BÀI GIẢNG
DAO ĐỘNG KỸ THUẬT

ĐẶNG VĂN HIẾU - BỘ MÔN CƠ HỌC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ***Dao động kỹ thuật***, Nguyễn Văn Khang, NXB Khoa học và kỹ thuật.
2. **Bài tập dao động kỹ thuật**, Nguyễn Văn Khang và nhiều nk, NXB Khoa học và kỹ thuật.
3. **Lý thuyết dao động**, Lê Xuân Cận (dịch), NXB Khoa học và kỹ thuật.
4. **Dao động tuyến tính**, Nguyễn Đông Anh (dịch), NXB Khoa học và kỹ thuật.

NỘI DUNG

Chương mở đầu: Các khái niệm cơ bản của lý thuyết dao động.

Chương 1: Dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do.

Chương 2: Dao động tuyến tính của hệ nhiều bậc tự do.

Chương mở đầu

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG

1. Định nghĩa dao động.
2. Mô tả động học các quá trình dao động.
3. Phân loại hệ dao động.

1. Định nghĩa dao động

Dao động là một hiện tượng phổ biến trong tự nhiên và trong kỹ thuật.

Các máy, các phương tiện giao thông vận tải, các toà nhà cao tầng, những cây cầu,… đó là các hệ dao động.

Dao động là gì?

Dao động là một quá trình trong đó một đại lượng vật lý (hoá học, sinh học,…) thay đổi theo thời gian mà có một đặc điểm nào đó lặp lại ít nhất một lần.

Dao động có lợi hay có hại?

Dao động vừa có lợi, vừa có hại.

- **Lợi :** Dao động được sử dụng để tối ưu hoá một số kỹ thuật như: đầm, kỹ thuật rung …
- **Hại:** Giảm độ bền của máy, gây ra hiện tượng mỏi của vật liệu dẫn tới phá huỷ, ảnh hưởng đến tuổi thọ của các công trình,....

2. Mô tả động học các quá trình dao động

a. Dao động điều hoà.

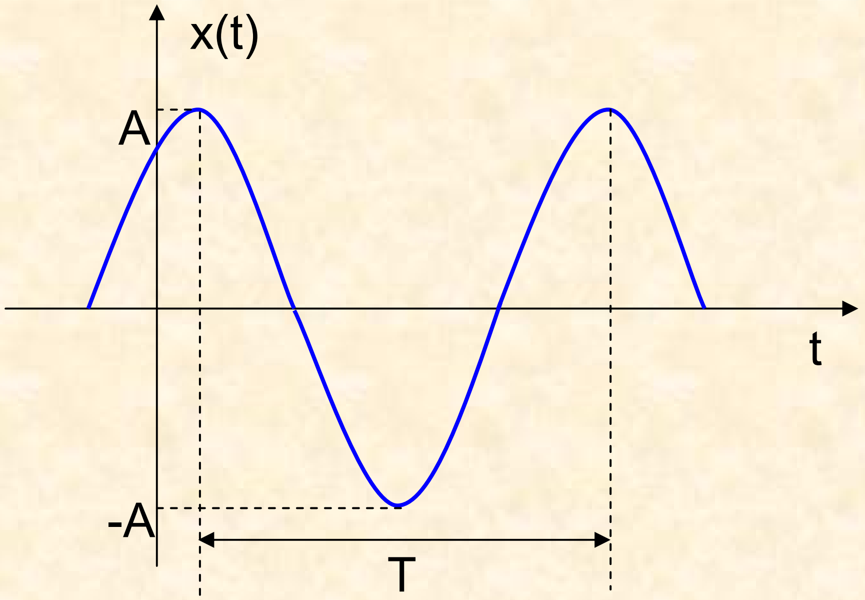
Ví dụ hàm điều hoà?

Ví dụ: $\sin(\omega t + \alpha), \cos(\omega t + \alpha)$

Dao động được mô tả về mặt toán học bởi các hàm điều hoà được gọi là dao động điều hoà.

Xét dao động được mô tả bởi:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (1)$$



Trong đó:

ω : tần số vòng (rad/s).

T=2π/ω: Chu kỳ dao động (s).

A : biên độ dao động (m).

ωt + α : pha dao động (rad).

α : pha ban đầu (rad).

f = 1/T : tần số (HZ).

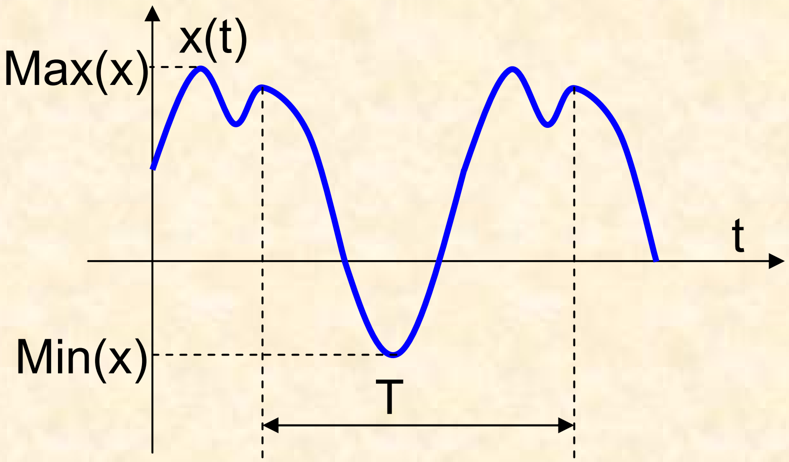
b. Dao động tuần hoàn.

Hàm tuần hoàn?

Hàm số x(t) được gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại một hằng số T > 0 sao cho với mọi t ta có hệ thức:

$$x(t+T) = x(t), \quad \forall t \qquad (2)$$

Một quá trình dao động được mô tả về mặt toán học bởi một hàm tuần hoàn x(t) được gọi là dao động tuần hoàn.



Hằng số T nhỏ nhất để cho biểu thức (2) được thoả mãn gọi là *chu kỳ dao động*.

Biên độ A của dao động tuần hoàn x(t) được định nghĩa bởi công thức sau:

$$A = \frac{1}{2}\left[\max x(t) - \min x(t)\right]$$

c. Dao động họ hình sin.

+ Một quá trình dao động được mô tả về mặt toán học bởi hàm:

$$x(t) = A(t)\sin\left[\omega(t)t + \alpha(t)\right] \qquad (3)$$

được gọi là *dao động họ hình sin.*

+ *Dao động tắt dần:*

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t}\sin\left[\omega(t)t + \alpha(t)\right],\ \delta > 0$$

+ *Dao động tăng dần:*

$$x(t) = A_0 e^{\delta t}\sin\left[\omega(t)t + \alpha(t)\right],\ \delta > 0$$

Dao động mà biên độ A(t) thay đổi luân phiên được gọi là *dao động biến điệu biên độ*.

Dao động mà tần số $\omega(t)$ thay đổi luân phiên được gọi là *dao động biến điệu tần số*.

3. Phân loại hệ dao động

a. Căn cứ vào cơ cấu gây nên dao động:

+ Dao động tự do.

+ Dao động cưỡng bức.

+ Dao động tham số.

+ Tự dao động.

+ Dao động hỗn độn.

+ Dao động ngẫu nhiên.

b. Căn cứ vào số bậc tự do:

+ Dao động của hệ một bậc tự do.

+ Dao động của hệ nhiều bậc tự do.

+ Dao động của hệ vô hạn bậc tự do.

c. Căn cứ vào phương trình chuyển động:

+ Dao động tuyến tính.

+ Dao động phi tuyến.

d. Căn cứ vào dạng chuyển động:

+ Dao động dọc.

+ Dao động xoắn.

+ Dao động uốn.

Chương 1

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1.1. Dao động tự do không cản.

1.2. Dao động tự do có cản.

1.3. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động điều hòa.

1.4. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động đa tần và chịu kích động tuần hoàn.

1.5. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động bất kỳ.

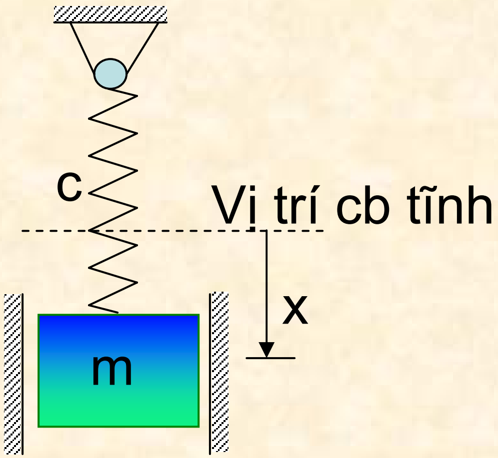
§1. Dao động tự do không cản

1.1. Một số ví dụ.

❖ **Thí dụ 1:** Dao động của một vật nặng treo vào lò xo.

→ Phương trình dao động:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \qquad (1)$$



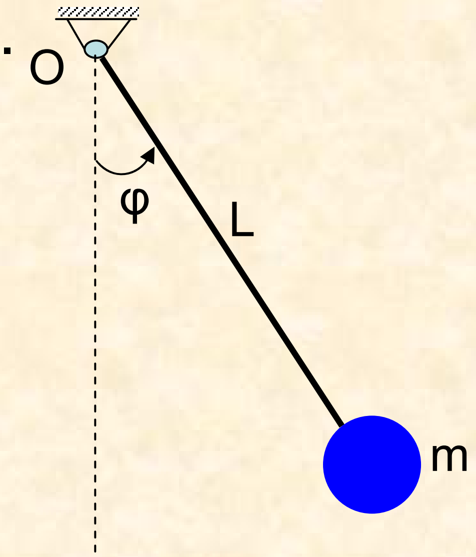
❖ **Thí dụ 2:** Dao động của con lắc toán học.

→ Phương trình dao động:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Xét dao động nhỏ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (2)$$



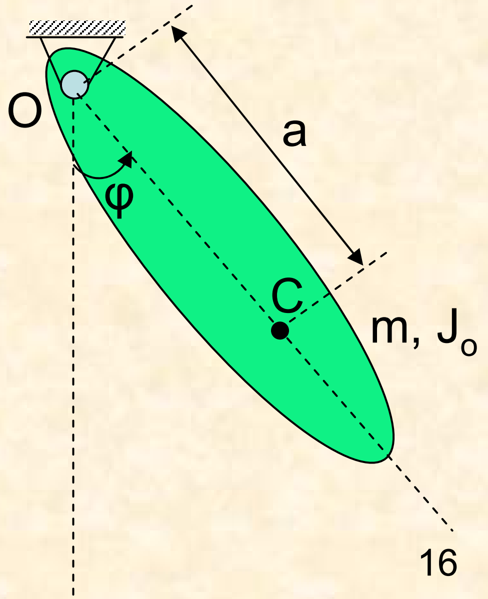
❖ **Thí dụ 3:** Dao động của con lắc vật lý.

→ Phương trình dao động:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J_o}\sin\varphi = 0$$

Xét dao động nhỏ:

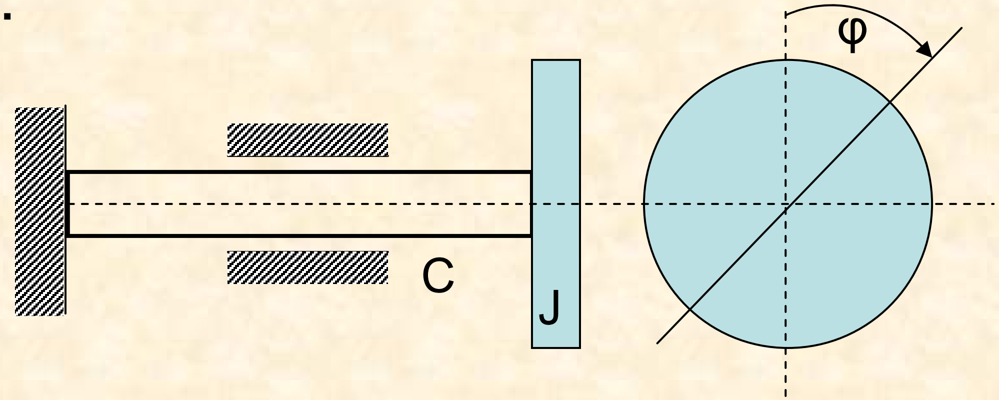
$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J_o}\varphi = 0 \qquad (3)$$



❖ **Thí dụ 4:** Dao động xoắn của trục mang đĩa tròn.

→ Phương trình dao động:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J}\varphi = 0 \qquad (4)$$



Kết luận: Dạng của phương trình dao động tự do của hệ một bậc tự do có dạng chung là:

$$\boxed{m\ddot{q} + cq = 0} \qquad (5)$$

Trong đó q là tọa độ suy rộng.

1.2. Tính toán dao động tự do không cản.

Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ một bậc tự do không cản có dạng:

$$m\ddot{q} + cq = 0$$

Hay:

$$\ddot{q} + \omega_o^2 q = 0 \qquad (6)$$

Trong đó ω_o là tần số dao động riêng.

Điều kiện đầu: $t_o = 0$:

$$q(t_0) = q_o$$
$$\dot{q}(t_0) = \dot{q}_o \qquad (7)$$

Nghiệm của phương trình vi phân (6) có dạng:

$$q = C_1 cos\omega_o t + C_2 \sin \omega_o t \qquad (8)$$

Trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tuỳ ý, được xác định từ điều kiện đầu (7).

