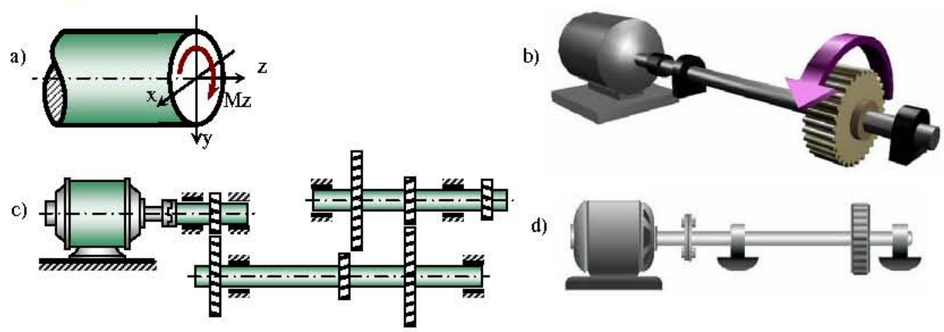
CHƯƠNG 8:

THANH CHỊU XOẮN, CHỊU CẮT

I. Ứng suất trên tiết diện tròn của thanh chịu xoắn.

1. Định nghĩa.

Thanh chịu xoắn thuần túy khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ tồn tại một thành phần ứng lực M_z, hình 8.1a.



Hình 8.1: Các trường hợp thanh chịu xoắn thuần túy.

Thanh chịu xoắn thượng được gọi là trục. Trục truyền lực, trục động cơ trên hình 8.1b,c,d là những ví dụ thường gặp về thanh chịu xoắn. Những dầm cầu đường ô tô cũng có thể bị xoắn nếu tải trọng không đặt đúng tim cầu.

Khi nhìn vào mặt cắt thấy mômen quay thuận chiều kim đồng hồ được qui ước chiều dương của mômen xoắn (hình 8.1a).

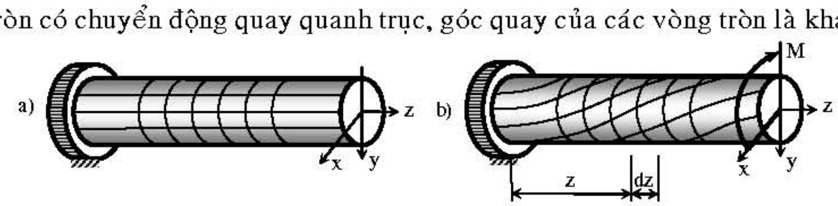
2. Các giả thiết về biến dạng của thanh.

Kẽ những đường thẳng song song với trục (đường sinh của trục) đặc trưng cho các lớp vật liệu dọc trục và những vòng tròn chu tuyến vuông góc với trục đặc trưng cho các tiết diện mặt cắt ngang của trục (hình 8.2a). hệ các đường thẳng và các đường tròn này tạo thành các lưới hình chữ nhật.

Tác dụng bởi mômen xắn ngoại lực M (hình 8.2b). Với biến dạng bé, quan sát ta thấy:

Chiều dài thanh và khoảng cách giữa các đường tròn hầu như không thay đổi. Các góc vuông thay đổi.

Các đường tròn vẫn phẳng và vuông góc với trục, bán kính không thay đổi. Mặt phẳng của các vòng tròn có chuyển động quay quanh trục, góc quay của các vòng tròn là khác nhau.



Hình 8.2: Biến dạng của thanh tiết diện tròn chịu xoắn thuần tuý.

Từ những quan sát và nhận xét trên ta đưa ra các giả thiết:

Thanh không có biến dạng dài dọc trục.

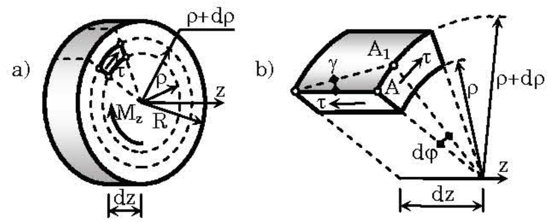
Tiết diện của thanh vẫn phẳng chỉ thực hiện chuyển động quay quanh trục z một góc φ, gọi là góc xoay của tiết diện - là hàm số của tọa độ z. Chiều dương quy ước của góc xoay trùng với chiều dương của mômen xoắn nội lực.

Bán kính của tiết diện vẫn phẳng và không thay đổi chiều dài.

Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tác dụng tương hổ (bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt song song với trục thanh).

3. Công thức tính ứng suất tiếp trên tiết diện.

Theo các giả thiết đã nêu, ta có thể xem: trên tiết diện ứng suất pháp bằng không, chỉ tồn tại ứng suất tiếp vuông góc với bán kính tiết diện, là kết quả của biến dạng trượt do các mặt cắt ngang xoay tương đối với nhau quanh trục z. Xét phân tố tách ra như hình 8.3a, giới hạn bởi hai mặt vuông góc với trục có tọa độ z và $z+dz$. Tiếp tục tách ra phân tố con (hình 8.3b) giới hạn bởi hai mặt trụ bán kính $\rho \le R$, $\rho + d\rho$ và hai mặt cắt nhau bởi giao tuyến là trục z, hợp với nhau một góc $d\varphi$. Trạng thái ứng suất tại mọi điểm của trục là trạng thái trượt thuần túy.



Hình 8.3: Phân thích biến dạng thanh chịu xoắn

Tiết diện bên trái, ở tọa độ z, có góc xoay φ.

Tiết diện bên phải, ở tọa độ $z+dz$, sẽ có góc xoay $\varphi + d\varphi$.

