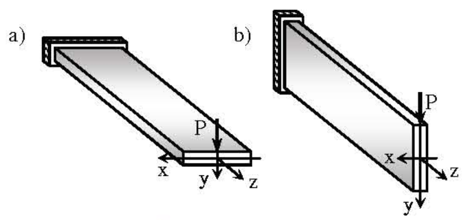
CHƯƠNG 7:
ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

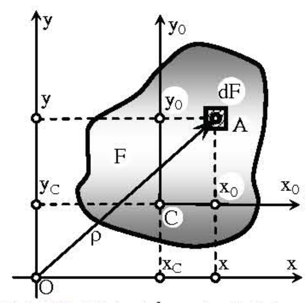
I. Khái niệm chung.

Trong chương thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ta thấy ứng suất trong thanh phụ thuộc vào diện tích F của tiết diện mặt cắt ngang. Tuy nhiên, đối với các trường hợp thanh chịu xoắn, hoặc chịu uốn thì ứng suất trong thanh không những phụ thuộc vào diện tích mặt cắt ngang F mà còn phụ thuộc vào hình dáng của mặt cắt, vị trí tác dụng của ngoại lực đối với mặt cắt.

Xét ví dụ như trên hình 7.1, cùng một thanh chịu tác dụng một lực như nhau. Bằng trực giác ta thấy trong trường hợp hình 7.1a tiết diện được đặt nằm bị uốn nhiều hơn trường hợp hình 7.1b khi tiết diện đặt đứng. Mặc dù trong cả hai trường hợp tiết diện mặt cắt ngang như nhau, nhưng phương tác dụng của ngoại lực đối với mặt cắt ngang thay đổi đã ảnh hưởng đến khả năng chịu lực của thanh, tức là ảnh hưởng đến ứng suất phát sinh trong thanh. Trong chương này sẽ xét đến các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang liên quan đến khả năng chịu lực của thanh.



Hình 7.1: Thanh chịu uốn khi đặc trưng hình học khác nhau.



Hình 7.2: Hình phẳng và các hệ toạ độ.

Xét hình phẳng F, lấy một vi phân diện tích dF có tọa độ $A(x,y)$ và hệ trục tọa độ như trên hình 7.2 ta có các định nghĩa sau:

II. Diện tích, mômen tĩnh, trọng tâm.

Diện tích của hình phẳng F:

$$F = \int_F dF \qquad (7.1).$$

Mômen tĩnh của hình phẳng F đối với trục x và trục y là biểu thức tích phân sau:

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF \qquad (7.2).$$

Mômen tĩnh có thứ nguyên là: $[chiều\,dài]^3$.

Mômen tĩnh có thể có giá trị âm, dương hặc bằng không.

Trục trung tâm: là trục có mômen tĩnh của diện tích F đối với trục đó bằng không. Nếu x là trục trung tâm thì $S_x = 0$.

Trọng tâm của hình phẳng: là giao điểm của hai trục trung tâm của hình phẳng đó.

Như vậy, mômen tĩnh của hình phẳng đối với mọi trục đi qua trọng tâm đều bằng không.

Định lý Varignon: *Mômen của hệ lực đối với một trục bằng mômen của hợp lực đối với trục đó.*

Giả sử $C(x_C, y_C)$ là trọng tâm mặt cắt, qua C dựng hệ trục x_0, y_0 song song với hệ trục x, y ban đầu (hình 7.2), ta có mối liên hệ của tọa độ điểm A trong hai hệ trục tọa độ như sau:

$x = x_C + x_0$; $y = y_C + y_0$.

Thay vào (7.2) ta được:

$$S_x = \int_F y dF = \int_F (y_C + y_0) dF = y_C \int_F dF + S_{x0};$$

$$S_y = \int_F x dF = \int_F (x_C + x_0) dF = x_C \int_F dF + S_{y0}.$$

Vì x_0 và y_0 là các trục trung tâm nên $S_{x0} = S_{y0} = 0$, do đó:

$$S_x = y_C F; \qquad S_y = x_C F.$$

Nếu hình phẳng bao gồm nhiều hình phẳng ghép lại thì ta cũng có:

$$S_x = \sum y_{C_i} F_i; \; S_y = \sum x_{C_i} F_i.$$

Với x_{Ci}, y_{Ci} và F_i là tọa độ của trọng tâm và diện tích của hình phẳng thứ i.

