^2) + \ln|C_1| \Leftrightarrow y = C_1(1+p^2), C_1 \neq 0.$$

Từ đó, ta có

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{2C_1pdp}{p} = 2C_1dp,$$

suy ra

$$dp = \frac{dx}{2C_1} \Rightarrow p = \frac{x}{2C_1} + C_2.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\left[\left(\frac{x}{2C_1} + C_2\right)^2 + 1\right].$$

6.2.3 Phương trình tuyến tính

Định nghĩa phương trình tuyến tính

Định nghĩa 6.2.3. Phương trình tuyến tính cấp hai là phương trình có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \forall x \in (a;b), \tag{6.29}$$

trong đó, $p(x), q(x)$ và $f(x)$ là các hàm liên tục trên $(a;b)$. Nếu $f(x) = 0, \forall x \in (a;b)$ thì (6.29) được gọi là phương trình *thuần nhất*. Nếu $f(x) \neq 0$ trên $(a;b)$ thì (6.29) được gọi là phương trình *không thuần nhất*.

Phương trình tuyến tính thuần nhất

Cho phương trình thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6.30}$$

Định nghĩa 6.2.4. Hai hàm $u(x), v(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* trên $(a; b)$ nếu

$$\alpha u(x) + \beta v(x) = 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Ngược lại, nếu tồn tại hai số α, β không đồng thời bằng không sao cho

$$\alpha u(x) + \beta v(x) = 0, \forall x \in (a; b)$$

thì hai hàm $u(x), v(x)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* trên $(a; b)$

Ví dụ 6.2.4. Hai hàm $\sin x, \cos x$ độc lập tuyến tính trên $[0; \pi]$.

Định nghĩa 6.2.5. Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Định thức

$$\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$$

được gọi là định thức Wronsky của $u(x), v(x)$ và được ký hiệu là $W(u, v)$.

Định lý 6.2.2. *Nếu hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm và phụ thuộc tuyến tính trên $(a; b)$ thì*

$$W(u(x), v(x)) = 0, \forall x \in (a; b).$$

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $W(u(x_0), v(x_0)) \neq 0$ và

$$\alpha u(x) + \beta v(x) = 0, \forall x \in (a; b). \tag{6.31}$$

Lấy đạo hàm hai vế (6.31) ta được

$$\alpha u'(x) + \beta v'(x) = 0, \forall x \in (a; b). \tag{6.32}$$

Từ (6.31) và (6.32) ta có

$$\begin{cases} \alpha u(x_0) + \beta v(x_0) = 0, \\ \alpha u'(x_0) + \beta v'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{6.33}$$

Hệ này có định thức

$$\begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{vmatrix} = W(u(x_0), v(x_0)) \neq 0$$

nên có nghiệm duy nhất $\alpha = \beta = 0$. Vậy $u(x), v(x)$ độc lập tuyến tính trên $(a; b)$. Vô lý. □

Định lý 6.2.3. *Giả sử phương trình (6.30) có hai nghiệm $y_1(x), y_2(x)$. Các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên $(a; b)$ khi và chỉ khi*

$$W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in (a; b).$$

Chứng minh. Chiều nghịch là hiển nhiên.

Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên $(a; b)$ ta chứng minh

$$W(y_1, y_2) \neq 0, \forall x \in (a; b).$$

Giả sử tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$. Khi ấy hệ

$$\begin{cases} \alpha u(x_0) + \beta v(x_0) = 0, \\ \alpha u'(x_0) + \beta v'(x_0) = 0. \end{cases} \tag{6.34}$$

có nghiệm không tầm thường $(\alpha; \beta)$. Hàm số

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

cũng là nghiệm của (6.30) và, theo (6.34), thỏa điều kiện Cauchy

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0.$$

Mà bài toán Cauchy của (6.30) với điều kiện $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$ có duy nhất nghiệm $y \equiv 0$ nên

