LÊ THANH PHONG

PHẦN I: TĨNH HỌC

CHƯƠNG 1:
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

I. Đối tượng, nhiệm vụ nghiên cứu.

Đối tượng: Tĩnh học là phần nghiên cứu trạng thái cân bằng của vật rắn tuyệt đối dưới tác dụng của các lực.

Nhiệm vụ:

- Thu gọn hệ lực, biến đổi hệ lực đã cho thành một hệ lực khác tương đương với nó, nhưng đơn giản hơn. Hệ lực đơn giản nhất được gọi là dạng tối giản của hệ lực.
- Thiết lập các điều kiện đối với hệ lực mà dưới tác dụng của nó vật rắn cân bằng và gọi là các điều kiện cân bằng của hệ lực.

II. Các khái niệm cơ bản.

1. Vật rắn tuyệt đối.

Tập hợp các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ là không đổi.

2. Trạng thái cân bằng của vật rắn.

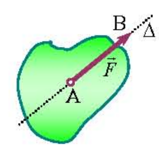
Vật rắn ở trạng thái cân bằng trong một hệ qui chiếu khi nó đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều trong hệ qui chiếu đó.

3. Lực.

Lực là đại lượng đặc trưng cho tác dụng tương hổ giữa hai vật thể với nhau.

Các yếu tố đặc trưng cho lực.

- Điểm đặt : Vị trí thể hiện sự tác dụng tương hổ.
- Phương chiều: hướng của tác dụng tương hổ.
- Cường độ (trị số) : Giá trị tác dụng tương hổ, có đơn vị đo là Niutơn (N).



Hình 1.1: Lực tác dụng tại một điểm.

Lực là đại lượng có hướng, biểu diễn bằng véctơ: $\vec{F}$

Đường tác dụng của lực $\vec{F}$: là đường thẳng trùng với phương của lực.

III. Các định nghĩa.

1. Cơ hệ.

Tập hợp các chất điểm hoặc các vật thể mà trạng thái cơ học có liên quan với nhau.

2. Hệ lực.

Tập hợp các lực tác dụng lên một chất điểm, một vật hay một cơ hệ.

Ký hiệu hệ lực: $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,...,\vec{F}_n\right)$ hay $\left(\vec{F}_i\right)$ $\quad i=1:n$.

3. Hai hệ lực tương đương.

Khi hai hệ lực có cùng tác dụng cơ học như nhau lên cùng một cơ hệ thì hai hệ lực đó tương đương nhau.

Ký hiệu hai hệ lực $\left(\vec{F}_k\right)$ và $\left(\vec{P}_i\right)$ tương đương: $\left(\vec{F}_k\right)\sim\left(\vec{P}_i\right)$.

4. Hệ lực cân bằng.

Không gây ra tác dụng cơ học nào lên cơ hệ tức là không làm thay đổi trạng thái của vật khi được tác dụng của hệ lực.

Ký hiệu hệ lực $\left(\vec{F}_i\right)$ cân bằng : $\left(\vec{F}_i\right)\sim 0$.

5. Hệ lực trực đối.

Đổi chiều tất cả các lực trong một hệ lực, thu được hệ lực mới trục đối với hệ lực đã cho.

6. Hệ lực triệt tiêu.

Hai hệ lực $\left(\vec{F}_k\right)$ và $\left(\vec{P}_i\right)$ cùng tác dụng lên một cơ hệ và cân bằng, thì hệ lực $\left(\vec{F}_k\right)$ triệt tiêu hệ lực $\left(\vec{P}_i\right)$ hay ngược lại.

7. Hợp lực.

Hệ lực tương đương với một lực thì lực gọi là hợp lực của hệ lực đã cho.

Ký hiệu hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực $\left(\vec{F}_k\right)$: $\vec{R} \sim \left(\vec{F}_k\right)$.

8. Phân loại hệ lực.

Hệ lực không gian:

- Hệ lực không gian tổng quát: Đường tác dụng của các lực nằm trong không gian.
- Hệ lực không gian đồng qui: Đường tác dụng các lực đồng qui.
- Hệ lực không gian song song: đường tác dụng các lực song song một phương.

Hệ lực phẳng:

- Hệ lực phẳng tổng quát: Đường tác dụng của các lực nằm trong cùng một mặt phẳng.
- Hệ lực phẳng đồng qui.
- Hệ lực phẳng song song.

IV. *Hệ tiên đề tĩnh học.*

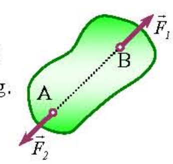
1. Tiên đề 1. (Tiên đề về sự cân bằng).

Điều kiện cần và đủ để hệ gồm hai lực cân bằng là chúng có cùng đường tác dụng, cùng trị số và ngược chiều nhau.

$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \sim 0 \Leftrightarrow$ ($\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều).

$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$: được gọi là cặp lực cân bằng.

Hình 1.2: Tiên đề về sự cân bằng.



2. Tiên đề 2. (Tiên đề thêm bớt cặp lực cân bằng).

Tác dụng của hệ lực không đổi khi thêm vào hay bớt ra các cặp lực cân bằng $\left(\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2\right) \sim 0$.

$\Rightarrow \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n\right) \sim \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n, \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2\right)$.

Hệ quả: Tác dụng của một lực không đổi khi trượt lực trên đường tác dụng của lực.

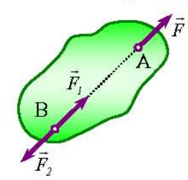
Thật vậy: Cho lực $\vec{F}$ đặt tại A, trên đường tác dụng của $\vec{F}$ tại điểm B ta đặt vào một cặp lực cân bằng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ sao cho $\vec{F}_1 = \vec{F}$.

Theo tiên đề 2: $\vec{F} = \left(\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$;

Theo tiên đề 1: $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \sim 0$;

Theo tiên đề 2: $\left(\vec{F}, \vec{F}_2, \vec{F}_1\right) \sim \vec{F}_1$.

Hình 1.3: Hệ quả của tiên đề 2.

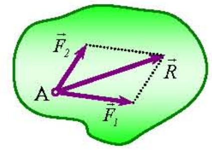


Vậy thì: $\vec{F} \sim \vec{F}_1$ hay $\vec{F}_1$ là $\vec{F}$ được trượt từ A đến B trên đường tác dụng của nó.

3. Tiên đề 3. (Tiên đề hình bình hành lực).

Hai lực có cùng điểm đặt thì có hợp lực cũng cùng điểm đặt và được biểu diễn bằng véctơ lực là đường chéo của hình bình hành mà hai cạnh bên là hai véctơ lực đã cho: $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \sim \vec{R}$; $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$.

Hình 1.4: Tiên đề hình bình hành lực.



Từ tiên đề 3 mở rộng các trường hợp khác:

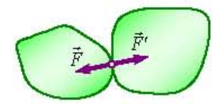
- Nếu hai lực không cùng điểm đặt nhưng có đường tác dụng cắt nhau, ta trượt các lực về đặt tại giao điểm của các đường tác dụng.

- Một lực có thể phân ra hai thành phần theo hai phương cho trước có cùng điểm đặt với nó: $\vec{R}_0 \sim \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$; trong đó $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ được phân theo hai phương Δ_1 và Δ_2.
- Một lực có thể phân thành n lực theo n phương cho trước.

4. *Tiên đề 4.* (Tiên đề tác dụng và phản tác dụng).

Lực tác dụng và phản tác dụng của hai vật thể thì cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều nhau.

Hình 1.5: Tiên đề tác dụng và phản tác dụng.



Hai lực này không tạo thành cặp lực cân bằng nếu xét riêng từng vật.

Hai lực này tạo thành cặp lực cân bằng nếu xét hệ gồm cả hai vật.

5. *Tiên đề 5.* (Tiên đề hóa rắn).

Vật bị biến dạng cân bằng khi hóa rắn vẫn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực đã cho.

6. *Tiên đề 6.* (Tiên đề giải phóng liên kết).

a- *Vật tự do và vật chịu liên kết.*

i-*Vật tự do.* Vật thực hiện được mọi di chuyển vô cùng bé bất kỳ từ vị trí khảo sát sang những vị trí lân cận. (3 tịnh tiến, 3 quay đối với 3 trục của hệ qui chiếu Descartes: 6 bậc tự do).

ii- *Vật chịu liên kết.* Vật có một hoặc nhiều di chuyển bị cản trở (số bậc tự do < 6). Vật chịu liên kết thường được chọn làm vật khảo sát.

iii- *Vật gây liên kết.* Vật gây ra điều kiện cản trở, hạn chế di chuyển của các vật khảo sát.

iv- *Phản lực liên kết.* Tác dụng của những vật gây liên kết lên vật khảo sát tương đương với tác dụng của lực và được gọi là phản lực liên kết.

Phản lực liên kết có các yếu tố sau :

- Điểm đặt tại chổ liên kết (vị trí tiếp xúc giữa 2 vật liên kết).
- Có cùng phương ngược chiều với chuyển động bị cản trở.
- Có cường độ phụ thuộc vào các lực chủ động tác dụng lên vật khảo sát.

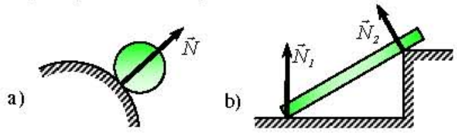
b-*Tiên đề giải phóng liên kết.*

Vật chịu lên kết có thể xem là vật tự do nếu thay các liên kết với vật bằng các phản lực liên kết tương ứng.

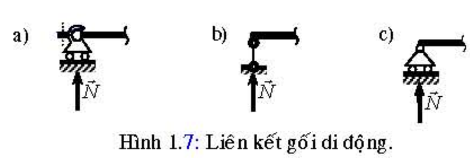
c-*Các liên kết và phản lực liên kết thông dụng.*

Các liên kết thực rất đa dạng và có tính chất khác nhau. để đơn giản tính toán, trên sơ đồ tính của kết cấu người ta thường sử dụng các liên kết lý tưởng. Các liên kết dưới đây ngăn cản hoàn toàn chuyển động theo phương liên kết nên còn được gọi là các liên kết cứng.

i- *Liên kết tựa* : Phản lực liên kết vuông góc với tiếp tuyến của mặt tựa (hình 1.6a). Khi một trong các mặt tiếp xúc nào đó chỉ là một điểm (hình 1.6b) thì phản lực hướng theo pháp tuyến của mặt kia.