Do đó, ta có công thức xác định mômen tĩnh của hình phẳng đối với một trục khi biết tọa độ trọng tâm và diện tích của hình phẳng hoặc biết tọa độ các trọng tâm và diện tích của nhiều hình phẳng ghép lại:

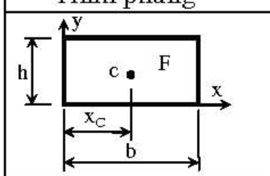
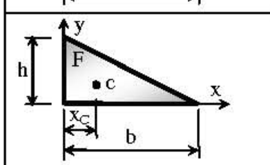
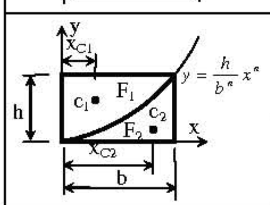
$$S_x = \int_F y dF = y_C F = \sum y_{C_i} F_i; \qquad S_y = \int_F x dF = x_C F = \sum x_{C_i} F_i \qquad (7.3).$$

Từ (7.3) ta có thể tìm được trọng tâm của hình phẳng:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum x_{C_i} F_i}{\sum F_i}; \; y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum y_{C_i} F_i}{\sum F_i} \qquad (7.4).$$

Diện tích và tọa độ trọng tâm của một số hình phẳng đơn giản được cho trên bảng 7.1.

Bảng 7.1

<table>
<tr><th>Hình phẳng</th><th>Diện tích F</th><th>Trọng tâm x_C</th></tr>
<tr><td></td><td>$F = hb$</td><td>$x_C = \frac{1}{2} b$</td></tr>
<tr><td></td><td>$F = \frac{1}{2} hb$</td><td>$x_C = \frac{1}{3} b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$F_1 = \frac{n}{n+1} hb$</td><td>$x_{C_1} = \frac{n+1}{2(n+2)} b$</td></tr>
<tr><td>$F_2 = \frac{1}{n+1} hb$</td><td>$x_{C_2} = \frac{n+1}{n+2} b$</td></tr>
</table>

III. Các mômen quán tính.

1. Mômen quán tính.

Mômen quán tính của hình phẳng F đối với trục x và trục y là biểu thức tích phân sau:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF \qquad (7.5).$$

2. Mômen quán tính ly tâm.

Mômen quán tính ly tâm của hình phẳng F đối với hệ trục tọa độ (x, y) là biểu thức tích phân sau:

$$J_{xy} = \int_F xy dF \qquad (7.6).$$

3. Mômen quán tính cực.

Mômen quán tính cực của hình phẳng F đối với điểm cực O là biểu thức tích phân sau:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = J_x + J_y \quad (7.7).$$

Thứ nguyên của các mômen quán tính: $[chiều\, dài]^4$.

Theo hình 7.2 $\rho^2 = x^2 + y^2$ do đó:

$$J_\rho = J_x + J_y \quad (7.8).$$

Các mômen quán tính J_x, J_y và mômen quán tính cực J_ρ là đại lương không âm.

Mômen quán tính ly tâm J_{xy} có thể dương, âm, hoặc bằng không.

Hệ trục quán tính chính: là hệ trục có mômen quán tính ly tâm bằng không. Nếu (x, y) là hệ trục quán tính chính thì $J_{xy} = 0$.

Một trục đối xứng của hình phẳng hợp với một trục bất kỳ nào đó vuông góc với nó tạo thành hệ trục quán tính chính của hình phẳng đó.

Hệ trục quán tính chính trung tâm: là hệ trục quán tính chính có gốc tại trọng tâm hình phẳng. Nếu (x, y) là hệ trục quán tính chính trung tâm thì $S_x = 0$, $S_y = 0$ và $J_{xy} = 0$.

Mômen quán tính của hình phẳng đối với hệ trục quán tính chính trung tâm được gọi là mômen quán tính chính trung tâm của hình phẳng. Trong sức bền vật liệu, khi tính toán ứng suất, biến dạng của thanh, người ta thường tiến hành trong hệ trục tọa độ gồm trục z của thanh và hai trục chính trung tâm của tiết diện mặt cắt của thanh.

IV. Mômen quán tính của một số mặt cắt đơn giản.

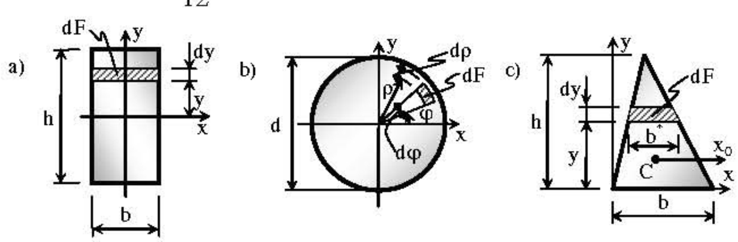
1. Mặt cắt chữ nhật.