Cho nghiệm (8) thoả mãn điều kiện đầu (7), ta xác định được:

$$C_1 = q_o , \quad C_2 = \frac{\dot{q}_o}{\omega_o}$$

Vậy :

$$q = q_o cos\omega_o t + \frac{\dot{q}_o}{\omega_o} \sin \omega_o t \qquad (9)$$

Nghiệm (9) còn có thể viết dưới dạng:

$$q = A\sin(\omega_o t + \alpha) \qquad (10)$$

Trong đó:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_o^2 + \left(\frac{\dot{q}_o}{\omega_o}\right)^2}$$

(11)

$$tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \omega_o \frac{q_o}{\dot{q}_o}$$

Từ biểu thức (10) ta thấy: dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do được mô tả bởi hàm điều hoà.

Vì vậy, dao động tự do không cản còn được gọi là dao động điều hoà.

❖ **Đặc trưng:**

A :được gọi là biên độ dao động.

ω_o :được gọi là tần số riêng.

$\omega_o t + \alpha$:được gọi là pha dao động.

α :được gọi là pha ban đầu.

$T = 2\pi/\omega_o$:được gọi là chu kì dao động.

❖ Tính chất chuyển động:

✓ Tần số riêng và chu kì dao động không phụ thuộc vào các điều kiện đầu mà chỉ phụ thuộc vào các tham số của hệ.

✓ Biên độ dao động là hằng số. Biên độ dao động và pha ban đầu của dao động tự do không cản phụ thuộc vào các điều kiện đầu và các tham số của hệ.

Chú ý: Việc xác định tần số dao động riêng là nhiệm vụ quan trọng nhất của bài toán dao động tự do.

§2. Dao động tự do có cản

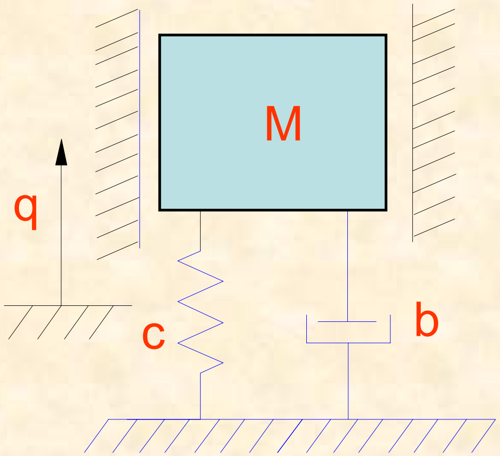
Trong phần này chúng ta khảo sát dao động tự do của hệ có xét đến ảnh hưởng của lực cản.

Lực cản được xét ở đây là lực cản nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc.

Xét dao động của hệ mô tả trên hình vẽ.

Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có dạng:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \qquad (1)$$



Nếu đưa vào các ký hiệu:

$$\omega_o^2 = \frac{c}{m}, \quad 2\delta = \frac{b}{m} \qquad (2)$$

Thì phương trình (1) có dạng:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_o^2 q = 0 \qquad (3)$$

Đây là phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng số.

Phương trình vi phân (3) có phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_o^2 = 0 \qquad (4)$$

Tuỳ theo quan hệ giữa δ và ω_o, có thể xảy ra các trường hợp sau:

$\delta < \omega_o$ (lực cản nhỏ) : $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$

$\delta \geq \omega_o$ (lực cản lớn) : $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}$

Sau đây ta sẽ khảo sát từng trường hợp ở trên.

- trường hợp thứ nhất : $\delta < \omega_o$ (lực cản nhỏ) :

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (3) có dạng:

$$q(t) = e^{-\delta t}(C_1 cos\omega t + C_2 \sin \omega t) \qquad (5)$$

Trong đó:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} \qquad (6)$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện đầu:

$$t = 0 : \; q(0) = q_o \, , \; \dot{q}(0) = \dot{q}_o$$

Từ các điều kiện đầu đã cho, ta xác định được:

$$C_1 = q_o, \; C_2 = \frac{\dot{q}_o + \delta q_o}{\omega}$$

Nếu đưa vào các hằng số:

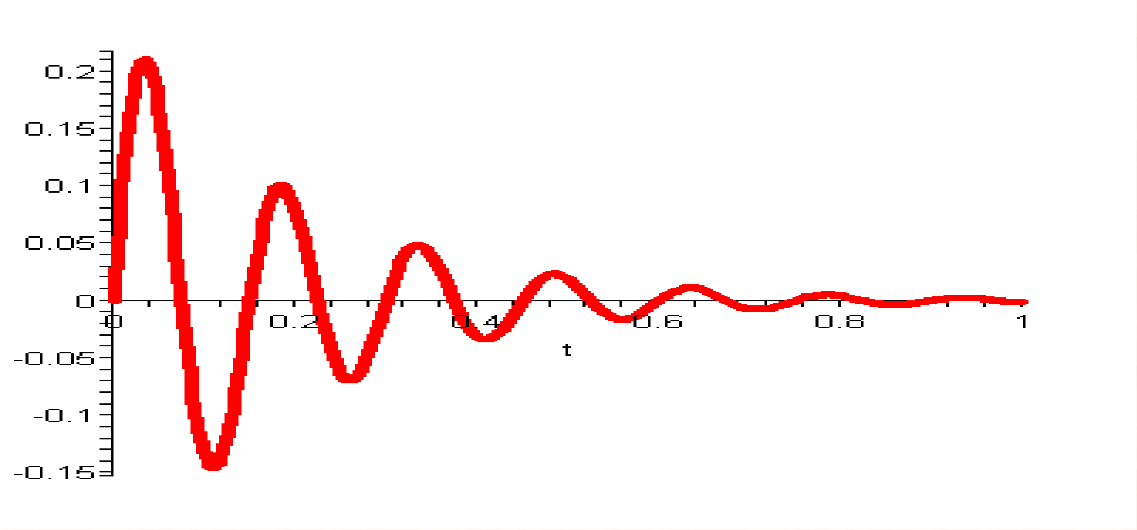
$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \; tg\beta = \frac{C_1}{C_2}$$

Thì biểu thức nghiệm (5) có thể viết dưới dạng:

$$q(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \qquad (7)$$

Tính chất nghiệm:

- ✓ Khi lực cản nhỏ, hệ thực hiện dao động tắt dần.
- ✓ Độ lệch $Ae^{-\delta t}$ giảm theo luật số mũ, tiệm cận tới không.
- ✓ Dao động được mô tả bởi phương trình (7) là dao động họ hình sin.(hình vẽ)



Đặc trưng:

Chuyển động của cơ hệ được mô tả bởi quy luật không tuần hoàn, nhưng toạ độ q lại đổi dấu một cách tuần hoàn.

Quy ước:

$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}$ là tần số riêng của dao động tắt dần.

$T = 2\pi / \omega$ là chu kỳ của dao động tắt dần.

$Ae^{-\delta t}$ là biên độ của dao động tắt dần.

Chú ý:

Để đặc trưng cho độ tắt dần của dao động tự do có cản nhớt, ta đưa vào khái niệm độ tắt Lôga.

$$\Lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \delta T$$

Độ tắt Lôga đặc trưng cho độ giảm biên độ của dao động tắt dần.

Ta còn xác định độ tắt Lôga như sau:

$$\frac{q(t)}{q(t+kT)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+kT)}} = e^{\delta kT}$$

Từ đó:

$$\Lambda = \delta T = \frac{1}{k}\ln\frac{q(t)}{q(t+kT)}$$

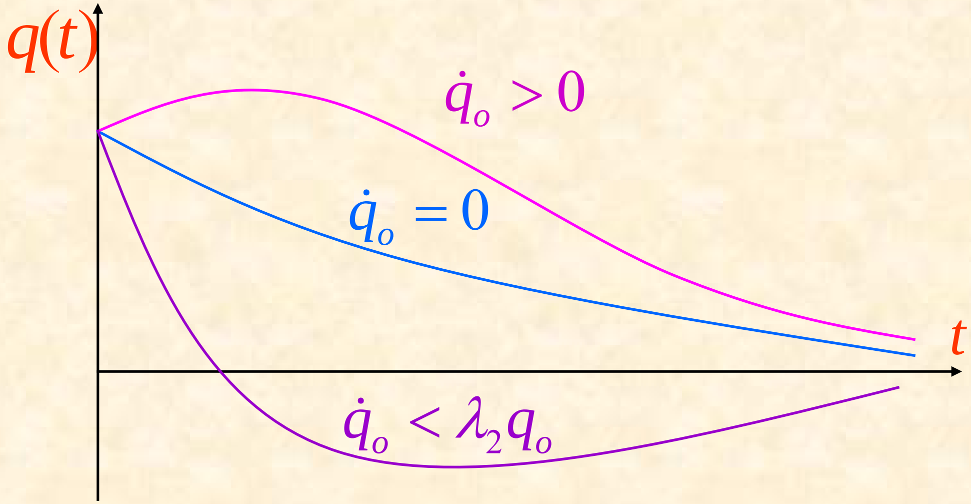
- trường hợp thứ hai : $\delta > \omega_o$ (lực cản lớn) :

Nghiệm tổng quát của phương trình (3) có dạng:

$$q(t) = Ae^{-\delta t} sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}\, t + \beta) \qquad (8)$$

Đường biểu diễn nghiệm q(t) cắt trục t không quá một lần (đồ thị).

Do đó, chuyển động của hệ là chuyển động tắt dần, không dao động.



- trường hợp thứ ba : $\delta = \omega_o$ (lực cản tới hạn) :

Trong trường hợp này nghiệm của phương trình đặc trưng là các số thực âm và bằng nhau. Nghiệm tổng quát của phương trình (3) có dạng:

$$q(t) = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2) \qquad (9)$$

Chuyển động của hệ là tắt dần, không dao động.

Chú ý:

Trong một số tài liệu viết về Dao động kỹ thuật, người ta còn sử dụng khái niệm độ cản Lehr. Độ cản Lehr được xác định bởi:

$$D = \frac{\delta}{\omega_o} = \frac{b}{2m\omega_o} = \frac{b}{2\sqrt{mc}} \qquad (10)$$

Phương trình vi phân dao động tự do có cản nhớt (3) có thể viết lại:

$$\ddot{q} + 2D\omega_o \dot{q} + \omega_o^2 q = 0 \qquad (11)$$

Do: $\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2} = \omega_o \sqrt{1 - D^2}$

Nên chuyển động của hệ được phân thành ba trường hợp sau:

$D < 1 \; (\delta < \omega_o)$: độ cản nhỏ.

$D = 1 \; (\delta = \omega_o)$: độ cản tới hạn.

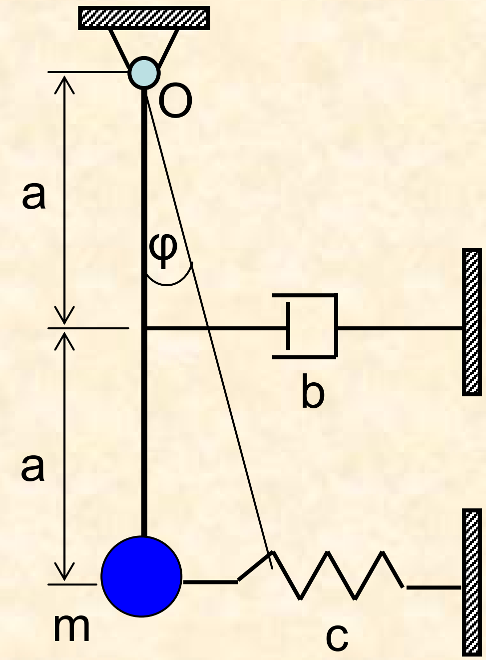
$D > 1 \; (\delta > \omega_o)$: độ cản lớn.

Mặt khác, ta có quan hệ giữa độ tắt Lôga và độ cản Lehr:

$$\Lambda = \delta T = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}$$

Ví dụ: Gắn một khối lượng m vào đầu thanh. Gắn vào thanh các phần tử cản và đàn hồi (hv). Bỏ qua khối lượng của thanh.

- Phải chọn độ lớn của hệ số cản b như thế nào để hệ có dao động nhỏ.
- Xác định độ cản Lerh D cần thiết để sau mười dao động biên độ giảm còn 1/10 biên độ của chu kỳ đầu, sau đó xác định chu kỳ dao động.



§3. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động điều hòa.

