Bài 1 : Ma trận

1.Định nghĩa ma trận

Ma trận A cấp (m x n) là một bảng hình chữ nhật gồm ***m*** dòng, ***n*** cột chứa (m.n) số thức . Kí hiệu $A = \left[a_{ij}\right];\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$

$$\text{hay } A = \begin{array}{c} \text{Cột j} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Dòng i

- Phần tử a_{ij} là phần tử thuộc dòng i, cột j
- Tập hợp các ma trận kí hiệu là $M_{m\times n}(\mathrm{R})$

Ví dụ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 & a_{12} = 3 & a_{13} = 2 \\ a_{21} = 2 & a_{22} = 5 & a_{23} = 1 \end{cases}$

➢ Các ma trận đặc biệt

- Ma trận cột – ma trận dòng

n=1: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ là ma trận cột ; m=1:$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ là ma trận dòng.

- Ma trận $O = (0_{ij})_{m\times n}$ là ma trận có các phần tử đều bằng 0.

$O_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Ma trận vuông(m=n) : A_n

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; $C = [1]$

Đường chéo chứa các phần tử $a_{11};\ a_{22};..a_{nn}$ (có chỉ số dòng= chỉ số cột) được gọi là đường chéo chính.

Đường chéo còn lại được gọi là đường chéo phụ.

- Ma trận đối xứng. Ma trận phản đối xứng.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Ma trận tam giác

Tam giác trên : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ Tam giác dưới : $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Ma trận chéo : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Ma trận đơn vị : $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận chéo B còn có thể biểu diễn dưới dạng : **B=diag(1,2,3)**

Hai ma trận bằng nhau : ma trận A và B bằng nhau khi và chỉ khi chúng *cùng cấp* và có các phần tử tương ứng bằng nhau $a_{ij} = b_{ij}$

2. Các phép toán trên ma trận

a.Phép cộng (trừ) ma trận

-Cho hai ma trận *cùng cấp* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$; $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

Tổng của A và B, kí hiệu $A+B$, là ma trận cấp m x n, mà các phần tử có được bằng cách lấy tổng của các phần tử tương ứng thuộc A và B.

Ví dụ :

I . $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

ii . Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Thực hiện tính A+B

- Tính chất :

$A + 0 = 0 + A = A;$ $A + B = B + A$

$(A + B) + C = A + (B + C);$ $A + (-A) = 0$

b.Phép nhân một số với một ma trận

-Cho ma trận $A_{m\times n}$ và số thực λ. Ma trận $\lambda.A$ có được từ A bằngc ách nhân tất cả các phần tử của A với λ.

Ví dụ $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$.

$(-2).A=\begin{bmatrix}(-2).1 & (-2).3 & (-2).2\\ (-2).2 & (-2).5 & (-2).1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6 & -4\\ -4 & -10 & -2\end{bmatrix}$

- Tính chất

1.A=A ; $\lambda.(A+B)=\lambda A+\lambda B$; $(\lambda+\mu).A=\lambda A+\mu A$; $(\lambda.\mu).A=\lambda.(\mu A)$

c.Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, ta có :

$A_{m\times n}.B_{n\times p}=C_{m\times p}$
(điều kiện : **số cột** của A= **số dòng** của B)

$$c_{ij}=\underline{dong}\ i(A)\ x\ \underline{\cot}\ j(B)=(a_{i1}\quad a_{i2}\quad \dots\quad a_{in}).\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \dots\\ b_{nj}\end{pmatrix}$$

$$=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+\dots+a_{in}.b_{nj}$$

Ví dụ :

i.Nhân ma trận dòng cho ma trận cột

$A=[1\quad -2\quad 3]$; $B=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix}$

$A.B=1.2+(-2).(-1)+3.4=16$

ii. $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$. Tính A.B và B.A.

➢ $A_{2\times 3}.B_{3\times 3}=C_{2x3}$

$+c_{11}=\underbrace{[-2\quad 1\quad 1]}_{dong\ 1(A)}.\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}}_{Cot1(B)}=(-2).(-1)+1.2+1.2=6$

$c_{12}=[-2\quad 1\quad 1].\begin{bmatrix}4\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=(-2).4+1.0+1.(-1)=-9$

$c_{13}=[-2\quad 1\quad 1].\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=(-2).3+1.2+1.1=-3$

Tương tự ta được $c_{21}=8$; $c_{22}=-1$; $c_{23}=7$

Sắp xếp vào ma trận C ta được $C=\begin{bmatrix}6 & -9 & -3\\ 8 & -1 & 7\end{bmatrix}$.

➢ $B_{3\times 3}.A_{2\times 3}$: không thực hiện được phép toán (cột của B≠dòng của A)

- Tính chất

$(A.B).C=A.(B.C)$ $\quad A.(B+C)=A.B+A.C$ hoặc $(A+B).C=A.C+B.C$

$\lambda(A.B)=(\lambda.A).B=A.(\lambda.B)$ $\quad A.I_n=I_m.A=A$ $\quad A.O=O.A=O$

Lưu ý : Phép toán nhân 2 ma trận không có tính **giao hoán**

❖ *Phép toán lũy thừa ma trận* (chỉ giành cho A_n -ma trận vuông)

$A^0=I_n$ $\qquad A^2=A.A$ $\qquad A^n=(A)^{n-1}.A=A.(A)^{n-1}$

Ví dụ. $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Tính A^3 ?

$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

✓ tồn tại số **k∈N (≠0,1)** : $A^k=O_n$ thì ta gọi A là **ma trận lũy linh.**

Số **k≥2** *nhỏ nhất* sao cho $A^k=O_n$ được gọi là *cấp* của ma trận lũy linh.

Ví dụ $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, có $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0_3\Rightarrow A^3=O_3=A^4\dots=A^n$

Nên A là ma trận lũy linh cấp 2.

- Tính chất

$(O_n)^k=O_n$ $\qquad (I_n)^k=I_n$

$A^{k+m}=A^k.A^m$ $\qquad (A^k)^m=A^{k.m}$

✓ Nhận xét

- $A = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) \Rightarrow A^k = diag(a_{11}^k, a_{22}^k, ..., a_{nn}^k)$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} (5)^3 & 0 \\ 0 & (-2)^3 \end{bmatrix}$$

-Nếu A.B=B.A : các hằng đẳng thức quen thuộc cũng đúng với A, B

d.Phép toán chuyển vị

-Cho ma trận $A_{m\times n}$. Ma trận A^T được gọi là ma trận chyển vị của ma trận A, thu được từ ma trận A bằng cách sắp xếp lần lượt các dòng của ma trận A thành các cột của ma trận A^T.

Ví dụ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- Tính chất

$(A^T)^T = A$; $\lambda(A)^T = \lambda A^T$; $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(A.B)^T = B^T.A^T$

* $A^T = A$: A là ma trận đối xứng.

* $A^T = -A$: A là ma trận phản xứng.

3. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận(Gauss - Jordan)

-Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$, các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của A là :

1. Hoán vị 2 dòng cho nhau : $d_i \leftrightarrow d_j$

2. Nhân 1 dòng với 1 số $\lambda \neq 0$: $d_i' = \lambda.d_i$

3. Thay một dòng bởi tổng của dòng đó với λ lần dòng khác $d_i' = d_i + \lambda.d_j$

-Trong khi tính toán ta thường kết hợp phép toán 2&3 : $d_i' = \lambda.d_i + \beta.d_j$

-Tương tự ta cũng có các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

-Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng hoặc cột được gọi chung là các phép biến đổi sơ cấp.

Ví dụ : Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ta có

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3' = d_3 + d_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{rcrrrr} d_3 & = & 0 & 1 & -2 & 1 \\ d_2 & = & 0 & -1 & 2 & 1 \\ \hline d_3' & = & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

4. Ma trận bậc thang

Định nghĩa :

- **Dòng tầm thường** là dòng mà các phần tử thuộc dòng đó đều bằng 0
- **Dòng tầm không thường** là dòng có ít nhất 1 phần tử khác 0,phần tử khác 0 đầu tiên của dòng gọi là **phần tử dẫn đầu**,chỉ số cột của phần tử dẫn đầu cũng chính là số **bậc của dòng**.

Ma trận bậc thang(dòng) là ma trận có các dòng tầm thường(nếu có) nằm ở dưới đáy,bậc của dòng(từ trên xuống) tăng thật sự

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Các ma trận bậc thang

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Các ma trận không phải là ma trận bậc thang

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

✓ **Định lý** : Mọi ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n} \neq O_{m\times n}$ đều có thể đưa về ma trận bậc thang sau một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp dòng.

- **Biến đổi về ma trận bậc thang :**

-B1 : tìm cột không tầm thường đầu tiên(từ trái qua)
-B2 : tìm phần tử khác 0 đầu tiên của cột,đổi chỗ các dòng để ptử đó nằm ở vị trí đầu tiên của cột(đặt tên là **phần tử trụ**).
-B3 : biến đổi các phần tử phía dưới nằm cùng 1 cột với phần tử trụ về 0 bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng(sử dụng phần tử trụ để biến đổi các phần tử này).
-B4 : lập lại các bước trên với ma trận con có được từ ma trận trên bằng cách bỏ đi dòng 1. Lập lại cho đến khi có dạng bậc thang (hay cho đến khi ko tìn thấy cột không tầm thường thì dừng lại hoặc ma trận con chỉ còn lại 1 hàng)

Ví dụ : Biến đổi ma trận A về ma trận bậc thang

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(ta thực hiện **bước 1** tìm cột không tầm thường đầu tiên từ trái sang=>chính là cột 1)
(**bước 2** lấy 1 là phần tử thuộc dòng 1 cột 1 làm phần tử trụ,thực hiện **bước 3**)

$$\xrightarrow[d_3' = d_3 - 3d_1]{d_2' = d_2 - 2d_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(hoàn thành bước 3 ta sang **bước 4**)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Trở lại bước 1 với ma trận con-lúc này cột không tầm thường đầu tiên là cột 3 : $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ với 4 là phần tử trụ

$$\xrightarrow{d_3 = 4d_3 - 5d_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$: đây chính là ma trận bậc thang.