Cho hình chữ nhật có kích thước $b \times h$ (hình 7.3a). Cần tìm các mômen quán tính chính trung tâm của nó.

Hình phẳng có hai trục đối xứng x và y nên (x, y) là hệ trục quán tính chính trung tâm. Để xác định mômen quán tính đối với trục x, ta lấy diện tích vi phân dF là một giải có bề rộng b, bề dày dy, khoảng cách đến trục x là y. Ta có: $dF = b \times dy$.

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = b \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}, \text{ Tương tự:}$$

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (7.9).$$



Hình 7.3: Mô men quán tính của một số mặt cắt đơn giản.

2. Mặt cắt tròn.

Cho hình tròn đường kính d (hình 7.3b). Cần tìm mômen quán tính cực đối với gốc tọa độ O và các mô men quán tính chính trung tâm của nó.

Để đơn giản, ta tính mômen quán tính cực trước, chọn diện tích vi phân là một hình giới hạn bởi hai tia φ, $\varphi + d\varphi$ và hai đường tròn bán kính ρ, $\rho + d\rho$ như trên hình 7.3. Ta có: $dF = \rho d\varphi \times d\rho$.

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{d/2}\int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\varphi = 2\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{d/2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \qquad (7.10).$$

Vì tính đối xứng nên: $J_x = J_y$, mặt khác theo (7.8): $J_\rho = J_x + J_y$ do đó, ta có:

$$J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4 \qquad (7.11).$$

3. Mặt cắt tam giác.

Cho hình tam giác cạnh đáy bằng b chiều cao h. Cần tìm mômen quán tính của tam giác đối với trục qua cạnh đáy và trọng tâm của tam giác (hình 7.3c).

Ta có: $b^* = \frac{h-y}{h}b$; $dF = b^* \times dy = \frac{h-y}{h}bdy$. Do đó:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h}bdy = \frac{b}{h}\left.\left(\frac{y^3}{3}h - \frac{y^4}{4}\right)\right|_0^h = \frac{bh^3}{12} \qquad (7.12).$$

$$J_{x_0} = \int_F y^2 dF = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \frac{h-y}{h}bdy = \frac{b}{h}\left.\left(\frac{y^3}{3}h - \frac{y^4}{4}\right)\right|_{-h/3}^{2h/3} = \frac{bh^3}{36} \qquad (7.13).$$

V. Mômen quán tính khi chuyển trục song song.

Cho diện tích F, trong hệ trục tọa độ (x,y) có các đặc trưng hình học là J_x, J_y, J_{xy}. Xác định J_u, J_v, J_{uv} của diện tích F trong hệ trục mới (u,v) song song với hệ trục ban đầu. Theo hình 7.4 ta có các liên hệ: $u = x + b$; $v = y + a$.

Từ các địng nghĩa về các mômen quán tính:

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y+a)^2 dF;$$

$$J_v = \int_F u^2 dF = \int_F (x+b)^2 dF;$$

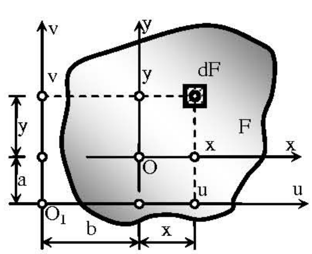
$$J_{uv} = \int_F uvdF = \int_F (x+b)(y+a)dF.$$

Sau khi khai triển và rút gọn ta được:

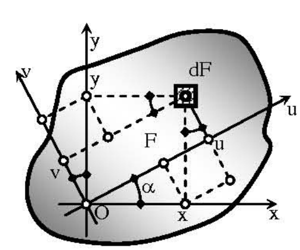
$$\begin{aligned} J_u &= J_x + 2aS_x + a^2F; \\ J_v &= J_y + 2bS_y + b^2F; \qquad (7.14). \\ J_{uv} &= J_{xy} + bS_x + aS_y + abF. \end{aligned}$$

Trường hợp đặc biệt, nếu hệ trục củ (x,y) là trung tâm (gốc tọa độ O tại trọng tâm mặt cắt), khi đó $S_x = S_y = 0$:

$$\begin{aligned} J_u &= J_x + a^2F; \\ J_v &= J_y + b^2F; \qquad (7.15). \\ J_{uv} &= J_{xy} + abF. \end{aligned}$$



Hình 7.4: Mômen quán tính khi dời trục song song.