3.1. Một số kích động thường gặp.

3.2. Dao động cưỡng bức không cản.

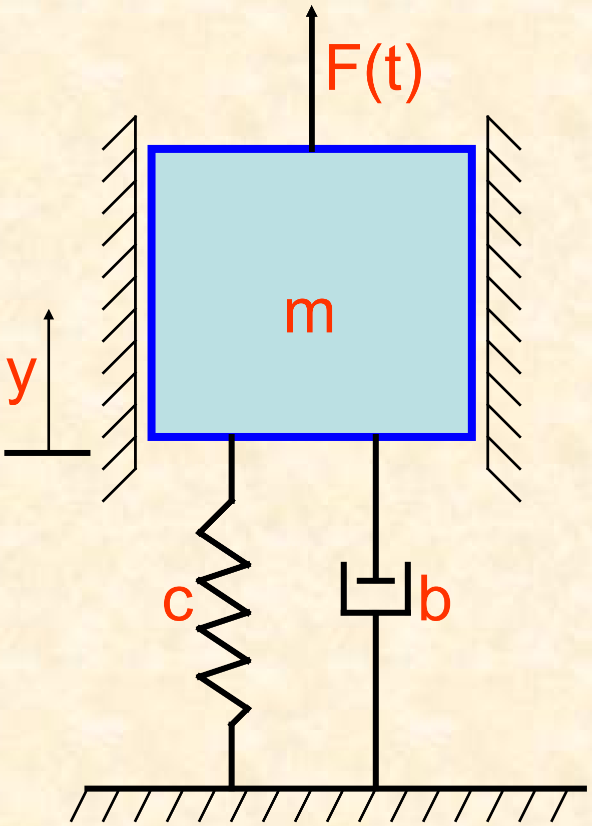
3.3. Dao động cưỡng bức có cản.

3.1. Một số kích động thường gặp.

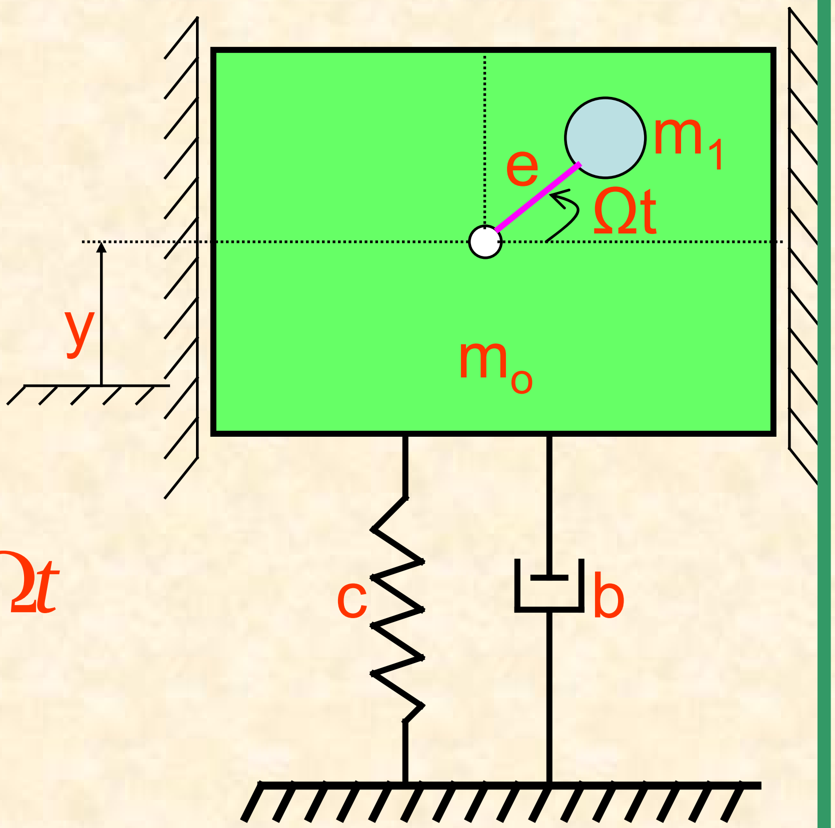
❖ **Kích động lực:**

Phương trình vi phân dao động:

$$m\ddot{y}+b\dot{y}+cy=F(t)=\hat{F}\sin\Omega t$$



❖ **Kích động bởi khối lượng lệch tâm:**

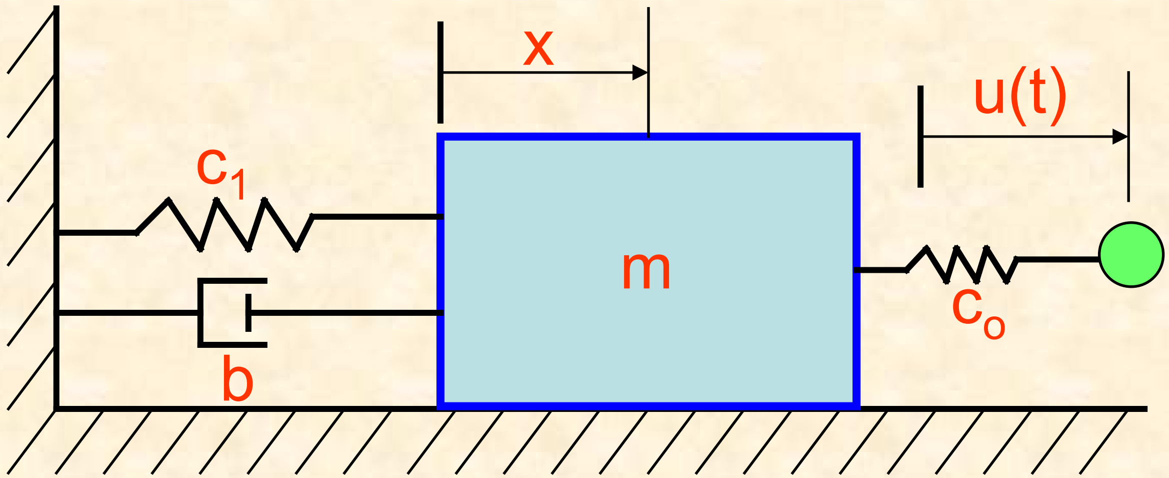


Phương trình vi phân dao động:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = m_1 e \Omega^2 \sin \Omega t$$

Trong đó: $m = m_o + m_1$

❖ Kích động bằng lực đàn hồi:



Phương trình vi phân chuyển động:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = c_o u(t) = c_o \hat{u}\sin\Omega t$$

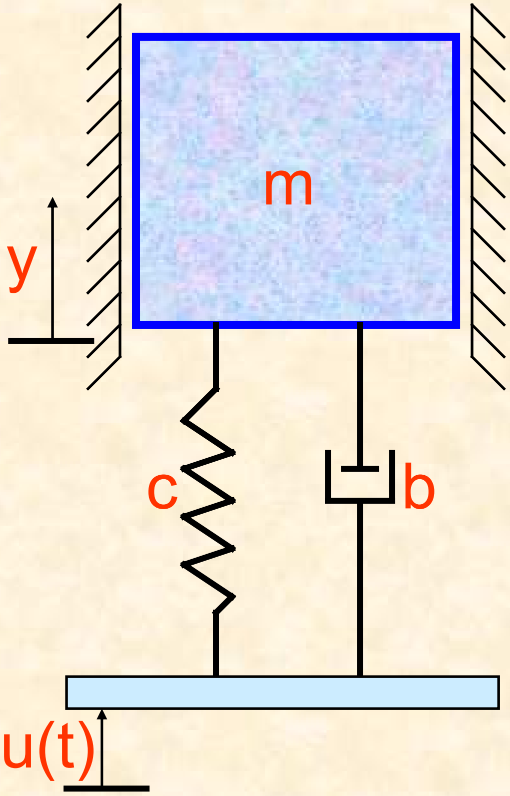
Với: $c = c_1 + c_o$

❖ Kích động động học:

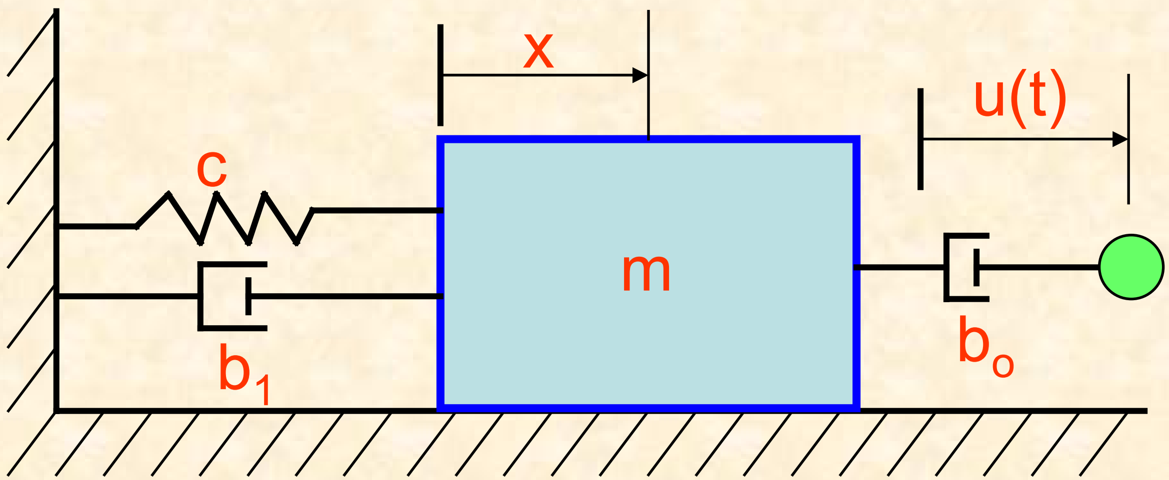
Phương trình vi phân chuyển động:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \hat{u}(c\sin\Omega t + b\Omega cos\Omega t)$$

Với: $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$



❖ Kích động bằng lực cản nhớt:



Phương trình vi phân chuyển động:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b_o\hat{u}\Omega cos\Omega t$$

Với: $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$

Kết luận:

Qua các ví dụ trên ta thấy: Phương trình dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do chịu kích động điều hoà có dạng:

$$m\ddot{q}+b\dot{q}+cq=H_1\sin\Omega t+H_2 cos\Omega t$$

✓ Phương trình trên còn có thể viết lại dưới dạng:

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_o^2 q=h_1\sin\Omega t+h_2 cos\Omega t$$

Với: $\omega_o^2=c/m,\ 2\delta=b/m.$

✓ Hoặc phương trình VPCĐ còn viết được dưới dạng:

$$\ddot{q}+2D\omega_o\dot{q}+\omega_o^2 q=h_1\sin\Omega t+h_2 cos\Omega t$$

Trong đó: $D=\dfrac{\delta}{\omega_o}=\dfrac{b}{2\sqrt{cm}}$

3.2. Dao động cưỡng bức không cản

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do có dạng:

$$m\ddot{q} + c\,q = H\sin\Omega t \qquad (1)$$

Phương trình trên còn có thể viết lại:

$$\ddot{q} + \omega_o^2\,q = h\sin\Omega t \qquad (2)$$

Trong đó:

$$\omega_o^2 = \frac{c}{m};\;\; h = \frac{H}{m}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) có dạng:

$$q(t) = C_1 cos\omega_o t + C_2 \sin\omega_o t + \frac{h}{\omega_o^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \qquad (3)$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện đầu. Giả sử điều kiện đầu:

$$t = 0 : \ q(0) = q_o \, , \ \dot{q}(0) = \dot{q}_o$$

Cho nghiệm (3) thoả mãn điều kiện đầu, ta được:

$$C_1 = q_o \, ; \ C_2 = \frac{\dot{q}_o}{\omega_o} - \frac{h\Omega}{\omega_o(\omega_o^2 - \Omega^2)}$$

Như vậy, nghiệm (3) có dạng:

$$q(t) = q_o cos\omega_o t + \frac{\dot{q}_o}{\omega_o}\sin\omega_o t - \frac{h\Omega}{\omega_o(\omega_o^2 - \Omega^2)}\sin\omega_o t + \qquad (4)$$

$$+\frac{h}{\omega_o^2 - \Omega^2}\sin\Omega t$$

Nghiệm (4) gồm hai thành phần:

✓ Ba số hạng đầu tiên biểu thị dao động tự do với tần số là tần số riêng của hệ.

✓ Số hạng thứ tư biểu thị dao động cưỡng bức với tần số là tần số của lực kích động.

Chú ý rằng khi: $q_o = \dot{q}_o = 0$ thì nghiệm (4) có dạng:

$$q(t) = -\frac{h\Omega}{\omega_o(\omega_o^2 - \Omega^2)}\sin\omega_o t + \frac{h}{\omega_o^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \qquad (5)$$

Số hạng thứ nhất của (5) được gọi là thành phần dao động tự do kéo theo.

Sau một khoảng thời gian nào đó, do ảnh hưởng của lực cản nên các thành phần mô tả dao động tự do của hệ sẽ mất đi → hệ chỉ còn thực hiện dao động cưỡng bức với tần số là tần số của lực cưỡng bức.

Giai đoạn đầu còn tồn tại cả dao động tự do và dao động cưỡng bức được gọi là giai đoạn chuyển tiếp.

Giai đoạn chỉ còn tồn tại dao động cưỡng của hệ được gọi là giai đoạn bình ổn.