Ví dụ 2 $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[d_3' = d_3 - 3d_1]{d_2' = d_2 + 2d_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

❖

5. Ma trận khả nghịch

Định nghĩa : ma trận A_n được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận B_n :

$$A.B = B.A = I_n$$

B_n được gọi là ma trận nghịch đảo của A_n. Kí hiệu $B = A^{-1}$, viết lại CT

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Nhận xét :
-$[A^{-1}]^{-1} = A$; $[I]^{-1} = I$; $[A.B]^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
-Nếu B là ma trận nghịch đảo của A thì B là duy nhất (và ngược lại).
-Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ với $ad \neq bc$ thì $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ví dụ :

i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{1.8 - 2.3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ii.Giải phương trình $A.X = B$, với $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Vì A khả nghịch nên ta có $A.X = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}.B$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

-Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách sử dụng phép biến đổi sơ cấp trên dòng(Sinh viên tham khảo sách giáo trình)

Bài 2. Định thức

1.Định nghĩa

-Cho ma trận A_n.

+Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao của k dòng và k cột của A được gọi là *ma trận con cấp k* của A.

+Ma trận M_{ij} vuông cấp n-1 thu được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}

Ví dụ . Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Có $M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\quad M_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

+Định thức

-Định thức của ma trận A_n, được kí hiệu det A (hay $|A|$) là 1 số thực được định nghĩa

- $A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$
- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$
- $A = [a_{ij}]_n \Rightarrow \det A = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + ... + a_{1n}.A_{1n}$

Với $A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$ (được gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij})

❖ Chú ý

-$|I_n| = 1;\quad |O_n| = 0$

-$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & \mathrm{w} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ x & y \\ u & v \end{matrix} = (ayw + bzu + cxv) - (uyc + vza + wxb)$

Ví dụ :

-Cho $A = (-3)$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$|A| = -3; \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 0.1 = 6$

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

$= (1.(-2).1 + 2.1.2 + (-1).3.1) - (2.(-2)(-1) + 1.1.1 + 1.3.2) = -12$

-Cho $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Ta có $\det D = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} + a_{14}.A_{14}$

$\qquad = 0.A_{11} + 0.A_{12} + 3.A_{13} + (-1).A_{14}$

$A_{13} = (-1)^{1+3}.|M_{13}| = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -21$

$A_{14} = (-1)^{1+4}.|M_{14}| = (-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -17$

$\det D = 3.(-22) + (-1).(-17) = -49$

2.Các tính chất cơ bản của định thức.

-Cho ma trận A_n, ta có các tính chất cơ bản sau

a.Tính chất 1 $\qquad \det A^T = \det A$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

b.Tính chất 2 : Nếu hoán vị 2 dòng hoặc 2 cột cho nhau thì định thức sẽ đổi dấu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{d_1 \leftrightarrow d_2} = \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{c_1 \leftrightarrow c_2} = -12$$

+Nếu định thức có 2 dòng hoặc 2 cột giống nhau thì định thức bằng 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c.Tính chất 3 : Nếu nhân 1 dòng hoặc 1 cột cho 1 số λ thì định thức sẽ tăng lên λ lần.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{d_3' = 2d_3} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_2 = 2\Delta_1 = 2.(-12) = -24$$

+Nếu định thức có 1 dòng hoặc 1 cột tầm thường thì định thức đó bằng 0

+Nếu định thức có 2 dòng hoặc 2 cột tỷ lệ thì định thức đó bằng 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{c_3 = (-3)/2.c_2} = 0$$

d. Tính chất 4 : Nếu định thức có 1 dòng (hoặc 1 cột) mà mỗi phần tử là tổng của 2 số hạng thì ta có thể tách thành tổng 2 định thúc.

$$\begin{vmatrix} x+1 & x-1 & a+b \\ x & y & z \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & a \\ x & y & z \\ 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & b \\ x & y & z \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

e. Tính chất 5 : Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng 1 dòng (hoặc 1 cột) cho λ dòng khác (hoặc cột khác).

✓ **Các phép biến đổi trong định thức**

-Hoán đổi 2 dòng (hoặc 2 cột) : $\Delta_1 \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 = -\Delta_1$ (1)

-Nhân một dòng(hoặc cột) cho một số $\Delta_1 \xrightarrow{d_i' = \lambda d_i} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 = \lambda\Delta_1$ (2)

-Cộng 1 dòng(cột) cho α dòng khác $\Delta_1 \xrightarrow{d_i' = d_i + \alpha d_j} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 = \Delta_1$ (3)

-phép biến đổi hỗn hợp – (2)+(3) : $\Delta_1 \xrightarrow{d_i' = kd_i + \alpha d_j} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 = k\Delta_1$

Ví dụ : Biến đổi đinh thức về dạng bậc thang với $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xleftrightarrow[d_3' = d_3 - 2d_1]{d_2' = d_2 + d_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xleftrightarrow{d_3' = 4d_3 + d_2} \frac{1}{\mathbf{4}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

3. Định lý Khai triển Laplace

- Cho ma trận A_n, ta có công thức khai triên Laplace

$$|A| \xleftrightarrow{Theo\ d_i} a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + ... + a_{in}.A_{in}$$

Hoặc $|A| \xleftrightarrow{Theo\ c_j} a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + ... + a_{nj}.A_{nj}$

Ví dụ : Tính $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}$

a. Khai triển theo dòng 2

b. Khai triển theo cột 1.

Giải

a. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 3.A_{21} + (-2).A_{22} + 7.A_{23} + 19.A_{24}$

Với $A_{21} = (-1)^{2+1}\left|M_{21}\right| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -70$

Tương tự $A_{22} = 35; A_{23} = 0; A_{24} = 0;$

$\Delta = 3.(-70) + (-2).35 + 7.0 + 19.0 = -280$

b. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0.A_{11} + 3.A_{21} + 1.A_{31} + 0.A_{41}$

với $A_{21} = -70;\ A_{31} = -70$

$\Delta = 0.A_{11} + 3.(-70) + 1.(-70) + 0.A_{41} = -280$

❖ Các kết quả đặc biệt

1.Ma trận dạng tam giác

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

2.Dạng tích : $\det(\mathrm{A.B}) = \det\mathrm{A}.\det\mathrm{B}$

3.Dạng khối

$$\begin{vmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & C \end{vmatrix} = |A|.|C| \text{ với } A, C \in M_n$$

Ví dụ : Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

a.Tính detA, detB b.Tính det(A.B), detC

Giải

a. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1.4.6 = 24;\ B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1.1 = 1$

b. $\det(\mathrm{A.B}) = \det\mathrm{A}.\det\mathrm{B} = 24.1 = 24;$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

4.Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo.

a. Định lý:

$\boxed{\text{Ma trận } A_n \text{ khả nghịch} \Leftrightarrow \det A \neq 0}$

b. Thuật toán tìm A^{-1}

B1: Tính detA.

B2: Lập ma trận $[A_{ij}]_n$ (ma trận phần bù đại số), suy ra ma trận phụ hơp của A : $\mathrm{adjA} = [[A_{ij}]_n]^T$

B3: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.[\mathrm{adjA}]$

Ví dụ Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Bước 1 : detA=2

Bước 2 : $A_{11}=1; A_{12}=1; A_{13}=-1;\quad A_{21}=-4; A_{22}=2; A_{23}=0;$

$A_{31}=1; A_{32}=-1; A_{33}=1$

$$\Rightarrow [A_{ij}]_n=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-4&2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow adjA=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-4&2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&-4&1\\1&2&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

Bước 3 : $A^{-1}=\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}1&-4&1\\1&2&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$

✓ Nhận xét : Cho $|A_n|=a$

-$|A^{-1}|=\frac{1}{a};\quad |adjA|=a^{n-1}$

-Phần tử a_{ij} của A^{-1} được xác định bởi công thức : $a_{ij}=\frac{A_{ji}}{|A|}$

5.Hạng của ma trận

-Định thức con cấp k : là định thức của ma trận con cấp k của A

Định lý : Nếu ma trận A có tất cả định thức con cấp k đều bằng 0 thì định thức con cấp k+1 cũng bằng 0.

-Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của A được gọi là **hạng của A**. Kí hiệu *rank*A=*r*(A)

Chú ý :

-$A_{m\times n}\neq O$ thì $1\le r(\mathrm{A})\le \min\{\mathrm{m,n}\}$

-Nếu A là ma trận O thì *r*(A)=0

-$rank(\mathrm{A})=rank(\mathrm{A}^T)$

-Các ma trận có cùng hạng được gọi là các **ma trận tương đương**(trường hợp các ma trận vuông tương đương được gọi la **ma trận đồng dạng**)

Nhận xét : Cho A_n – ta có

$rank(\mathrm{A})=n\Leftrightarrow \det A\neq 0$

Ví dụ Cho $A=\begin{bmatrix}m&1&8&\sqrt{m}\\2m^3&4m&m^5&m^2+4m\\0&0&2&\sqrt{m}\\0&0&m\sqrt{m}&2\end{bmatrix}$. Tìm m để r(A)=4

Giải:

-$rank(\mathrm{A})=n(=4)\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}m&1&8&\sqrt{m}\\2m^3&4m&m^5&m^2+4m\\0&0&2&\sqrt{m}\\0&0&m\sqrt{m}&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m&1\\2m^3&4m\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}2&\sqrt{m}\\m\sqrt{m}&2\end{vmatrix}$$

$$=(m.4m-2m^3.1).(2.2-\mathrm{m}\sqrt{m}.\sqrt{m})=(4m^2-2m^3)(4-m^2)$$

$$|A|\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-2m^3\neq 0\\4-m^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 0\wedge m\neq \pm 2$$

Bài 3. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

1.Khái niệm chung về hệ phương trình.

Hệ gồm n ẩn x_i và m phương trình $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ (1)

trong đó các hệ số $a_{ij};b_j\in R$ được gọi là hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

Gọi $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$: ma trận ẩn số, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$: ma trận hệ số tự do.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hê số.

Và $\overline{A} = \left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$: ma trận hê số mở rộng.

Hệ phương trình tuyến tính có thể viết lại dưới dạng ma trận *A.X=B*

-Nghiệm của hệ phương trình là 1 bộ n số $\{c_1, c_2, \ldots c_n\}$ sao cho khi thay $x_j = c_j$ vào các phương trình của hệ, ta nhận được các đồng nhất thức.

-Hệ phương trình có thể vô nghiệm, có thể có nghiệm duy nhất hay vô số nghiệm.

-Hai hệ phương trình tuyến tính cùng số ẩn gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm.

Ví dụ 1 : Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + 2y + z - t = 5 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ -x - 2y + 5z - 3t = 7 \end{cases}$,

hệ có thể được viết lại dưới dạng ma trận $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}}_{B}$

Hệ phương trình có 1 nghiệm là $\{1, 1, 2, 0\}$

2. Định lý Kronecker – Capelli.