Hiệu số $d\varphi$, là góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau một đoạn dz, được gọi là góc xoắn của đoạn trục có chiều dài dz. Bán kính của tiết diện bên phải cũng có góc xoay tương đối $d\varphi$ so với bán kính tương ứng của tiết diện bên trái. γ là biến dạng góc vuông của phân tố hay còn gọi là góc trượt, ta có:

$$\gamma = \frac{AA_1}{dz} = \rho \frac{d\varphi}{dz} = \rho\theta \qquad \text{(a).}$$

Trị số θ là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đơn vị chiều dài gọi là góc xoắn tỷ đối của thanh - là hằng số trên tiết diện, và là hàm số theo tọa độ z, thứ nguyên *[Rad]/[chiều dài]*:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \qquad \text{(8.1).}$$

Theo định luật Hooke về trượt: $\tau = G\gamma = G\theta\rho$ (b).

Theo định nghĩa: tổng mômen đối với trục z của các ứng suất tiếp trên toàn tiết diện F chính là mômen xấn M_z: $M_z = \int_F \tau\rho dF = \int_F G\theta\rho^2 dF$ (c).

Tích $G\theta$ là hằng số trên tiết diện, $\int_F \rho^2 dF$ là mômen quán tính cực J_ρ của tiết diện đối với tâm nên $M_z = G\theta.J_\rho$ hay:

$$G\theta = \frac{M_z}{J_\rho} \qquad \text{(8.2).}$$

Thay (8.2) vào (b) ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp trên tiết diện:

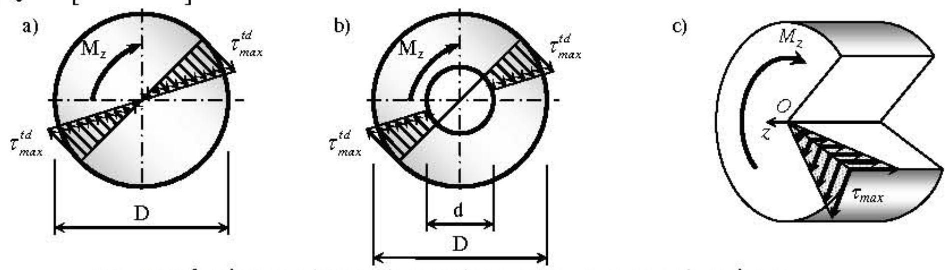
$$\tau = \frac{M_z}{J_\rho}\rho \qquad \text{(8.3).}$$

Biểu đồ ứng suất tiếp trên tiết diện:

Ứng suất tiếp trên tiết diện có phương vuông góc với bán kính, có chiều của mômen xoắn M_z và có trị số phụ thuộc bậc nhất với khoảng cách từ tâm đến điểm tính ứng suất (xem hình 8.4).

$$\tau_{max}^{td} = \frac{M_z}{J_\rho} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_z}{W_\rho} \qquad (8.4).$$

$W_\rho = \dfrac{J_\rho}{\rho_{max}} = \dfrac{J_\rho}{d/2}$ được gọi là mômen chống xoắn, là đặc trưng hình học của tiết diện, có thứ nguyên $\left[chiều\,dài\right]^3$.



Hình 8.4: biểu đồ phân bố ứng suất trên tiết diện của thanh chịu xoắn thuần túy và ứng suất tiếp đối ứng.

Với tiết diện tròn đặc (hình 8.4a):

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3.$$

Tiết diện hình vành khăn (hình 8.4b):

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) \Rightarrow W_\rho = \frac{2}{D}\frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) \approx 0{,}2D^3\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

Ứng suất tiếp đối ứng như hình 8.4c.

4. Các dạng phá hỏng của trục chịu xoắn.

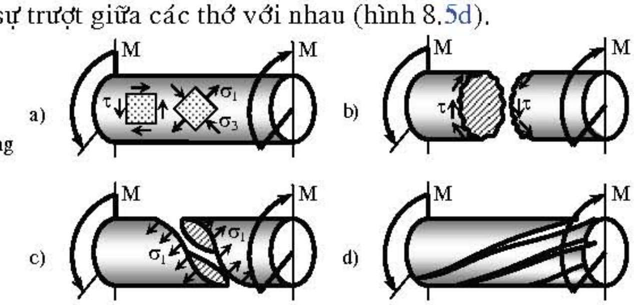
Nếu xét phân tố trên mặt ngoài của thanh ta nhận thấy đây là ứng suất tiếp cực đại $\tau_{\max}$. Do phân tố ở trạng thái trượt thuần túy nên các ứng suất chính $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\max}$ và chúng tạo với trục z những góc $\pm 45^0$ (hình 8.5a). Từ đó suy ra các dạng phá hỏng của trục làm bằng vật liệu khác nhau.

Đối với vật liệu dẽo, chịu cắt kém hơn chịu kéo nén nên trục bị phá hỏng là do $\tau_{\max}$ và mặt bị phá hỏng là mặt vuông góc với trục thanh (hình 8.5b).

Đối với vật liệu dòn, độ bền theo phương biến dạng cực trị là rất kém nên trục bị phá hỏng là do ứng suất chính σ_1 gây ra và đường nứt là một đương xoắn ốc vuông góc với phương của σ_1 (hình 8.5c).

Đối với các vật liệu có thớ như gỗ, tre, độ bền trượt dọc theo thớ kém so với độ bền trượt ngang thớ nên sự phá hỏng là sự trượt giữa các thớ với nhau (hình 8.5d).

Hình 8.5: Các dạng phá hỏng khi chịu xoắn.



5. Điều kiện bền - ba bài toán cơ bản.

Phân tố vật thể trong trục chịu xoắn ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy, phân tố nguy hiểm là những phân tố ở sát mặt ngoài của trục có τ_{max}.