Đối với giai đoạn bình ổn, quy luật dao động của hệ sẽ là:

$$q^*(t) = \frac{h}{\omega_o^2 - \Omega^2}\sin\Omega t = \frac{H}{c(1-\eta^2)}\sin\Omega t \qquad (6)$$

Trong đó: $\eta = \Omega / \omega_o$

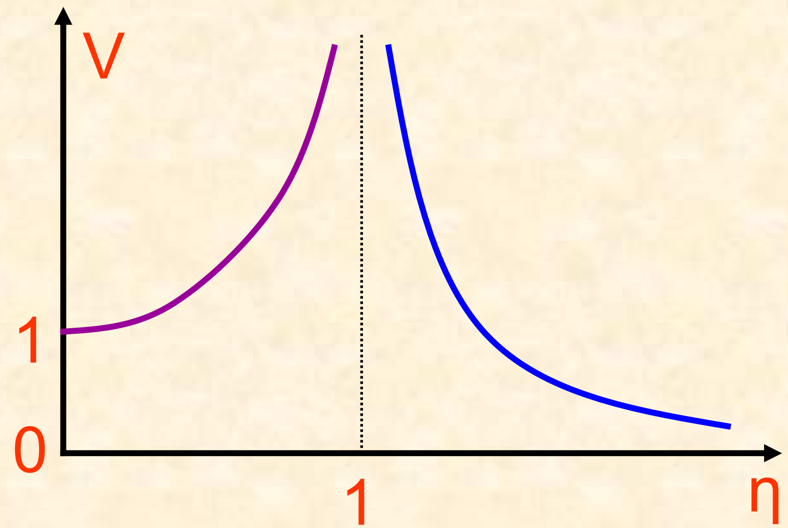
Chú ý: Thừa số H/c chính là dịch chuyển gây ra bởi lực tĩnh H đặt vào vật dao động.

Đại lượng:

$$V(\eta) = \frac{1}{\left|1-\eta^2\right|}$$

→ biểu thị tác dụng động lực của lực kích động, và được gọi là hàm khuyếch đại (hệ số động lực)

Dạng đồ thị của V cho bởi hình sau:



Ta thấy: khi tỷ số Ω/ω_o dần đến 1 thì V và do đó dao động cưỡng bức tăng lên nhanh chóng và tiến tới vô cùng khi $\Omega = \omega_0$. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng cộng hưởng.

Như vậy, hiện tượng cộng hưởng là hiện tượng biên độ dao động cưỡng bức tăng lên rất lớn do tần số của lực kích động trùng với tần số dao động riêng của hệ.

- Xét nghiệm (5) với giả thiết: $\Omega \approx \omega_o$

$$q(t) = -\frac{h\Omega}{\omega_o(\omega_o^2 - \Omega^2)}\sin\omega_o t + \frac{h}{\omega_o^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \qquad (5)$$

Đặt : $\Omega = \omega_o + 2\varepsilon$

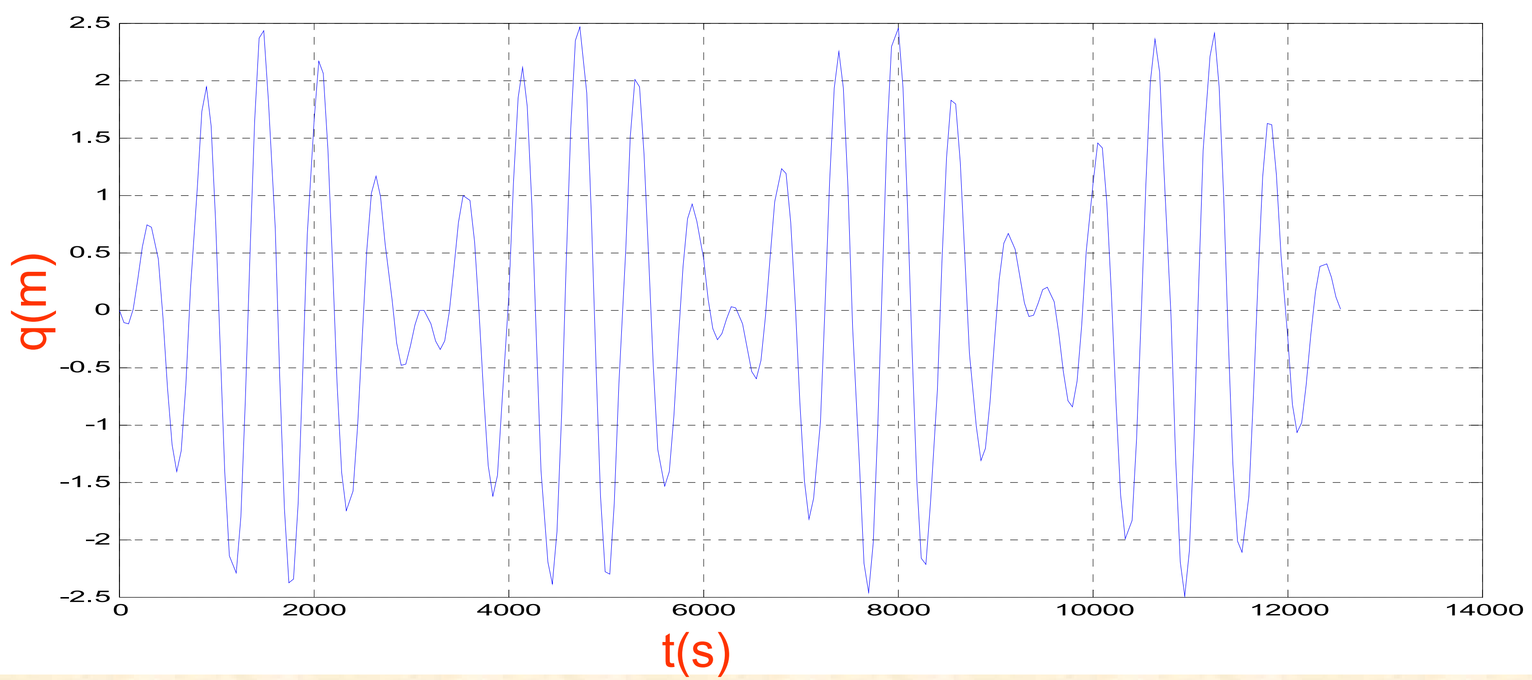
trong đó ε là đại lượng vô cùng bé.

Sau một số phép biến đổi, nghiệm (5) đưa về dạng:

$$q(t) \approx -\frac{h\sin\varepsilon t}{2\Omega\varepsilon}\cos\Omega t \qquad (7)$$

Do ε là một vô cùng bé nên hàm $\sin\varepsilon t$ biến thiên chậm, còn chu kỳ của nó $2\pi/\varepsilon$ rất lớn. Hiện tượng dao động được cho bởi (7) gọi là hiện tượng phách.

Đồ thị của hàm (7) cho bởi hình vẽ sau:



- Xét trường hợp $\Omega \to \omega_o \, (\varepsilon \to 0)$

Khi đó có thể thay sinεt bằng εt trong nghiệm (7), và ta có:

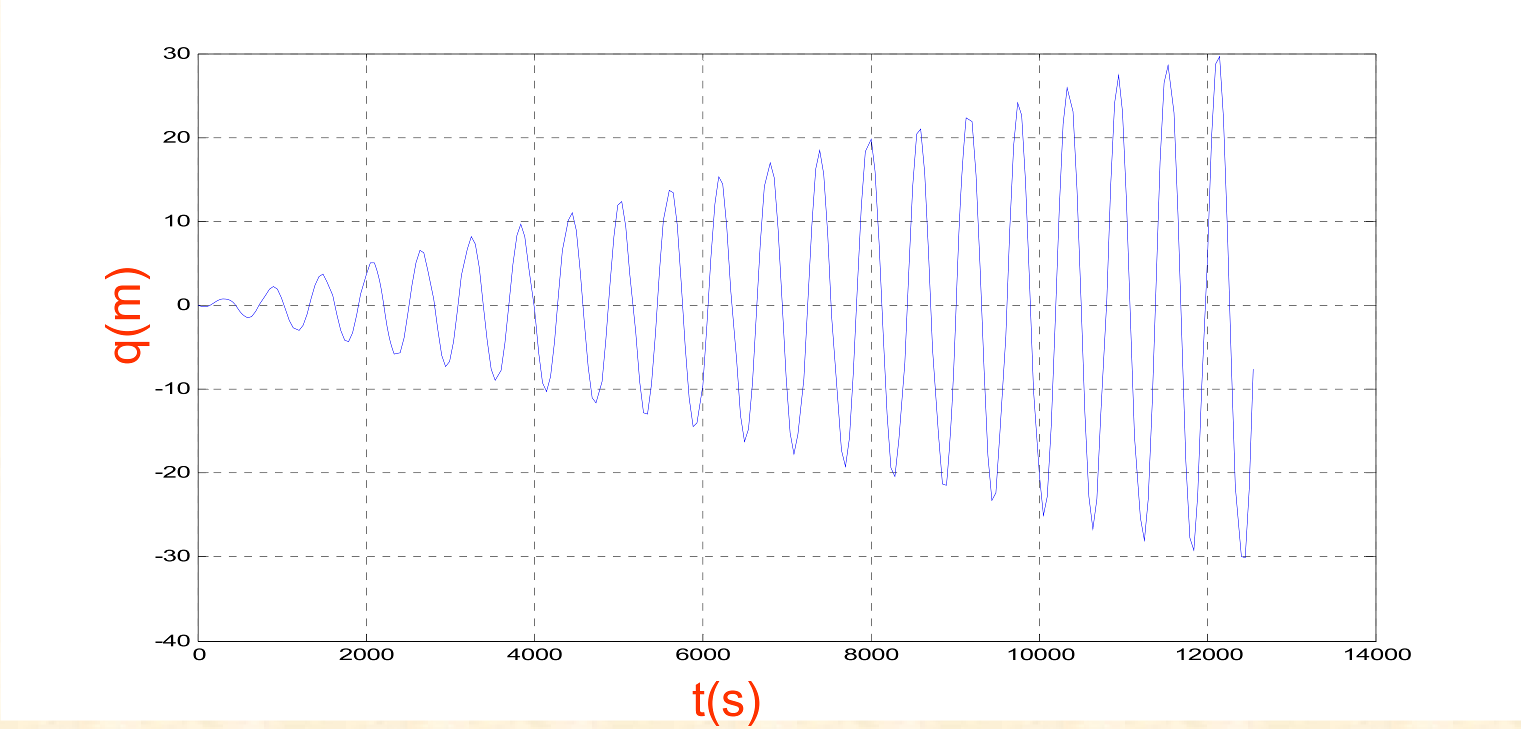
$$q = -\frac{ht}{2\omega_o} cos\omega_o t \qquad (8)$$

Biên độ $ht/2\omega_o$ tăng lên vô hạn khi thời gian t tăng.

Như thế, ngay trong phạm vi lý thuyết dao động tuyến tính không cản, sự tăng biên độ lên vô hạn ở vùng cộng hưởng cũng đòi hỏi phải có thời gian.

Đối với các máy được thiết kế làm việc ở vùng cộng hưởng, khi tăng vận tốc của máy qua vùng cộng hưởng cần phải khẩn trương cho vượt qua đủ nhanh.

Đồ thị của nghiệm (8) cho bởi hình sau đây:



Kết luận: Khi tính toán dao động cưỡng bức không cản ta cần phân ra 2 trường hợp:

- Trường hợp xa cộng hưởng ($\Omega \neq \omega_o$).
- Trường hợp gần cộng hưởng ($\Omega \approx \omega_o$). Trong trường hợp này khi $\Omega = \omega_o + 2\varepsilon$ ta có hiện tượng phách, khi $\Omega = \omega_o$ ta có hiện tượng cộng hưởng.

3.3. Dao động cưỡng bức có cản nhớt

Phương trình vi phân dao động trong trường hợp này:

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_o^2 q = h_1 \sin \Omega t + h_2 cos \Omega t \qquad (1)$$

Nghiệm riêng của phương trình (1) được tìm dưới dạng:

$$q^*(t) = M \sin \Omega t + N cos \Omega t \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta xác định được:

$$M = \frac{(\omega_o^2 - \Omega^2) h_1 + 2\delta \Omega h_2}{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}$$

(3)

$$N = \frac{-2\delta \Omega h_1 + (\omega_o^2 - \Omega^2) h_2}{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1):

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) + M\sin\Omega t + N cos\Omega t \qquad (4)$$

Số hạng thứ nhất của (4) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Hai số hạng sau có tần số Ω của ngoại lực biểu diễn thành phần dao động cưỡng bức của hệ.

Thành phần dao động cưỡng bức (2) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$q^*(t) = \hat{q}\sin(\Omega t + \varphi) \qquad (5)$$

Trong đó:

$$\hat{q} = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\omega_o^2\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$tg\varphi = N / M$$

với:

$$\eta = \Omega / \omega_o\,, \;\; D = \delta / \omega_o$$

Các trường hợp cụ thể:

- Trường hợp kích động lực hoặc kích động qua lò xo:

$$\hat{q} = V_1(\eta, D)\hat{y};\ V_1 = \left[(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2\right]^{-1/2} \qquad (6)$$

- Trường hợp kích động động học:

$$\hat{q} = V_2(\eta, D)\hat{y};\ V_2 = \sqrt{1+4D^2\eta^2}\, V_1 \qquad (7)$$

- Trường hợp kích động bởi khối lượng lệch tâm:

$$\hat{q} = V_3(\eta, D)\hat{y};\ V_2 = \eta^2 V_1 \qquad (8)$$

Các hàm V_1, V_2, V_3 là các hàm khuyếch đại (hay hệ số động lực).