Hình 7.5: Mômen quán tính khi xoay trục.

VI. Mômen quán tính khi xoay trục.

Xét hệ trục (u,v) xoay từ hệ trục (x,y) ban đầu một góc α, xác định J_u, J_v, J_{uv} trong hệ trục mới theo J_x, J_y, J_{xy} (hình 7.5), chiều dương của góc α là quay từ trục x theo chiều ngược kim đồng hồ. Ta có liên hệ tọa độ của vi phân diện tích dF trong hai hệ trục:

$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha$; $v = y\cos\alpha - x\sin\alpha$

Thay vào công thức tính J_u, J_v và J_{uv} ta có:

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dF;$$

$$J_v = \int_F u^2 dF = \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 dF;$$

$$J_{uv} = \int_F uv dF = \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) dF.$$

Sau khi khai triển và rút gọn:

$$J_u = J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha;$$

$$J_v = J_x\sin^2\alpha + J_y\cos^2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha;$$

$$J_{uv} = (J_x - J_y)\sin\alpha\cos\alpha + J_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Để ý các công thức lượng giác:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};\ 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha;\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

Thay vào và biến đổi rút gọn ta được:

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha;$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha; \qquad (7.16).$$

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} + \sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha.$$

Cộng hai phương trình đầu trong (7.17) ta có bất biến của mômen quán tính:

$$J_u + J_v = J_x + J_y = const \qquad (7.17).$$

Các công thức trên tương tự như công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng. Vì vậy, phần xác định phương chính, ứng suất chính của trạng thái ưng suất có thể áp dụng để xác định hệ trục chính và các mômen quán tính chính khi xoay trục.

Vị trí của trục quán tính chính được xác định từ phương trình:

$$tg2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \qquad (7.18).$$

Từ đây ta nhận được hai trục quán tính chính và chúng vuông góc nhau.

Mômen quán tính chính cũng là trị số cực trị của mômen quán tính khi xoay trục:

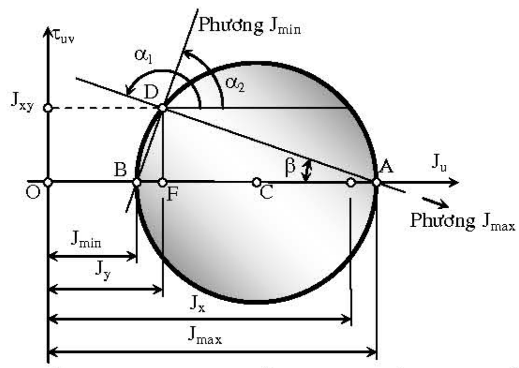
$$J_{\substack{max\\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \qquad (7.19).$$

Từ các quan hệ (7.16) và (7.18), ta cũng có thể xác định J_u và J_{uv} bằng đồ thị trong hệ trục (J_u, J_{uv}) gọi là vòng tròn Mohr quán tính tương tự như vòng tròn Mohr ứng suất (hình 7.6). Điểm khác biệt là vòng tròn Mohr ứng suất có thể cắt qua trục tung nhưng vòng tròn Mohr quán tính chỉ nằm phần bên phải của trục tung vì các mômen quán tính nói chung và do đó, mômen quán tính J_u luôn luôn dương.

Từ hình 7.6, ta có thể xác định vị trí của các trục có mômen quán tính chính:

$$tg\alpha_1 = tg(\pi - \beta) = -tg\beta = -\frac{J_{xy}}{J_{max} - J_y} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{max}} \qquad (7.20).$$

$$tg\alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{min}} \qquad (7.21).$$



Hình 7.6: Vòng tròn Mohr quán tính.

Mômen quán tính của một hình phẳng đối với một trục bất kỳ có thể được biểu diễn dưới dạng tích số của diện tích hình này với bình phương của một đại lượng gọi là bán kính quán tính:

$$r_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}\ ;\ r_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \qquad (7.22).$$

Bán kính quán tính đối với các trục chính được gọi là bán kính quán tính chính.

Khi xoay trục ta có thể thấy tổng bình phương các bán kính quán tính trên hai phương vuông góc nhau bất kỳ là hằng số:

$$r_u^2 + r_v^2 = r_x^2 + r_y^2 = \frac{J_x + J_y}{F} = conts \qquad (7.23).$$

Ví dụ 7.1.

Xác định tọa độ của trọng tâm của mặt cắt cho trên hình 7.7a.

Giải.