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \forall x \in (a; b).$$

Vậy $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên $(a; b)$. Vô lý. □

Định lý 6.2.4. *Giả sử phương trình (6.30) có hai nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên $(a; b)$. Khi ấy nghiệm tổng quát của (6.30) có dạng*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{6.35}$$

Chứng minh. Rõ ràng hàm số có dạng (6.35) là nghiệm của (6.30). Giả sử $u(x)$ là nghiệm của (6.30) thỏa điều kiện Cauchy

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = b_0, x_0 \in (a; b). \tag{6.36}$$

Ta chứng minh tồn tại hai hằng số $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$ sao cho

$$u = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x), \forall x \in (a; b).$$

Thật vậy, hệ

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = u_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = b_0. \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $(C_1^{(0)}; C_2^{(0)})$ vì $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) \neq 0$. Do đó, $C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x)$ là nghiệm của (6.30) thỏa điều kiện (6.36). Mà bài toán Cauchy có duy nhất nghiệm nên

$$u = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x), \forall x \in (a; b).$$

□

Như vậy để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (6.30) ta chỉ cần tìm hai nghiệm độc lập tuyến tính của nó. Trong một vài trường hợp nếu ta có một nghiệm của (6.30) thì nghiệm độc lập tuyến tính còn lại được tìm nhờ vào định lý sau đây.

Định lý 6.2.5. *Giả sử phương trình (6.30) có nghiệm $y_1(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$. Khi ấy, ta có thể tìm nghiệm của (6.30) độc lập tuyến tính với y_1 trên $(a; b)$ ở dạng $y_2 = y_1(x)u(x)$.*

Chứng minh. Đặt $y = y_1(x)u(x)$. Ta có

$$y' = y_1'u + y_1u', y'' = y_1''u + 2y'u' + y_1u''.$$

Thế vào (6.30) ta được

$$y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' + (y_1'' + py_1' + qy_1)u = 0.$$

Mà $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$ nên ta thu được phương trình

$$y_1 u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0.$$

Đặt $z = u'$, phương trình trở thành

$$y_1 z' + (2y_1' + py_1)z = 0.$$

Nghiệm riêng của phương trình này là

$$z = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}.$$

Suy ra

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Vậy nghiệm thứ hai của (6.30), độc lập với y_1, được tính bởi

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx. \tag{6.37}$$

□

Ví dụ 6.2.5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, |x| > 1.$$

Biết rằng $y_1 = x$ là một nghiệm riêng của phương trình.
Giải. Viết lại phương trình ở dạng

$$y'' + \frac{2x}{1 - x^2} y' - \frac{2}{1 - x^2} y = 0,$$

ta được $p(x) = \frac{2x}{1-x^2}$. Do đó

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln(x^2-1)}}{x^2} dx = x^2 + 1.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 x + C_2(x^2 + 1).$$

Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình (6.29),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \forall x \in (a; b),$$

với $p(x), q(x)$ và $f(x)$ là các hàm liên tục trên $(a; b)$.

Nếu $u(x)$ là nghiệm của (6.30) và $v(x)$ là nghiệm của (6.29) thì vì

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = 0, \forall x \in (a; b)$$

và

$$v''(x) + p(x)v'(x) + q(x)v(x) = f(x), \forall x \in (a; b)$$

nên

$$[u(x) + v(x)]'' + p(x)[u(x) + v(x)]' + q(x)[u(x) + v(x)] = 0 + f(x).$$

Vậy $u(x) + v(x)$ là nghiệm của (6.29).