Khi ta cố định độ cản D, các hàm V_1, V_2, V_3 đạt cực đại tại các giá trị sau của n:

V_1 đạt cực đại khi:

$$\eta = \sqrt{1 - 2D^2}$$

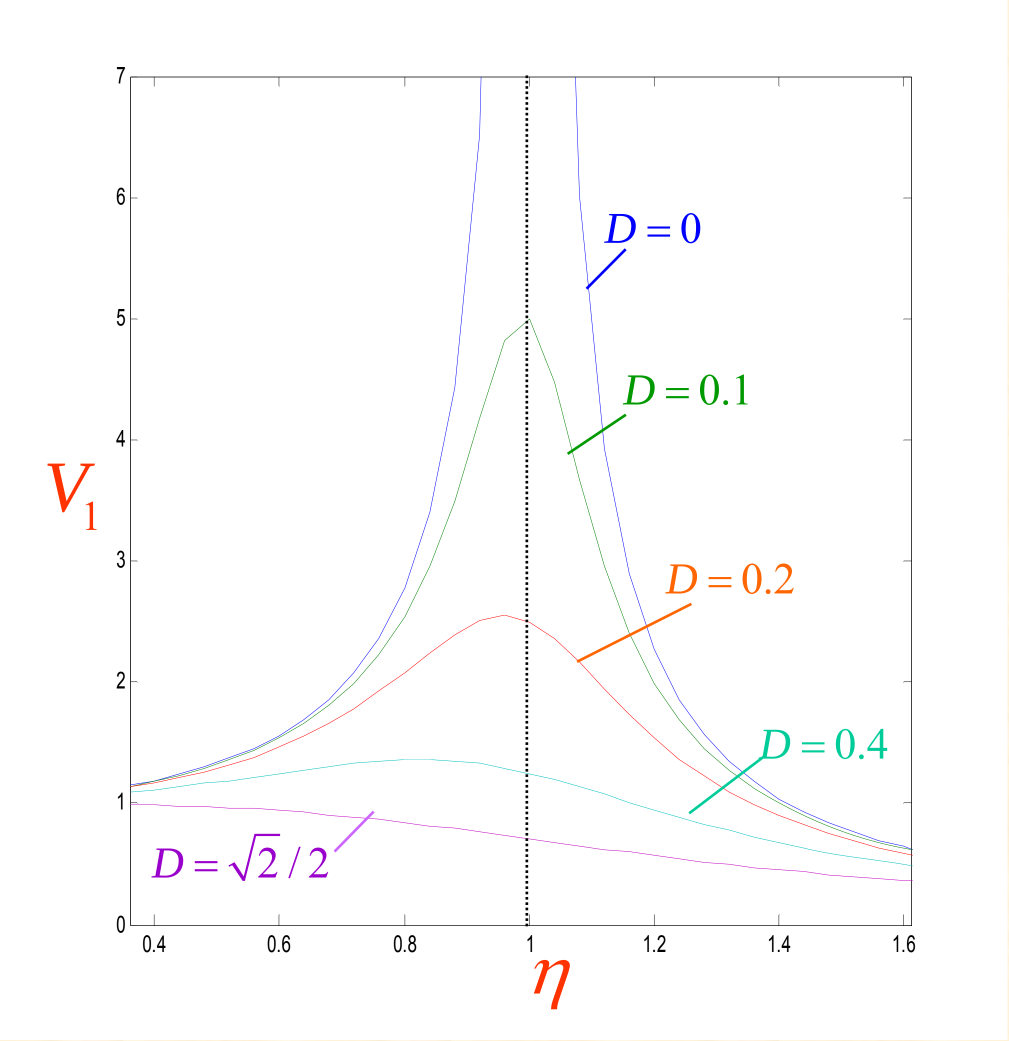
V_2 đạt cực đại khi:

$$\eta = \sqrt{\sqrt{1 + 8D^2} - \frac{1}{2D}} \approx \sqrt{1 - 2D^2}$$ Nếu: $D \ll 1$

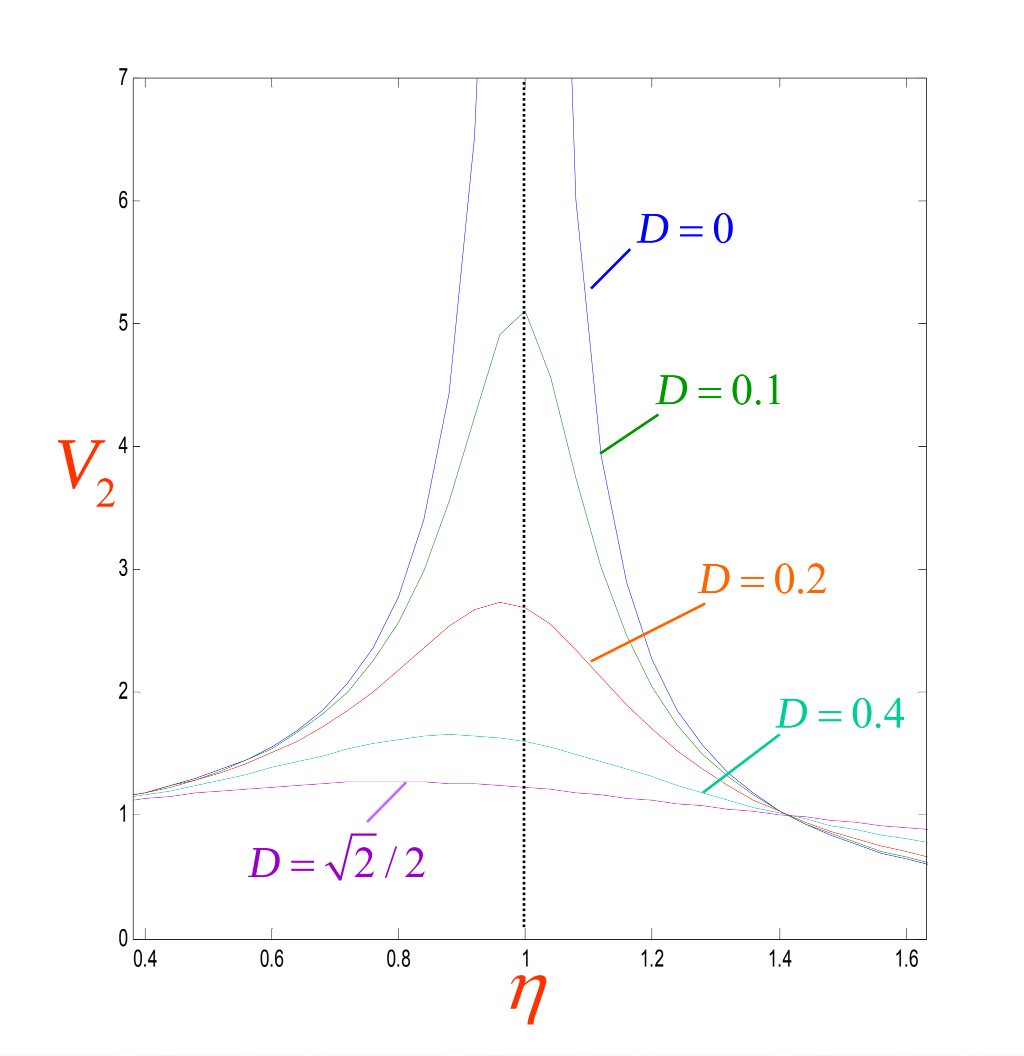
V_3 đạt cực đại khi:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - 2D^2}}$$

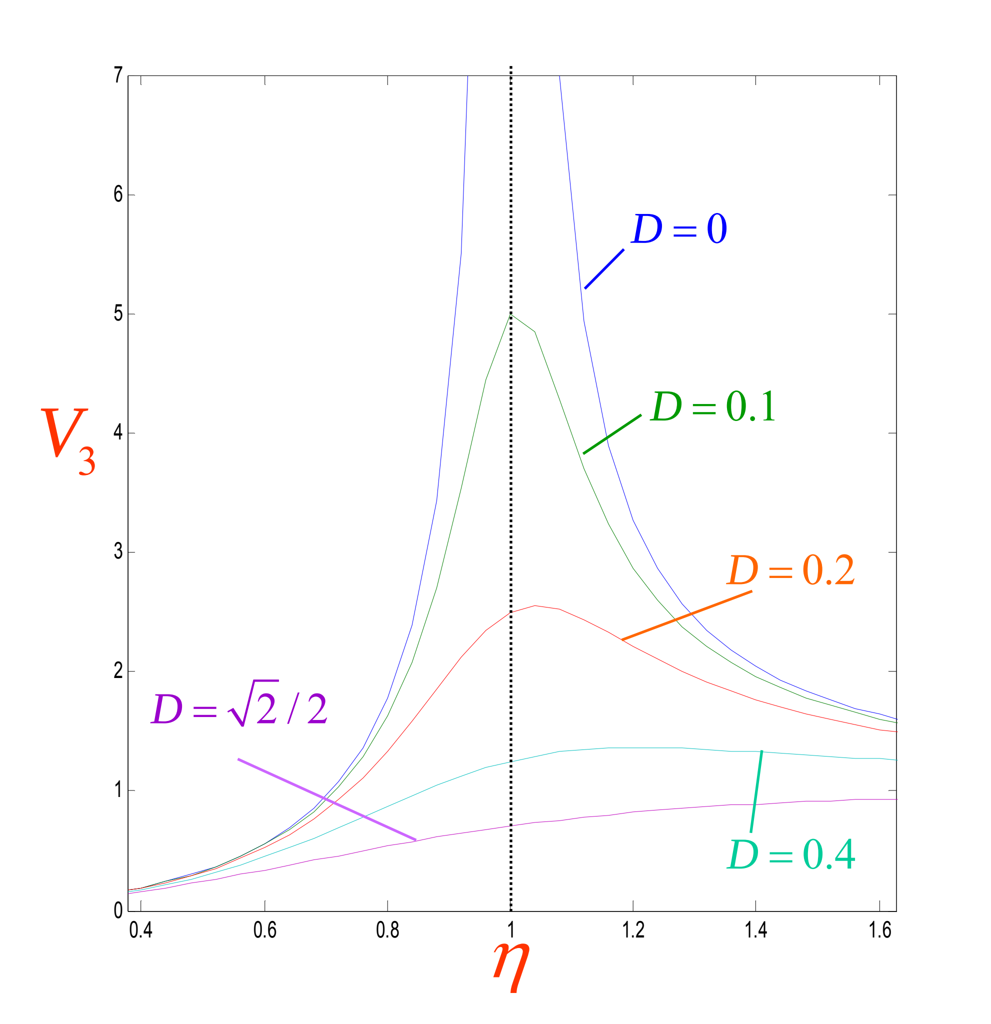
Đồ thị của V_1 với các giá trị D cho trước:



Đồ thị của V_2 với các giá trị D cho trước:



Đồ thị của V_3 với các giá trị D cho trước:



§4. Dao động của hệ chịu kích động tuần hoàn

Giả sử lực kích động biểu diễn bởi một hàm tuần hoàn của t với chu kỳ T:

$$f(t) = a_o + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t) \quad (1)$$

Các hệ số Fourier a_o, a_j, b_j được xác định như sau:

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \qquad a_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos j\Omega t\, dt$$

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin j\Omega t\, dt \qquad j = 1 \to \infty$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của lực tuần hoàn có dạng:

$$\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_o^2 q=\frac{1}{m}\left[a_o+\sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos j\Omega t+b_j\sin j\Omega t)\right] \qquad (2)$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (2) dưới dạng:

$$q^*(t)=A_o+\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos j\Omega t+B_j\sin j\Omega t) \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2), ta nhận được:

$$A_o=\frac{a_o}{m\omega_o^2} \qquad A_j=\frac{(\omega_o^2-j^2\Omega^2)a_j-2\delta j\Omega b_j}{m\left[(\omega_o^2-j^2\Omega^2)^2+4\delta^2 j^2\Omega^2\right]}$$

$$B_j=\frac{(\omega_o^2-j^2\Omega^2)b_j+2\delta j\Omega a_j}{m\left[(\omega_o^2-j^2\Omega^2)^2+4\delta^2 j^2\Omega^2\right]}$$

Nghiệm (3) còn có thể viết dưới dạng sau:

$$q^*(t) = A_o + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \qquad (4)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) trong trường hợp lực cản nhỏ có dạng:

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) + A_o + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \qquad (5)$$

Tính chất nghiệm:

Số hạng thứ nhất của (5) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần.

Các số hạng còn lại biểu diễn thành phần dao động cưỡng bức.

❑ Trường hợp: hai kích động có tần số gần nhau:

Phương trình vi phân của hệ dao động một bậc tự do không cản chịu tác dụng của hai lực điều hoà với các tần số Ω_1 và Ω_2 có dạng:

$$m\ddot{q} + c\,q = \hat{F}_1 \sin \Omega_1 t + \hat{F}_2 \sin \Omega_2 t \qquad (1)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, dao động cưỡng bức của hệ có dạng:

$$q = A_1 \sin \Omega_1 t + A_2 \sin \Omega_2 t \qquad (2)$$

Trong đó:

$$\mathrm{A}_1 = \frac{\hat{F}_1}{c}\frac{1}{1-\eta_1^2} \qquad \mathrm{A}_2 = \frac{\hat{F}_2}{c}\frac{1}{1-\eta_2^2} \qquad (3)$$

Xét trường hợp Ω_1 và Ω_2 khá gần nhau.