Điều kiện bền được viết:

$$\tau_{max} = max\left(\tau_{max}^{td}\right) = \left(\frac{M_z}{W_\rho}\right)_{max} \le [\tau] \qquad (8.5).$$

Trị số cho phép của ứng suất tiếp được xác định từ thí nghiệm xoắn:

$[\tau] = \frac{\tau_0}{n}$; τ_0 là ứng suất nguy hiểm và n là hệ số an toàn.

Trong trường hợp chỉ có thí nghiệm kéo-nén thì ứng suất tiếp cho phép lấy theo thuyết bền:

Theo thuyết bền thứ ba (thuyết bền ứng suất tiếp): $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$.

Theo thuyết bền thứ tư (thuyết bền thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng): $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$.

Từ điều kiện bền ta cũng có ba bài toán cơ bản:

***Kiểm tra bền*:**

Ta kiểm tra xem ứng suất trong trục có thỏa điều kiện bền hay không?

$$\tau_{max} = \left(\frac{M_z}{W_\rho}\right)_{max} \le [\tau] \pm 5\%.$$

***Chọn kích thước mặt cắt ngang*:**

Đây là bài toán thiết kế, ta phải định kích thước mặt cắt ngang của trục sao cho đảm bảo điều kiện bền. Từ (8.5) ta có:

$W_\rho \ge \frac{M_z}{[\tau]} \pm 5\%$. Nếu chọn ở trạng thái giới hạn thì: $W_\rho = \frac{M_z}{[\tau]} \pm 5\%$, từ đó ta có thể xác định được kích thước mặt cắt ngang của trục.

***Định tải trọng cho phép*:**

Từ (8.5) ta dễ dàng xác định được nội lực lớn nhất có thể đạt được của thanh là: $M_z \le [\tau]W_\rho \pm 5\%$, hay ở trạng thái giới hạn: $[M_z] = [\tau]W_\rho \pm 5\%$

Có $[M_z]$ ta có thể tìm được trị số cho phép của tải trọng tác dụng lên công trình hay chi tiết máy.

II. Biến dạng và chuyển vị của thanh chịu xoắn.

1. Biến dạng.

Góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài, theo (8.2):

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_\rho} \qquad (8.6).$$

Góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau một vi phân dz chiều dài, theo (8.1):

$$d\varphi = \theta dz = \frac{M_z}{GJ_\rho}dz.$$

Góc xoay tương đối của hai tiết diện ở hai đầu của trục cách nhau một đoạn L, gọi là góc xoắn của đoạn trục sẽ là:

$$\varphi = \int_L \frac{M_z}{GJ_\rho}dz \qquad (8.7).$$

Khi $\frac{M_z}{GJ_\rho} = const$ trên cả chiều dài L:

$$\varphi = \frac{M_z L}{GJ_\rho} \quad (8.8).$$

Khi $\frac{M_z}{GJ_\rho} = const$ trên từng đoạn L_i của chiều dài L:

$$\varphi = \sum_i \frac{M_{zi} L_j}{G_i J_{\rho i}} \quad (8.9).$$

Khi $GJ_\rho = const$ trên từng đoạn L_i của chiều dài L:

$$\varphi = \sum_i \frac{S_{Mzi}}{G_i J_{\rho i}} \quad (8.10).$$

GJ_ρ - được gọi là độ cứng chống xoắn của tiết diện. $\frac{GJ_\rho}{L}$ - được gọi là độ cứng chống xoắn của trục thanh. (đây là hình thức thể hiện của định luật Hooke về cắt).

2. Chuyển vị của các tiết diện.

Góc xoay của tiết diện xác định từ: $d\varphi = \theta dz = \frac{M_z}{GJ_\rho} dz$ tích phân hai vế ta nhận được:

$$\varphi = \int \theta dz + C = \int \frac{M_z}{GJ_\rho} dz + C \quad (8.11).$$

Các hằng số tích phân tìm được nhờ vào điều kiện liên kết ở hai đầu đoạn (điều kiện biên).

3. Điều kiện cứng.

biến dạng, chuyển vị phát sinh $\leq$ biến dạng, chuyển vị cho phép:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_\rho} \leq [\theta] \quad (8.12).$$

Ba bài toán cơ bản theo điều kiện cứng: tương tự như đối với điều kiện bền.

III. Bài toán siêu tĩnh.

Bài toán siêu tĩnh khi chịu xoắn thuần túy ta thường gặp là: hai đầu của trục bị ngàm chặt hoặc một đầu bị ngàm chặt, một số vị trí khác của trục hay đầu còn lại chịu liên kết nữa cứng, tức là bài toán có nhiều trạng thái, chẳng hạn khi tác dụng mômen M_1, trục ở trạng thái tĩnh định, nhưng khi tăng lên bởi mômen M_2 nào đó thì trụ ử tở thành trạng thái siêu tĩnh bậc một hay bậc cao hơn.

Phương trình cân bằng tĩnh học cho trục chịu xoắn thuần túy chỉ có một phương trình tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên trục lấy đối với trục quay bằng không ($\Sigma m_z(M_i) = 0$).

Do đó, phương trình thêm vào chỉ có thể là các phương trình mô tả về điều kiện góc xoay tại những nơi có liên kết thừa.