Gắn vào mặt cắt hệ trục tọa độ (x, y) như hình 7.7b. Do mặt cắt đối xứng qua trục y nên trọng tâm C nằm trên trục này ($x_C = 0$).

Xét vi phân diện tích dF được giới hạn bởi các tia như hình 7.7b, ta có:

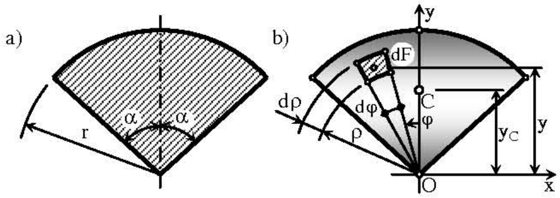
$dF = \rho.d\varphi.d\rho;\ y = \rho\cos\varphi$.

$$\Rightarrow S_x = \int_F ydF = 2\int_0^r\int_0^\alpha \rho\cos\varphi\rho d\rho d\varphi = 2\int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\alpha \cos\varphi d\varphi = \frac{2}{3}r^3\sin\alpha\ .$$

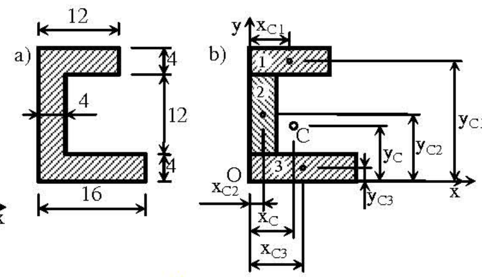
$F = \alpha r^2$.

Do đó, theo (7.4) tọa độ của trong tâm là:

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{2}{3}\frac{r^3\sin\alpha}{r^2\alpha} = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}.$$



Hình 7.7: Cho ví dụ 7.1.



Hình 7.8: Cho ví dụ 7.2.

Ví dụ 7.2.

Xác định tọa độ của trọng tâm của mặt cắt cho trên hình 7.8a.

Giải.

Ta chia mặt cắt trên hình 7.8a thành ba mặt cắt và gắn hệ trục tọa độ (x,y) như hình 7.8b. Theo (7.4) ta có:

$$x_C = \frac{x_{C1}F_1 + x_{C2}F_2 + x_{C3}F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{6.12.4 + 2.4.12 + 8.16.4}{12.4 + 4.12 + 16.4} = 5{,}6\,.$$

$$y_C = \frac{y_{C1}F_1 + y_{C2}F_2 + y_{C3}F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{18.12.4 + 10.4.12 + 2.16.4}{12.4 + 4.12 + 16.4} = 9{,}2\,.$$

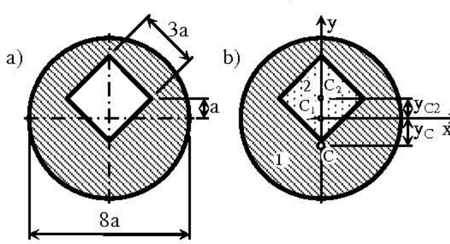
Ví dụ 7.3.

Xác định tọa độ của trọng tâm của mặt cắt cho trên hình 7.9a.

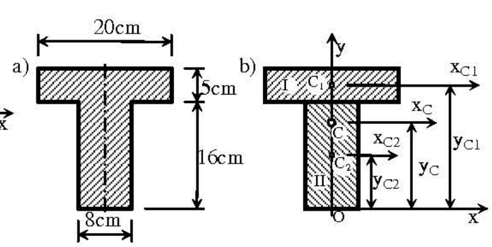
Giải.

Đối với những mặt cắt dạng rỗng hay bị khoét lõm, thì vẫn sử dụng công thức (7.4) nhưng phần diện tích rỗng ta xem như diện tích âm. Chia mặt cắt hình 7.9a làm hai phần một phần là diện tích hình tròn không bị khoét, phần còn lại là diện tích hình vuông có giá trị âm. Gắn vào hệ trục tọa độ (x,y) như hình 7.9b. Do trục x đi qua trong tâm của hình tròn nên $y_{C1} = 0$. Ta có:

$$y_C = \frac{y_{C1}F_1 - y_{C2}F_2}{F_1 - F_2} = \frac{0.\dfrac{\pi(8a)^2}{4} - a(3a)^2}{\dfrac{\pi(8a)^2}{4} - (3a)^2} = -\frac{9a^3}{16\pi a^2 - 9a^2} = -\frac{9}{16\pi - 9}a \approx -2{,}2a\,.$$



Hình 7.9: Cho ví dụ 7.3.