Do đặc điểm này ta sẽ biểu diễn nghiệm (2) dưới dạng:

$$q(t) = A_1 \sin\Omega_1 t + A_2 \sin\Omega_2 t$$

$$= \frac{A_1 + A_2}{2}(\sin\Omega_1 t + \sin\Omega_2 t) + \frac{A_1 - A_2}{2}(\sin\Omega_1 t - \sin\Omega_2 t)$$

$$= (A_1 + A_2)\cos\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \sin\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t + (A_1 - A_2)\sin\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \cos\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t$$

Ta đưa vào ký hiệu:

$$B_1(t) = (A_1 + A_2)\cos\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t$$

$$B_2(t) = (A_1 - A_2)\sin\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t$$

$$\Omega = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}$$

Do Ω_1 gần Ω_2 nên $B_1(t)$, $B_2(t)$ là các hàm thay đổi chậm theo t.

Nghiệm của phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$q(t) = A\sin(\Omega t + \alpha) = B_1 \sin\Omega t + B_2 cos\Omega t$$

Trong đó:

$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$: Biên độ thay đổi chậm theo thời gian.

$\Omega = \dfrac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$: Giá trị trung bình của hai tần số.

$\alpha = arctg\left(\dfrac{B_1}{B_2}\right)$: Pha thay đổi chậm theo thời gian.

Như thế chuyển động của hệ có tính chất điều hoà với biên độ dao động A là hàm thay đổi theo thời gian. Chu kỳ thay đổi theo thời gian là:

$$T_a = \frac{4\pi}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

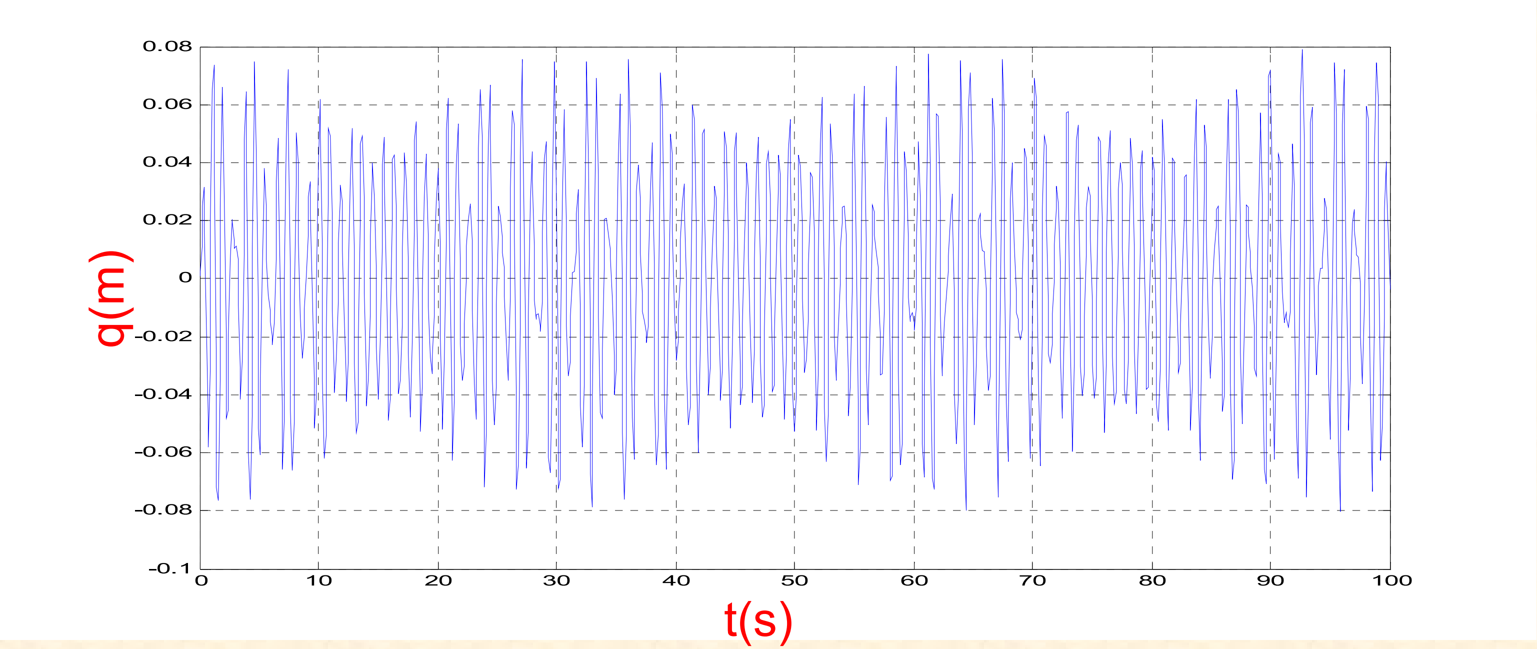
Vì hiệu số $\Omega_1 - \Omega_2$ nhỏ nên chu kỳ T_a có giá trị lớn hơn nhiều so với chu kỳ của hệ:

$$T = \frac{4\pi}{\Omega_1 + \Omega_2}$$

Đồ thị dao động biểu thị trên hình vẽ dưới đây.

Hiện tượng dao động như hình vẽ này gọi là hiện tượng phách.

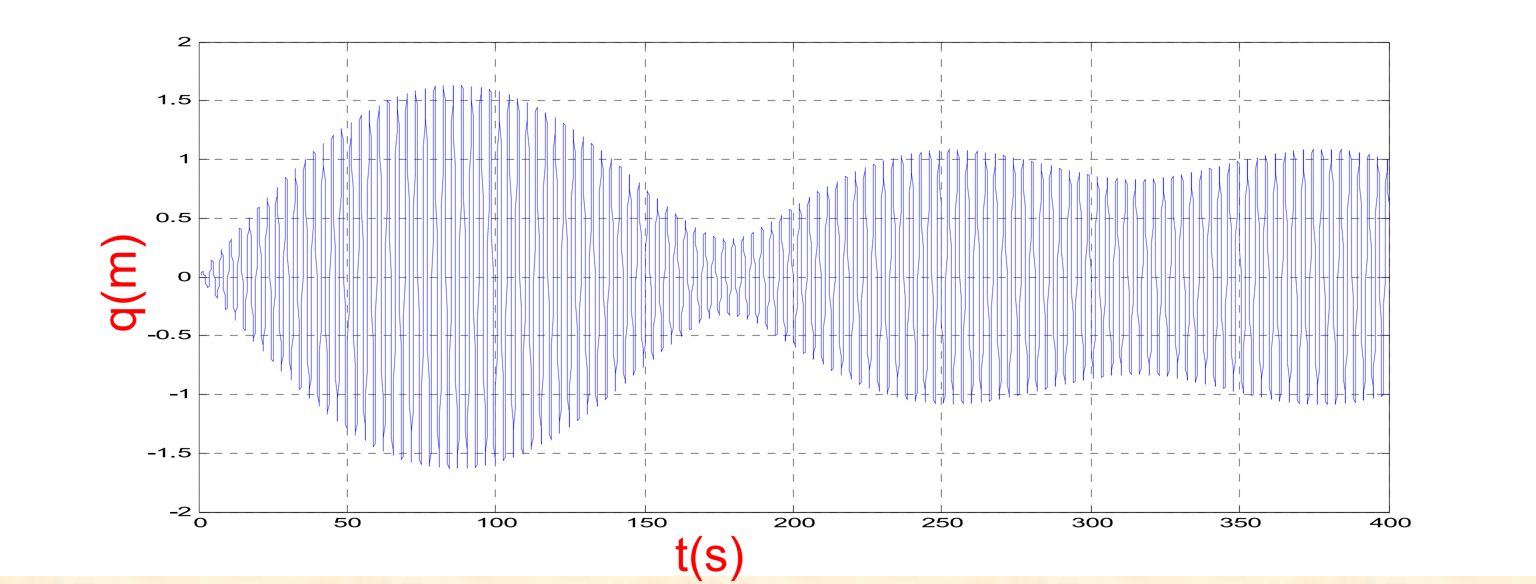
Như vậy, hiện tượng phách là hiện tượng biên độ dao động thay đổi tuần hoàn chậm theo thời gian.



Hiện tượng phách ở đây xuất hiện khi tần số kích động Ω_1 khá gần tần số kích động Ω_2.

Và ở phần trước ta cũng thấy: hiện tượng phách xuất hiện khi tần số của lực kích động Ω khá gần tần số riêng ω_o của hệ.

Tuy nhiên, nếu quan tâm đến lực cản thì dao động tự do sẽ tắt dần, và do đó theo thời gian hiện tượng phách cũng sẽ mất đi.(hình vẽ dưới):



§5. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động bất kỳ

Giả sử hàm kích động được biểu diễn bởi hàm khả vi nào đó, thì phương trình dao động của hệ có dạng:

$$m\,\ddot{q} + b\,\dot{q} + c\,q = f(t) \qquad (1)$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\ddot{q} + 2\delta\,\dot{q} + \omega_o^2\,q = \frac{f(t)}{m} = g(t) \qquad (2)$$

Nghiệm của (2) gồm : nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng của nó.

Nghiệm thuần nhất: trong trường hợp cản nhỏ, nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất có dạng:

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha) = e^{-\delta t}(C_1 cos\omega t + C_2 \sin\omega t) \quad (3)$$

Nghiệm (3) còn có thể viết dưới dạng:

$$q(t) = C_1 q_1(t) + C_2 q_2(t) \quad (4)$$

Trong đó:

$$q_1(t) = e^{-\delta t}\cos\omega \mathrm{t}$$

$$q_2(t) = e^{-\delta t}\sin\omega \mathrm{t}$$

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange:

Tìm nghiệm của (2) dưới dạng tương tự(4) nhưng C_1 và C_2 là hàm của thời gian:

$$q(t) = C_1(t)\,q_1(t) + C_2(t)\,q_2(t) \qquad (5)$$

Đạo hàm (5) theo thời gian ta có:

$$\dot{q}(t) = \dot{C}_1\,q_1 + \dot{C}_2\,q_2 + C_1\,\dot{q}_1 + C_2\,\dot{q}_2 \qquad (6)$$

Nếu ta đưa vào điều kiện:

$$\dot{C}_1\,q_1 + \dot{C}_2\,q_2 = 0 \qquad (7)$$

Thì biểu thức (6) có dạng:

$$\dot{q}(t) = C_1\,\dot{q}_1 + C_2\,\dot{q}_2 \qquad (8)$$

Đạo hàm biểu thức (8) theo thời gian, ta có:

$$\ddot{q}(t) = \dot{C}_1\,\dot{q}_1 + \dot{C}_2\,\dot{q}_2 + C_1\,\ddot{q}_1 + C_2\,\ddot{q}_2 \qquad (9)$$

Thế (5), (8) và (9) vào (2) ta nhận được phương trình:

$$\dot{C}_1\,\dot{q}_1 + \dot{C}_2\,\dot{q}_2 = g(t) \qquad (10)$$

Từ (7) và (10) ta có hệ:

$$\dot{C}_1\,q_1 + \dot{C}_2\,q_2 = 0$$

$$\dot{C}_1\,\dot{q}_1 + \dot{C}_2\,\dot{q}_2 = g(t)$$

Giải hệ này:

$$\dot{C}_1 = -\frac{q_2}{q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2}\,g(t)$$

$$\dot{C}_2 = \frac{q_1}{q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2}\,g(t) \qquad (11)$$

Thế các biểu thức

$$q_1(t) = e^{-\delta t}\cos\omega t \quad \text{và} \quad q_2(t) = e^{-\delta t}\sin\omega t$$

vào (11) ta được:

$$\dot{C}_1 = -\frac{1}{\omega}e^{\delta t}\sin\omega t\, g(t)$$

$$\dot{C}_2 = \frac{1}{\omega}e^{\delta t}\cos\omega t\, g(t) \qquad (12)$$

Tích phân (12) ta được:

$$C_1(t) = A - \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\delta\tau}\sin\omega\tau\, g(\tau)\, d\tau$$

$$C_2(t) = B + \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\delta\tau}\cos\omega\tau\, g(\tau)\, d\tau \qquad (13)$$

Thế biểu thức (12) này vào (5) ta được nghiệm tổng quát của (2):

$$q(t) = e^{-\delta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \\ + \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \qquad (14)$$

Biểu thức nghiệm (14) có hai thành phần:

Thành phần:

$$q_h(t) = e^{-\delta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \qquad (15)$$

là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng.

Thành phần:

$$q_r(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \qquad (16)$$

là nghiệm riêng của phương trình (2).

Các hằng số A và B trong nghiệm (14) được xác định từ điều kiện ban đầu.