Hơn nữa, ta có định lý về nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (6.29) như sau

Định lý 6.2.6. *Cho $y_g(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của (6.30) và $y_p(x)$ là một nghiệm riêng của (6.29). Khi ấy, nghiệm tổng quát của (6.29) có dạng*

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x).$$

Chứng minh. Giả sử $y(x)$ là một nghiệm của (6.29). Vì $y_p(x)$ cũng là nghiệm của (6.29) nên $u(x) = y(x) - y_p(x)$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất (6.30). Thật vậy, với mọi $x \in (a; b)$ ta có

$$\begin{aligned} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) &= y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) \\ &\quad - [y_p''(x) + p(x)y_p'(x) + q(x)y_p(x)] \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Do đó, theo định lý 6.2.4, tồn tại duy nhất cặp số $(C_1^{(0)}; C_2^{(0)})$ sao cho

$$u(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x),$$

suy ra

$$y(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + y_p(x).$$

Vậy nghiệm tổng quát của (6.29) là

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x).$$

□

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Giả sử phương trình thuần nhất (6.30) có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{6.38}$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý. Ta tìm nghiệm riêng của (6.29) dưới dạng (6.38) trong đó C_1, C_2 là hai hàm số. Ta có

$$y' = C_1 y_1' + C_1' y_1 + C_2 y_2' + C_2' y_2.$$

Chọn C_1, C_2 sao cho

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Khi đó

$$y'' = C_1 y_1'' + C_1' y_1' + C_2 y_2'' + C_2' y_2'.$$

Thay y, y' và y'' vào (6.29), ta được

$$C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Vì y_1, y_2 là nghiệm của phương trình (6.30) nên đẳng thức trở thành

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Vậy hàm số ở (6.38) là nghiệm của (6.30) nếu C_1, C_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases} \tag{6.39}$$

Vì y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (6.30) nên

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in (a; b).$$

Do đó, hệ (6.39) có nghiệm duy nhất $C_1'(x), C_2'(x)$. Tích phân lên ta thu được $C_1(x), C_2(x)$.

Ví dụ 6.2.6. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2, |x| > 1.$$

Giải. Viết lại phương trình ở dạng

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{(1-x^2)}y = 1. \tag{6.40}$$

Theo ví dụ 6.2.5, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình này là

$$y_g(x) = C_1 x + C_2(x^2+1).$$

Hàm

$$y_p(x) = C_1(x)x + C_2(x)(x^2+1)$$

là nghiệm của phương trình (6.40) nếu $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)(x^2+1) = 0, \\ C_1'(x) + C_2'(x)2x = 1. \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$C_1'(x) = -\frac{x^2+1}{x^2-1}, C_2'(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Suy ra

$$C_1(x) = -\left(x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right), C_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-1).$$

Do đó, một nghiệm riêng của (6.40) là

$$y_p(x) = -\left(x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)x + \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2-1)$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 x + C_2(x^2+1) - \left(x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)x + \frac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2-1)$$

Nguyên lý chồng nghiệm

Định lý sau đây cho phép ta tìm nghiệm riêng của phương trình (6.29) đơn giản hơn khi $f(x)$ phức tạp.

Định lý 6.2.7. *Cho phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) + g(x). \tag{6.41}$$

Nếu $y_1(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

và $y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

thì $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ là một nghiệm riêng của (6.41).

6.2.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng

Phương trình thuần nhất

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, x \in (a; b), \tag{6.42}$$

trong đó, p, q là các hằng số thực. Ta biết rằng muốn tìm nghiệm tổng quát của (6.42), chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Ta sẽ tìm nghiệm riêng của (6.42) ở dạng $y = e^{kx}$, với k là một hằng số cần tìm. Thế vào (6.42), ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên ta có

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{6.43}$$

Vậy $y = e^{kx}$ là nghiệm của (6.42) khi và chỉ khi k là nghiệm của (6.43). Phương trình (6.43) được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (6.42). Có ba khả năng sau đây:

1. Phương trình (6.43) có hai nghiệm thực phân biệt k_1 và k_2. Khi ấy, (6.42) có hai nghiệm riêng $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ độc lập tuyến tính trên $(a; b)$ nên nó có nghiệm tổng quát là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{6.44}$$

2. Phương trình (6.43) có nghiệm kép thực là k. Khi ấy, (6.42) có một nghiệm riêng là $y_1 = e^{kx}$. Ta tìm nghiệm riêng thứ hai theo công thức (6.37),

$$y_2 = e^{kx} \int \frac{e^{-px}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} x,$$