Hình 7.10: Cho ví dụ 7.4.

Ví dụ 7.4.

Xác định mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt như hình 7.10a.

Giải.

Ta chia mặt cắt trên hình 7.10a thành hai hình chữ nhật như hình 7.10b. và chọn hệ trục tọa độ ban đầu là (x,y). Vì trục y là trục đối xứng nên $x_C = 0$.

$$y_C = \frac{y_{C1}F^{I} + y_{C2}F^{II}}{F^{I} + F^{II}} = \frac{18{,}5.20.5 + 8.8.16}{20.5 + 8.8.16} = 12{,}61cm\,.$$

Theo (7.9) và (7.15) ta có: $J_{xC} = J^{I}_{xC} + J^{II}_{xC}$. Trong đó:

$$J^{I}_{xC} = J^{I}_{xC1} + \overline{x_{C1}x_C}^2.F^I = \frac{20.5^3}{12} + (18,5 - 12,61)^2.20.5 = 367,75cm^4.$$

$$J^{II}_{xC} = J^{II}_{xC2} + \overline{x_{C2}x_C}^2.F^{II} = \frac{8.16^3}{12} + (12,61 - 8)^2.8.16 = 545,09cm^4.$$

Vậy:

$$J_{xC} = 367,75cm^4 + 545,09cm^4 = 912,84cm^4.$$

$$J_{yC} = J_y = J^I_y + J^{II}_y = \frac{5.20^3}{12} + \frac{16.8^3}{12} = 4016cm^4.$$

Ví dụ 7.5.

Xác định mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt như hình 7.11a.

Giải.

Chia mặt cắt trên hình 7.11a thành ba phần: phần I và III là hình chữ nhật, phần II là nửa hình tròn, các phần II và III là rỗng nên có giá trị âm đối với mômen tĩnh, mômen quán tính. Chọn hệ trục tọa độ (xy) như hình 7.11b.

Theo kết quả Ví dụ 7.1 khi thay $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ta có: $y_{C2} = 6a + \frac{2}{3}\frac{2a\sin(\pi/2)}{(\pi/2)} = \frac{18\pi + 8}{3\pi}a \approx 6,85a$.

Tọa độ trọng tâm của mặt cắt:

$$y_C = \frac{y_{C1}F^I - y_{C2}F^{II} - y_{C3}F^{III}}{F^I - F^{II} - F^{III}} = \frac{5a.60a^2 - 6,85a.\pi(2a)^2/2 - 3,5a.20a^2}{60a^2 - \pi(2a)^2/2 - 20a^2} \approx 5,55a.$$

Mômen quán tính chính trung tâm:

$$J_{xC} = J^{I}_{xC} - J^{II}_{xC} - J^{III}_{xC}. \text{ Trong đó:}$$

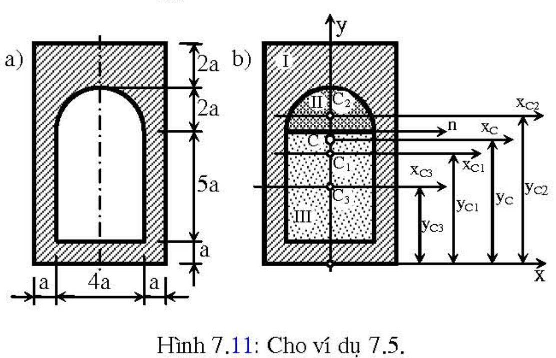
$$J^{I}_{xC} = J^{I}_{xC1} + (y_C - y_{C1})^2.F^I = \frac{6a.(10a)^3}{12} + (5,55a - 5a)^2.60a^2 = 518,15a^4.$$

$$J^{II}_{xC} = J^{II}_{n} + \overline{nx_C}^2.F^{II} = \frac{1}{2}\frac{\pi(4a)^4}{64} + (6a - 5,55a)^2.\frac{\pi(2a)^2}{2} \approx 7,56a^4.$$

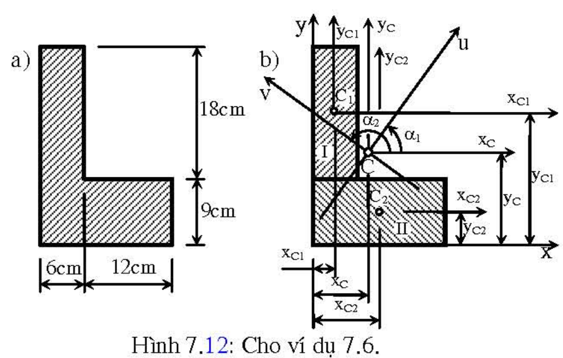
$$J^{III}_{xC} = J^{III}_{xC3} + (y_C - y_{C3})^2.F^{III} = \frac{4a.(5a)^3}{12} + (5,55a - 3,5a)^2.20a^2 \approx 125,72a^4.$$

Vậy:

$$J_{xC} = 518,15a^4 - 7,56a^4 - 125,72a^4 = 384,87a^4.$$



Hình 7.11: Cho ví dụ 7.5.