- Cho hệ phương trình tuyến tính *A.X=B* và ma trận hệ số mở rộng $\overline{A} = \left[A \middle| B\right]$.

- $rankA < rank\overline{A}$: hệ phương trình vô nghiệm,
- $rankA = rank\overline{A}$: hệ phương trình có nghiệm
  - $rankA = rank\overline{A} < n$ (số ẩn) : hệ phương trình có vô số nghiệm
  - $rankA = rank\overline{A} = n$ (số ẩn) : hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2 : Biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo tham số m

$$\begin{cases} x + 2y \qquad = 1 \\ \quad (m-2)y = m^2 - 4 \end{cases}.$$

Giải.

Ta có $\overline{A} = \left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & m^2 - 4 \end{array}\right]$

- $m = 2 \Rightarrow \overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow rankA = 1 = rank\overline{A} < 2$: vậy hệ phương tình có vô số nghiệm.

- $m \neq 2 \Rightarrow \overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & m^2 - 4 \end{array}\right] \Rightarrow rankA = 2 = rank\overline{A}$: vậy hệ phương tình có duy nhất nghiệm.

3.Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

a.Phương pháp Gauss (sử dụng ma trận bậc thang)

Cho hệ phương trình tuyến tính *A.X=B*

-Đưa $\overline{A}$ về ma trận bậc thang.

-Giải ngược từ dòng dưới lên.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x-y+z=1 \\ 2x+3y-z=2 \end{cases}$

Giải.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$

Đưa về ma trận bậc thang

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3'=d_3-2d_1]{d_2'=d_2+d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3'=d_3+d_{21}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Giải ngược : $d_3 : 0x+0y+1.z=3 \Rightarrow z=3$

$d_2 : 0x+1y+0.z=1 \Rightarrow y=1$

$d_1 : 1.x+2.y+(-1).z=0 \Rightarrow x=1$

Vậy nghiệm hệ phương trình là (*1,1,3*)

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ -2x+5y+z=-2 \\ 3x-7y \quad\quad =3 \end{cases}$

Giải.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right]$

Đưa về ma trận bậc thang

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3'=d_3-3d_1]{d_2'=d_2+2d_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3'=d_3+d_{21}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Giải ngược : $d_3 : 0x+0y+0.z=0 \Rightarrow z=\alpha(\alpha \in \mathrm{R})$

$d_2 : 0x+1y+3.z=0 \Rightarrow y=-3z=-3\alpha$

$d_1 : 1.x-2.y-1.z=1 \Rightarrow x=1-5\alpha$

Vậy nghiệm hệ phương trình là $(1-5\alpha\,, -3\alpha\,, \alpha\,)$

b.Phương pháp Crammer (ma trận A là ma trận vuông).

Cho hệ phương trình tuyến tính *A.X=B*

- $\Delta = |A|$
- Δ_j là định thức thu được từ Δ bằng cách thay cột *j* bởi cột hệ số tự do.

- $\Delta \neq 0$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$
- $\Delta = 0$: giải hệ bằng pp Gauss để xét trường hợp nghiệm của hê phương trình

Ví dụ 5 : Dùng pp Crammer giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$

Giải.

Hệ phương trình $\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$ $\quad$ - $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$;

$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{-2} & -1 \end{vmatrix} = 3;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = -3$

- $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{3}{-3} = -1;\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

Ví dụ 6 : Biện luận số nghiệm hệ phương trình theo tham số m

$$\begin{cases} (m-1)x+(m-1)y=1 \\ x+my=0 \end{cases}$$

Giải.

Hệ phương trình $\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} m-1 & m-1 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} m-1 & m-1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (\mathrm{m}-1)^2 \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$

$+m \neq 1$: Hệ phương trình có duy nhất nghiệm

$+m = 1$: thế vào hệ ta có $\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$r(\mathrm{A}) < \mathrm{r}(\overline{\mathrm{A}})$: hệ phương trình vô nghiệm.

- ✓ **Chú ý :** muốn tìm điều kiện tham số để 2 hệ phương trình có nghiệm chung, ta ghép 2 hệ thành 1 hệ phương trình và tìm điều kiện tham số để hệ phương trình chung đó có nghiệm

Ví dụ 7 : Tìm điều kiện của tham số m để 2 hệ phương trình có nghiệm chung

$\begin{cases} x + y - z + t = 2m + 1 \\ x + 7y - 5z - t = -m \end{cases}; \begin{cases} 2x + 5y - 2z + 2t = 2m + 1 \\ 3x + 7y - 3z + 3t = 1 \end{cases}$

4.Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình thuần nhất là trường hợp đặc biệt của hệ phương trình tổng quát, các hệ số tự do đều bằng 0

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\Leftrightarrow A.X = O$

✓ **Chú ý :**

-Bộ số (0,0,…,0) luôn là nghiệm của các hệ phương trình thuần nhất, nghiệm này gọi là nghiệm tầm thường.

-Do $r(\mathrm{A}) = \mathrm{r}(\overline{\mathrm{A}})$: hệ phương trình luôn luôn có nghiệm

- **Định lý :**

-Hệ phương trình thuần nhất (2) có nghiệm duy nhất(nghiệm tầm thường) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

-Hệ phương trình thuần nhất (2) có vô số nghiệm (nghiệm không tầm thường) $\Leftrightarrow \det A = 0$

Ví dụ 8 : Tìm điều kiện tham số m để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau chỉ có nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} 3x + m^2y + (\mathrm{m}-5)z = 0 \\ (\mathrm{m}+2)y + z = 0 \\ 4y + (\mathrm{m}+2)\mathrm{z} = 0 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường $\Leftrightarrow$ hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & m^2 & m-5 \\ 0 & m+2 & 1 \\ 0 & 4 & m+2 \end{vmatrix} = 3(\mathrm{m}^2 + 4\mathrm{m}) \Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -4 \end{cases}$$

Định nghĩa không gian vecto : Một tập V(chứa các vecto có cùng số chiều) được trang bị hai phép toán : cộng hai vecto và phép toán nhân vô hướng, thỏa 8 tính chất thì được gọi là không gian vectơ.

Ví dụ 1 : $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_i \in R\}$

Định nghĩa phép cộng hai vecto như sau :

- $x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

Định nghĩa phép nhân vecto với một số thực như sau :

- $\alpha.x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

Định nghĩa hai vecto bằng nhau

- $x = y \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

Ta có V_1 – Không gian vecto R_3 trên trường số thực.

Vì.

1.(x+y)+z=x+(y+z) – thỏa

2.có vecto O=(0,0,0) ∈V_1

3.∀x∈V,∃(-x) ∈V : (-x)+x=x+(-x)=O

4.x+y=y+x

Tương tự cho các tính chất của phép toán nhân.

Ví dụ 2 : V_2=$\{ ax^2+bx+c \,/\, a,b,c \in R \,/\, x_i \in R \}$

V_2– Không gian vecto $P_2[x]$

Ví dụ 3 : V_3=$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / \, a,b,c,d \in R \right\}$

V_3– Không gian vecto $M_2[R]$

Ví dụ 4 : V_4=$\{(x_1,x_2,x_3) \,/\, x_i \in R \wedge 2x_1+3x_2+x_3=0\}$

V_4– Không gian vecto .

Ví dụ 5 : V_5=$\{(x_1,x_2,x_3) \,/\, x_i \in R \wedge x_1+x_2-2x_3=1\}$

Phép toán cộng hai vecto và nhân vecto với một số giống như trong ví dụ 1.

V_5– Không là Không gian vecto vì không thỏa tính chất 2: O=(0,0,0) ∈ V_5

Chọn x=(1,2,1)∈ V_5 ; x=(2,3,2)∈ V_5, nhưng x+y=(3,5,3)∉ V_5.

- **Tổ hợp tuyến tính**

V – Không gian vecto trên R^n.Hệ n vecto $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ ∈V,với các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$(hằng số),vecto u ∈V

$$u = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \quad (*)$$

vecto u được gọi là tổ hợp tuyến tính của hệ vecto $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ với **bộ số** là $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$

⇨ Muốn một vecto u là tổ hợp tuyến tính,phải **tồn tại bộ số** $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$

(tức là hệ phương trình có nghiệm)

Ví dụ 6 : cho hệ 3 vecto $\{u=(1,1,1), v=(0,1,1), w=(0,0,1)\}$

Với :

- bộ số là (3,1,1) $\xrightarrow{(*)}$ x=(3,4,5)

Ta nói x=(3,4,5) là tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$ với bội số là (3,1,1).

- bộ số là (2,2,2) $\xrightarrow{(*)}$ y=(2,4,6)

Ta nói y=(2,4,6) là tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$ với bội số là (2,2,2).

- bộ số là (2,0,0) $\xrightarrow{(*)}$ z=(2,2,2)

Ta nói z=(2,2,2) là tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$ với bội số là (2,0,0).

- bộ số là (0,0,0) $\xrightarrow{(*)}$ 0=(0,0,0)

Ta nói 0=(0,0,0) là tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$ với bội số là (0,0,0).

Ví dụ 7 : cho hệ 3 vecto $\{u=(1,0,1), v=(0,1,1), w=(1,1,0)\}$

t=(2,2,2) là tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$

r=(0,0,2) là tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$

Ví dụ 8 : cho hệ 4 vecto $\{x=(1,2,0), y=(2,0,0), z=(3,1,0), t=(0,1,0)\}$

u=(2,1,1) không là tổ hợp tuyến tính của $\{x,y,z,t\}$

v=(0,0,2) cũng không là tổ hợp tuyến tính của $\{x,y,z,t\}$

w==(6,5,0) không là tổ hợp tuyến tính của $\{x,y,z,t\}$

Tìm các bộ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$

Ví dụ 9 cho hệ 3 vecto $\{u=(1,1,1), v=(0,1,1), w=(0,0,1)\}$ và x=(3,4,5), tìm bộ số trong phép tổ hợp tuyến tính của x với bộ 3 vecto

$$x = \lambda_1 .u + \lambda_2 .v + \lambda_3 .w$$

$(3,4,5) = \lambda_1.(1,1,1) + \lambda_2.(0,1,1) + \lambda_3.(0,0,1)$

$(3,4,5) = (\lambda_1.1, \lambda_1.1, \lambda_1.1) + (\lambda_2.0, \lambda_2.1, \lambda_2.1) + (\lambda_3.0, \lambda_3.0, \lambda_3.1)$

$(3,4,5) = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, \lambda_2) + (0,0, \lambda_3)$

$(3,4,5) = (\lambda_1+0, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$

$$\begin{cases}3=\lambda_1\\4=\lambda_1+\lambda_2\\5=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\1&1&0&4\\1&1&1&5\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=3\\\lambda_2=1\\\lambda_3=1\end{cases}$$

Vậy x là tổ hợp tuyến tính của $\{u,v,w\}$ với bộ số (3,1,1)

Ví dụ 10 : cho hệ 3 vecto $\{x=(1,1,2), y=(-1,2,1), z=(3,4,6)\}$ và vecto u = (2,2,5). Hỏi u có là tổ hợp tuyến tính của x,y,z không?