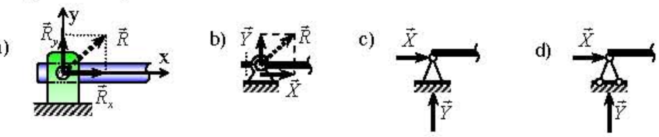
Hình 1.6: Liên kết tựa.



Hình 1.7: Liên kết gối di động.

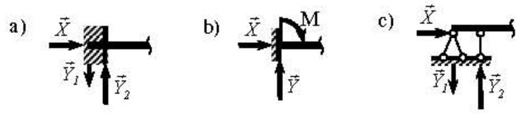
ii- *Liên kết gối di động (khớp di động, liên kết đơn)*: cho phép chuyển động quay quanh một điểm và chuyển động thẳng theo phương nào đó, chỉ ngăn cản chuyển động thẳng dọc theo phương đặt liên kết, do đó phản lực liên kết là một lực $\vec{N}$ theo phương liên kết, trên hình 1.7 là các ký hiệu thường dùng của liên kết này. Trên hình 1.7b cho thấy gối di động tương đương với một liên kết đơn.

Hình 1.8: Liên kết gối cố định.

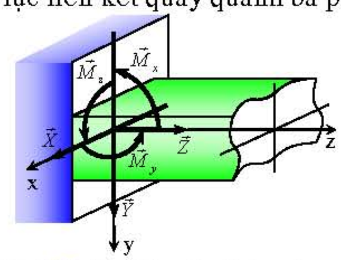


iii- ***Liên kết gối cố định (khớp trụ, bản lề trụ)***: cho phép chuyển động quay quanh một trục, ngăn cản mọi chuyển động thẳng trong mặt phẳng. Liên kết phát sinh một phản lực liên kết *R* đi qua trục quay, có phương bất kỳ nằm trong mặt phẳng. Trong tính toán ta thường phân phản lực này thành hai thành phần *X, Y* vuông góc nhau, tương đương với hai liên kết đơn như hình 1.8c, trên các hình 1.8 là những ký hiệu thường dùng của liên kết này.

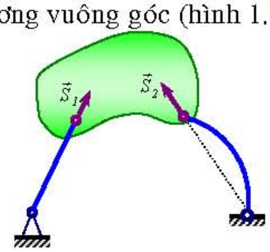
Hình 1.9: Liên kết ngàm phẳng.



iv- ***Liên kết ngàm phẳng (liên kết hàn)***: ngăn cản mọi chuyển động thẳng và chuyển động quay trong mặt phẳng. Phản lực liên kết gồm thành phần X và hai thành phần Y_1, Y_2 ngược chiều nhau (hình 1.9a), thông thường dời lực Y_1 về trùng với Y_2 sẽ nhận được ba thành phần phản lực gồm hai thành phần vuông góc nhau X, *Y* và một thành phần mômen *M* chống lại sự quay (hình 1.9b), cách biểu diễn khác của liên kết ngàm như trên hình 1.9c. Ta thấy liên kết ngàm phẳng tương đương với ba liên kết đơn. Mở rộng cho khái niệm bài toán không gian, xét liên kết ngàm trong không gian sẽ có sáu phản lực liên kết trong đó ba phản lực kiên kết theo ba phương vuông góc và ba mômen phản lực liên kết quay quanh ba phương vuông góc (hình 1.10).



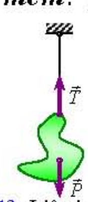
Hình 1.10: Liên kết ngàm không gian.



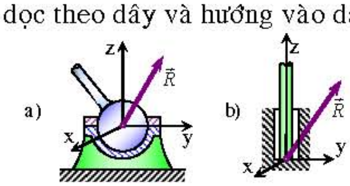
Hình 1.11: Liên kết thanh.

v- ***Liên kết thanh cứng***: liên kết thanh cứng được thực hiện nhờ các thanh thỏa mãn những điều kiện sau: chỉ có lực tác dụng ở hai đầu, còn dọc theo thanh không có lực tác dụng, trọng lượng của thanh không đáng kể. Những liên kết tại hai đầu thanh là liên kết khớp hoặc tựa. Phản lực liên kết thanh nằm dọc theo đường nối hai điểm đặt lực liên kết tại hai đầu thanh (hình 1.11).

vi- ***Liên kết dây mềm***: phản lực liên kết dọc theo dây và hướng vào dây như hình 1.12.



Hình 1.12: Liên kết dây mềm.



Hình 1.13: Liên kết bản lề cầu và bản lề cối.

vii- ***Liên kết bản lề cầu, bản lề cối***: phản lực liên kết nằm trong không gian đi qua tâm cầu hay đáy của cối như hình 1.13. Có thể phân phản lực này thành ba thành phần theo ba trục vuông góc.

V. Moment của lực.

1. Moment của lực đối với một điểm.

Moment của lực $\vec{F}$ đối với điểm o (hình 1.14) ký hiệu $\vec{M}_O$ hoặc $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)$ bằng tích vector của vector $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ với lực $\vec{F}$ được xác định bởi ba yếu tố: Độ lớn (bằng tích trị số của lực với cánh tay đòn: $\pm F.d$); mặt phẳng tác dụng (mặt phẳng chứa lực $\vec{F}$ và điểm O – có thể thay bằng phương pháp tuyến của mặt phẳng này); chiều quay trên mặt phẳng tác dụng (có chiều sao cho $\vec{r},\vec{F}$ và $\vec{M}_o$ tạo thành tam diện thuận). Moment của lực $\vec{F}$ đối với điểm O được tính bằng giải tích:

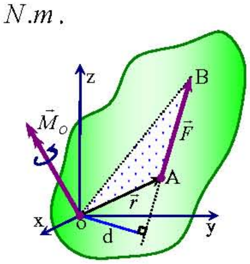
$$\vec{M}_O=\vec{m}_O(\vec{F})=\vec{r}\wedge\vec{F}=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{bmatrix} \qquad (1.1.1).$$

Trong đó:

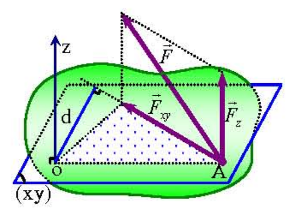
$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: là các vector đơn vị chỉ phương của các trục trong hệ tọa độ Descartes.

x,y,z và F_x,F_y,F_z lần lượt là các thành phần hình chiếu của vector $\vec{r}$ và vector $\vec{F}$ lên các trục trong hệ tọa độ Descartes.

Thứ nguyên là : $N.m$.



Hình 1.14: Moment của lực đối với một điểm.



Hình 1.15: Moment của lực đối với một trục.

2. Moment của lực đối với một trục.

Moment của lực $\vec{F}$ đối với trục z được ký hiệu $\vec{m}_z\left(\vec{F}\right)$bằng moment của hình chiếu của lực này trên mặt phẳng vuông góc với trục lấy đối với giao điểm của trục với mặt phẳng vuông góc đó. Theo hình 1.15 lực $\vec{F}$ được phân thành hai thành phần $\vec{F}_z$ song song với trục z nên không làm vật quay quanh trục này; $\vec{F}_{xy}$ nằm trong mặt phẳng xy vuông góc với trục z, lấy moment đối với trục z cũng chính là lấy moment đối với điểm o – là giao điểm của mặt phẳng xy với trục z.

Vậy nên:

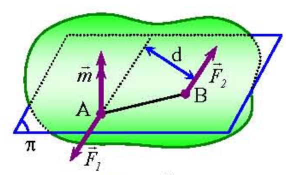
$$\vec{m}_z\left(\vec{F}\right)=\vec{m}_O\left(\vec{F}_{xy}\right)=\pm F_{xy}.d \qquad (1.1.2).$$

Mở rộng trường hợp moment của nhiều lực:

$$\vec{m}_O(\vec{F}_k)=\vec{m}_O\left(\vec{F}_1\right)+\vec{m}_O\left(\vec{F}_2\right)+...+\vec{m}_O\left(\vec{F}_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\wedge\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\pm d_i.F_{xy,i}\ ;\ k=1:n \quad (1.1.3).$$

Lưu ý : $m_O F_k=0$ khi đường tác dụng của lực $\vec{F}$ đi qua điểm lấy moment (trường hợp lấy moment đối với một điểm) hoặc khi đường tác dụng của $\vec{F}$ và trục cần lấy moment z cùng thuộc một mặt phẳng (trường hợp lấy moment đối với một trục).

VI. Ngẫu lực.



Hình 1.16: Ngẫu lực.

1. Định nghĩa.

Ngẫu lực là hệ gồm hai lực song song ngược chiều và có cùng trị số tác dụng lên vật thể (hình 1.16).

Ký hiệu: ngẫu lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$.

2. Các yếu **tố đặc trưng của một ngẫu lực.** Xem hình 1.16.

Mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực: mặt phẳng chứa các lực (mặt phẳng π).

Chiều của ngẫu lực: chiều quay của các lực khi nhìn vào mặt phẳng tác dụng.

Trị số moment của ngẫu lực:

$$m = F_1.d = F_2.d \qquad (1.1.4).$$

Trong đó: $d-$là khoảng cách giữa hai lực còn gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực.

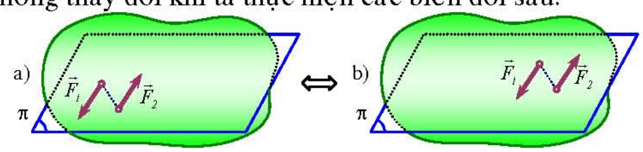
Ngẫu lực còn có thể biểu diễn bằng véctơ moment:

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_1 \qquad (1.1.5).$$

3. Các tính **chất của ngẫu lực.**

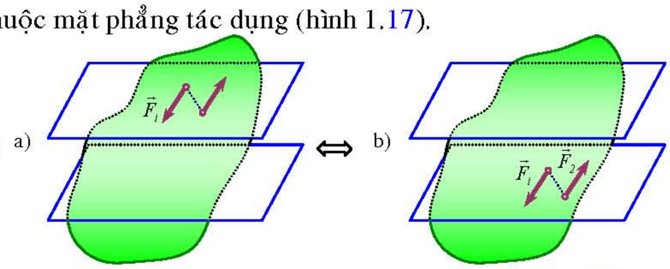
Tác dụng của ngẫu lực lên vật sẽ không thay đổi khi ta thực hiện các biến đổi sau:

Hình 1.17: Dời ngẫu lực đến vị trí bất kỳ thuộc mặt phẳng tác dụng.