IV. Lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn.

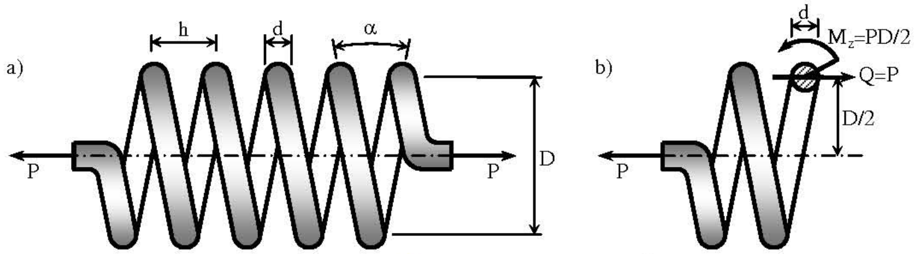
Xét lò xo xoắn ốc hình trụ có tiết diện của dây là hình tròn đường kính d và đường kính trung bình của vòng lò xo là D, chịu lực kéo P trùng với trục của lò xo như trên hình 8.6a.

Khoảng cách giữa hai vòng lò xo gọi là bước của lò xo ký hiệu h; góc nghiêng giữa các dây lò xo ký hiệu α; số vòng dây làm việc của lò xo ký hiệu là n.

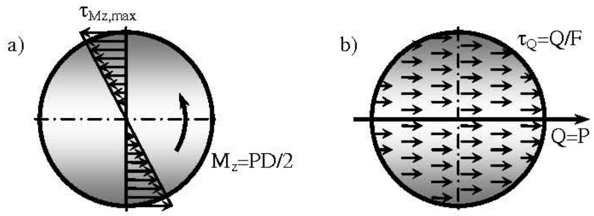
Nếu góc nghiêng α lớn ta gọi là lò xo bước dài, ngược lại thì gọi là lò xo bước ngắn.

Trường hợp lò xo bước ngắn, mặt phẳng tiết diện của dây có thể coi là trùng với mặt phẳng chứa trục lò xo, khi đó lực cắt Q và mômen xoắn M_z (hình 8.6b) được tính:

Lực cắt $Q = P$; mô men xắn $M_z = \frac{PD}{2}$.



Hình 8.6: Lò xo và ứng lực trên tiết diện.



Hình 8.7: Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện.

Mômen xoắn gây ra ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{Mz,\max} = \dfrac{M_z}{W_\rho}$ tiếp xúc với chu vi của tiết diện (hình 8.7a). Còn lực cắt gây ra ứng suất tiếp phân bố đều, có trị số $\tau_Q = \dfrac{Q}{F}$ trùng với chiều của lực cắt (hình 8.7b).

Trên hình 8.7 ta thấy: mép dưới của tiết diện là nguy hiểm nhất vì hai thành phần của ứng suất tiếp cùng chiều nhau, ứng suất tiếp tổng có giá trị lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{F} + \frac{M}{W_\rho} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PD}{2\pi d^3} = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{d}{D}\right)\frac{8PD}{\pi d^3} = K_1 \frac{8PD}{\pi d^3} \qquad (8.13).$$

Trong đó K_1 là hệ số điều chỉnh được tìm bởi công thức:

$$K_1 = \frac{4D/d - 1}{4D/d - 4} + \frac{0{,}615}{D/d} \qquad (8.14).$$

Trị số của K_1 tùy thuộc vào tỷ số D/d và cho ở bảng 8.1.

Bảng 8.1

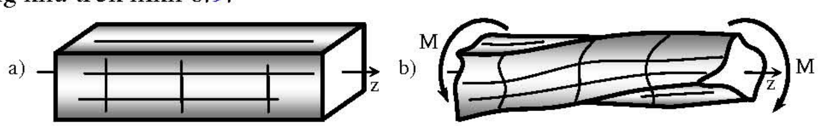
D/d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	>12
K_1	2,06	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1

Điều kiện bền của lò xo:

$$\tau_{\max} \le [\tau] \qquad (8.15).$$

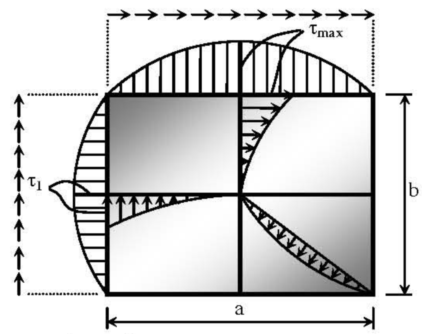
V. Xoắn thanh có tiết diện hình chữ nhật.

Thực nghiệm cho thấy, khi xoắn thanh có tiết diện không tròn thì mặt cắt ngang của thanh sẽ bị vênh không còn phẳng nữa (hình 8.8b). Vì vậy giả thiết về mặt cắt ngang vẫn phẳng không còn được chấp nhận. Ta thừa nhận một số kết quả tìm được bằng lý thuyết đàn hồi (bài toán Saint-Venant). Theo đó, biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật kích thước $h \times b$ có dạng như trên hình 8.9.



Hình 8.8: Sự vênh của tiết diện không tròn khi chịu xoắn.

Hình 8.9: Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật chịu xoắn.



Ứng suất tiếp bằng không tại các góc và trọng tâm của tiết diện.

Ứng suất tiếp đạt trị số lớn nhất tại trung điểm của cạnh dài a:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_{xo}} \quad (8.16).$$

Tại trung điểm cạnh ngắn b, ứng suất tiếp cũng có giá trị khá lớn:

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (8.17).$$

Góc xoắn tỷ đối của thanh:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_{xo}} \quad (8.18).$$

Bảng 8.2.

$\frac{a}{b}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	0,333
β	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	0,333
γ	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,741

Trong đó:

$W_{xo} = \alpha ab^2$ - mômen chống xoắn tiết diện chữ nhật.

$J_{xo} = \beta ab^3$ - mômen quán tính của tiết diện chữ nhật.

Các hệ số α, β, γ được cho trong bảng 8.2 theo tỷ số các cạnh $\frac{a}{b}$ với qui ước $a > b$.