ở đó, ta đã thay $-p = 2k$. Vậy nghiệm tổng quát của (6.42) là

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

3. Phương trình (6.43) có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$. Hai nghiệm riêng của (6.42) là

$$\bar{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$$
$$\bar{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x).$$

Suy ra

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha x} \cos\beta x$$
$$y_2 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha x} \sin\beta x$$

cũng là hai nghiệm riêng của (6.42). Và dễ thấy hai nghiệm y_1, y_2 độc lập tuyến tính. Vậy nghiệm tổng quát của (6.42) là

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Ví dụ 6.2.7. Giải các phương trình thuần nhất

1. $y'' + y' - 2y = 0$;

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$;

3. $y'' - 4y' + 13y = 0$

Giải.

1. Phương trình đặc trưng
$$k^2 + k - 2 = 0$$
có hai nghiệm $k_1 = 1, k_2 = -2$ nên phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

2. Phương trình đặc trưng
$$k^2 - 4k + 4 = 0$$
có nghiệm kép $k = 2$ nên phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

3. Phương trình đặc trưng
$$k^2 - 4k + 13 = 0$$
có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = 2 + 3i, k_2 = 2 - 3i$ nên phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là
$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Phương trình không thuần nhất

Xét phương trình
$$y'' + py' + qy = f(x), x \in (a; b), \tag{6.45}$$
trong đó, p, q là các hằng số thực và $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Theo định lý 6.2.6, muốn tìm nghiệm tổng quát của (6.45), ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng của nó. Nghiệm riêng của (6.45) được tìm bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.

Ví dụ 6.2.8. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất

$$y'' + y' - 2y = -4x$$

Giải.

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng,

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Phương trình đặc trưng $k^2 + k - 2 = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 1, k_2 = -2$ nên

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Bước 2: Có thể kiểm tra một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là

$$y_p = 2x + 1$$

Bước 3: Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đã cho là

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 2x + 1$$

Ví dụ 6.2.9. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = x$$

Giải. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Hàm

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$$

là nghiệm của phương trình đã cho nếu C_1, C_2 thỏa hệ

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' 2e^{2x} = x. \end{cases}$$

Giải hệ ta được

$$\begin{cases} C_1' = -xe^{-x}, \\ C_2' = xe^{-2x}. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} C_1 = (x+1)e^{-x}, \\ C_2 = (-\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{-2x}. \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

Trong một số trường hợp vế phải của (6.45), hàm $f(x)$, có dạng đặc biệt thì nghiệm riêng của nó được tìm mà không cần phải tính tích phân như ta đã thấy ở phương pháp biến thiên hằng số. Ta xét các trường hợp sau:
⋆ **Trường hợp 1.** $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ với α là hằng số thực và $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

Ta xét các khả năng sau:

1. Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.43) thì ta tìm nghiệm riêng của (6.45) ở dạng

$$y_p = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n, có $n+1$ hệ số cần tìm. Đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của y_p là

$$\begin{aligned} y_p' &= \alpha e^{\alpha x} Q_n(x) + e^{\alpha x} Q_n'(x), \\ y_p'' &= \alpha^2 e^{\alpha x} Q_n(x) + 2\alpha e^{\alpha x} Q_n'(x) + e^{\alpha x} Q_n''(x). \end{aligned}$$

Thay chúng vào (6.45) ta được

$$Q_n''(x) + (a + 2\alpha) Q_n'(x) + (\alpha^2 + a\alpha + b) Q_n(x) = P_n(x). \tag{6.46}$$

Vì $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$ nên vế trái của (6.46) là một đa thức bậc n cùng bậc với đa thức ở vế phải, $P_n(x)$. Đồng nhất hệ số ta thu được $n+1$ phương trình bậc nhất vối $n+1$ ẩn số, là các hệ số của $Q_n(x)$. Giải hệ, ta tìm được $Q_n(x)$ và thu được nghiệm riêng của (6.45).

2. Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (6.43) thì

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \text{ và } a + 2\alpha \neq 0.$$

Khi đó vế trái của (6.46) là một đa thức bậc $n-1$. Ta nâng bậc của nó lên một đơn vị mà không làm tăng số các hệ số bằng cách thay $Q_n(x)$ bởi $xQ_n(x)$. Khi ấy, ta sẽ tìm được nghiệm riêng có dạng

$$y_p = e^{\alpha x} x Q_n(x).$$

3. Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (6.43) thì

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \text{ và } a + 2\alpha = 0.$$

Vế trái của (6.46) là một đa thức bậc $n-2$. Ta nâng bậc của nó lên hai đơn vị mà không làm tăng số các hệ số bằng cách thay $Q_n(x)$ bởi $x^2Q_n(x)$. Nghiệm riêng được tìm có dạng

$$y_p = e^{\alpha x} x^2 Q_n(x).$$

Ví dụ 6.2.10. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + 3y' - 4y = x.$$

Giải. Vế phải $f(x) = x$ có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)$ với $\alpha = 0, n = 1$. Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 3k - 4 = 0$ nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_p = Ax + B.$$

Thay y_p vào phương trình trên, ta thu được

$$-4Ax + 3A - 4B = x.$$

Đồng nhất hệ số

$$\begin{cases} -4A & = 1, \\ 3A - 4B & = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4}, \\ B = -\frac{3}{16}. \end{cases}$$

Vậy

$$y_p = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$

Ví dụ 6.2.11. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - y' = e^x(x+1).$$

Giải. Vế phải phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)$ với $\alpha = 1, n = 1$. Vì $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0$ nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_p = xe^x(Ax+B) = e^x(Ax^2+Bx).$$

Ta có

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x(Ax^2+Bx) + e^x(2Ax+B), \\ y_p'' &= e^x(Ax^2+Bx) + 2e^x(2Ax+B) + e^x 2A. \end{aligned}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$2Ax + B + 2A = x + 1.$$

Đồng nhất hệ số

$$\begin{cases} 2A &= 1, \\ B + 2A &= 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Vậy

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Ví dụ 6.2.12. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}x.$$

Giải. Vế phải phương trình đã cho có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)$ với $\alpha = 3, n = 1$. Vì $\alpha = 3$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $k^2 - 6k + 9k = 0$ nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_p = x^2e^{3x}(Ax+B) = e^{3x}(Ax^3+Bx^2).$$

Ta có

$$\begin{aligned} y_p' &= 3e^{3x}(Ax^3+Bx^2) + e^{3x}(3Ax^2+2Bx), \\ y_p'' &= 9e^{3x}(Ax^3+Bx^2) + 6e^{3x}(3Ax^2+2Bx) + e^{3x}(6Ax+2B). \end{aligned}$$

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$(6A - 10B)x + 2B = x.$$

Đồng nhất hệ số

$$\begin{cases} 6A - 10B & = 1, \\ 2B & = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Vậy

$$y_p = \frac{1}{6}x^3 e^{3x}.$$

$\star$ **Trường hợp 2.** $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$ với $P_m(x), P_n(x)$ là hai đa thức bậc m, n và β là hằng số thực khác không. Người ta chứng minh được rằng:

1. Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.43) thì một nghiệm riêng của (6.45) có dạng

$$y_p = Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x,$$

trong đó $Q_l(x), R_l(x)$ là hai đa thức bậc $l = \max(m, n)$.

2. Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (6.43) thì một nghiệm riêng của (6.45) có dạng

$$y_p = x[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x],$$

trong đó $Q_l(x), R_l(x)$ là hai đa thức bậc $l = \max(m, n)$.