Bài làm.

Gọi $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ là bộ số trong phép tổ hợp tuyến tính của u với bộ 3 vecto.

Ta có công thức $u = \lambda_1.x+ \lambda_2.y+\lambda_3.z$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&3&2\\1&2&4&2\\2&1&6&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=16/3\\\lambda_2=1/3\\\lambda_3=-1\end{cases}$$

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của $\{x,y,z\}$ với bộ số (16/3,1/3,-1)

Ví dụ 11 Xác định m để hệ vecto x=(m,2m+2,m+3) là 1 tổ hợp tuyến tính của u=(3,6,3),v=(2,5,3),w=(1,4,3)

Giải.

Để vecto x là tổ hợp tuyến tính của u,v,w thì phải tồn tại bộ số $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ sao cho

$$x = \lambda_1 u+ \lambda_2 v+\lambda_3 w$$

ta có được hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{array}{cccc} u & & & x\\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{\begin{matrix}3\\6\\3\end{matrix}}&\begin{matrix}2\\5\\3\end{matrix}&\begin{matrix}1\\4\\3\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}m\\2m+2\\m+3\end{matrix}}\end{array}\right]$$

(để tồn tại bộ số thì hệ phương trình này phải có nghiệm)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&1&m\\0&1&2&2\\0&0&0&-1\end{array}\right]\qquad (r(A)<r(\overline{A}): \text{hệ vô nghiệm})$$

Không tồn tại bộ số,vậy x không là tổ hợp tuyến tính của u,v,w

- **Độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính.**

V – Không gian vecto R^n ,cho hệ gồm n vecto $\{x_1, x_2, \dots x_n\}\in V$.

- $\exists\ \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_n \in R$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\lambda_1 x_1+ \lambda_2 x_2+\dots +\lambda_n x_n=0$

ta nói hệ n vecto này phụ thuộc tuyến tính.

- $\lambda_1 x_1+ \lambda_2 x_2+\dots +\lambda_n x_n=0$ $\rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=0,\dots \lambda_n=0$.

ta nói hệ n vecto này độc lập tuyến tính.

Ví dụ 12:

Hệ 3 vecto u=(1,2,-1),v=(1,0,2),w=(2,1,1) độc lập tuyến tính.

3 vecto x=(1,2,-1),y=(1,0,2),z=(2,4,-2) phụ thuộc tuyến tính.

- Để kiểm tra độc lập – phụ thuộc của hệ n vecto $\{x_1, x_2,\dots x_n\}$,ta sử dụng vecto 0
  - Nếu 0 là tổ hợp tuyến tính của hệ vecto với một bộ số duy nhất là {0,0,..0}(hệ phương trình có duy nhất nghiệm tầm thường) thì ta kết luận hệ n vecto này là độc lập.
  - Nếu 0 là tổ hợp tuyến tính của hệ vecto với vô số bộ số(hệ phương trình có vô số nghiệm) thì ta kết luận hệ n vecto này là độc lập.

Ví dụ 13: Cho 3 vecto x_1=(1,2,-1), x_2=(2,5,1), x_3=(3,6,4),hỏi hệ 3vecto này độc lập hay phụ thuộc.

Lập vecto 0 là tổ hợp tuyến tính tuyến tính của 3 vecto này với bộ số là $\{\lambda_1, \lambda_2,\lambda_3\}$.

$$0= \lambda_1 x_1+ \lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3.$$

Ta có hệ phương trình tuyến tính **thuần nhất**

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&5&6&0\\-1&1&4&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$ => ta được $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Vậy 3 vecto này độc lập tuyến tính.

Ví dụ 14 : Xác định m để hệ 4 vecto sau đây phụ thuộc tuyến tính :
u_1=(72,3,1,4), u_2=(4,11,5,10), u_3=(6,14,m+5,8), u_4=(2,8,4,8).
Giải.
Để hệ 4 vecto phụ thuộc tuyến tính,thì *0* là tổ hợp tuyến tính của 4 vecto với vô số các bộ số,tức hệ phương trình vô số nghiệm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 14 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & m+5 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 18 & 7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 6 & 2m+4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2'=d_2/10} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m-2 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2m & 0 \end{array}\right]$$

Muốn hệ vô số nghiệm $r(A) = r(\overline{A}) < 4$ (số ẩn)

Vậy m = 1 thì hệ 4 vecto này phụ thuộc tuyến tính.
Vậy :

M={x_1, x_2,… x_n}

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = x \Longleftrightarrow$ Hệ pt AX=b

- Hệ có nghiệm x là tổ hợp tuyến tính của M
- Hệ vô nghiệm x không là tổ hợp tuyến tính của M

M={x_1, x_2,… x_n}

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Longleftrightarrow$ Hệ pt thuần nhất A.X = 0

- Hệ có nghiệm duy nhất   M – độc lập tuyến tính
  (nghiệm tầm thường)
- Hệ có vô số nghiệm   M – phụ thuộc tuyến tính
  (nghiệm không tầm thường)

Ví dụ 15: Trong không gian vecto V cho họ M={*x, y, z*} độc lập tuyến tính.

Chứng tỏ {$x+y+2z$, $2x+3y+z$, $3x+4y+z$} độc lập tuyến tính.

Giả sử $\lambda_1 (x+y+2z) + \lambda_2 (2x+3y+z) + \lambda_3 (3x+4y+z) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3).x + (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3).y + (2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3).z = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy M – độc lập tuyến tính.

Nhận xét :

- Nếu M chứa vecto 0, thì M phụ thuộc tuyến tính.
- M={x_1, x_2,… x_n} – phụ thuộc tuyến tính
  $\Longleftrightarrow \exists x_i$ – là tổ hợp tuyến tính của các vecto còn lại trong M.
- Thêm một số vecto vào họ phụ thuộc tuyến tính ta thu được một họ phụ thuộc tuyến tính.
- Bỏ đi một số vecto của họ độc lập tuyến tính ta thu được một họ độc lập tuyến tính.

__Định nghĩa hạng của hệ vecto__

M={x_1, x_2,… x_n…}$\subset$V

Hạng của hệ M là α nếu tồn tại α vecto độc lập tuyến tính của M và mọi vecto con của M chứa nhiều hơn α vecto thì phụ thuộc tuyến tính.

Hạng của hệ M là số tối đại các vecto độc lập tuyến tính của M

Tính chất của hạng hệ vecto

1. Hạng của hệ vecto M không đổi nếu ta nhân một vecto của M với một số khác 0
2. Cộng vào một vecto của họ M,một vecto khác đã được nhân với một số thì hạng không thay đổi.
3. Thêm vào họ M một vecto x là tổ hợp tuyến tính của M thì hạng không thay đổi.

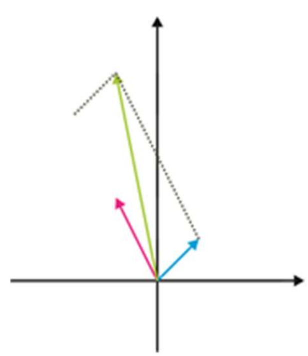
Ví dụ 16 Tìm hạng của hệ các vecto sau . M={(1,1,1,0); (1,2,1,1); (2,3,2,1); (1,3,1,2)}

Ý nghĩa hình học của tổ hợp tuyến tính.

Cho hệ 2 hai vecto *u* = (1,1), *v* = (-1,2); vecto *x* = (-1,5).

a. *x* có là tổ hợp tuyến tính của hệ 2 vecto *u*, *v* hay không ?

b. Biểu diễn hình học vecto *x* theo hai vecto *u, v*



.Để xét hệ vecto độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính ta xét.

- Nếu số vecto bằng số thành phần có trong từng vecto : tạo ra ma trận A bằng cách xếp các vecto thành từng cột của A, tính $|A|$.
  - $|A| \neq 0$: hệ ĐLTT
  - $|A| = 0$: hệ PTTT
- Nếu số vecto khác số thành phần có trong từng vecto : tạo ra ma trận A bằng cách xếp các vecto thành từng dòng của A, tính rankA
  - rankA = số vecto : hệ ĐLTT
  - rankA < số vecto : hệ PTTT

<u>Cơ sở của không gian R^n – tọa độ của vecto trong cơ sở.</u>

Cơ sở

Định nghĩa tập sinh.

M={x_1, x_2,… x_n…}⊂V

Tập hợp M được gọi là tập sinh của không gian vecto V nếu mọi vecto *x* của V là tổ hợp tuyến tính của M.

$$x \in V \Leftrightarrow x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n + ...$$

M sinh ra V

⇔ Không gian vecto V được sinh ra bởi M.

-Định nghĩa cơ sở

M={x_1, x_2,… x_n…} ⊂ V

Tập hợp M được gọi là cơ sở của không gian vecto V nếu mọi vecto *x* của V là tổ hợp tuyến tính của M và hệ M độc lập tuyến tính.

Tập sinh là cơ sở nếu tập sinh độc lập tuyến tinh.

Ví dụ 17: Trong không gian vecto R^3 có

- Hệ 4 vecto {*u*=(1,1,1); *v*(0,1,1); *w*=(0,0,1), *t*=(0,2,2)} là tập sinh.

Gọi x=(a, b, c) ϵ R^3 , với a, b, c ϵ R.

Ta biểu diễn x là tổ hợp tuyến tính của u, v,w, t

$$x=\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w+\lambda_4 t \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 2 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-a-b \end{array}\right)$$

- Hệ 3 vecto {u=(1,1,1); v(0,1,1); w=(0,0,1)} là cơ sở.