Theo bảng 8.2 ta thấy khi tỷ số $\frac{a}{b} \geq 10$ thì có thể lấy $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

Điều kiện bền và điều kiện cứng của thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha ab^2} \leq [\tau] \quad (8.19).$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{G\beta ab^3} \leq [\theta] \quad (8.20).$$

Ví dụ 8.1.

Trục trụ bậc liên kết và chịu lực như trên hình 8.10a. Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra bền cho trục theo các thuyết bền thứ ba và thứ tư. Xác định góc xoay của mặt cắt qua A.

Biết: $G = 8.10^3 KN/cm^2$; $[\sigma] = 10KN/cm^2$; $d_1 = 5cm$; $d_2 = 6cm$.

Giải.

Biểu đồ nội lực như trên hình 8.10b.

Kiểm tra bền cho trục.

$$\tau_{max}^{AD} = \tau_{max}^{BC} = \frac{M_z^{BC}}{W_\rho^{BC}} = \frac{M_z^{BC}}{0,2d_1^3} = \frac{1,5.10^2}{0,2.5^3} KN/cm^2 = 6KN/cm^2.$$

$$\tau_{max}^{DE} = \frac{M_z^{DE}}{W_\rho^{DE}} = \frac{M_z^{DE}}{0,2d_2^3} = \frac{2.10^2}{0,2.6^3} KN/cm^2 = 4,63KN/cm^2.$$

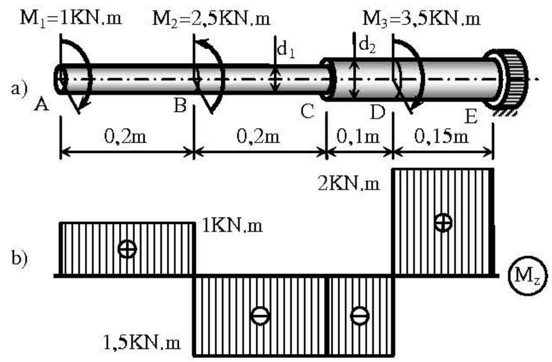
Do đó: $\tau_{\max} = \tau_{\max}^{BC} = 6KN/cm^2$.

Theo thuyết bền thứ ba:

$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{11}{2} = 5,5KN/cm^2 < \tau_{max}$ nên trục không thỏa điều kiện bền.

Theo thuyết bền thứ tư:

$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}} = 6,35KN/cm^2 > \tau_{max}$ nên trục thỏa mãn điều kiện bền.



Hình 8.10: Cho ví dụ 8.1.

Góc xoay của mặt cắt qua A, theo (8.10).

$$\varphi_A = \varphi_{AE} = \frac{\sum_{i=1}^{4} S_{Mzi}}{GJ_{\rho i}} =$$

$$= \frac{1}{8.10^3}\left(\frac{1.0,2.10^4}{0,1.5^4} - \frac{1,5.0,2.10^4}{0,1.5^4} - \frac{1,5.0,1.10^4}{0,1.6^4} + \frac{2.0,15.10^4}{0,1.6^4}\right) Rad = -5,53.10^{-4} Rad.$$

Mặt cắt qua A xoay một góc $5,53.10^{-4}\,Rad$ ngược chiều kim đồng hồ.

Ví dụ 8.2.

Trục trụ bậc được đỡ trên hai ổ lăn A và D (bỏ qua ma sát giữa ổ và trục), chịu lực như trên hình 8.11a. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định các đường kính d_1, d_2, d_3 của trục theo điều kiện bền. Tính góc xoay giữa hai mặt cắt A và D theo các đường kính tìm được.

Biết: $G = 8.10^3 KN/cm^2$; $[\tau] = 5KN/cm^2$; $m = 15KN.m/m$; $a = 0,11m$.

Giải.

Biểu đồ nội lực như trên hình 8.11b.

Xác định các đường kính của trục theo điều kiện bền.

$$\tau_{max}^{AB} = \tau_{max}^{phải,B} = \frac{M_z^{phải,B}}{W_\rho^{BC}} = \frac{M_z^{phải,B}}{0,2d_1^3} = \frac{2ma}{0,2.d_1^3} \le [\tau].$$

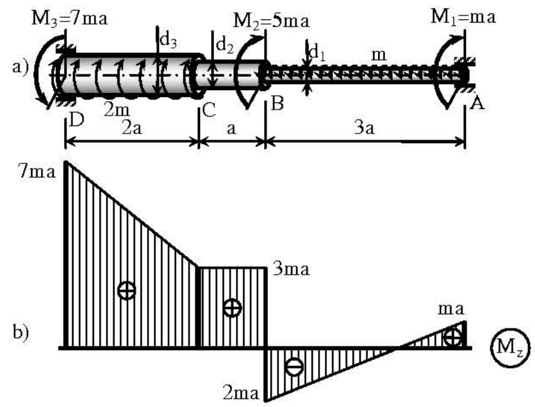
$\Rightarrow d_1 \ge \sqrt[3]{\frac{2ma}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2.15.0,11.10^2}{0,2.5}} cm = 6,91cm$. Chọn $d_1 = 7cm$.

$$\tau_{max}^{BC} = \frac{M_z^{BC}}{W_\rho^{BC}} = \frac{M_z^{BC}}{0,2d_2^3} = \frac{3ma}{0,2.d_2^3} \le [\tau].$$

$$\Rightarrow d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{3ma}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{3.15.0,11.10^2}{0,2.5}} cm = 7,91cm \text{ . Chọn } d_2 = 8cm .$$

$$\tau_{\max}^{CD} = \tau_{\max}^{phải,D} = \frac{M_z^{phải,D}}{W_\rho^{CD}} = \frac{M_z^{phải,D}}{0,2d_3^3} = \frac{7ma}{0,2.d_3^3} \leq [\tau].$$

$$\Rightarrow d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{2ma}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{7.15.0,11.10^2}{0,2.5}} cm = 10,49cm \text{ . Chọn } d_3 = 10,5cm .$$



Hình 8.11: Cho ví dụ 8.2.