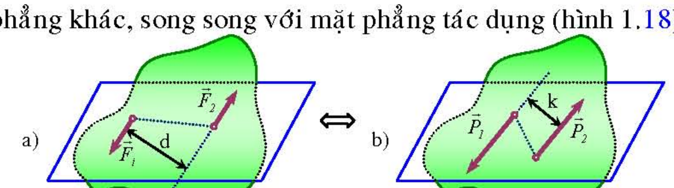
a-Dời ngẩu lực đến vị trí bất kỳ thuộc mặt phẳng tác dụng (hình 1.17).

Hình 1.18: Dời ngẫu lực đến mặt phẳng bất kỳ song song với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực.



b-Dời ngẫu lực đến các mặt phẳng khác, song song với mặt phẳng tác dụng (hình 1.18).

Hình 1.19: Thay đổi lực và cánh tay đòn, chiều quay và trị số F1.d không đổi.



c-Thay đổi trị số của lực và cánh tay đòn nhưng vẫn giữ nguyên chiều quay và tích số $F_1.d = P_1.k$ (hình 1.19).

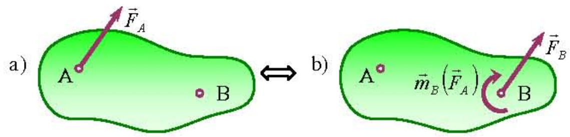
VII. Định lý dời lực. (dời song song một lực đến một điểm bất kỳ thuộc vật).

1. Định lý.

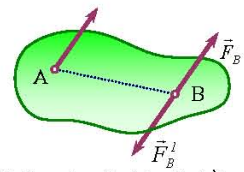
Tác dụng của một lực lên vật không đổi khi ta dời song song lực đó đến một điểm bất kỳ thuộc vật đồng thời thêm vào một ngẫu lực có moment bằng moment của lực cần dời đi lấy đối với điểm mà lực sẽ di chuyển tới.

Lực $\vec{F}_A$ tác dụng lên vật tại điểm A (hình 1.20a) tương đương với hệ gồm lực $\vec{F}_B$ tác dụng lên vật tại điểm B và ngẫu lực có moment bằng moment của lực $\vec{F}_A$ đặt tại điểm A lấy đối với điểm B (hình 1.20b).

$$\vec{F}_A = \left(\vec{F}_B, \vec{M}_B\right) = \left(\vec{F}_B, \vec{m}_B\left(\vec{F}_A\right)\right) = \left(\vec{F}_B, \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A\right) \qquad (1.6).$$



Hình 1.20: Dời song song lực đến vị trí bất kỳ thuộc vật.



Hình 1.21: Thêm vào cặp lực cân bằng đặt tại B.

2. *Chứng minh.*

Xét $\vec{F}_A$ đặt tại A, tại điểm B ta đặt vào một cặp lực cân bằng: $\left(\vec{F}_B, \vec{F}_B^1\right)$ sao cho $\vec{F}_B = \vec{F}_A$ (hình 1.21).

Ta có $\vec{F}_A \sim \left(\vec{F}_A, \vec{F}_B^1, \vec{F}_B\right)$.

Nhưng vì $\left(\vec{F}_A, \vec{F}_B^1\right)$ tạo thành một ngẫu lực $\left(\vec{F}_A, \vec{F}_B^1\right) = \vec{m}_B\left(\vec{F}_A\right) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_A$.

Vậy nên $\vec{F}_A = \left(\vec{F}_B, \vec{m}_B\left(\vec{F}_A\right)\right)$ - định lý đã được chứng minh.

Ngược lại, nếu một lực và một ngẫu lực đồng phẳng thì chúng tương đương với một lực bằng với lực đã cho và đặt ở điểm khác.

Định lý dời lực là một công cụ hữu hiệu để biến đổi tương đương một hệ lực bất kỳ về dạng chuẩn (dạng tối giãn) mà ta sẽ thực hiện ở chương sau.

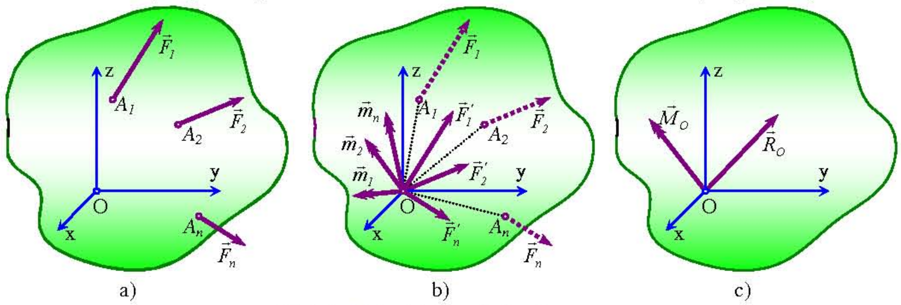
CHƯƠNG 2:

KHẢO SÁT HỆ LỰC

I. Thu hệ lực về một điểm.

1. Vector chính và vector moment chính của hệ lực $\left(\vec{F}_i\right)$ đối với tâm O.

Cho hệ gồm n lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ tác dụng lên vật thể tại các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ (hình 2.1a).



Hình 2.1: Thu hệ lực về tâm O.

Chọn một điểm O nào đó làm tâm thu gọn rồi dời tất cả các lực của hệ về tâm này. Theo định lý dời lực, ta nhận được một hệ lực: $\vec{F}_1' = \vec{F}_1, \vec{F}_2' = \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n' = \vec{F}_n$ đặt tại tâm O và một hệ ngẫu lực có moment bằng moment của các lực $\vec{F}_i$, $i = 1 : n$ lấy đối với điểm O:
$\vec{m}_1 = \vec{m}_O\left(\vec{F}_1\right), \vec{m}_2 = \vec{m}_O\left(\vec{F}_2\right), ..., \vec{m}_n = \vec{m}_O\left(\vec{F}_n\right)$ (hình 2.1b).

Thay các lực $\vec{F}_i'$, $i = 1 : n$ đặt tại điểm O bằng một lực $\vec{R}_O$ cũng đặt tại điểm đó sao cho:

$$\vec{R}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2.1).$$

Đối với hệ ngẫu lực, ta thực hiện lấy tổng hình học của chúng và nhận được một ngẫu lực có moment bằng:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right) \qquad (2.2).$$

Nếu là một hệ lực phẳng thì tổng các vector moment được thực hiện bởi phép cộng đại số:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \pm d_i.F_i \qquad (2.3).$$

$\vec{R}_O$ và $\vec{M}_O$ được gọi là vector chính và moment chính khi thu hệ lực về tâm O (hình 2.1c).

Lưu ý: Khi thay đổi tâm thu gọn khác nhau thì theo (2.1), cách tính vector chính vẫn như thế và do đó, giá trị của vector chính là không đổi $\vec{R}_O = \vec{R}$. Vector chính chỉ mang ý nghĩa về mặt hình học.

2. Các trường hợp tối giản khi thu gọn một hệ lực.

Khi thu hệ lực về một tâm O bất kỳ, ta nhận được một vector chính $\vec{R}$ và một moment chính $\vec{M}_O$. Tùy theo các giá trị tìm được của $\vec{R}$ và $\vec{M}_O$ mà ta có các trường hợp sau:

a- $\vec{R} = 0$ và $\vec{M}_O = 0$, hệ lực đã cho cân bằng: $\left(\vec{F}_i\right) \sim 0$.

b- $\vec{R} \neq 0$ và $\vec{M}_O = 0$, hệ lực đã cho được thu về một hợp lực đi qua O: $\left(\vec{F}_i\right) \sim \vec{R}$. Trường hợp này vật tự do có thể chuyển động tịnh tiến thuần túy nếu tâm thu gọn trùng với trọng tâm của vật.

c- $\vec{R} = 0$ và $\vec{M}_O \neq 0$, hệ lực đã cho được thu về bằng một ngẫu lực: $\left(\vec{F}_i\right) \sim \vec{M}_O$. Trường hợp này vector $\vec{M}_O$ không phụ thuộc vào tâm thu gọn O. Vật tự do dưới tác dụng của hệ lực này có thể chuyển động xoay thuần túy.

d- $\vec{R} \neq 0$ và $\vec{M}_O \neq 0$.

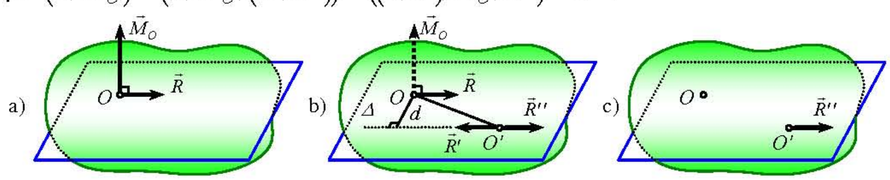
i- $\vec{R} \perp \vec{M}_O$, hệ lực đã cho cũng được thu về bằng một hợp lực $\vec{R}$ nhưng không đi qua O. Chẳng hạn, hệ lực sau khi thu gọn như trên hình 2.2a. Trường hợp này mặt phẳng tác dụng của $\vec{M}_O$ trùng với mặt phẳng chứa $\vec{R}$. Ta thêm vào cặp lực cân bằng $\left(\vec{R}', \vec{R}''\right)$ có trị số đúng bằng $\vec{R}$; cùng phương với $\vec{R}$ tại vị trí O' bất kỳ trên đường thẳng Δ song song với $\vec{R}$ nào đó thõa mãn:

Khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ: $d = \overline{M}_O / \overline{R}$.