Hình 7.12: Cho ví dụ 7.6.

Ví dụ 7.6.

Xác định các mômen quán tính chính trung tâm và trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt như hình 7.12a.

Giải.

Chia mặt cắt trên hình 7.12a thành hai hình chữ nhật như hình 7.12b. và chọn hệ trục tọa độ ban đầu là (x,y).

Tọa độ trọng tâm của mặt cắt:

$$x_C = \frac{x_{C1}F_1 + x_{C2}F_2}{F_1 + F_2} = \frac{3.6.18 + 9.18.9}{6.18 + 18.9} = 6{,}6cm.$$

$$y_C = \frac{y_{C1}F_1 + y_{C2}F_2}{F_1 + F_2} = \frac{18.6.18 + 4{,}5.18.9}{6.18 + 18.9} = 9{,}9cm.$$

Mômen quán tính trung tâm:

$$J_{xC} = J^I_{xC} + J^{II}_{xC}.$$

$$J^I_{xC} = J^I_{xC1} + (y_{C1} - y_C)^2.F^I = \frac{6.18^3}{12} + (18 - 9{,}9)^2 6.18 \approx 10002cm^4.$$

$$J^{II}_{xC} = J^{II}_{xC2} + (y_{C2} - y_C)^2.F^{II} = \frac{18.9^3}{12} + (9{,}9 - 4{,}5)^2 18.9 \approx 5817cm^4.$$

$$\Rightarrow J_{xC} = 10002cm^4 + 5817cm^4 = 15819cm^4.$$

$$J_{yC} = J^I_{yC} + J^{II}_{yC}.$$

$$J^I_{yC} = J^I_{yC1} + (x_C - x_{C1})^2.F^I = \frac{18.6^3}{12} + (6{,}6 - 3)^2 6.18 \approx 1724cm^4.$$

$$J^{II}_{yC} = J^{II}_{yC2} + (x_{C2} - x_C)^2.F^{II} = \frac{9.18^3}{12} + (9 - 6{,}6)^2 18.9 \approx 5307cm^4.$$

$$\Rightarrow J_{yC} = 1724cm^4 + 5307cm^4 = 7031cm^4.$$

$$J_{xyC} = J^I_{xyC} + J^{II}_{xyC}.$$

$$J^I_{xyC} = J^I_{xyC1} + (y_{C1} - y_C)(x_{C1} - x_C)F^I = 0 + (18 - 9{,}9)(3 - 6{,}6)6.18 \approx -3149cm^4.$$

$$J^{II}_{xyC} = J^{II}_{xyC2} + (y_{C2} - y_C)(x_{C2} - x_C)F^{II} = 0 + (4{,}5 - 9{,}9)(9 - 6{,}6)18.9 \approx -2100cm^4.$$

$$\Rightarrow J_{xyC} = -3149cm^4 - 2100cm^4 = -5249cm^4.$$

Phương của hệ trục quán tính chính trung tâm:

$$tg2\alpha = -\frac{2J_{xyC}}{J_{xC} - J_{yC}} = -\frac{2.(-5249)}{15819 - 7031} = 1{,}1946 \Rightarrow 2\alpha = 50^0 07' + k.180^0.$$

$$\alpha_1 = 25^0 03';$$

$$\alpha_2 = 115^0 03'.$$

Giá trị của mômen quán tính chính trung tâm:

$$J_{max} = \frac{J_{xC} + J_{yC}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xC} - J_{yC})^2 + 4J^2_{xyC}} =$$

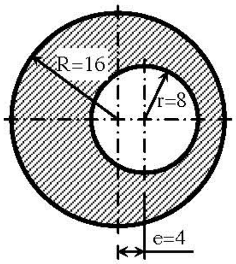
$$= \frac{15819 + 7031}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(15819 - 7031)^2 + 4(-5249)^2} \approx 1827cm^4.$$

$$J_{min} = \frac{J_{xC} + J_{yC}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(J_{xC} - J_{yC})^2 + 4J^2_{xyC}} =$$