+Tập sinh

Ta biểu diễn x là tổ hợp tuyến tính của u, v,w

$$x=\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w+\lambda_4 t \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & c-a-b \end{array}\right)$$

+Cơ sở

Xét sự độc lập tuyến tính của u, v, w

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ví dụ : Trong không gian vecto R^3 có hệ 4 vecto {u=(1,1,1); v(0,1,1); w=(0,0,1), t=(0,2,2)}. Tìm 1 cơ sở của không gian vecto R^3

Trong không gian vecto R^2 có hệ 4 vecto {u=(1,1); v(0,1); w=(0,0), t=(2,2)}. Tìm 1 cơ sở của không gian vecto R^2

Vecto $u \in R^3$, $u = (x,y,z)$ có **3** thành phần nên cần có **3** vecto tạo thành nó.Vậy cơ sở của không gian R^3 sẽ là 3vecto trong không gian R^3 độc lập tuyến tính.ví dụ 3vecto u=(1,1,1), v=(1,1,0), w=(1,0,0) thuộc R^3,3vecto này độc lập tuyến tính với nhau nên hệ 3 vecto này là một cơ sở cho không gian R^3.

Tổng quát,cơ sở của không gian R^n là hệ **n** vecto độc lập tuyến tính(các vecto này thuộc khôn gian R^n).

Vậy đối với bài toán cơ sở,ta sẽ xét

- hệ vecto là độc lập => là cơ sở
- hệ vecto là phụ thuộc=> không là cơ sở

Ví dụ : Trong không gian vecto R^3 có hệ 3 vecto {u=(1,1,1); v(0,1,1); w=(1,-2,-2)}. Tìm 1 cơ sở của không gian vecto R^3

Ví dụ : Trong không gian vecto R^3 có hệ 3 vecto {u=(1,1,1); v(0,1,1); w=(1,0,4)}. Tìm 1 cơ sở của không gian vecto R^3

Tọa độ của vecto

Đối với một vecto x ta có 2 cách biểu diễn

- x=(1,2,3) : biểu diễn x là 1 vecto có 3 thành phần
- $[x]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$: tọa độ của vecto x trong cơ sở chính tắc.

(lưu ý : trong cơ sở chính tắc,tọa độ của x cũng chính là các thành phần tương ứng của nó,2 cách biểu diễn trên có ý nghĩa là như nhau)

Định nghĩa tọa độ : tọa độ của 1 vecto x trong cơ sở $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ chính là bộ số $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ trong phép biểu diễn tổ hợp tuyến tính của x với các vecto trong cơ sở B

$$[x]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

Vậy bài toán tìm tọa độ của một vecto x trong một cơ sở B,ta trở lại với bài toán tìm các bộ số $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ trong phép biểu diễn tổ hợp tuyến tính.

Ví dụ 18 : Cho tọa độ của vecto x trong cơ sở B là $[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$,cơ sở

$B=\{u_1=(1,0,1), u_2=(1,1,0), u_3=(0,1,1)\}$ Tìm tọa độ của x trong cơ sở chính tắc

Giải

$$[x]_B=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=1.u_1+(-1)u_2+3.u_3=1.(1,0,1)+(-1)(1,1,0)+3.(0,1,1)$$

Vậy tọa độ của x trong cơ sở chính tắc là $[x]_E=[x]=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}$

Ví dụ 19 : Cho vecto x=(1,2,1) .Cơ sở $B=\{u_1=(1,0,0),u_2=(1,1,0),u_3=(1,1,1)\}$ .Tìm tọa độ $[x]_B$?

Giải.

Giả sử $[x]_B=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=a.u_1+b.u_2+cu_3$.

Ta thiết lập được hệ phương trình tuyến tính với các ẩn là a,b,c

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=1\end{cases}$. Vậy tọa độ của x trong B là $[x]_B=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

Ma trận chuyển cơ sở.

Cho hai cơ sở $B=\{u_1,u_2,u_3\}$,cơ sở $V=\{v_1,v_2,v_3\}$.

Gọi $P_{B\to V}$ là ma trận chuyển cơ sở từ B sang V, $P_{B\to V}$ được tính như sau

- Ta tìm tọa độ của các vecto v trong cơ sở B : $[v_1]_B=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, $[v_2]_B=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$, $[v_3]_B=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$
- Xếp các tọa độ này thành từng cột ta có ma trận $P_{B\to V}$

$P_{B\to V}=\begin{bmatrix}a&x&u\\b&y&v\\c&z&w\end{bmatrix}$

(lưu ý,thứ tự của các vecto trong hai cơ sở,quyết định đến các tọa độ cũng như $P_{B\to V}$)

Ví dụ 20 : Trong không gian R^2 cho các vecto : $\begin{cases}u_1=(2,1),u_2=(-1-1)\\v_1=(-1,0),v_2=(0,1)\end{cases}$.Tìm ma trận chuyển cơ sở $B=\{u_1,u_2\}$ sang $B_1=\{v_1,v_2\}$ của R^2.

Giải.

Cách 1 . Gọi $[v_1]_B=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\Leftrightarrow v_1=a.u_1+b.u_2$ (giải hệ phương trình tuyến tính tìm a ,b).

Ta được $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow[v_1]_B=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ .Tương tự với $[v_2]_B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Vậy $P_{B\to B_1}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$.

Cách 2. Dùng công thức $P_{B\to B_1}=P_{B\to E}.P_{E\to B_1}$ (với E là cơ sở chính tắc)

Lưu ý : khi cho $B=\{u_1,u_2\}\Rightarrow P_{E\to B}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&-1\end{bmatrix}$

Ma trận chuyển đổi cơ sở sử dụng **tọa độ** của vecto,mà **tọa độ** thì phải được xếp thành **cột**

Tương tự $B_1=\{v_1,v_2\}\Rightarrow P_{E\to B_1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

Thế vào công thức $P_{B\to B_1}=P_{B\to E}.P_{E\to B_1}=[P_{E\to B}]^{-1}.P_{E\to B_1}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&-1\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$

.

Cơ sở của không gian W sinh bởi hệ vecto $\{u_1,u_2...u_n\}$.

Hệ vecto $\{u_1,u_2...u_n\}$ được gọi là tập sinh của W,vậy muốn tìm cơ sở của W,ta đi tìm số vecto độc lập tuyến tính cực đại có trong hệ $\{u_1,u_2...u_n\}$

- Tìm hạng của hệ vecto này,hạng của hệ cũng chính là số vecto có trong cơ sở và cũng là số chiều của W(dimW)

Ví dụ 21 : Tìm cơ sở của không gian W sinh bởi hệ vecto sau : u_1=(2,3,4),u_2=(5,-4,0),u_3=(7,-1,5)

Giải.

Ta tìm hạng của ma trận

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\5&-4&0\\7&-1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-23&-20\\0&-23&-18\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-23&-20\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Ta có rank (A) = 3 = dim(W),vậy cơ sở của W là hệ 3 vecto độc lâp tuyến tính có trong $\{u_1,u_2,u_3\}$,cũng là $\{u_1,u_2,u_3\}$ (hệ 3 vecto độc lập nên cũng là cơ sở của W)

<u>Bài toán tìm tọa độ trong cơ sở của không gian sinh : tương tự như bài toán tìm tọa độ của không gian R^n.</u>

Ví dụ 22: Trong R^3,với cơ sở $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ của

$W=\langle\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}\rangle=\langle\{(2,2,-1),(1,-1,-1)\}\rangle$.Một cơ sở nữa của W là

$B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}=\{(1,7,1),(1,-1,-1)\}$ .Cho v thỏa $[v]_{B'}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$.Tìm $[v]_B$?

Giải.

<u>Cách 1</u> :

$[v]_{B'}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\Leftrightarrow v=2.v_1+(-3).v_2=(8,44,5)$ .Gọi tọa độ v trong B

$[v]_B=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\Leftrightarrow v=a.u_1+b.u_2$

Ta lập được hệ phương trình tuyến tính

$\left[\begin{array}{cc|c}2&1&8\\2&-1&44\\-1&-1&5\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}a=13\\b=-18\end{cases}$. Vậy $[v]_B=\begin{bmatrix}13\\-18\end{bmatrix}$

<u>Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.</u>

Ví dụ 23: Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\begin{cases}x+y-t=0\\2x+3y+z-2t=0\\-2x-2y+2t=0\\3x+4y+z-3t=0\end{cases}\quad(I)$

Tìm một cơ sở của không gian nghiệm hệ (I).

<u>Cách 2</u> : áp dụng công thức $[v]_B=P_{B\to B'}[v]_{B'}$

Với $P_{B\to B'}$ được tính :

$[v_1]_B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x.u_1+y.u_2$.Lập hệ phương trình ta được $\left[\begin{array}{cc|c}2&1&1\\2&-1&7\\-1&-1&1\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

$[v_2]_B=\begin{bmatrix}t\\w\end{bmatrix}=t.u_1+w.u_2$.Lập hệ phương trình ta được

$\left[\begin{array}{cc|c}2&1&-2\\2&-1&-10\\-1&-1&-1\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}t=-3\\w=4\end{cases}$

Suy ra $P_{B\to B'}=\begin{bmatrix}2&-3\\-3&4\end{bmatrix}$.Vậy $[v]_B=P_{B\to B'}[v]_{B'}=\begin{bmatrix}2&-3\\-3&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\-18\end{bmatrix}$.

Chú ý : Trong không gian sinh,nếu không gian sinh là không đầy đủ(số vecto làm cơ sở bé hơn thành phần của vecto),ta không dùng công thức $P_{B\to B'}=P_{B\to E}.P_{E\to B'}$ (vì E và B,B' không cùng số chiều nên không tồn tại $P_{E\to B},P_{E\to B'}$).

<u>Bài toán</u> : để vecto u ∈ W,thì u phải là tổ hợp tuyến tính của các vecto trong cơ sở sinh ra W, nghĩa là $u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3$ (điều kiện để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm)

Giải.