Góc xoay giữa hai mặt cắt A và D.

$$\varphi_{AD} = \frac{\sum_{i=1}^{4} S_{Mzi}}{GJ_{\rho i}} = \frac{1}{2}\frac{ma.a}{G.0,1d_1^4} - \frac{1}{2}\frac{2ma.2a}{G.0,1d_1^4} + \frac{3ma.a}{G.0,1d_2^4} + \frac{1}{2}\frac{(7ma+3ma)2a}{G.0,1d_3^4} =$$

$$= \frac{ma^2}{G.0,1}\left(\frac{1}{2d_1^4} - \frac{2}{d_1^4} + \frac{3}{d_2^4} + \frac{10}{d_3^4}\right) = \frac{15.(0,11.10^2)^2}{8.10^3.0,1}\left(\frac{1}{2.7^4} - \frac{2}{7^4} + \frac{3}{8^4} + \frac{10}{10,5^4}\right) Rad = 2,11.10^{-3} Rad .$$

Mặt cắt qua A xoay cùng chiều kim đồng hồ so với mặt cắt qua D một góc $2,11.10^{-3} Rad$.

Ví dụ 8.3.

Trục trụ bậc AD có các đường kính d_1, d_2, d_3, bị ngàm chặt ở hai đầu và chịu lực như trên hình 8.12a. Xác định phản lực tại ngàm E, vẽ biểu đồ nội lực và xác định tải trọng cho phép $[m]$ tác dụng lên trục theo điều kiện bền. Tính góc xoay của mặt cắt qua C theo tải trọng tìm được.

Biết: $G = 8.10^3 KN/cm^2$; $[\tau] = 6KN/cm^2$; $d_1 = 4cm$; $d_2 = 3cm$; $d_3 = 5cm$; $a = 0,15m$.

Giải.

Giải phóng liên kết tại E ta vẽ được biểu đồ mômen xoắn phản lực M_E gây ra (hình 8.12b) và biểu đồ mômen xoắn do các tải trọng còn lại gây ra (hình 8.12c).

Phương trình tương thích biến dạng: $\varphi_{EA} = 0 \Rightarrow \varphi_{EA}^{(M_D)} + \varphi_{EA}^{(M,m)} = 0$.

$$\Rightarrow \frac{M_D.3a}{G0,1d_1^4} + \frac{M_D.2a}{G0,1d_2^4} + \frac{M_D.3a}{G0,1d_3^4} + \frac{2ma.2a}{G0,1d_1^4} - \frac{3ma.2a}{G0,1d_2^4} - \frac{1}{2}\frac{2ma.2a}{G0,1d_3^4} + \frac{1}{2}\frac{ma.a}{G0,1d_3^4} = 0 .$$

$$\Rightarrow M_D\left(\frac{3}{d_1^4} + \frac{2}{d_2^4} + \frac{3}{d_3^4}\right) + ma\left(\frac{4}{d_1^4} - \frac{6}{d_2^4} - \frac{3}{2d_3^4}\right) = 0 .$$

$$\Rightarrow M_D\left(\frac{3}{256} + \frac{2}{81} + \frac{3}{625}\right) + ma\left(\frac{4}{256} - \frac{6}{81} - \frac{3}{1250}\right) = 0 .$$

$$\Rightarrow M_D\left(\frac{534083}{12960000}\right) - ma\left(\frac{1577208}{25920000}\right) = 0 . \Rightarrow M_D = \frac{788604}{534083} ma \approx 1,48ma .$$

Biểu đồ mômen xoắn được vẽ trên hình 8.12d.

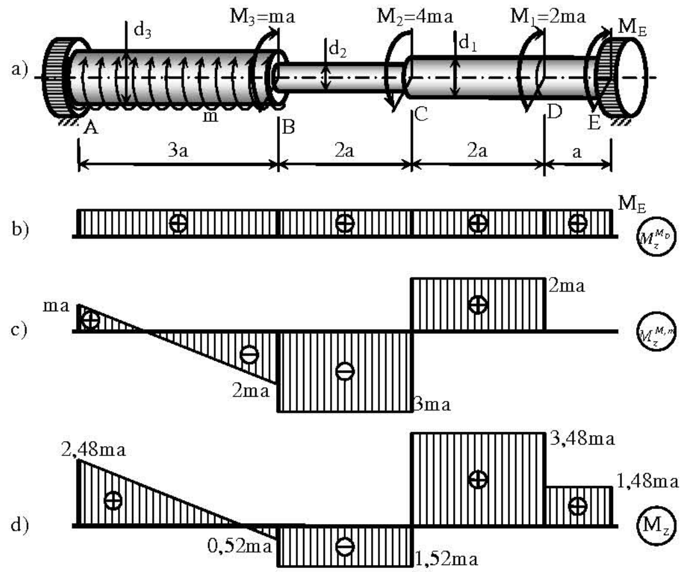
Xác định $[m]$ theo điều kiện bền.

$$\tau_{max}^{AB,CE} = \tau_{max}^{CD} = \frac{3,48ma}{0,2d_1^3} = m\frac{3,48.0,15.10^2}{0,2.4^3} = m.4,09;$$

$$\tau_{max}^{BC} = \frac{1,52ma}{0,2d_2^3} = m\frac{1,52.0,15.10^2}{0,2.3^3} = m.4,22.$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \tau_{max}^{BC} = m.4,22 \le [\tau]. \Rightarrow m \le \frac{[\tau]}{4,22} = \frac{6}{4,22} KN.m/m = 1,42KN.m/m.$$

Chọn $[m] = 1,4KN.m/m$.