Cặp lực $\left(\vec{R}, \vec{R}'\right)$ tạo thành một ngẫu lực có chiều quay ngược với $\vec{M}_O$ (hình 2.2b).

Với cách chọn như vậy thì ngẫu lực $\left(\vec{R}, \vec{R}'\right)$ có độ lớn bằng $\vec{M}_O$ và ngược chiều với $\vec{M}_O$ nên chúng khử nhau và kết quả ta nhận được $\vec{R}''$ đặt tại O' như hình 2.2c.

Tóm lại: $\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right) \sim \left(\vec{R}, \vec{M}_O, \left(\vec{R}', \vec{R}''\right)\right) \sim \left(\left(\vec{R}, \vec{R}'\right), \vec{M}_O, \vec{R}''\right) \sim \vec{R}''$.



Hình 2.2: Biến đổi về hợp lực.

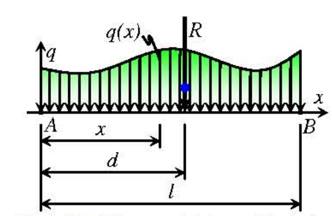
ii- $\vec{R}\,\overline{\perp}\,\vec{M}_O$, hệ lực đã cho được thu về hệ xoắn vít. Ta không thể thu hệ lực này về dạng tối giản hơn nữa.

3. Thu gọn hệ lực phân bố.

Xét hệ lực song song $q(x)$ phân bố trên chiều dài l của đoạn AB theo qui luật như hình 2.3.

Đây là hệ lực song song cùng chiều nên vector chính có phương, chiều với hệ lực $q(x)$ và có giá trị:

$$R = \int_0^l q(x)dx \qquad (2.4).$$



Hình 2.3: Thu gọn hệ lực phân bố.

Tích phân trên chính là diện tích của biểu đồ phân bố lực.

Moment chính của phân bố đối với một tâm nào đó, chẳng hạn, đối với điểm A đầu đoạn như hình 2.3 được tính:

$$M_A = \int_0^l q(x)xdx \qquad (2.5).$$

Vậy hệ lực phân bố có hợp lực $\vec{R}$ hướng theo hệ lực phân bố, có trị số tính theo (2.4) và điểm đặt cách đầu mút A một đoạn d:

$$d = \frac{\int_0^l q(x)xdx}{\int_0^l q(x)dx} \qquad (2.6).$$

Các trường hợp riêng thường gặp:

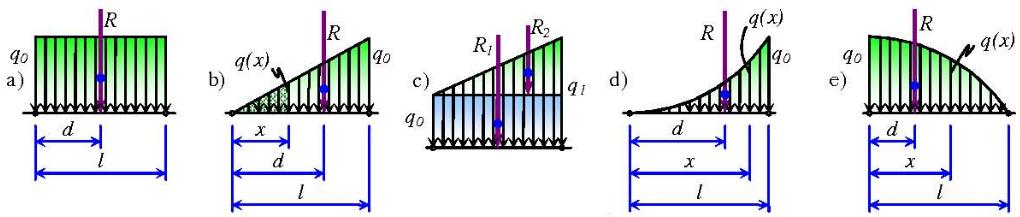
i- Lực phân bố đều $q(x) = q_0 = const$ (hình 2.4a).

Trị số của hợp lực tính theo (2.4):

$$R = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l q_0 dx = q_0 \int_0^l dx = q_0 l \qquad (2.7).$$

Điểm đặt của hợp lực cách đầu mút trái một đoạn tính theo (2.6):

$$d = \frac{\int_0^l q_0 xdx}{q_0 l} = \frac{1}{2} l \qquad (2.8).$$



Hình 2.4: Thu gọn hệ lực phân bố đặc biệt.

ii- Lực phân bố tuyến tính tam giác (hình 2.4b).

Để ý đến các tam giác đồng dạng ta có: $q(x) = q_0 \frac{x}{l}$.

Trị số của hợp lực:

$$R = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l q_0 \frac{x}{l} dx = \frac{q_0}{l} \int_0^l xdx = \frac{1}{2} q_0 l \qquad (2.9).$$

Điểm đặt của hợp lực cách đầu mút trái một đoạn:

$$d = \frac{\int_0^l q_0 \frac{x}{l} xdx}{\frac{1}{2} q_0 l} = \frac{\frac{q_0}{l} \frac{l^3}{3}}{\frac{1}{2} q_0 l} = \frac{2}{3} l \qquad (2.10).$$

Trường hợp phân bố tuyến tính dạng hình thang, ta chia ra thành hai hợp lực phân bố đều và phân bố tuyến tính tam giác như hình 2.4c.

iii- Lực phân bố bậc hai điểm bắt đầu là đỉnh của nó (hình 2.4d,e).

Trường hợp phân bố lõm (hình 2.4d). Dễ thấy hàm của lực phân bố $q(x) = \frac{q_0}{l^2} x^2$.

Trị số của hợp lực:

$$R = \int_0^l q(x)dx = \int_0^l \frac{q_0}{l^2} x^2 dx = \frac{q_0}{l^2} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} q_0 l \qquad (2.11).$$

Điểm đặt của hợp lực cách đầu mút trái một đoạn:

$$d=\frac{\int_0^l \frac{q_0}{l^2}x^2 x dx}{\frac{1}{3}q_0 l}=\frac{\frac{q_0}{l^2}\frac{l^4}{4}}{\frac{1}{3}q_0 l}=\frac{3}{4}l \qquad (2.12).$$

Trường hợp phân bố lồi (hình 2.4e). Hàm của lực phân bố $q(x)=q_0\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$.

Trị số của hợp lực:

$$R=\int_0^l q_0\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)dx=q_0\left(l-\frac{l^3}{l^2 3}\right)=\frac{2}{3}q_0 l \qquad (2.13).$$

Điểm đặt của hợp lực cách đầu mút trái một đoạn:

$$d=\frac{\int_0^l q_0\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)x dx}{\frac{2}{3}q_0 l}=\frac{q_0\left(\frac{l^2}{2}-\frac{l^4}{l^2 4}\right)}{\frac{2}{3}q_0 l}=\frac{3}{8}l \qquad (2.14).$$

Mở rộng cho những tải trọng phân bố theo thể tích, khi xét đến trọng lượng riêng của vật ρ hoặc kể đến lực quán tính trong các chuyển động có gia tốc thì các loại tải trọng này phân bố theo thể tích.

Trị số của hợp lực:

$$R=\int_V \rho dV \qquad (2.15a).$$

Nếu $\rho = const$ trên thể tích V thì:

$$R=\rho V \qquad (2.15b).$$

Điểm đặt của hợp lực này tại trọng tâm của trường lực.

II. Điều kiện cân bằng của một hệ lực.

1. Định lý.

Điều kiện cần và đủ để hệ lực bất kỳ cân bằng là vector chính và vector moment chính của hệ lực lấy đối với một tâm thu gọn bất kỳ bằng không.

$$\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\ldots,\vec{F}_n\right)\sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0;\\ \vec{M}=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{m}\left(\vec{F}_i\right)=0.\end{cases} \qquad (2.16).$$

2. Phương trình cân bằng.

Từ điều kiện cân bằng của một hệ lực trong (2.16) ta chiếu chúng lên các trục tọa độ sẽ nhận được sáu phương trình vô hướng thường được gọi là sáu phương trình cân bằng của hệ lực.

$$\begin{aligned}
&R_x=\sum_{i=1}^{n}F_{i,x}=\sum_{i=1}^{n}X(F_i)=0; && M_x=\sum_{i=1}^{n}m_{i,x}=\sum_{i=1}^{n}m_x(F_i)=0;\\
&R_y=\sum_{i=1}^{n}F_{i,y}=\sum_{i=1}^{n}Y(F_i)=0; && M_y=\sum_{i=1}^{n}m_{i,y}=\sum_{i=1}^{n}m_y(F_i)=0; \qquad (2.17).\\
&R_z=\sum_{i=1}^{n}F_{i,z}=\sum_{i=1}^{n}Z(F_i)=0; && M_z=\sum_{i=1}^{n}m_{i,z}=\sum_{i=1}^{n}m_z(F_i)=0;
\end{aligned}$$

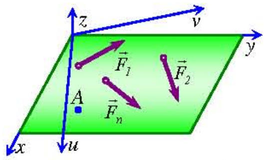
III. Cân bằng của các hệ lực đặc biệt.

1. Hệ lực phẳng.

Xét hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ thuộc cùng trong mặt phẳng (xy) như. Phương trình cân bằng hình chiếu lên trục z và các phương trình cân bằng moment đối với trục x và y tự thỏa mãn, số phương trình cân bằng còn ba.

Dạng 1:

Hai phương trình cân bằng hình chiếu lên hai trục tọa độ vuông góc u,v và một phương trình cân bằng moment đối với điểm A bất kỳ (hình 2.5).

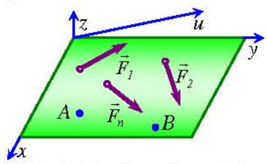


Hình 2.5: Cân bằng dạng thứ nhất của hệ lực phẳng.

$$\begin{cases} R_u = \sum_{i=1}^{n} F_{i,u} = \sum_{i=1}^{n} U(F_i) = 0; \\ R_v = \sum_{i=1}^{n} F_{i,v} = \sum_{i=1}^{n} V(F_i) = 0; \quad (u \perp v). \\ M_A = \sum_{i=1}^{n} m_{i,A} = \sum_{i=1}^{n} m_A(F_i) = 0. \end{cases} \qquad (2.18a).$$

Dạng 2:

Hai phương trình cân bằng moment đối với hai điểm A, B khác nhau và một phương trình cân bằng hình chiếu lên trục u không vuông góc với phương nối hai điểm A, B (hình 2.6).