Giả sử điều kiện đầu:

$$q(0) = q_o\,;\ \ \dot{q}(0) = \dot{q}_o$$

→ Ta xác định được:

$$A = q_o\,;\ \ B = \frac{1}{\omega}(\dot{q}_o + \delta\, q_o)$$

Cuối cùng ta có biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2):

$$q(t) = e^{-\delta t}\left(q_o \cos\omega t + \frac{1}{\omega}(\dot{q}_o + \delta\, q_o)\sin\omega t\right) + \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \qquad (17)$$

Chương 2

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

1. Thành lập phương trình vi phân dao động

2. Dao động tự do không cản

3. Dao động tự do có cản

4. Dao động cưỡng bức

Giới hạn: trong chương này, *chỉ xét hệ cơ học chịu liên kết hôlônôm, lý tưởng; hệ n bậc tự do cần n toạ độ suy rộng độc lập → Hệ dao động là hệ n phương trình vi phân cấp 2 hệ số hằng số.*

§1. Thành lập phương trình VPCĐ

A. Sử dụng phương trình Lagrange II

Đối với hệ Hôlônôm, có n bậc tự do, xác định bởi các toạ độ suy rộng độc lập q_1, q_2,..., q_n, phương trình Lagrange II có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i ; \quad i = 1 \rightarrow n$$

❖ Nếu các lực tác dụng lên hệ chỉ là lực có thế:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1 \to n$$

L là hàm Lagrange : $L = T - \Pi$

❖ Nếu các lực tác dụng lên hệ bao gồm cả lực có thế và lực cản nhớt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i^{\pi}+Q_i^{\phi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i};\ i=1\rightarrow n$$

Trong đó: Π - Là thế năng; Φ - Là hàm hao tán

Phương trình trên còn có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}=0;\quad i=1\rightarrow n$$

❖ Nếu các lực tác dụng lên hệ ngoài các lực có thế và lực cản nhớt còn có các ngoại lực khác (lực kích động) phụ thuộc vào thời gian t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}+Q_i^P;\ i=1\rightarrow n$$

Q_i^P : Là lực suy rộng ứng với các lực hoạt động.

B. Sử dụng phương pháp lực (ĐS)

Phương pháp này thường sử dụng để lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ cơ học có dạng dầm, khung,…

§2. Dao động tự do không cản

a. Các tần số riêng và các dạng dao động riêng.

b. Tính chất trực giao của các véctơ riêng.

c. Các toạ độ chính.

d. Các toạ độ chuẩn.

a. Các tần số riêng và các dạng dao động riêng

❖ Phương trình vi phân mô tả dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do có dạng:

$$M\ddot{q} + Cq = 0 \qquad (1)$$

Trong đó M và C là các ma trận vuông cấp n có các phần tử là hằng số.

M là ma trận khối lượng; C là ma trận độ cứng.

❖ Ta tìm nghiệm của phương trình (1) dưới dạng:

$$q = a\sin(\omega t + \alpha) \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1), biến đổi ta nhận được phương trình:

$$\left(C - \omega^2 M\right)a = 0 \qquad (3)$$

Để cho phương trình ĐSTT (3) có nghiệm không tầm thường, điều kiện cần là:

$$\left|C - \omega^2 M\right| = 0 \qquad (4)$$

Phương trình (4) là phương trình đại số bậc n đối với ω^2 và được gọi là phương trình tần số hoặc phương trình đặc trưng.

Các nghiệm ω_k ($k = 1, 2, \ldots n$) của phương trình đặc trưng được gọi là các tần số riêng.

Thay lần lượt các giá trị của ω_k ($k = 1, 2, \ldots n$) vào phương trình (3) ta nhận được các hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định các thành phần của vectơ a_k

$$\left(C - \omega_k^2 M\right) a_k = 0 \qquad (5)$$

Các vectơ a_k này được gọi là các vectơ riêng.

Chú ý: Các thành phần của vectơ a_k được xác định sai khác nhau một hằng số nhân. Chẳng hạn ta có thể chọn a_{1k} một cách tuỳ ý.

Ta đưa vào ký hiệu:

$$v_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{1k}} \quad \text{hoặc} \quad v_i^{(k)} = \frac{a_i^{(k)}}{a_1^{(k)}} \quad \text{với} \quad i, k = 1 \to n$$

Lần lượt thay các ω_1, ω_2,...., ω_n vào phương trình (5), ta xác định được ma trận:

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

Mỗi vectơ cột của ma trận V:

$$v_k = \left[v_{1k}\ v_{2k}\ \ldots\ v_{nk} \right]^T = \left[v_1^{(k)}\ v_2^{(k)}\ \ldots\ v_n^{(k)} \right]^T$$

Cho ta biết một dạng dao động riêng của hệ dao động.
Ma trận V được gọi là ma trận dạng riêng (Modalmatrix)

❖ Xét trường hợp hệ hai bậc tự do. Khi đó PTVP dao động tự do không cản có dạng:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 m_{11} & c_{12} - \omega^2 m_{12} \\ c_{21} - \omega^2 m_{21} & c_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Khai triển định thức cấp hai (7) ta có:

$$(c_{11}-\omega^2 m_{11})(c_{22}-\omega^2 m_{22})-$$
$$-(c_{12}-\omega^2 m_{12})(c_{21}-\omega^2 m_{21})=0$$

Đưa vào ký hiệu : $v_i = a_2^{(i)} / a_1^{(i)}$ Thì ta có:

$$(c_{11}-\omega^2 m_{11})+v_i(c_{12}-\omega^2 m_{12})=0;\ i=1,2$$

Hoặc

$$(c_{21}-\omega^2 m_{21})+v_i(c_{22}-\omega^2 m_{22})=0;\ i=1,2$$

Ta được:

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

b. Tính chất trực giao của các vectơ riêng

Xét phương trình dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do:

$$M\ddot{q} + Cq = 0$$

Nếu các ma trận khối lượng M và ma trận độ cứng C là các ma trận thực, đối xứng thì các vectơ riêng v_k tương ứng với các tần số riêng ω_k sẽ trực giao với ma trận khối lượng M và ma trận độ cứng C. Ta có:

$$v_j^T M v_i = 0; v_j^T C v_i = 0; khi\ \omega_i \neq \omega_j$$

c. Các toạ độ chính

Mục đích: Sử dụng toạ độ chính để thu được phương trình dao động của hệ có dạng đơn giản hơn.

Phương trình vi phân dao động của hệ n bậc tự do có dạng:

$$M\ddot{q} + Cq = 0 \qquad (1)$$

Đây là hệ n phương trình vi phân cấp 2 mà các toạ độ suy rộng có liên kết với nhau (các phương trình hoàn toàn không độc lập với nhau).

Để được một hệ dao động đơn giản hơn, người ta thường thay toạ độ suy rộng q bằng toạ độ suy rộng p, chẳng hạn sao cho hệ phương trình vi phân chuyển động đối với toạ độ mới p sẽ gồm n phương trình vi phân độc lập nhau hoàn toàn. Trường hợp này, p được gọi là toạ độ chính của cơ hệ.

Thực hiện phép đổi biến:

$$q = Vp \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta có:

$$M\,V\,\ddot{p} + C\,V\,p = 0$$

Nhân cả hai vế của phương trình trên với V^T ta được:

$$V^T M\,V\,\ddot{p} + V^T C\,V\,p = 0 \qquad (3)$$

Do tính chất trực giao, nên:

$$V^T M V = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_n \end{bmatrix} \qquad V^T C V = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_n \end{bmatrix}$$

Do vậy phương trình (3) có dạng:

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i p_i = 0 \; ; \qquad i = 1 \to n \qquad (4)$$

Trong đó:

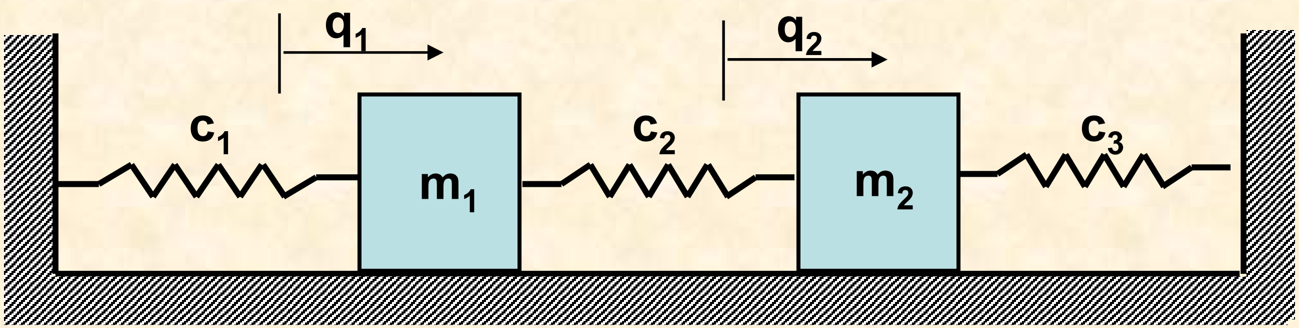
$$\mu_i = v_i^T M v_i ; \; \gamma_i = v_i^T C v_i ; \quad i = 1 \to n$$

Nếu đặt: $\omega_i^2 = \dfrac{\gamma_i}{\mu_i}$

Thì các phương trình (4) đưa về dạng:

$$\ddot{p}_i + \omega_i^2 p_i = 0; \qquad i = 1 \to n \qquad (5)$$

Ví dụ 1: Cho cơ hệ như hình vẽ, biết $m_1 = m_2 = m$; $c_1 = c_2 = c_3 = c$



1. Thành lập phương trình vi phân chuyển động.
2. Tìm tần số dao động riêng và ma trận dạng riêng V.
3. Tìm quy luật chuyển động của cơ hệ.

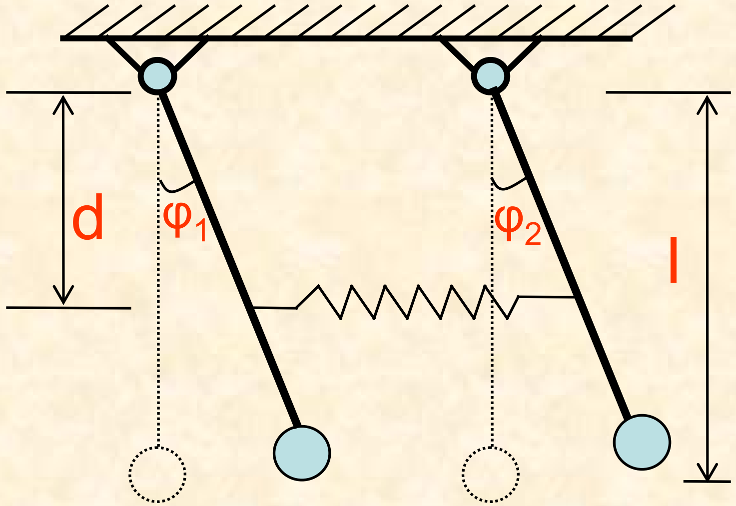
Ví dụ 1: Một hệ hai con lắc có chiều dài mỗi thanh là l, khối lượng mỗi vật điểm là m. Hai thanh được nối với nhau bằng lò xo có hệ số cứng là c, ở vị trí cách trục quay một đoạn là d. Độ dài của lò xo ở trạng thái không biến dạng bằng khoảng giữa hai trục con lắc. Bỏ qua khối lượng của thanh, lò xo và bỏ qua lực cản.

a. Xác định các toạ độ chính của hệ.

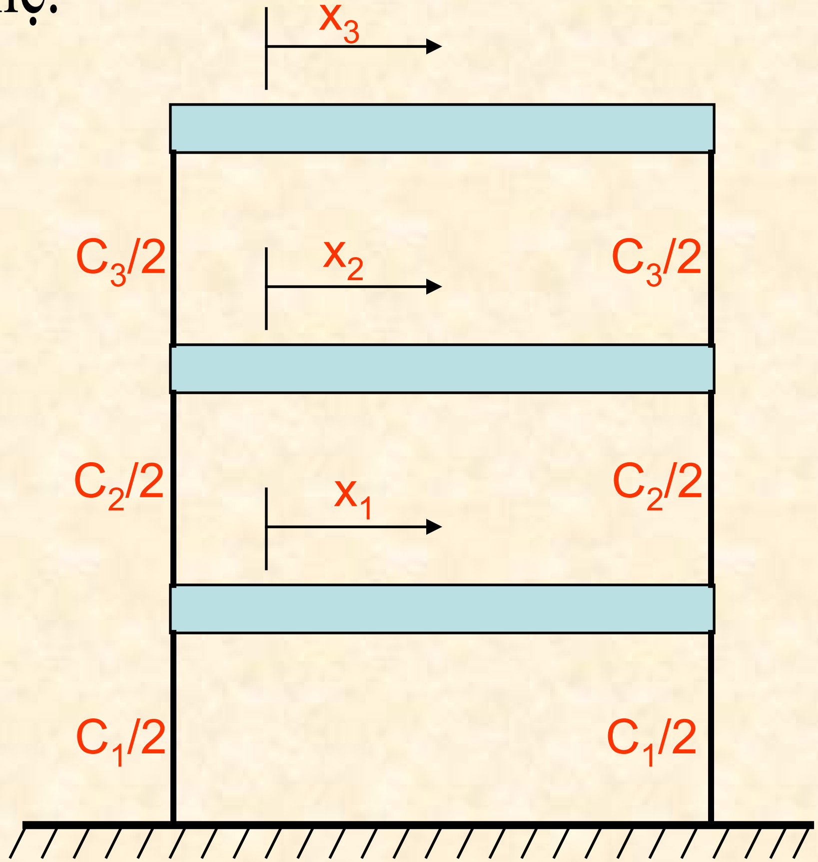
b. Xác định dao động tự do của hệ với điều kiện đầu:

$$\varphi_1(0) = \varphi_0,\ \varphi_2(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}_1(0) = 0,\quad \dot{\varphi}_2(0) = 0$$



Ví dụ 2: Mô hình dao động ngang của toà nhà 3 tầng. Xem rằng khối lượng của các tầng bằng nhau $m_1 = m_2 = m_3 = m = 262,69.10^3$ kg. Độ cứng uốn của các bức tường ở các tầng là $c_1 = 3c$, $c_2 = 2c$, $c_3 = c = 88,56.10^6$ N/m. Xác định các tần số riêng và các dạng dao động riêng của cơ hệ.



d. Các toạ độ chuẩn

Như đã biết, bằng phép thế $q = V\,p$ (V là ma trận dạng riêng, p là vectơ các toạ độ chính) ta có thể đưa phương trình vi phân dao động :

$$M\,\ddot{q} + C\,q = 0$$

về dạng vế tách rời nhau:

$$\mu_i\,\ddot{p}_i + \gamma_i\,p_i = 0\ ; \quad i = 1 \rightarrow n$$

Trong đó:

$$\mu_i = v_i^T M\,v_i\ ; \quad \gamma_i = v_i^T C\,v_i$$

Do các phần tử của vectơ v_i của ma trận V được xác định sai khác nhau một hằng số nhân, cho nên ta có thể chọn các vectơ v_i một cách thích hợp sao cho:

$$V^T M V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E$$

Ma trận dạng riêng được chọn như vậy được gọi là ma trận dạng riêng chuẩn. Ta ký hiệu ma trận dạng riêng chuẩn bằng V_n. Ta có:

$$V_n^T M V_n = E \qquad V_n^T C V_n = D_\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Bằng phép thế $q = V_n p$ ta có thể đưa phương trình dao động ban đầu về:

$$E\ddot{p} + D_\omega p = 0$$

Các toạ độ chính $p = [p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n]^T$ trong phép thế:

$q = V_n p$ được gọi là các toạ độ chuẩn.