Hệ phương trình biểu diễn dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_4 : t = \alpha \\ d_3 : z = \beta \\ d_2 : y = -\beta \\ d_1 : x = \alpha + \beta \end{cases}$$

Suy ra nghiệm của hệ phương trình

$$X = (\alpha+\beta, -\beta, \beta, \alpha) = (\alpha, 0, 0, \alpha) + (\beta, -\beta, \beta, 0) = \alpha \underbrace{(1,0,0,1)}_{U_1} + \beta \underbrace{(1,-1,1,0)}_{U_2}$$

Không gian nghiệm của hệ phương trình

$\mathrm{W} = \{X / X = (\alpha+\beta, -\beta, \beta, \alpha); \alpha, \beta \in \mathrm{R}\}$ và cơ sở của không gian nghiệm là hệ vecto $\{U_1, U_2\} = \{(1,0,0,1); (1,-1,1,0)\}$

Tìm hệ phương trình tuyến tính mà hệ nghiệm lại trùng với KGVT sinh bởi 3 vecto $\alpha_1 = (-1,0,1,2), \alpha_2 = (3,4,-2,5), \alpha_3 = (1,4,0,9)$

Giải

Gọi (x_1, x_2, x_3, x_4) là nghiệm của hpt cần tìm

Ta có $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1.\alpha_1 + \lambda_2.\alpha_2 + \lambda_3.\alpha_3$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 4 & x_2 \\ 1 & -2 & 0 & x_3 \\ 2 & 5 & 9 & x_4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 4 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 + x_1 \\ 0 & 11 & 11 & x_4 + 2x_1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 4 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4(x_3 + x_1) - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4(x_4 + 2x_1) - 11x_2 \end{array}\right]$$

Để hpt có nghiệm : $r(A) = r(\overline{A})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_4 + 2x_1) - 11x_2 = 0 \\ 4(x_3 + x_1) - x_2 = 0 \end{cases}$$

Ánh xạ tuyến tính.

1. Định nghĩa.

$$F(\alpha x) = \alpha F(x)$$
$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

-Ánh xạ tuyến tính $f: R^n \to R^m$,cho một qui tắc biến đổi vecto x(n chiều), thành vecto $y=f(x)$(m chiều).lúc này ta gọi $y=f(x)$ là ả

Cho vecto $u=(x,y)$ có 2 thành phần x y,ta sẽ thu được một vecto có 3 thành phần theo công thức

Ví dụ 1: Cho AXTT f: $R^2 \to R^3$, định bởi $f(x,y) = (y,x$

Axtt f biến vecto u=(2,3) thành vecto $f(u)=f(2,3)$=(3,2,-4).
Tương tự vecto v=(2,1) thành vecto $f(v)=f(2,1)$=(1,2,0)
vecto v=(-1,-1) thành vecto $f(v)=f(-1,-1)$=(-1,-1,1)

VD 1. Cho ánh xạ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa:

$$T(x_1;\ x_2;\ x_3) = (x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2).$$

Trong $\mathbb{R}^3$, xét $x = (x_1;\ x_2;\ x_3)$, $y = (y_1;\ y_2;\ y_3)$.

Xét tính chất 1.

$$T(x+y) = T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$
$$=[(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3), 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)]$$
$$=[(x_1-x_2+x_3)+(y_1-y_2+y_3), (2x_1+3x_2)+(2y_1+3y_2)]$$
$$=(x_1-x_2+x_3, 2x_1+3x_2)+(y_1-y_2+y_3, 2y_1+3y_2)$$
$$=f(x)+f(y)$$

Xét tính chất 2.

$$T(\alpha x) = T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$
$$=(ax_1 - ax_2 + ax_3, a2x_1 + 3ax_2)$$
$$=a(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2)$$
$$=a\,f(x)$$

Bài toán kiểm tra f là axtt :ta kiểm tra trong công thức f có biểu thức nào có bậc khác 1 không,nếu có thì f không phải là axtt,ngược lại f là axtt.

Ví dụ 2: kiểm tra ax $f(x,y,z) = (x-2y,x+z,x+y+z+1)$
Ta kiểm tra từng thành phần

- $\underbrace{x}_{\text{Bậc 1}} - \underbrace{\underbrace{2}_{\text{Bậc 0}}\ \underbrace{y}_{\text{Bậc 1}}}_{0+1=1}$ $\qquad\qquad$ $\underbrace{x}_{\text{Bậc 1}} + \underbrace{z}_{\text{Bậc 1}}$
- $\underbrace{x}_{\text{Bậc 1}} + \underbrace{y}_{\text{Bậc 1}} + \underbrace{z}_{\text{Bậc 1}} + \underbrace{1}_{\text{Bậc 0}}$: có biểu thức bậc bằng 0 (hằng số bậc 0)

Vậy f không phải là axtt.

2. Xác định ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 3 : Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \to R^3$.
Cơ sở của R^2 là B={u_1=(1,2); u_2=(1,2))} $f(u_1)$=(1,1,2); $f(u_2)$=(4,2,1)
a. Cho u_3=(4,5). Tìm $f(u_3)$?
b.Xác định biểu thức của f.
Giải.

a. Tìm $f(u_3)$

Gọi $u_3 = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

Ta có $u_3 = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2 \to f(u_3) = \lambda_1 . f(u_1) + \lambda_2 . f(u_2)$
=-5.(1,1,2)+3.(4,2,1)=(7,1,-7)

b. Xác định biểu thức của f.

Tìm ảnh của một vecto $u=(x,y)$ bất kì trong R^2.
Tương tự câu a,ta phải biểu diễn vecto u dưới dạng tổ hợp tuyến tính của hai vecto trong cơ sở.

$u = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 5 & y \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -5x + 3y \\ \lambda_2 = 2x - y \end{cases}$

Ta có $u_3 = \lambda_1 . u_1 + \lambda_2 . u_2$
$\to f(u_3) = \lambda_1 . f(u_1) + \lambda_2 . f(u_2)$
$=(-5x+3y).(1,1,2)+(2x-y).(4,2,1)$
=(-5x+3y, -5x+3y, -10x+6y)+(8x-4y, 4x-2y, 2x-y)
=(3x-y, -x+y,-8x+5y)

Vậy biểu thức AXTT: $f(x,y)$ =(3x-y, -x+y,-8x+5y)

Ví dụ 4 : Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \to R^2$.Biết

- $f(1,1,0)=(-2,-1)$
- $f(1,1,1)=(1,2)$
- $f(1,0,1)=(-1,1)$

a. Tìm f(3,1,5)?
b. Xác định biểu thức của f.

Giải.

c. Nhận xét {(1,1,0); (1,1,1); (1,0,1)} là 3 vecto đltt nên là 1 cơ sở trong R^3

Ta biểu diễn vecto (3,1,5) là 1 tổ hợp tuyến tính của cơ sở này.

$(3,1,5) = (-2).\ (1,1,0)+3.\ (1,1,1)+(-2).\ (1,0,1)$

Dựa vào 2 tính chất của ánh xạ tuyến tính ta được.

$$\begin{aligned} f(3,1,5) &= f((-2).\ (1,1,0)+3.\ (1,1,1)+(-2).\ (1,0,1)) \\ &= f((-2).\ (1,1,0))+f(3.\ (1,1,1))+f((-2).\ (1,0,1)) \\ &= (-2).f(1,1,0)+ 3.f(1,1,1)+ (-2).f(1,0,1) \\ &= (-2).\ (-2,-1)+ 3.\ (1,2)+ (-2).\ (-1,1) \\ &= (-3,1,0) \end{aligned}$$

d. Xác định biểu thức của f.

Tìm ảnh của một vecto $x=(a,b,c)$ bất kì trong R^3.

Tương tự câu a,ta phải biểu diễn vecto x dưới dạng tổ hợp tuyến tính của ba vecto trong cơ sở.

$(a,b,c) = \lambda_1.\ (1,1,0)+ \lambda_2.\ (1,1,1)+ \lambda_3.\ (1,0,1)$

Giải hệ phương trình ta được.

$\lambda_1 = a-c$; $\lambda_2 = -a+b+c$; $\lambda_3 = a-b$.

Vậy biểu thức của f là :

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= f(\lambda_1.\ (1,1,0)+ \lambda_2.\ (1,1,1)+ \lambda_3.\ (1,0,1)) \\ &= \lambda_1.f(1,1,0)+ \lambda_2.f(1,1,1)+ \lambda_3.f(1,0,1) \\ &= (2b-c;-2a+b+3c) \end{aligned}$$

Vậy biểu thức AXTT: $f(x,y,z) = (2y-z,2x+y+3z)$

Ví dụ 4 : Cho $f: R^2 \to R^3$,biết $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f_1$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f_2$

,biểu thức của f?

Có $f: R^2 \to R^3$

2chiều->2th.fan

3chiều->3th.fan

Đặt $f(x,y)=(ax+by,cx+dy,ex+fy)$ (trong đó a,b,c,d,e,f là các tham số chưa biết)

Nên ta có $\begin{cases} f(2,0) = (2a,2c,2e) = (1,1,1) \\ f(1,4) = (a+4b,c+4d,e+4f) = (1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2c = 1 \\ 2e = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} a+4b = 1 \\ c+4d = 2 \\ e+4f = 1 \end{cases}$

Suy ra $a=c=e=1/2,b=f=1/8,d=3/8$.

Vậy biểu thức của f

$$f(x,y) = (\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}y, \frac{1}{2}x+\frac{3}{8}y, \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}y) = \frac{1}{8}(4x+y, 4x+3y, 4x+y)$$

- **Tổng quát** ta có :

<u>Cho f</u>: $V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.

Cho $B=\{u_1, u_2 .... u_n\}$ là tập sinh của V.

Vecto $x \in V \leftrightarrow x = \lambda_1.\ u_1+ \lambda_2.\ u_2 ...+ \lambda_n.\ u_n$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1.\ u_1+ \lambda_2.\ u_2 ...+ \lambda_n.\ u_n) \\ &= \lambda_1.f(u_1)+ \lambda_2.f(u_2) ...+ \lambda_n.f(u_n). \end{aligned}$$

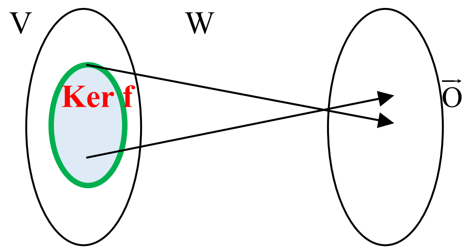
Muốn xác định ánh xạ tuyến tính,ta cần biết ảnh của một tập sinh trong tập V

3. **Nhân** và **Ảnh** của ánh xạ tuyến tính.

- <u>Định nghĩa **Nhân** của ánh xạ tuyến tính .</u>

Cho ánh xạ tuyến tính f : V →W.

Nhân của f là tập hợp tất cả những vecto x của không gian vecto V sao cho f(x) = 0 Ker f = {x∈ V / f(x)=0 }



Tìm Ker f là đi tìm cơ sở của không gian nghiệm hệ pttt thuần nhất

Ví dụ 5 . Cho ánh xạ tuyến tính f : : $R^3 \to R^3$,biết $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3)$. Tìm cơ sở và chiều của Ker f ?

Giải.