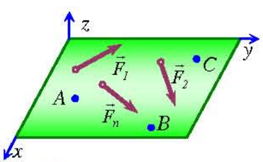


Hình 2.6: Cân bằng dạng thứ hai của hệ lực phẳng.

$$\begin{cases} R_u = \sum_{i=1}^{n} F_{i,u} = \sum_{i=1}^{n} U(F_i) = 0; \\ M_A = \sum_{i=1}^{n} m_{i,A} = \sum_{i=1}^{n} m_A(F_i) = 0; \quad \left(\overline{AB} \not\perp u\right). \\ M_B = \sum_{i=1}^{n} m_{i,B} = \sum_{i=1}^{n} m_B(F_i) = 0. \end{cases} \qquad (2.18b).$$

Dạng 3:

Ba phương trình cân bằng moment đối với ba điểm A, B và C khác nhau bất kỳ nhưng không thẳng hàng (hình 2.7).

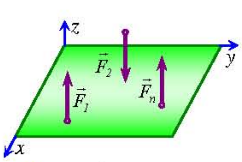


Hình 2.7: Cân bằng dạng thứ ba của hệ lực phẳng.

$$\begin{cases} M_A = \sum_{i=1}^{n} m_{i,A} = \sum_{i=1}^{n} m_A(F_i) = 0; \\ M_B = \sum_{i=1}^{n} m_{i,B} = \sum_{i=1}^{n} m_B(F_i) = 0; \\ M_C = \sum_{i=1}^{n} m_{i,C} = \sum_{i=1}^{n} m_C(F_i) = 0. \; (A, B, C \text{ không thẳng hàng}) \end{cases} \qquad (2.18c).$$

2. *Hệ lực song song trong không gian.*

Xét hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ trong không gian cùng song song với trục z như hình 2.8. Các phương trình cân bằng moment đối với trục z và bân bằng hình chiếu lên hai trục x,y tự thỏa mãn, còn lại một phương trình cân bằng hình chiếu lên trục z và hai phương trình cân bằng moment đối với hai trục x,y.

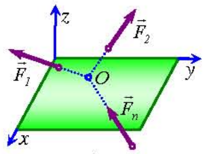


Hình 2.8: Cân bằng của hệ lực song song trong không gian.

$$\begin{cases} R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} Z(F_i) = 0 \\ M_x = \sum_{i=1}^{n} m_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} m_x(F_i) = 0; \\ M_y = \sum_{i=1}^{n} m_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} m_y(F_i) = 0. \end{cases} \qquad (2.19).$$

3. *Hệ lực đồng qui trong không gian.*

Xét hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ trong không gian cùng đồng qui với nhau tại O như hình 2.9. Các phương trình cân bằng về moment tự thỏa mãn, còn lại ba phương trình cân bằng hình chiếu lên ba trục tọa độ vuông góc.



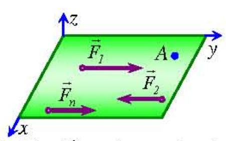
Hình 2.9: Cân bằng của hệ lực đồng qui trong không gian.

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} X\left(F_i\right) = 0; \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} Y\left(F_i\right) = 0; \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = \sum_{i=1}^{n} Z\left(F_i\right) = 0. \end{cases} \quad (2.20).$$

4. *Hệ lực phẳng song song.*

Xét hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ thuộc cùng trong mặt phẳng (xy) và song song trục y. Còn lại hai phương trình cân bằng dưới hai dạng.

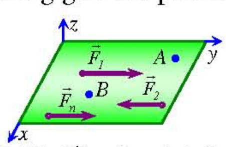
Dạng 1: Một phương trình cân bằng hình chiếu lên trục y và một phương trình cân bằng moment đối với điểm A bất kỳ (hình 2.10).



Hình 2.10: Cân bằng dạng một của hệ lực phẳng song song.

$$\begin{cases} R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} Y\left(F_i\right) = 0; \\ M_A = \sum_{i=1}^{n} m_{i,A} = \sum_{i=1}^{n} m_A\left(F_i\right) = 0. \end{cases} \quad (2.21a).$$

Dạng 2: Hai phương trình cân bằng moment đối với hai điểm A, B, phương nối hai điểm A, B không vuông góc với phương của lực (hình 2.11).

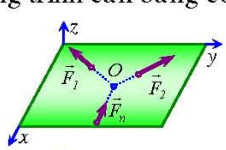


Hình 2.11: Cân bằng dạng hai của hệ lực phẳng song song.

$$\begin{cases} M_A = \sum_{i=1}^{n} m_{i,A} = \sum_{i=1}^{n} m_A\left(F_i\right) = 0; \\ M_B = \sum_{i=1}^{n} m_{i,B} = \sum_{i=1}^{n} m_B\left(F_i\right) = 0. \end{cases} \quad \left(\overline{AB // y}\right) \quad (2.22b).$$

5. *Hệ lực phẳng đồng qui.*

Xét hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ thuộc cùng trong mặt phẳng (xy) và đồng qui tại O (hình 2.12). Số phương trình cân bằng còn lại hai, chiếu lên hai trục vuông góc trong mặt phẳng chứa lực.



Hình 2.12: Cân bằng của hệ lực phẳng đồng qui.

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = \sum_{i=1}^{n} X\left(F_i\right) = 0; \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = \sum_{i=1}^{n} Y\left(F_i\right) = 0. \end{cases} \quad (2.23).$$

Lưu ý: Việc khảo sát hệ lực, phân loại hệ lực rất là cần thiết vì khi phân loại đúng giúp chúng ta lập được số phương trình cân bằng cần đủ cho hệ lực, tránh được những trường hợp thiết lập thừa hoặc thiếu.

IV. Bài toán tĩnh học.

Bài toán tĩnh học là bài toán khảo sát điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên một điểm, một vật hay một hệ vật, từ sự khảo sát đó giải quyết các yêu cầu của bài toán, bao gồm.

- Xác định phản lực liên kết tác dụng lên vật khảo sát.

- Xác định điều kiện cân bằng của vật khảo sát như xác định trị số của lực chủ động hoặc vị trí cân bằng của vật.

1. Các bước giải một bài toán tĩnh học.

Bước 1: Chọn vật khảo sát.

Căn cứ yêu cầu của bài toán mà ta xác định vật khảo sát (điểm, vật rắn, hệ vật).

Bước 2: Đặt lực tác dụng lên vật khảo sát.

Đặt các lực chủ động, loại bỏ liên kết lên vật khảo sát đặt vào các phản lực liên kết tương ứng. Hệ gồm các lực chủ động $\left(\vec{F}_i\right)$ và phản lực liên kết $\left(\vec{N}_k\right)$ cân bằng: $\left(\vec{F}_i,\ \vec{N}_k\right) \sim 0$.

Bước 3: Thiết lập phương trình cân bằng.

Lập hệ phương trình cân bằng của hệ lực $\left(\vec{F}_i,\ \vec{N}_k\right)$ được xác định trong được bước 2.

Bước 4: Giải phương trình.

Giải hệ phương trình cân bằng để xác định các yêu cầu đề ra.

2. Bài toán cân bằng của đòn phẳng và vật lật.

a- Bài toán đòn phẳng.

Đòn phẳng là một vật rắn quay được quanh một trục z cố định, chịu tác dụng của hệ lực chủ động $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ nằm trong mặt phẳng (xy) vuông góc với trục quay của đòn (hình 2.13).

Bài toán đòn phẳng là tìm điều kiện đối với hệ lực chủ động để cho đòn cân bằng.

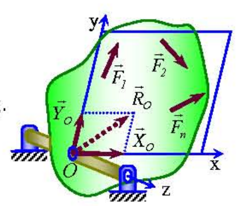
Phản lực liên kết tại trục quay $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ nằm trong mặt phẳng (xy).

Khi đòn cân bằng ta có $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{X}_O, \vec{Y}_O\right) \sim 0$; Viết các phương trình cân bằng cho hệ.

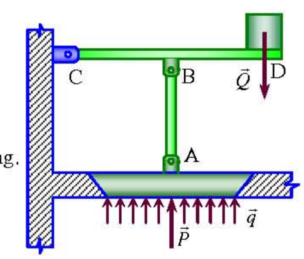
$$\Sigma X = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x} + X_O = 0;\ \Sigma Y = \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} + Y_O = 0;\ \Sigma m_O = \sum_{i=1}^{n} m_{i,O} = \sum_{i=1}^{n} m_O\left(F_i\right) = 0.$$

Các phản lực $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ phát sinh tương ứng để làm cho hai phương trình đầu luôn thỏa mãn. Do đó để đòn cân bằng thì các lực chủ động $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ phải thỏa mãn phương trình thứ ba.

Vậy: Điều kiện cần và đủ để đòn phẳng cân bằng là tổng moment của các lực chủ động lấy đối với trục quay triệt tiêu.



Hình 2.13: Đòn phẳng.



Hình 2.14: Ứng dụng của đòn phẳng.

Hình 2.14 là một ứng dụng của đòn phẳng. Van an toàn A được nối vào đòn CD tại B. Nếu áp suất an toàn và kích thước đường kính van, các tay đòn BC, BD đã cho, ta cần thiết kế trọng lượng của vật nặng Q cần thiết để khóa van.

b- Bài toán vật lật.

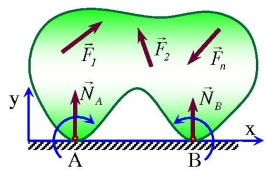
Vật lật là vật rắn quay được quanh nhiều trục cố định. Để đơn giản, ta xét trường hợp hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ tác dụng lên vật (hình 2.15). Với những điều kiện cụ thể, hệ lực chủ động có thể tạo ra sự mất liên kết tại một trong hai điểm A hoặc B. Phản lực liên kết lúc này tại nơi liên kết bị mất sẽ bằng không, khi đó vật sẽ mất cân bằng và sẽ trở thành một đòn phẳng. Bài toán vật lật là tìm điều kiện đối với hệ lực chủ động để không xảy ra mất liên kết quanh A và B. Điều kiện để vật không lật quanh A là nó vẫn còn cân bằng và liên kết tại B vẫn còn hoạt động $\left(\vec{N}_B \geq 0\right)$:

$$\begin{cases} m_A\left(\vec{N}_B\right) \geq 0 \\ \Sigma m_A\left(\vec{F}_i\right) = m_A\left(\vec{N}_B\right) + \Sigma m_A^{lật}\left(\vec{F}_j\right) - \Sigma m_A^{giữ}\left(\vec{F}_K\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Sigma m_A^{giữ}\left(\vec{F}_K\right) - \Sigma m_A^{lật}\left(\vec{F}_j\right) \geq 0 \qquad \Rightarrow \Sigma m_A^{giữ}\left(\vec{F}_K\right) \geq \Sigma m_A^{lật}\left(\vec{F}_j\right).$$

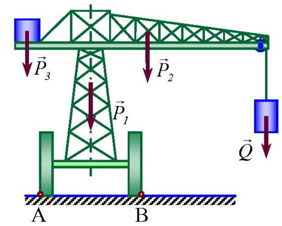
Các lực $\vec{F}_k$ giữ không cho vật lật quanh A có chiều quay như trên hình 2.15, phản lực $\vec{N}_B$ đóng vai trò gây lật. Khi chuẩn bị lật phản lực $\vec{N}_B$ bắt đầu bằng không. Tương tự khi xét lật quanh B.