Ví dụ 6.2.13. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y = x\sin x.$$

Giải. Vế phải của phương trình có dạng $P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$ với $m = 0, n = 1$ và $\beta = 1$. Vì $\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$ nên ta tìm nghiệm riêng có dạng

$$y_p = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$

Tính y'_p, y''_p rồi thay vào phương trình đã cho ta được

$$4Cx\cos x - 4Ax\sin x + 2(A+D)\cos x + 2(C-B)\sin x = x\sin x.$$

Đồng nhất hệ số

$$\begin{cases} -4A &= 1, \\ 4C &= 0, \\ 2(A+D) &= 0, \\ 2(C-B) &= 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4}, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Vậy

$$y_p = \frac{x}{4}(\sin x - \cos x).$$

Ví dụ 6.2.14. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - y' = \cos 2x.$$

Giải. Vế phải của phương trình có dạng $P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$ với $m = 0, n = 0$ và $\beta = 2$. Vì $\pm i\beta = \pm i2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 - k = 0$ nên ta tìm nghiệm riêng có dạng

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x].$$

Ta có

$$\begin{aligned} y'_p &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \\ y''_p &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$(-4A - 2B)\cos 2x + (2A - 4B)\sin 2x = \cos 2x$$

Đồng nhất hệ số

$$\begin{cases} -4A - 2B &= 1, \\ 2A - 4B &= 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{10}, \\ B = -\frac{1}{10}. \end{cases}$$

Vậy

$$y_p = -\frac{2}{10}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x.$$

⋆ **Trường hợp 3.** $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$ với $P_m(x), P_n(x)$ là hai đa thức bậc m, n và α, β là hai hằng số thực khác không.

Đặt $y = e^{\alpha x}z$. Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \alpha e^{\alpha x}z + e^{\alpha x}z', \\ y'' &= \alpha^2 e^{\alpha x}z + 2\alpha e^{\alpha x}z' + e^{\alpha x}z''. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (6.45), ta được

$$z'' + (a + 2\alpha)z' + (\alpha^2 + a\alpha + b)z = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x,$$

là dạng phương trình đã xét ở trường hợp 2.

Ví dụ 6.2.15. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y' = e^x \cos 2x.$$

Giải. Vế phải của phương trình, $e^x \cos 2x$, có dạng

$$e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$$

với $m = n = 0, \alpha = 1$ và $\beta = 2$. Đặt $y = e^x z$. Thay vào phương trình ta được

$$z'' + 3z' + 2z = \cos 2x.$$

Nghiệm riêng của phương trình này được tìm dưới dạng

$$z_p = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Kết quả tìm được

$$z_p = -\frac{1}{20}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x.$$

Suy ra nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_p = e^x\left(-\frac{1}{20}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x\right).$$

BÀI TẬP

Phương trình vi phân cấp một

Bài 6.1. Giải phương trình có biến phân ly:

1. $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$;
2. $x^2(1-y)y' + y^2(1+x) = 0$;
3. $y'\cos 2y - \sin y = 0$;
4. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$;
5. $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$;
6. $y' = \cos(x-y)$;
7. $y' = x^2 + 2xy + 1 + y^2$;
8. $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1$.

Bài 6.2. Tìm nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện ban đầu:

1. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0, y(0) = 1$;
2. $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx, y(0) = 0$;
3. $\sin xdy - y\ln ydx = 0, y(0) = 1$;
4. $(x^2+1)y' = y^2 + 4, y(1) = 2$.

Bài 6.3. Giải các phương trình đẳng cấp cấp một:

1. $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$;
2. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$;
3. $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$;
4. $(3x^2+y^2)y + (y^2-x^2)xy' = 0$;
5. $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y+3}$;
6. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Bài 6.4. Giải các phương trình tuyến tính cấp một:

1. $2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0$;
2. $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$;
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;
5. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = 0$;
6. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$;
7. $(1+x^2)y' + xy = 1, y(0) = 0$;
8. $xy' - y = x^2\arctan x$;
9. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, y(e) = \dfrac{e^2}{2}$;
10. $(x^3+x)y' + 3x^2y = \sqrt{x^2+1}$.