Ta có Ker $f = \{x \in V / f(x) = \vec{O}\}$

Nên với mọi x ∈ Ker f

$f(x_1, x_2, x_3) = \vec{O}$.

$(x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$: có cơ sở không gian nghiệm là $\{u_1 = (2,-1,1)\}$

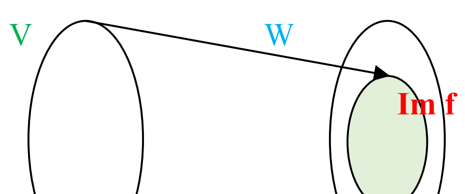
Vậy Ker $f = u_1 = (2,-1,1)\}$

- <u>Định nghĩa **Ảnh** của ánh xạ tuyến tính .</u>

Cho ánh xạ tuyến tính f : V →W.

Ảnh của f là tập hợp tất cả những vecto y của không gian vecto W sao cho tồn tại x∈ V để y = f(x)

$\text{Im} f = \{y \in W / \exists x \in V : y = f(x)\}$



○ **Định lí :**

Cho ánh xạ tuyến tính f : V →W.

1.Nhân của ánh xạ tuyến tính f là không gian con của V

2.Ảnh của ánh xạ tuyến tính f là không gian con của W

3.dim(Ker f) + dim(Im f) = dim(V).

Đơn ánh – toàn ánh – song ánh.

Cho ánh xạ tuyến tính f : V →W, có B={ $u_1, u_2 \ldots u_n$ } là một cơ sở của V

- f là đơn ánh ↔ Ker $f = \{\vec{O}\}$

  ↔ $f(B) = (f(u_1), f(u_2) \ldots f(u_n))$ độc lập tuyến tính.

- f là toàn ánh ↔ Im $f = W$

  ↔ f (B) = $(f(u_1), f(u_2) \ldots f(u_n))$ là tập sinh của W.

- f là song ánh ↔ f vừa đơn ánh vừa toàn ánh

  ↔ $f(B) = (f(u_1), f(u_2) \ldots f(u_n)$ là cơ sở của W.

Mệnh đề.

Ảnh của một ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh ra bởi ảnh của một tập sinh của V.

<u>Các bước tìm ảnh của ánh xạ tuyến tính</u>.

B1. Chọn 1 cơ sở của V là B = { $u_1, u_2 \ldots u_n$ }.

B2. Tìm $f(u_1), f(u_2) \ldots f(u_n)$.

B3.Im$f = \langle f(u_1), f(u_2) \ldots f(u_n) \rangle$

Ví dụ 6. Cho ánh xạ tuyến tính *f* :: $R^3 \to R^3$,biết

f(x₁, x₂ ,x₃) = $(x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3)$

Tìm cơ sở và chiều của Im f ?

Giải.

B1 : Chọn cơ sở chính tắc của R^3,E={(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)}

B2 : Có f(1,0,0) = (1,2,3)

f(0,1,0) = (1,3,5)

f(0,0,1) = (-1,-1,-1)

B3 : Im f = <(1,2,3), (1,3,5), (-1,-1,-1)> (sv tự làm tiếp theo)

Ví dụ 7 : Cho ánh xạ tuyến tính f : : $R^3 \to R^3$.

Biết f(1,1,1) = (1,2,1);f(1,1,2) = (2,1,-1);f(1,2,1) = (5,4,-1).

a. Tìm cơ sở và chiều của Ker f.
b. Tìm cơ sở và chiều của Im f.

(sv tự làm theo các ví dụ 3 và 4)

4. Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở.

Cho AXTT *f*: V→ W,có $B = \{u_1, u_2, ..u_n\}$ là một cơ sở của V, có $F = \{v_1, v_2, ..v_m\}$ là một cơ sở của W. A được gọi là ma trận của axtt trong cặp cơ sở {B,F}.

- A được xác định bởi :

Tọa độ của vecto thứ 1

$$A = [f]_B^F = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}[f(u_1)]_F \\ . \\ . \end{matrix}} & [f(u_2)]_F & .. & [f(u_n)]_F \\ & . & . & . \\ & . & . & . \end{bmatrix}$$

- A là ma trận cấp m x n:
  - m là số chiều của W(cơ sở F có m vecto)
  - n là số chiều của V(cơ sở B có n vecto)

- Biểu thức tọa độ

$$\left.\begin{matrix} f : V \to W \\ A = [f]_B^F \end{matrix}\right\} \quad [f(x)]_F = [f]_B^F [x]_B$$

Tọa độ cua vecto ảnh f(x) sẽ nằm trong cơ sở W

Tọa độ cua vecto x sẽ trong cơ sở V

(Lưu ý : B là cơ sở của V,F là cơ sở của W)

Đặc biệt : Mạ trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở chính tắc : A= $[f]_E^E = [f]_E$

$$[f(x)]_E = [f]_E [x]_E$$

$[f]_E$ có thể lấy trực tiếp nếu biết được biểu thức của axtt *f*

Ví dụ 8: Cho axtt *f* : $R^2 \to R^2$,với biểu thức *f(x,y) = (2x-y,x-3y)*.

Ma trận ánh xạ tuyến tính của f trong cơ sở chính tắc là

$$[f]_E = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

f(x,y) = ($\boxed{2}x\boxed{-}y$, $x + 3y$)

ma trận axtt có *các dòng* là các hệ số trong thành phầnvecto tương ứng,do đây **không phải tọa độ của vecto** nên **không xếp thành cột**

✓ lưu ý để kiểm tra ta làm phép toán nhân $[f(x)] = [f]_E.[x]$

$$[f(x)]_E = [f]_E [x]_E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{bmatrix}.$$

<u>*Bài toán cho trước biểu thức f, tìm ma trận của AXTT trong cặp cơ sở.*</u>

Ví dụ 9 : Cho AXTT $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, c $f(x,y) = (x - y, x)$. Có cơ sở $B = \{u_1 = (-1;1), u_2 = (1;0)\}$ và $F = \{v_1 = (1;2), v_2 = (1;3)\}$ Ma trận của f đối với cơ sở B,F?

Giải.

Bước 1 : $f(u_1) = f(-1;1) = (-2,-1)$, $f(u_2) = f(1;0) = (1,1)$

Bước 2 :

$$[f(u_1)]_F=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\to f(u_1)=a_1.v_1+b_1.v_2\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&-2\\2&3&-1\end{array}\right]\to[f(u_1)]_F=\begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}$$

$$[f(u_2)]_F=\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\to f(u_2)=a_2.v_1+b_2.v_2\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&3&1\end{array}\right]\to[f(u_2)]_F=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Bước 3 : Vậy $[f]_B^F=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}$

Ví dụ 10 : Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, định bởi $f(x,y)=(0,x)$. Ma trận của f đối với cơ sở $F=\left\{(1;1),(1;0)\right\}$.(tức tìm $[f]_F^F=[f]_F$)

Giải.

Bước 1 : $u=f(1;1)=(0,1)$, $v=f(1;0)=(0,1)$

Bước 2 : $[u]_F=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},[v]_F=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Bước 3 : Vậy $[f]_F=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

<u>Bài toán cho trước ma trận của AXTT trong cặp cơ sở, tìm biểu thức f</u>

Ví dụ 11 : Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ma trận của f đối với cơ sở $F=\left\{v_1=(2;1),v_2=(1;1)\right\}$ là $\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix}$. Biểu thức của f là?

Giải.

Gọi *f(x,y)=(ax+by,cx+dy).*

Bước 1 : *f(v₁) = f(2,1)=(2a+b.2c+d), f(v₂) = f(1,1)=(a+b,c+d)*

Bước 2 : $[f(v_1)]_F=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},[f(v_2)]_F=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

Ta có : $[f(v_1)]_F=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow f(v_1)=2.v_1+1.v_2=2.(2,1)+1.(1,1)$

$$\Rightarrow(2a+b,2c+d)=(5,3)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2a+b=5\\2c+d=3\end{cases}\text{(I)}$$

Tương tự ta có

$$[f(v_2)]_F=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow f(v_2)=2.v_1+1.v_2$$

$$\Rightarrow(a+b,c+d)=2.(2,1)+1.(1,1)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=5\\c+d=3\end{cases}(II)$$

Từ (I) và (II) ta có $\Rightarrow\begin{cases}2a+b=5\\2c+d=3\\a+b=5\\c+d=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=5\\c=0\\d=3\end{cases}$

Vậy biểu thức *f(x,y)=(5y,3y).*

- Công thức tìm ma trận của AXTT *f*
  Cho f : $R^n\to R^m$,có B_1 là cơ sở của R^n, B_2 là cơ sở của R^m

  Ta áp dụng công thức :

$f: R^n \to R^m$

$$\begin{tikzcd} E_n \arrow[r, "{[f]_{E_n}^{E_n}}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxed{3}"] & E_m \\ B_1 \arrow[r, "{[f]_{E_n}^{E_n}}"] & B_2 \arrow[u, "\boxed{1}"'] \end{tikzcd}$$

$\boxed{2}$

$$\boxed{[f]_{B_1}^{B_2} = P_{B_2 \to E_m} \cdot [f]_{E_n}^{E_m} P_{E_n \to B_1}}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

E_n, B_1 là hai cơ sở của R^n

E_m, B_2 là hai cơ sở của

(Công thức này được sử dụng linh hoạt,hai cặp cơ sở E và B có thể đổi chỗ cho nhau)

Ví dụ 12: Cho f : $R^3 \to R^2$,biết ma trận f trong cặp cơ sở $B = \{(1,1,1);(1,0,1);(1,1,0)\}$ và $F = \{(1,1);(2,1)\}$ là

$$A = [f]_B^F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tìm f(x)?

Giải.

Áp dụng công thức

$f: R^3 \to R^2$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "{[f]_B^F}"] \arrow[d] & F \\ E_3 \arrow[r, "{[f]_{E_3}^{E_2}}"] & E_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow [f]_{E_3}^{E_2} = P_{E_2 \to F} \cdot [f]_B^F \cdot P_{B \to E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[f]_{E_3}^{E_2} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ý nghĩa.

Cho ánh xạ tuyến tính f : V→W, với B là cơ sở của V;B' là cơ sở của W.Lúc này tồn tại duy nhất ma trận $A_{B,B'}$ sao cho :

$$[f]_{B'} = A_{B,B'} [x]_B$$

Ví dụ 13 : Cho Axtt f : $R^2 \to R^3$,biết biểu thức f(x,y)=(x-3y,2y,4x+3y).