Vậy: Điều kiện cần và đủ để vật không bị lật là tổng moment gây lật không lớn hơn tổng moment giữ lại.



Hình 2.15: Vật lật.

Hình 2.16: Ứng dụng của vật lật.



Hình 2.16 là một ứng dụng của vật lật. Cần trục có những khối lượng qui đổi $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ và đối trọng $\vec{P}_3$, các kích thước thiết kế đã cho. Cần khảo sát đối trọng $\vec{P}_3$ và vật nặng cần mang $\vec{Q}$ để cần trục không bị lật quanh A hoặc B.

3. Bài toán cân bằng của hệ vật.

Loại bài toán này để giải ta phải dùng phương pháp tách vật. Xét cân bằng của từng vật hay từng nhóm vật thuộc hệ bằng cách tách vật (nhóm vật) đó ra khỏi các liên kết với các vật (nhóm vật) khác tức là giải phóng liên kết. Nếu hệ có n vật, mỗi một vật tương ứng có một hệ phương trình cân bằng do đó cả hệ vật ta có n hệ phương trình cân bằng.

Để có lời giải đơn giản, ít bị sai sót và rút ngắn thời gian giải, cần lưu ý hai nguyên tắc sau:

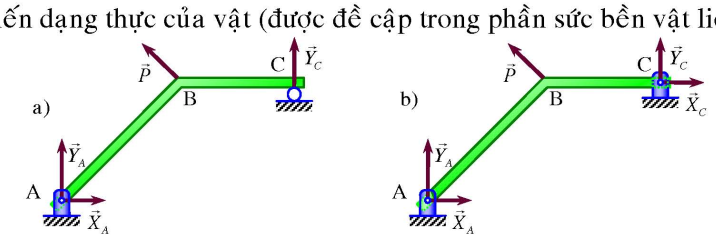
- Khi thiết lập phương trình cân bằng hình chiếu: nên chọn phương chiếu có nhiều ẩn số (phản lực liên kết) vuông góc nhất. Vì vậy, phương trình thiết lập có chứa ít ẩn số nhất.
- Khi thiết lập phương trình cân bằng moment: nên chọn điểm (trục) lấy moment có nhiều ẩn số (phản lực liên kết) đi qua nhất, lúc đó phương trình thiết lập có chứa ít ẩn số nhất.

4. Hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh.

Khi số phương trình cân bằng tĩnh học cần thiết (tùy thuộc vào dạng của hệ lực, như không gian, phẳng, đồng qui ... và số vật khảo sát có trong hệ) lớn hơn hoặc bằng số ẩn có trong hệ (giải được) thì được gọi là bài toán tĩnh định.

Trái lại, khi số phương trình cân bằng tĩnh học cần thiết ít hơn số ẩn của bài toán thì đó là bài toán siêu tĩnh. Muốn có đủ số phương trình để giải ta đưa thêm vào các phương trình tương thích biến dạng, diễn tả biến dạng thực của vật (được đề cập trong phần sức bền vật liệu).

Hình 2.17: Hệ tĩnh định và siêu tĩnh.



Trên hình 2.17, ta có hệ lực phẳng tác dụng lên thanh ABC, do đó thiết lập được tối đa là ba phương trình cân bằng tĩnh học. Ở hình 2.17a có ba ẩn số cần tìm $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_C$, bằng với số phương trình cân bằng nên đây là bài toán tĩnh định. Đối với hình 2.17b, số ẩn số của bài toán là bốn $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_C$ và $\vec{X}_C$, lớn hơn số phương trình cân bằng thiết lập được nên đây là bài toán siêu tĩnh.

V. Định lý ba lực cân bằng.

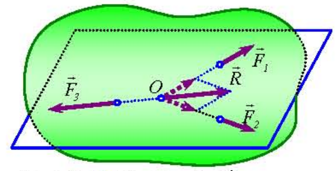
1. Định lý.

Vật rắn tự do cân bằng dưới tác dụng của ba lực không song song nằm trên cùng một mặt phẳng, thì đường tác dụng của chúng đồng qui với nhau tại một điểm.

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)\sim 0;\\ (\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)\text{: Đồng phẳng;}\\ (\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)\text{: Từng đôi một không song song nhau.}\end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)\text{: Đồng qui.}$$

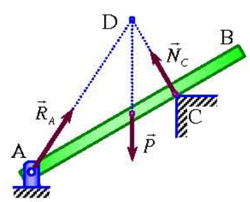
2. Chứng minh.

Dựng hai lực nào đó, chẳng hạn $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Theo điều kiện của định lý, các lực này đồng phẳng và không song song, nên đường tác dụng của hai lực này cắt nhau tại điểm O nào đó (hình 2.18). Trượt các lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ về điểm O rồi hợp lại được hợp lực $\vec{R}$ đặt tại O. Do đó, $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)\sim(\vec{R},\vec{F}_3)$. Nếu vật cân bằng thì theo tiên đề 1 $\vec{R}$ và $\vec{F}_3$ là cặp lực cân bằng nên chúng có cùng đường tác dụng, hay đường tác dụng của $\vec{F}_3$ đi qua điểm O. Vậy nên đường tác dụng của $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3)$ đồng qui với nhau tại một điểm.



Hình 2.18: Ba lực cân bằng.

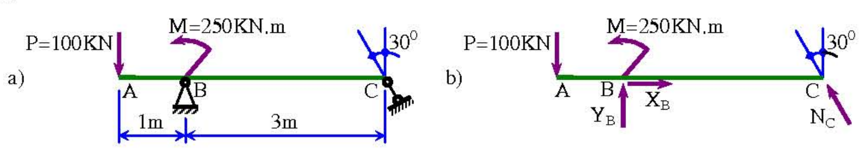
Trong một số trường hợp nhờ vận dụng định lý ba lực cân bằng làm cho việc giải bài toán đơn giản hơn. Chẳng hạn, trên hình 2.19 ta đã biết phương của $\vec{P}$ và $\vec{N}_C$ giao nhau tại D. Nhờ định lý ba lực cân bằng ta biết được tại A có phản lực liên kết $\vec{R}_A$ cũng phải đi qua D.



Hình 2.19: Ứng dụng định lý ba lực cân bằng.

Ví dụ 2.1.

Dầm AC được đỡ bằng gối cố định tại B và gối di động tại C, biết gối di động hợp với phương đứng một góc 30^0, chịu lực và kích thước như hình 2.20a. Xác định phản lực liên kết tại B và C.



Hình 2.20: Cho ví dụ 2.1.

Giải.

Xét dầm AC (hình 2.20b). Dễ dàng nhận thấy đây là hệ lực phẳng.

$\Sigma m_B = -M - P.1m - N_C \cos 30.3m = 0$.

$\Rightarrow N_C = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}m}(250KN.m + 100KN.m) = -\dfrac{700}{3\sqrt{3}}KN \approx -134{,}7KN$. N_C ngược chiều đã chọn.

$\Sigma m_C = -M - P.4m + Y_B.3m = 0$.

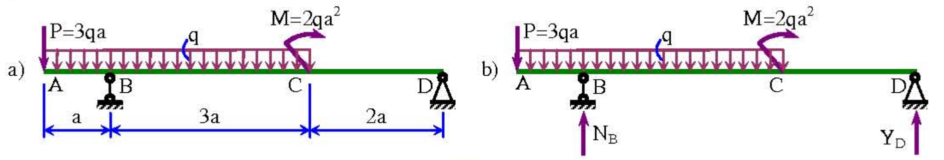
$\Rightarrow Y_B = \dfrac{1}{3m}(250KN.m + 100KN.4m) = \dfrac{650}{3}KN \approx 216{,}7KN$. Y_B cùng chiều đã chọn.

$\Sigma X = X_B - N_C \sin 30 = 0$.

$\Rightarrow X_B = \frac{1}{2} N_C = -\frac{350}{3\sqrt{3}} KN \approx -67{,}4KN$. X_B ngược chiều đã chọn.

Ví dụ 2.2.

Dầm AD liên kết, chịu lực và các kích thước như trên hình 2.21a. Xác định phản lực tại B và D theo q, a.



Hình 2.21: Cho ví dụ 2.2.

Giải.

Xét dầm AD (hình 2.21b). Dễ dàng nhận thấy đây là hệ lực phẳng song song.

$\Sigma m_B = M - P.a + q.4a.a - Y_D.5a = 0$.

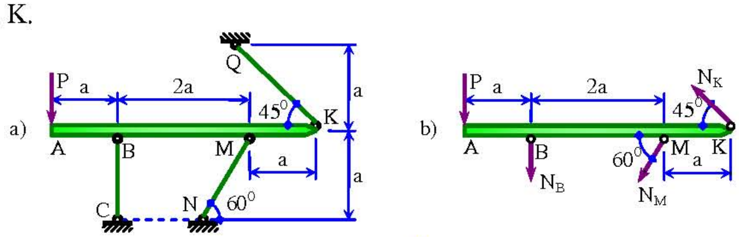
$$\Rightarrow Y_D = \frac{1}{5a}\left(2qa^2 - 3qa^2 + 4qa^2\right) = \frac{3}{5}qa.$$

$\Sigma m_D = M - P.6a - q.4a.4a + N_B.5a = 0$.

$$\Rightarrow N_B = \frac{1}{5a}\left(-2qa^2 + 18qa^2 + 16qa^2\right) = \frac{32}{5}qa.$$

Ví dụ 2.3.