Bài 6.5. Chứng minh rằng phương trình

$$x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 3$$

có một nghiệm là một tam thức bậc hai. Giải phương trình ấy.

Bài 6.6. Chứng minh rằng hàm số $y = x\int_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình $xy' - y = x^2e^{x^2}$. Tìm nghiệm riêng của phương trình thỏa mãn điều kiện $y(1) = 1$.

Bài 6.7. Giải các phương trình Bernoulli:

1. $xy^2 + x^2(x+1)yy' + 3x - 5 = 0;$
2. $y' + xy = x^3y^3;$
3. $(y\ln x - 2)ydx = xdy;$
4. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, y(0) = \dfrac{9}{4}.$

Bài 6.8. Giải các phương trình vi phân toàn phần:

1. $(x+y+1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0;$
2. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0;$
3. $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right]dx + \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0;$
4. $\dfrac{x}{(x+y)^2}dx + \dfrac{2x+y}{(x+y)^2}dy = 0;$
5. $3x^2(1+\ln y)dx - \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0;$
6. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

Phương trình vi phân cấp hai

Bài 6.9. Giải các phương trình tuyến tính:

1. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$, biết một nghiệm riêng $y_1(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$, biết một nghiệm riêng $y_1(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $(x^2-1)y''-6y=0$, biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ là đa thức bậc ba.

4. $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0, y(1)=0, y'(1)=1$ biết một nghiệm riêng $y_1(x)=e^x$.

5. $(2x-x^2)y''+2(x-1)y'-2y=-2$, biết hai nghiệm riêng là $y_1(x)=1$, $y_2=x$.

Bài 6.10. Giải các phương trình tuyến tính hệ số hằng:

1. $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$;
2. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$;
3. $y''+y=\operatorname{tg} x$;
4. $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$;
5. $y''-7y'+6y=\sin x$;
6. $y''+9y=6e^{3x}$;
7. $y''-3y'=2-6x$;
8. $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$;
9. $y''+4y=2\sin 2x$;
10. $y''+2y'+y=4e^{-x}$;
11. $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$;
12. $y''+4y'-5y=2e^x$;
13. $y''+2y'+5y=2xe^{-x}\cos 2x$;
14. $y''+y=x^2\cos^2 x$;
15. $y''-3y'=e^{3x}-18x$;
16. $y''+y=\cos^3 x$.

Bài 6.11. Giải các phương trình bằng phép đổi biến tương ứng:

1. $x^2y''+xy'-4y=x^2\ln x, x=e^t$;

2. $y''-y'=e^{2x}\cos e^x, t=e^x$;

3. $(x^2+1)y''+2xy'+\dfrac{4y}{x^2+1}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}, x=\operatorname{tg} t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

ĐÁP SỐ - HƯỚNG DẪN

Bài 6.1.

1. $\ln|xy|+x-y=C$;
2. $\dfrac{x+y}{xy}+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=C$;
3. $x=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\right|+2\cos y+C$;
4. $2\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\right|=C$;

5. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = C\left(1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right);$

6. $x + \operatorname{cotg}\dfrac{x-y}{2};$

7. $y = \dfrac{1}{x+C} - x;$

8. $(x-y)^2 + 2x = C.$

Bài 6.2.

1. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{2} + 1;$

2. $y^3 - 3\arctan e^x + \dfrac{3\pi}{4} = 0;$

3. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = C\ln y;$

4. $y = \dfrac{2(x^2-1)+4x}{1-x^2+2x}.$

Bài 6.3.

1. $-x^2 + 2xy + y^2 = C;$

2. $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2;$

3. $y^2 = x^2(Cx^2+1);$

4. $y = Cx(x^2+y^2);$

5. $x^2 - y^2 - 2xy + 2x - 6y = C;$

6. $e^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2).$

Bài 6.4.