Hình 8.12. Cho ví dụ 8.3.

Góc xoay của mặt cắt qua C.

$$\varphi_C = \varphi_{CE} = \frac{3,48ma.2a}{GJ_{\rho 1}} + \frac{1,48ma.a}{GJ_{\rho 1}} = 8,44\frac{ma^2}{GJ_{\rho 1}} = 8,44\frac{1,4.(0,15.10^2)^2}{8.10^3.0,1.4^4} Rad = 1,3.10^{-2} Rad.$$

Mặt cắt qua C xoay thuận chiều kim đồng hồ so với mặt cắt qua E một góc $1,3.10^{-2}$ *Rad*.

Ví dụ 8.4.

Kết cấu gồm một thanh thép tròn và một ống đồng bị ngàm một đầu và đầu kia được gắn với một đĩa cứng, chịu xoắn bởi mômen M như trên hình 8.13a.

Biết: $M = 200N.m$; $G_{th} = 2G_d = 8.10^6\ N/cm^2$; $d_1 = 3cm$; $d_2 = 4cm$; $d_3 = 8cm$; $a = 2m$.

(G_{th}, G_d: môđun đàn hồi trượt của thép và đồng).

Tính góc xoắn tại A, ứng suất tiếp lớn nhất trong thanh thép và trong ống đồng.

Nếu M di chuyển từ A đến B, nhưng tác dụng vào ống đồng thì góc xoắn tại A thay đổi như thế nào.

Giải.

Tính góc xoắn tại A và ứng suất tiếp lớn nhất:

Tách đĩa cứng ra khỏi hệ, thêm vào các mômen phản lực như hình 8.13b.

Phương trình tương thích biến dạng: $\varphi_A^d = \varphi_A^{th}$ (d).

Với: $\varphi_A^d = \dfrac{M_d a}{G_d J_d}$ là góc xoay tại A của ống đồng do M_d gây ra.

$\varphi_A^{th} = \dfrac{M_{th}a}{G_{th}J_{th}}$ là góc xoay tại A của thanh thép do M_{th} gây ra.

Thay vào (d): $M_đ = \dfrac{M_{th}J_đ}{2J_{th}}$ (e).

Mặt khác: $M = M_đ + M_{th}$ (f).

Thay (e) vào (f): $M = \dfrac{M_{th}J_đ}{2J_{th}} + M_{th} = M_{th}\dfrac{J_đ + 2J_{th}}{2J_{th}}$.

$\Rightarrow M_{th} = \dfrac{2MJ_{th}}{J_đ + 2J_{th}}$ (g).

Với: $J_đ = 0,1\left(d_3^4 - d_2^4\right) = 0,1\left(8^4 - 4^4\right) = 384cm^4$.

$J_{th} = 0,1d_1^4 = 0,1.3^4 = 8,1cm^4$.

Do đó: $M_{th} = 0,0405M$; $M_đ = 0,9595M$.

Suy ra: $\varphi_A = \varphi_A^đ = \varphi_A^{th} = \dfrac{M_{th}a}{G_{th}J_{th}} = \dfrac{0,0405.200.10^2.2.10^2}{8.10^6.8.1} = 25.10^{-4}\,Rad$.

$$\tau_{max}^{th} = \frac{M_{th}}{J_{th}}\frac{d_1}{2} = \frac{0,0405.200.10^2}{8,1}\frac{3}{2}N/cm^2 = 150N/cm^2.$$

$$\tau_{max}^{đ} = \frac{M_đ}{J_đ}\frac{d_3}{2} = \frac{0,9595.200.10^2}{384}\frac{8}{2}KN/cm^2 = 200N/cm^2.$$

Tìm sự thay đổi của góc xoắn tại A khi M di chuyển:

Gọi x là khoảng cách từ điểm đặt mômen tập trung M đến B. Tách đĩa cứng, thêm vào các mômen phản lực như hình 8.13c.

Góc xoay tại A thuộc của ống đồng do các mômen tập trung M và $M_đ$ gây ra:

$$\varphi_A^đ = \varphi_A^{đ(M)} - \varphi_A^{đ(M_đ)} = \frac{M.x}{G_đJ_đ} - \frac{M_đ.a}{G_đJ_đ}.$$

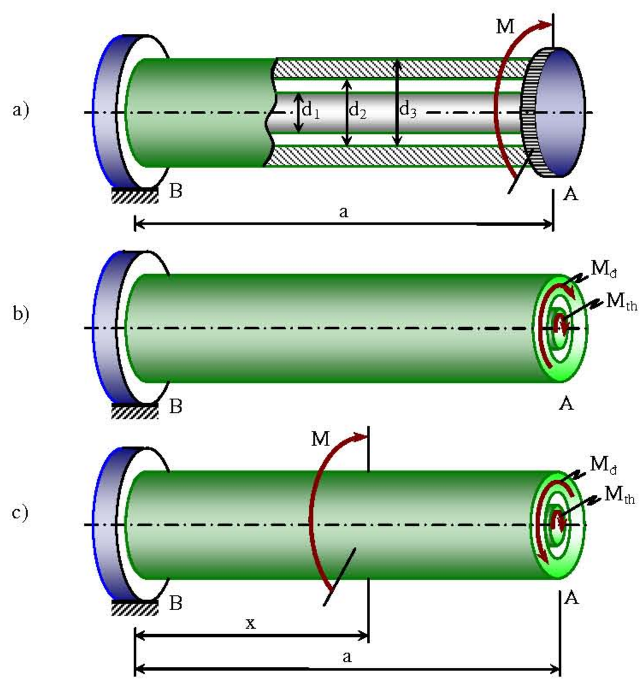
Góc xoay tại A thuộc của thanh thép do mômen tập trung M_{th} gây ra:

$$\varphi_A^{th} = \frac{M_{th}a}{J_{th}G_{th}}.$$

Phương trình tương thích biến dạng:

$$\varphi_A^đ = \varphi_A^{th}$$

$$\Rightarrow \frac{M.x}{G_đJ_đ} - \frac{M_đ.a}{G_đJ_đ} = \frac{M_{th}.a}{G_{th}J_{th}} \quad \text{(h)}.$$



Hình 8.13: Cho ví dụ 8.4.