Thanh cứng tuyệt đối AK được giằng bởi các thanh BC, MN và KQ. Thanh chịu một lực tập trung P đặt tại A theo phương thẳng đứng. Các kích thước như hình 2.22a. Xác định các phản lực tại B, M, K.



Hình 2.22: Cho ví dụ 2.3.

Giải.

Xét thanh cứng AK (hình 2.22b).

$$\sum X = -N_M \cos 60^0 - N_K \cos 45^0 = 0 \Rightarrow N_K = -\frac{1/2}{\sqrt{2}/2} N_M = -\frac{\sqrt{2}}{2} N_M \qquad (a).$$

$$\sum m_B = -P.a + N_M \sin 60^0.2a - N_K \sin 45^0.3a = 0 \Rightarrow -P + \sqrt{3}N_M - \frac{3\sqrt{2}}{2} N_K = 0 \qquad (b).$$

$$\sum m_M = -P.3a - N_B.2a - N_K \sin 45^0.a = 0 \Rightarrow -3P - 2N_B - \frac{\sqrt{2}}{2} N_K = 0 \qquad (c).$$

Thay N_K từ (a) vào (b):

$$-P + \sqrt{3}N_M - \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}N_M\right) = 0 \Rightarrow N_M = \frac{2}{2\sqrt{3}+3}P.$$ Thanh MN chịu kéo.

Thay N_M vào (a):

$$N_K = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{2\sqrt{3}+3}P = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3}P.$$ Thanh KQ chịu nén.

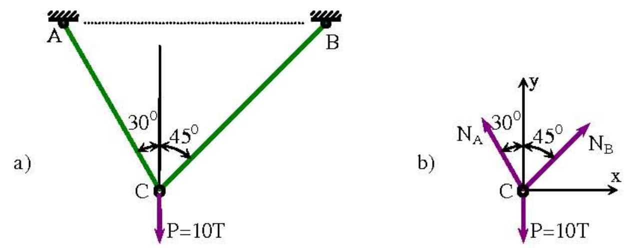
Thay N_K vào (c):

$$-3P-2N_B-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3}P\right)=0\Rightarrow N_B=-\frac{3\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}+3}P$$. Thanh BC chịu nén.

Ví dụ 2.4.

Cho hệ gồm hai thanh CA, CB liên kết và chịu lực như hình 2.23a. Xác định phản lực liên kết tại A và B.

Hình 2.23: Cho ví dụ 2.4



Giải.

Xét cân bằng của khớp C (hình 2.23b). Nhận thấy đây là hệ lực phẳng đồng qui.

$$\Sigma X=-N_A.\sin 30+N_B.\sin 45=0\Rightarrow N_A=\frac{\sqrt{2}/2}{1/2}N_B=\sqrt{2}N_B \qquad (d).$$

$$\Sigma Y=N_A.\cos 30+N_B.\cos 45-P=0\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}N_A+\frac{\sqrt{2}}{2}N_B=P \qquad (e).$$

Thay N_A từ (d) vào (e):

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}N_B+\frac{\sqrt{2}}{2}N_B=P\Rightarrow N_B=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}P=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}.10T\approx 5{,}18T.$$

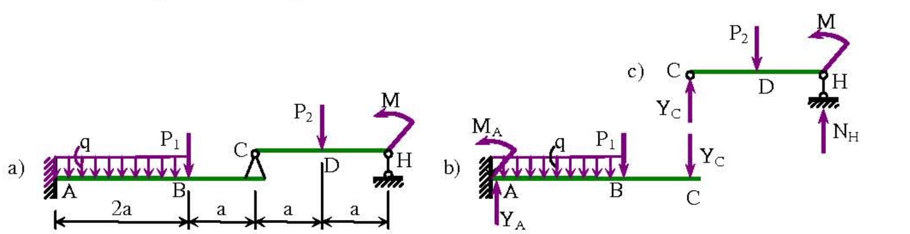
Thay N_B vào (d):

$$\Rightarrow N_A=\sqrt{2}N_B=\frac{2}{\sqrt{3}+1}P=\frac{2}{\sqrt{3}+1}10T\approx 7{,}32T.$$

Ví dụ 2.5.

Dầm phụ CH được đỡ trên dầm chính côngxôn AC tại C. Các kích thước, tải trọng, và liên kết như hình 2.24a. Xác định phản lực tại A, C, E.

Biết: $q=1{,}2KN/cm; P_1=50KN; P_2=80KN; M=100KN.m; a=1m$.



Hình 2.24: Cho ví dụ 2.5.

Giải.

Xét dầm phụ CH (hình 2.24c).

$$\Sigma m_C=-M+P_2.a-N_H.2a=0$$

$$\Rightarrow N_H=\frac{1}{2a}\left(-M+P_2.a\right)=\frac{1}{2m}\left(-100KN.m+80KN.m\right)=-10KN.$$ N_H ngược chiều đã chọn.

$$\Sigma m_H=-M-P_2.a+Y_C.2a=0\Rightarrow Y_C=\frac{1}{2a}\left(M+P_2.a\right)=\frac{1}{2m}\left(100KN.m+80KN.m\right)=90KN.$$

Xét dầm chính AC (hình 2.24b).

$$\Sigma m_A = -M_A + P_1.2a + Y_C.3a + q.2a.a = 0$$

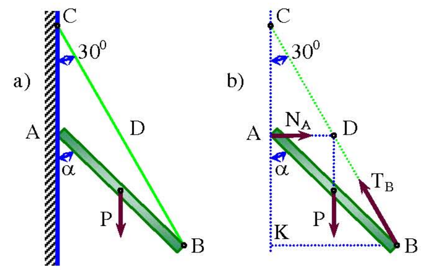
$$\Rightarrow M_A = P_1.2a + Y_C.3a + q.2a.a = 100KN.m + 270KN.m + 1,2.10^2 KN.m = 490KN.m .$$

$$\Sigma Y = Y_A - P_1 - Y_C - q.2a = 0 \Rightarrow Y_A = P_1 + Y_C + q.2a = 50KN + 90KN + 1,2.10^2.2KN = 380KN .$$

Ví dụ 2.6.

Thanh đồng chất AB có trọng lượng P, đầu A tựa vào tường thẳng đứng nhẵn, thanh được giữ cân bằng nhờ sợi dây BC hợp với phương thẳng đứng một góc 30^0 (hình 2.25a). Xác định góc nghiêng α của thanh và tường để có cân bằng.

Hình 2.25: Cho ví dụ 2.6.



Giải.

Xét thanh AB (hình 2.25b). Các phản lực liên kết N_A, T_B và tải trọng P trở thành hệ ba lực cân bằng nên chúng phải đồng qui với nhau tại một điểm chẳng hạn, điểm D trên hình 2.25b. Vì P đi qua trung điểm của $\overline{AB}$ nên để ý các đường trung bình trong tam giác ta có: $\overline{DC} = \overline{DB}$; $\overline{AC} = \overline{AK}$.

Trong tam giác AKB: $tg\alpha = \dfrac{\overline{KB}}{\overline{KA}}$ (f).

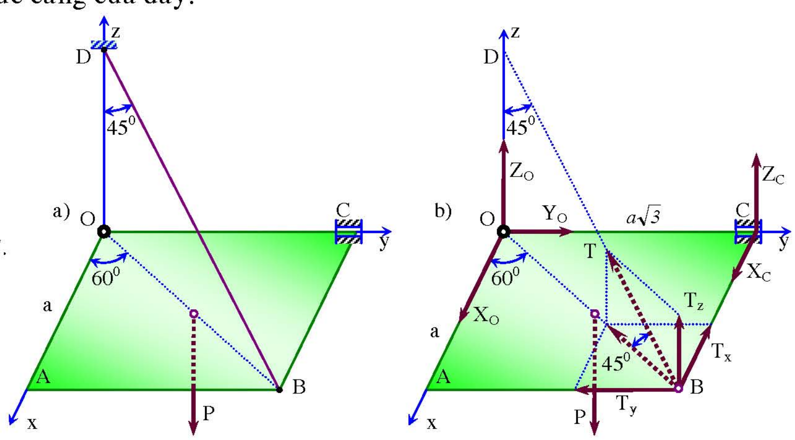
Trong tam giác CKB: $tg30^0 = \dfrac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = \dfrac{\overline{KB}}{2\overline{KA}} \Rightarrow 2tg30^0 = \dfrac{\overline{KB}}{\overline{AC}}$ (g).

So sánh (f) và (g) suy ra: $tg\alpha = 2tg30^0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2.7.

Tấm phẳng OABC hình chữ nhật đồng chất có trọng lượng P được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ khớp cầu tại O, khớp bản lề tại C (quay được quanh trục y) và dây BD. Biết cạnh OA có chiều dài bằng a, đường chéo BO hợp với cạnh AO một góc 60^0, dây BD nằm trong mặt phẳng thẳng đứng qua OB và nghiêng một góc 45^0 so với OD (hình 2.26a). Xác định phản lực tại O, C và sức căng của dây.

Hình 2.26: Cho ví dụ 2.7.



Giải.

Khảo sát cân bằng của tấm phẳng OABC (hình 2.26b).

Hệ lực tác dụng lên tấm cân bằng: $(\vec{P},\vec{T},\vec{Z}_B,\vec{X}_B,\vec{Z}_A,\vec{X}_A,\vec{Y}_A) \sim 0$.

Phân sức căng $\vec{T}$ thành ba thành phần dọc theo ba trục tọa độ vuông góc:

$T_x = T\cos 45^0 \cos 60^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}T$; $T_y = T\cos 45^0 \sin 60^0 = \frac{\sqrt{6}}{4}T$; $T_z = T\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}T$.

Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian sẽ là:

$$\sum X = X_O + X_C - \frac{\sqrt{2}}{4}T = 0; \qquad \text{(h)}.$$

$$\sum Y = Y_O - \frac{\sqrt{6}}{4}T = 0; \qquad \text{(k)}.$$

$$\sum Z = Z_O + Z_C + \frac{\sqrt{2}}{2}T - P = 0; \qquad \text{(l)}.$$

$$\sum m_x = -Z_C.a\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}T.a\sqrt{3} + P.\frac{a\sqrt{3}}{2} = 0; \qquad \text{(m)}.$$

$$\sum m_y = \frac{\sqrt{2}}{2}T.a - P.\frac{a}{2} = 0; \qquad \text{(n)}.$$

$$\sum m_z = X_C.a\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}T.a\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{4}T.a = 0. \qquad \text{(o)}.$$

Từ (o) $\Rightarrow X_C = 0$; Từ (n) $\Rightarrow T = \frac{\sqrt{2}}{2}P$; Từ (m) $\Rightarrow Z_C = 0$;

Từ (l) $\Rightarrow Z_O = \frac{1}{2}P$; Từ (k) $\Rightarrow Y_O = \frac{\sqrt{3}}{4}P$; Từ (h) $\Rightarrow X_O = \frac{1}{4}P$.

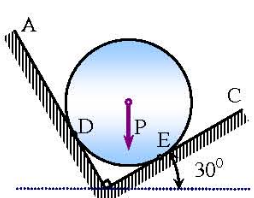
BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Trên hai mặt phẳng nghiêng nhẵn AB và BC vuông góc với nhau đặt một quả cầu đồng chất có trọng lương $60KN$. Xác định áp lực của quả cầu lên các mặt phẳng, biết mặt phẳng BC hợp với phương ngang một góc 60^0 (hình 2.27).

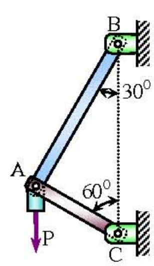
Đáp số: $N_D = 52KN$; $N_E = 30KN$.

2.2. Hai thanh AB và AC nối với nhau và nối vào tường bằng các bản lề (hình 2.28). Tại khớp C tác dụng lực thẳng đứng $P = 100KN$. Xác định phản lực của các thanh lên khớp C.

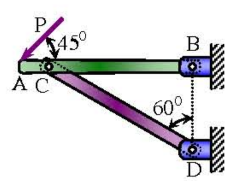
Đáp số: $N_B = 86,6KN$; $N_E = 50KN$.



Hình 2.27.



Hình 2.28.



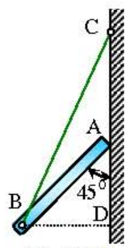
Hình 2.29.

2.3. Hai thanh AB và CD có cùng chiều dài nối với nhau tại C và nối vào tường tại B, D bằng các bản lề. Trọng lượng của các thanh bằng nhau $Q = 40KN$. Tại đầu A tác dụng lực $P = 100KN$ hợp với phương ngang một góc 45^0 (hình 2.29). Xác định phản lực tại B, C và D.

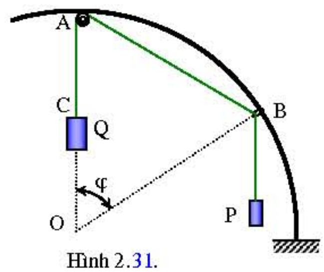
Đáp số: $X_B = 287KN$; $Y_B = 6KN$; $X_D = 216KN$; $Y_D = 145KN$; $X_C = \pm 216KN$; $Y_C = \pm 105KN$.

2.4. Thanh đồng chất AB có chiều dài $2a$ và trọng lượng P, đầu A tựa vào tường thẳng đứng nhẵn và hợp với tường một góc 45^0, thanh được giữ cân bằng nhờ sợi dây BC (hình 2.30). Xác định vị trí của điểm C để có cân bằng.

Đáp số: $CA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.



Hình 2.30.



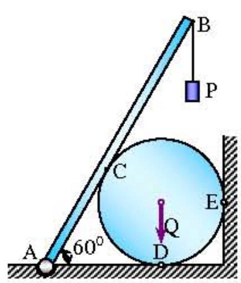
Hình 2.31.

2.5. Vòng nhẫn B trượt không ma sát trên dây thép uốn thành cung tròn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Treo vào vòng B vật nặng P và buộc vào đó sợi dây BAC vắt qua ròng rọc cố định A ở vị trí cao nhất của cung thép, tại C treo vào vật nặng Q (hình 2.31). Bỏ qua trọng lượng của vòng B và ma sát của ròng rọc, hãy xác định góc ở tâm φ của cung AB và chỉ rõ điều kiện cân bằng.

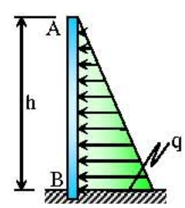
Đáp số: $sin\frac{\varphi_1}{2} = \frac{Q}{2P}$ khi $Q > 2P$; $\varphi_2 = \pi$ đúng với mọi Q, P.

2.6. Thanh AB có chiều dài $AB = 50cm$, trọng lượng $F = 200KN$ chịu liên kết tại A bằng bản lề, đầu B treo vật nặng $P = 50KN$ và tựa trên quả cầu nhẵn tại C. Quả cầu có trọng lượng $Q = 100KN$ bán kính $r = 20cm$ (hình 2.32). Tìm phản lực tại A, E, D và lực ép của thanh lên quả cầu.

Đáp số: $X_A = 93,75KN$; $Y_A = 195,9KN$; $N_E = 93,75KN$; $N_D = 154,1KN$; $N_C = 108,2KN$.



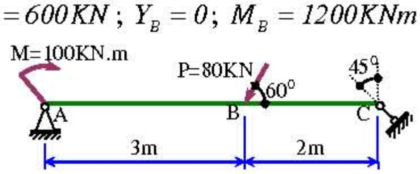
Hình 2.32.



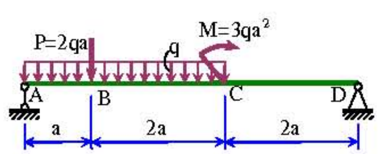
Hình 2.33.

2.7. Cột AB có chiều cao $h = 6m$. Đầu B được ngàm cố định xuống dòng sông. Áp lực của nước lên cột phân bố theo qui luật tam giác. Tại chân cột áp lực của nước $q = 2KN/cm$ (hình 2.33). Xác định phản lực tại ngàm B.

Đáp số: $X_B = 600KN$; $Y_B = 0$; $M_B = 1200KNm$.

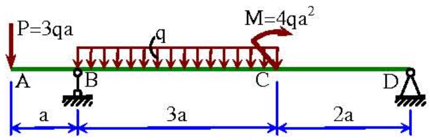


Hình 2.34.

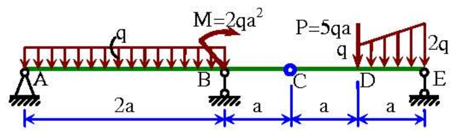


Hình 2.35.

2.8 ÷ 2.9. Xác định phản lực liên kết tác dụng lên dầm cho trên hình 2.34 và 2.35.



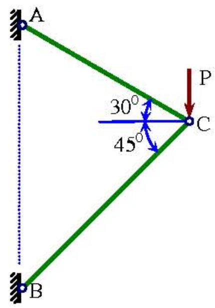
Hình 2.36.



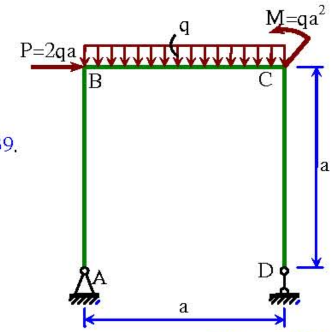
Hình 2.37.

2.10 ÷ 2.11. Xác định phản lực liên kết tác dụng lên dầm cho trên hình 2.36 và 2.37.

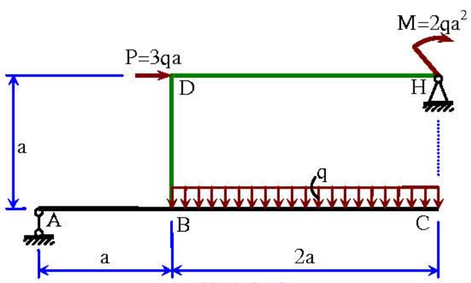
Hình 2.38.



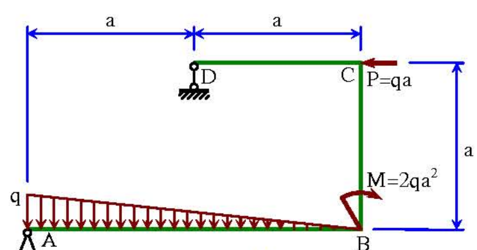
Hình 2.39.



2.12 ÷ 2.13. Xác định phản lực liên kết tác dụng lên dầm cho trên hình 2.38 và 2.39.

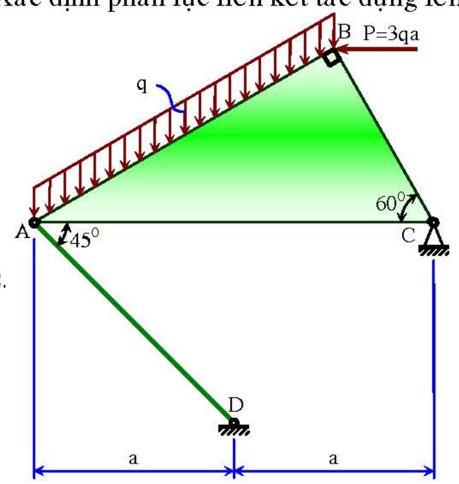


Hình 2.40.

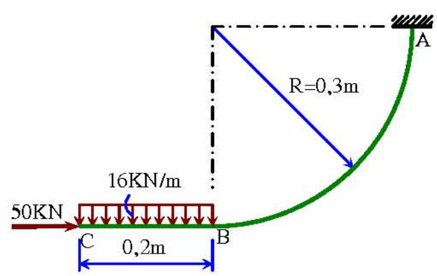


Hình 2.41.

2.14 ÷ 2.15. Xác định phản lực liên kết tác dụng lên dầm cho trên hình 2.40 và 2.41.



Hình 2.42.



Hình 2.43.

2.16 ÷ 2.17. Xác định phản lực liên kết tác dụng lên dầm cho trên hình 2.42 và 2.43.