1. $$y = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{x^2-x}} - \frac{\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}\right|}{2\sqrt{x^2-x}}, & x < 0 \vee x > 1 \\ \frac{C}{\sqrt{x^2-x}} + \frac{\arcsin(2x-1)}{\sqrt{x^2-x}}, & 0 < x < 1. \end{cases};$$

2. $y = \dfrac{1}{x} + C\dfrac{1+x^2}{x};$

3. $y = e^{-x^2}(\dfrac{x^2}{2} + C);$

4. $y = (1+x^2)(x+C);$

5. $y = (1+x)^2\left(\dfrac{x^2}{2} + x\right);$

6. $2x = y62 + C;$

7. $y = \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}};$

8. $y = x^2\arctan x - \dfrac{x^2}{2}\ln(1+x^2) + Cx;$

9. $y = \dfrac{x^2}{2}\ln x;$

10. $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\left(\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + C\right).$

Bài 6.5. $y = 2x^2 - 1 + C\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}.$

Bài 6.6. $y = x\int_1^x e^{t^2}dt + Cx.$

Bài 6.7.

1. $y^2 = \frac{6}{x} + C\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2};$
2. $y^2(x^2+1+Ce^{x^2}) = 1;$
3. $y\left(\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + Cx^2\right) = 1;$
4. $y = e^{-x}\left(\frac{e^x}{2}+1\right)^2.$

Bài 6.8.

1. $\frac{1}{2}x^2 + x + xy + 3y - \frac{1}{3}y^3 = C;$
2. $y^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C;$
3. $\frac{y^2}{y-x} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| - y = C;$
4. $\ln|x+y| + \frac{y}{x+y} = C;$
5. $x^3(1+\ln|y|) - y^2 = C;$
6. $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{y}{x} + x - \frac{1}{y} = C;$

Bài 6.9.

1. $y = C_1x + C_2\ln x;$
2. $y = C_1e^{-2x} + C_2\left[\frac{1}{2} + e^{2x}\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right)\right];$
3. $y = C_1(x^3 - x) + C_2\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}(x^3-x)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right];$
4. $y = x^2 - e^{x-1};$
5. $y = C_1(x-1) + C_2(x^2-x+1) + 1.$

Bài 6.10.

1. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{e^x}{2}\ln\frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^{-x}}{2}\ln\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2};$
2. $y = C_1xe^{-x} + C_2e^{-x} + \frac{4}{15}e^{-x}(x+1)^{\frac{5}{2}};$
3. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|;$
4. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + e^{-3x}(\arctan e^x - e^x) + \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x});$

5. $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \dfrac{7}{74}\cos x + \dfrac{5}{74}\sin x$;
6. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{1}{3}e^{3x}$;
7. $y = C_1 + C_2\dfrac{e^{3x}}{3} + x^2$;
8. $y = e^x[C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x] + \dfrac{1}{41}(5\cos x - 4\sin x)e^{-x}$;
9. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{1}{2}x\cos 2x$;
10. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 2x^2e^{-x}$;
11. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} - \dfrac{1}{3}x(x^2 + 3x + 6)e^{4x}$;
12. $y = C_1e^{-5x} + C_2e^x - \dfrac{1}{3}xe^x$;
13. $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \dfrac{1}{16}e^{-x}[2x\cos 2x + (4x^2 - 1)\sin 2x]$;
14. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}x^2 - 1 - \left(\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{13}{17}\right)\cos 2x + \dfrac{4}{9}x\sin 2x$;
15. $y = C_1e^{3x} + C_2 + \dfrac{1}{9}e^{3x}(3x - 1) + 3x^2 + 2x$;
16. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{3}{8}\cos x - \dfrac{1}{8}\cos^3 x + \dfrac{3}{8}x\sin x$.

Bài 6.11.

1. $y = C_1x^2 + C_2x^{-2} + \dfrac{x^2}{64}(16\ln^2 x - 4\ln x + 1)$;
2. $y = C_1e^x + C_2 - \cos e^x$;
3. $y = C_1\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} + C_2\dfrac{2x}{1 + x^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\arctan x$.