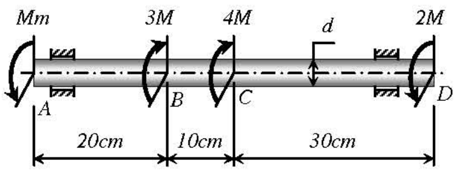
Mặt khác, trong trường hợp này ta có $M_đ = M_{th}$ thay vào (h):

$$\frac{M.x}{G_đJ_đ} - \frac{M_{th}.a}{G_đJ_đ} = \frac{M_{th}.a}{G_{th}J_{th}} \Rightarrow \frac{M_{th}.a\left(G_{th}J_{th} + G_đJ_đ\right)}{G_đJ_đ.G_{th}J_{th}} = \frac{M.x}{G_đJ_đ} \Rightarrow M_{th} = \frac{MG_{th}J_{th}}{a\left(G_{th}J_{th} + G_đJ_đ\right)}x.$$

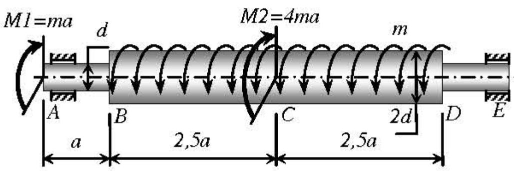
Do đó: $\varphi_A = \varphi_A^{đ} = \varphi_A^{th} = \dfrac{2M}{G_{th}\left(2J_{th} + J_{đ}\right)}x$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1. Trục AD có đường kính d, chịu tải trọng và kích thước như hình 8.14.
Biết: $[\tau]=6KN/cm^2$; $G=8.10^3 KN/cm^2$; $d=10cm$. Vẽ biểu đồ nội lực; Xác định tải trọng cho phép $[M]$ tác dụng lên trục theo điều kiện bền. Với tải trọng tìm được, xác định góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt A và D.



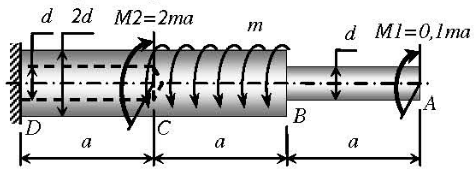
Hình 8.14.



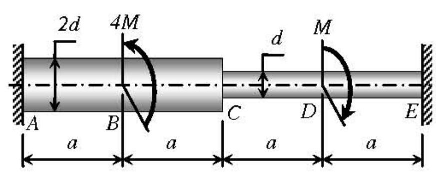
Hình 8.15.

8.2. Trục trụ bậc AE có các đường kính d và 2d, chịu tải trọng và kích thước như hình 8.15.
Biết: $[\tau]=7KN/cm^2$; $G=8.10^3 KN/cm^2$; $m=1{,}5KN.cm/cm$; $a=0{,}2m$. Vẽ biểu đồ nội lực; Xác định đường kính d của trục theo điều kiện bền. Với đường kính tìm được, xác định góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt A và D.

8.3. Trục trụ bậc AD có các đường kính d và 2d bị ngàm chặt tại A, chịu tải trọng và kích thước như hình 8.16.
Biết: $[\tau]=5KN/cm^2$; $G=8.10^3 KN/cm^2$; $d=8cm$; $a=0{,}4m$. Vẽ biểu đồ nội lực; Xác định tải trọng cho phép $[m]$ tác dụng lên trục theo điều kiện bền. Với tải trọng tìm được, xác định góc xoay của mặt cắt qua A.



Hình 8.16.



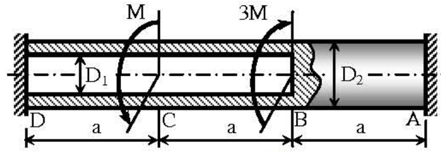
Hình 8.17.

8.4. Trục trụ bậc AE có các đường kính d và 2d bị ngàm chặt tại A và E, chịu tải trọng và kích thước như hình 8.17.
Biết: $[\tau]=8KN/cm^2$; $G=8.10^3 KN/cm^2$; $d=10cm$; $a=0{,}3m$. Xác định phản lực tại A, vẽ biểu đồ nội lực; xác định tải trọng cho phép $[m]$ tác dụng lên trục theo điều kiện bền. Với tải trọng tìm được, xác định góc xoay của mặt cắt qua C.

8.5. Trục trụ tròn bị ngàm chặt ở hai đầu. Đoạn DB bị khoét rỗng đường kính trong D_1, đoạn BA đặc đường kính D_2 (hình 8.18).

Biết: $G=8.10^3 \dfrac{KN}{cm^2}$; $[\tau]=6\dfrac{KN}{cm^2}$; $D_1=0{,}5D_2=10cm$; $a=0{,}5m$.

Xác định phản lực tại ngàm A và vẽ biểu đồ nội lực. Xác định tải trọng cho phép $[M]$ theo điều kiện bền. Với tải trọng tìm được, xác định chuyển vị xoay của mặt cắt qua B (φ_B).



Hình 8.18.