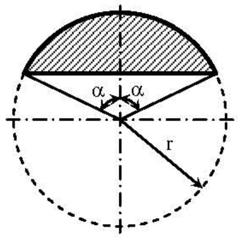
$$= \frac{15819 + 7031}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(15819 - 7031)^2 + 4(-5249)^2} = 4580cm^4.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

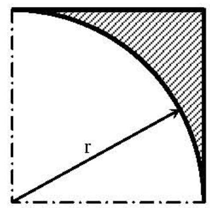
7.1 ÷ 7.4. Xác định vị trí trọng tâm của các mặt cho trên hình 7.13 ÷ 7.16.



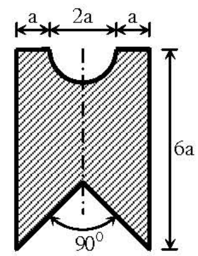
Hình 7.13.



Hình 7.14.

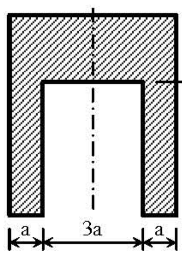


Hình 7.15.

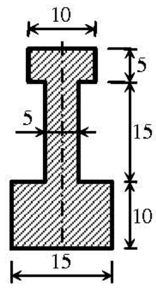


Hình 7.16.

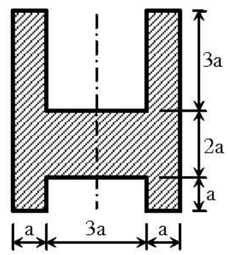
7.5 ÷ 7.8. Xác định vị trí trọng tâm và tính mômen quán tính chính trung tâm của các mặt cắt cho trên hình 7.17 ÷7.20.



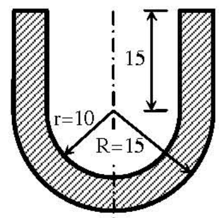
Hình 7.17.



Hình 7.18.



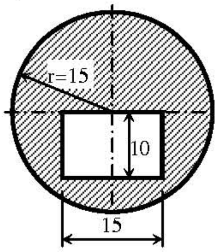
Hình 7.19.



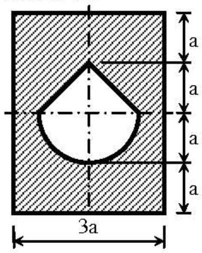
Hình 7.20.

7.9 ÷ 7.11. Xác định vị trí trọng tâm và tính mômen quán tính chính trung tâm của các mặt cắt cho trên hình 7.21 ÷7.23.

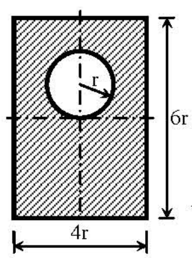
7.12. Xác định hệ trục quán tính chính có gốc tai A của hình chữ nhật như trên hình 7.24. Tính các mômen quán tính chính đi qua điểm A.



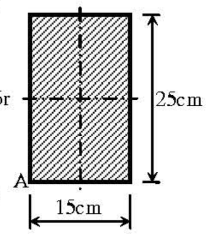
Hình 7.21.



Hình 7.22.

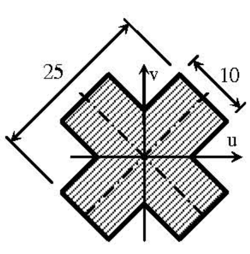


Hình 7.23.

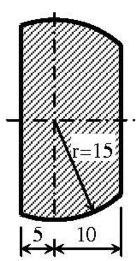


Hình 7.24.

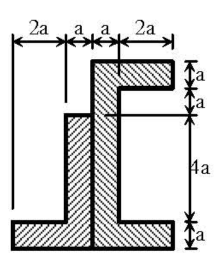
7.13. Xác định mômen quá tính của mặt cắt ngang chữ thập trên hình 7.25 đối với hệ trục tọa độ (u,v).



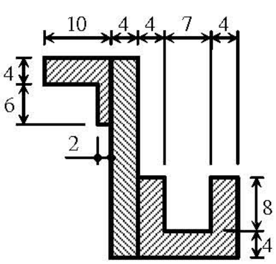
Hình 7.25.



Hình 7.26.



Hình 7.27.



Hình 7.28.

7.14 ÷ 7.16. Xác định vị trí trọng tâm, tìm các phương chính và tính mômen quán tính chính trung tâm của các mặt cắt cho trên hình 7.26 ÷7.28.