Và hai cơ sở B={u_1=(1,1), u_2=(1,2)} và

B'={v_1=(1,0,1); v_2=(1,1,1), v_3=(1,0,0)}

Biết $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[y]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[z]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tìm $[f(x)]_{B'}$, $[f(y)]_{B'}$,$[f(z)]_{B'}$.

Axtt f : $R^n \to R^m$.Gọi A là ma trận của f trong cặp cơ sở B,B'.

Ta có :

- f đơn ánh ↔ rank(A) = n(≤m).
- f toàn ánh ↔ rank(A) = m(≤n).
- f song ánh ↔ rank(A) = n=m ↔ A ∈ $M_n(R)$ và det(A)≠0.

Ví dụ 14. Cho ánh xạ tuyến tính f : $R^3 \to R^3$,định bởi f(x,y,z)=(x-2y+z,2x-5y+z,z).

Hỏi f là đơn ánh – toàn ánh hay song ánh?

Giải.

Xét ma trận ánh xạ f trong cơ sở chính tắc E_3.

$$A = [f]_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta có rank(A)=3.

Vậy f là song ánh.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính f : $R^3 \rightarrow R^2$,định bởi f(x,y,z)=(x-y+z,2x-5y+mz).

Hỏi với m như thế nào thì f là toàn ánh.

- <u>Định nghĩa hai ma trận đồng dạng.</u>

Ma trận vuông A và B cấp n được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho : $P^{-1}AP = B$

Xét phép biến đổi tuyến tính f. A là ma trận của f trong cơ sở E. B là ma trận của f trong cơ sở F.

Thì A và B là hai ma trận đồng dạng.

5. Trị riêng – vecto riêng.(tài liệu này chỉ trình bày về ma trận)

Cho ánh xạ tuyến tính f : $R^2 \rightarrow R^2$, ,định bởi f(x,y)=(3x-2y, x).

Cho hai vecto u=(1,2);v=(2,1).

Có f(u)=f(1,2)= (-1,1)

f(v)=f(2,1)= (4,2)=2v

- *Đa thức đặc trưng* : ma trận A_n có đa thức đặc trưng tính $P_A(\lambda)$ theo công thức :

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n).$$

Cho $P_A(\lambda)=0$ ta được phương trình đặc trưng.

- *Trị riêng* : $\lambda \in R$ được gọi là trị riêng của ma trận A nếu tồn tại vecto u $\neq 0$: $A.[u]=\lambda.[u]$
- *Vecto riêng :* u $\neq 0$ được gọi là veto riêng ứng với trị riêng λ.

Ví dụ 15: Vecto x=(-2,2) là vecto riêng của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ứng với trị riêng?

Giải.

Vì vecto x là vecto riêng ứng với trị riêng λ,ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

Các bước tìm trị riêng và vecto riêng :

-Thiết lập phương trình đặc trưng,giải phương trình đặc trưng,ta được các trị riêng λ_i.

-Tìm vecto riêng u tương ứng với trị riêng λ_i bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A-\lambda_i I_n \mid 0)$.Tất cả nghiệm khác 0 của hệ là các vecto riêng ứng với trị riêng λ_i.

-*Không gian nghiệm* của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(A-\lambda_i I_n \mid 0)$ được gọi là không gian con riêng ứng với trị riêng λ_i, gọi là $E_{\lambda i}$.

Ví dụ 16 : Tìm trị riêng – vecto riêng,cơ sở,chiều của các không gian con riêng tương ứng của ma trận A. Với $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Giải.

Phương trình đặc trưng : $\det(A-\lambda I_n)=0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^{2}(\lambda-6)^{1}$$

Bội đại số của $\lambda_1 = 2$ bằng 2

Bội đại số của $\lambda_2 = 6$ bằng 1

* $\lambda_1 = 2$,gọi u=(x,y,z) là trị riêng tương ứng của $\lambda_1 = 2$.

Thiết lập hệ phương trình tuyến tính $(A-\lambda_i I_n \mid 0)$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\2&2&2&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z=\alpha\\ y=\beta\\ x=-\alpha-\beta\end{cases}$$

Suy ra $u=(-\alpha-\beta,\beta,\alpha);\alpha^2+\beta^2>0$: các vecto riêng tương ứng với $\lambda_1=2$.

Có $u=(-\alpha-\beta,\beta,\alpha)=(-\alpha,0,\alpha)+(-\beta,\beta,0)=\alpha\underbrace{(-1,0,1)}_{v_1}+\beta\underbrace{(-1,1,0)}_{v_2}$

Vậy không gian riêng $E_{\lambda_1}=E_2$ có cơ sở là $\{v_1,v_2\}=\{(-1,0,1);(-1,1,0)\}$ .dim(E_2) =2.

Bội hình học của $\lambda_1=2$ bằng 2

* $\lambda_2=6$

Tương tự ta có $u=(0,0,\gamma);\gamma\neq 0$: các vecto riêng tương ứng trị riêng $\lambda_2=6$.

Vậy không gian riêng $E_{\lambda_2}=E_6$ có cơ sở là $\{(0,0,1)\}$.dim(E_6) =1.

Bội hình học của $\lambda_2=1$ bằng 1

- bội hình học ≤ bội đại số.

6. Chéo hóa ma trận.

Ma trận A chéo hóa được khi A đồng dạng với ma trận chéo D.

A có n vecto riêng độc lập tuyến tính lập thành một ma trận cơ sở trong không gian R^n

Điều kiện để chéo hóa ma trận : tổng bội đại số = tổng bội hình học = bậc đa thức đặc trưng.

✓ Nếu ma trận A_n có n trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

Các bước chéo hóa ma trận A

Bước 1 : Tìm trị riêng – kiểm tra tổng bội đại số với bậc của ma trận.

Bước 2 : Tìm các vecto riêng tương ứng với trị riêng – kiểm tra tổng đại số và tổng hình học.

(bội H.hoc của trị riêng phải bằng bội Đ,so tương

Vậy chỉ có những trị riêng có bội đại số ≥2 là cần chú ý khi xét điều kiện chéo hóa!!!.

Bước 3 : Lập ma trận P. Tính ma trận chéo D.

Ví dụ 17 : Chéo hóa ma trận $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\-3&-5&-3\\3&3&1\end{bmatrix}$.

Bước 1 : Tìm trị riêng.

Phương trình đặc trưng : $P_A(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda+2)^2 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-2\end{cases}$

Tổng bội đại số 1+2=3

Bước 2 : Tìm vecto riêng

- $\lambda_1=1$: $v_1=(1,-1,1)$.
- $\lambda_2=-2$: $v_2=(-1,1,0);v_3=(-1,0,1)$.

Tổng bội hình học=3=tổng bội đại số

Bước 3 : Lập ma trận P và ma trận chéo P.

$$P=\begin{array}{c}\boxed{v_1}\\ \begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\end{array} \Rightarrow D=P^{-1}.A.P=\begin{array}{c}\lambda_1\\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\\ \boxed{\lambda_2}\end{array}$$

v_2,v_3 có thể đổi chỗ

Bài toán tìm điều kiện của tham số m để ma trận A có thể chéo hóa được.

Ví dụ 18 : Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & a & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Hỏi với điều kiện nào của a thì A chéo hóa được.

Giải.

A có ba trị riêng phân biệt $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ nên A luôn chéo hóa được với mọi a.

Ví dụ 19 : Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & a\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. Hỏi với điều kiện nào của a thì A chéo hóa được.

Giải.

A có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)=(\lambda-1).(\lambda-2)^2$.

Muốn A chéo hóa được thì trị riêng $\lambda_2=2$ phải có 2 vecto riêng độc lập.

Tìm vecto riêng ứng với trị riêng $\lambda_2=2$.

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Leftarrow \boxed{\text{Muốn có 2 vecto riêng độc lập thì hệ phương trình phải có hai ẩn tự do}\Rightarrow\text{chỉ có 1 phần tử trụ}}$$

- a=0.

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}z=\alpha\\ y=\beta\\ x=3\alpha+\beta\end{cases}\Rightarrow \begin{aligned}X&=(3\alpha+\beta,\beta,\alpha)\\ &=\alpha(3,0,1)+\beta(1,1,0)\end{aligned}$$

Ứng với trị riêng $\lambda_2=2$,có hai vecto riêng độc lập tuyến tính.

Vậy a=0 thì A chéo hóa được.

- a≠0.

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}z=\alpha\\ y=0\\ x=3\alpha\end{cases}\Rightarrow \begin{aligned}X&=(3\alpha,0,\alpha)\\ &=\alpha(3,0,1)\end{aligned}$$

Ứng với trị riêng $\lambda_2=2$,có một vecto riêng độc lập tuyến tính.

Vậy a≠0 thì A không chéo hóa được.

Ví dụ 20 : Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Hỏi với điều kiện nào của a thì A chéo hóa được.

Giải.

A có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)=(\lambda-1).\lambda^2$.

Muốn A chéo hóa được thì trị riêng $\lambda_2=0$ phải có 2 vecto riêng độc lập.

Tìm vecto riêng ứng với trị riêng $\lambda_2=0$.

$$\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Leftarrow \boxed{\text{Muốn có 2 vecto riêng độc lập thì hệ phương trình phải có hai ẩn tự do}\Rightarrow\text{chỉ có 1 phần tử trụ}}$$

Hệ chỉ có một ẩn tự do,nên số vecto riêng độc lập chỉ là một⟹A không chéo hóa được với mọi a

(vì bội hình học bằng 1 bé hơn bội đại số bằng 2)

7. Trị riêng – vecto riêng của ánh xạ tuyến tinh.

Định nghĩa.

Cho V là không gian vecto, ánh xạ tuyến tính $f: V \to V$.
Số $\lambda \in R$ được gọi là trị riêng của f, nếu tồn tại vecto $x \neq 0 \in V$ sao cho $f(x) = \lambda x$

Khi đó vecto x được gọi là vecto riêng của ánh xạ tuyến tính f tương ứng với trị riêng λ

Các bước đi tìm trị riêng – vecto riêng của một ánh xạ tuyến tính

Bước 1. Chọn một cơ sở B tùy ý trong kgvt V

Tìm ma trận A của axtt trong cơ sở B.

Bước 2. Tìm trị riêng λ và vecto riêng x của A.

Bước 3.Kết luận

1. Trị riêng của A cũng chính là trị riêng của axtt (và ngược lại)
2. Vecto riêng của A là tọa độ của vecto riêng của axtt trong cơ sở B.