Toạ độ chuẩn là các toạ độ chính đặc biệt.

Nếu ta biết được ma trận dạng riêng:

$$V = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots\ldots, \mathrm{v}_n]^T$$

Thì ma trận dạng riêng chuẩn được xác định bởi:

$$V_n = [\frac{1}{\alpha_1}\mathrm{v}_1, \frac{1}{\alpha_2}\mathrm{v}_2, \ldots\ldots, \frac{1}{\alpha_n}\mathrm{v}_n]^T$$

Trong đó:

$$\alpha_i = \pm\sqrt{\mu_i} = \pm\sqrt{v_i^T M v_i}$$

§3. Dao động tự do có cản

a. Phương pháp trực tiếp

b. Phương pháp ma trận dạng riêng

a. Phương pháp trực tiếp

Phương trình vi phân dao động tự do có lực cản tỷ lệ với vận tốc của hệ n bậc tự do có dạng:

$$M\ddot{q}+B\dot{q}+Cq=0 \qquad (1)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (1) dưới dạng:

$$q(t)=\hat{q}\,e^{\lambda t} \qquad (2)$$

$\hat{q}$ Là vectơ hằng.

Thế biểu thức (2) vào (1), rồi đơn giản ta được:

$$\left(\lambda^2 M + \lambda B + C\right)\hat{q} = 0 \qquad (3)$$

Để cho các phần tử của vectơ $\hat{q}$ không đồng thời triệt tiêu thì:

$$P(\lambda) = \det\left(\lambda^2 M + \lambda B + C\right) = 0 \qquad (4)$$

Phương trình (4) được gọi là phương trình đặc trưng.

Khi M là ma trận chính qui: $\det\left(M\right) = 0$, thì $P(\lambda)$ là đa thức bậc 2n của λ.

Giải phương trình (4) ta được 2n nghiệm thực hoặc phức liên hợp.

❖ Ta xét trường hợp, phương trình đặc trưng (4) có nghiệm dạng:

$$\lambda_k = -\delta_k + i\,\omega_k\,,\ \lambda_{k+n} = -\delta_k - i\,\omega_k\,,\ k = 1 \to n$$

Thì trường hợp này được gọi là trường hợp cản yếu.

Ta đặt:

$$\hat{q}_k = \hat{u}_k + i\,\hat{v}_k\,,\ \ \hat{q}_{k+n} = \hat{u}_k - i\,\hat{v}_k\,,$$

Nghiệm tương ứng với cặp trị riêng λ_k và λ_{k+n} có dạng:

$$q_k(t) = \overline{C}_k\, e^{\lambda_k t}\left(\hat{u}_k + i\,\hat{v}_k\right) + \overline{D}_k\, e^{\lambda_{k+n} t}\left(\hat{u}_k - i\,\hat{v}_k\right) \qquad (5)$$

Với $\overline{C}_k\,,\overline{D}_k$ là các hằng số phức.

Nếu ta đưa vào các hằng số tích phân mới:

$$C_k = \bar{C}_k + \bar{D}_k\,,\;\; D_k = i\left(\bar{C}_k - \bar{D}_k\right)$$

Thì biểu thức (5) có dạng:

$$q_k(t) = e^{-\delta_k t}\left[(C_k\,\hat{u}_k + D_k\,\hat{v}_k)cos\omega_k t + (D_k\,\hat{u}_k - C_k\,\hat{v}_k)\sin\omega_k t\right]$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) có dạng:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t)$$

Chú ý: $\hat{u}_k$, $\hat{v}_k$ nói chung không tỷ lệ với nhau nên các toạ độ của véctơ q_k có pha khác nhau.

b. Phương pháp ma trận dạng riêng

Trong một vài bài toán kỹ thuật, ma trận B có thể biểu diễn dưới dạng:

$$B = \alpha M + \delta C \qquad (1)$$

Trong đó α và δ là các hằng số. Ma trận B có dạng (1) được gọi là ma trận cản Rayleigh.

Biểu thức (1) có khi được viết dưới dạng:

$$B = \alpha \overline{\omega} M + \frac{\beta}{\overline{\omega}} C$$

Trong đó $\overline{\omega}$ là một tần số qui chiếu tuỳ ý được đưa vào để α và β là các đại lượng không thứ nguyên.

Bằng phép biến đổi q = V p, với V là ma trận dạng riêng, ta đưa phương trình (1) về dạng:

$$\mu_i \ddot{p}_i + \beta_i \dot{p}_i + \gamma_i p_i = 0; \qquad i = 1 \rightarrow n \qquad (2)$$

Trong đó:

$$\mu_i = v_i^T M v_i\,; \quad \beta_i = v_i^T B v_i\,; \quad \gamma_i = v_i^T C v_i$$

Nghiệm của phương trình (2) đã được khảo sát trong chương 2

§4. Dao động cưỡng bức

a. Phương pháp giải trực tiếp

b. Phương pháp ma trận dạng riêng

a. Phương pháp giải trực tiếp

- Dao động cưỡng bức không cản chịu kích động điều hoà.

- Dao động cưỡng bức có cản chịu kích động tuần hoàn.

Dao động cưỡng bức không cản chịu kích động điều hoà

Dao động tuyến tính cưỡng bức không cản của hệ n bậc tự do chịu kích động điều hoà có dạng:

$$M\ddot{q} + Cq = \hat{f}\sin\Omega t \qquad (1)$$

Ở chế độ chuyển động bình ổn, ta tìm nghiệm của phương trình (1) dưới dạng:

$$q(t) = u\sin\Omega t \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta có:

$$\left(-\Omega^2 M + C\right) u = \hat{f} \Rightarrow u = H(\Omega)\,\hat{f} \qquad (3)$$

Trong đó:

$$H(\Omega) = \left(-\Omega^2 M + C\right)^{-1}$$

và được gọi là ma trận truyền.

Giải hệ phương trình (3), ta được:

$$u_k(\Omega) = \frac{\Delta_k(\Omega)}{\Delta(\Omega)} \qquad (4)$$

Trong đó:

$$\Delta(\Omega) = \det(-\Omega^2 M + C) \qquad (5)$$

$\Delta_k(\Omega)$ có được bằng cách thay $\hat{f}$ vào cột thứ k của Δ.

Ta thấy $\Delta(\Omega) = 0$ khi $\Omega = \omega_j,\ j = 1 \to n$

Các trường hợp có thể xảy ra:

❖ Trường hợp 1: $\Delta(\Omega) = 0,\ \Delta_k(\Omega) \neq 0$

Khi đó tần số lực kích động Ω trùng với một trong các tần số dao động riêng. Biên độ dao động tăng lên vô cùng. Trường hợp này được gọi là trường hợp cộng hưởng.

❖ Trường hợp 2: $\Delta(\Omega) = 0,\ \Omega = \omega_j$

$$\Delta_k(\Omega) = 0\ \forall k,\ \ \lim_{\Omega \to \omega_j} \frac{\Delta_k(\Omega)}{\Delta(\Omega)} < \infty$$

Trường hợp này mặc dù tần số lực kích động trùng với tần số riêng, nhưng biên độ dao động vẫn bị giới nội. Trường hợp này được gọi là trường hợp giả cộng hưởng.

❖ Trường hợp 3: $\Delta(\Omega) \neq 0, \; \Delta_k(\Omega) = 0$ với k xác định.

Trong trường hợp này $u_k = 0$. Dao động ứng với toạ độ thứ k bị dập tắt.

Dao động cưỡng bức có cản chịu kích động tuần hoàn

Dao động cưỡng bức có cản nhớt của hệ tuyến tính n bậc tự do có dạng:

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f(t) \qquad (1)$$

Giả sử f(t) tuần hoàn theo thời gian và có thể khai triển thành chuỗi Fourier một cách gần đúng:

$$f(t) = a_o + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t \right) \qquad (2)$$

Sử dụng nguyên lý cộng tác dụng để tìm nghiệm.

- Trước hết ta tìm nghiệm của phương trình:

$$M\ddot{q}_o + B\dot{q}_o + Cq_o = a_o$$

dưới dạng: $q_o = v_o$

từ hai phương trình trên ta suy ra: $Cv_o = a_o$ (3)

- Sau đó ta tìm nghiệm của phương trình:

$$M\,\ddot{q}_k + B\,\dot{q}_k + C\,q_k = a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t \qquad (4)$$

Nghiệm của phương trình (4) được tìm dưới dạng:

$$q_k = u_k \sin k\Omega t + v_k \cos k\Omega t$$

Từ nghiệm trên ta có:

$$\dot{q}_k = k\Omega\left(u_k cos k\Omega t - v_k \sin k\Omega t\right)$$

$$\ddot{q}_k = -k^2\Omega^2\left(u_k \sin k\Omega t + v_k \cos k\Omega t\right)$$

Thế các biểu thức tìm được vào phương trình (4), rồi so sánh hệ số, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các vectơ u_k và v_k:

$$\begin{bmatrix} C - k^2\Omega^2 M & -k\Omega B \\ k\Omega B & C - k^2\Omega^2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Khi định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình trên khác không, thì các vectơ u_k và v_k được xác định duy nhất.

Như thế nghiệm của phương trình dao động cương bức (1) là:

$$q(t) = v_o + \sum_{k=1}^{m} \left(u_k \sin k\Omega t + v_k cosk\Omega t \right) \qquad (6)$$

b. Phương pháp ma trận dạng riêng

- Dao động cưỡng bức không cản.
- Dao động cưỡng bức có cản.

Dao động cưỡng bức không cản

Phương pháp ma trận dạng riêng (Modalmatrix) được áp dụng rất thuận tiện đối với hệ không cản:

$$M\ddot{q} + Cq = f(t) \qquad (1)$$

Trong đó M và C là các ma trận thực, đối xứng.

Áp dụng phép biến đổi toạ độ:

$$q = V\,p \qquad (2)$$

với V là ma trận dạng riêng, p là vectơ các toạ độ chính.

Thay (2) vào (1) ta có:

$$MV\ddot{p} + CVp = f(t)$$

Suy ra:

$$V^T MV\ddot{p} + V^T CVp = V^T f(t) \qquad (3)$$

Các ma trận $V^T M V$ và $V^T C V$ có dạng đường chéo

Nếu đưa vào ký hiệu: $h_i = v_i^T f(t), \quad i = 1 \to n$

Thì phương trình (3) có thể viết dưới dạng:

$$\mu_i \ddot{p} + \gamma_i p = h_i \qquad i = 1 \to n \qquad (4)$$

◆ Nghiệm của mỗi phương trình (4) ứng với điều kiện đầu:

$$p_i(0) = p_{i0}\,; \qquad \dot{p}_i(0) = \dot{p}_{i0}$$

có dạng:

$$p_i(t) = p_{i0}\cos\omega_i t + \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i}\sin\omega_i t +$$

$$+\frac{1}{\mu_i\omega_i}\int_0^t h_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau \qquad (5)$$

Với: $$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i}$$

Đối với trường hợp kích động điều hoà

$$f_i(t) = \hat{f}_i \sin \Omega t$$

Thì:

$$h_i(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} v_{ki} \hat{f}_k \right) \sin \Omega t = \hat{h}_i \sin \Omega t$$

Phương trình dao động trong trường hợp này:

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i p_i = \hat{h}_i \sin \Omega t \qquad i = 1 \rightarrow n \qquad (6)$$

Nghiệm của các phương trình (6) trong giai đoạn bình ổn là:

$$p_i(t) = \frac{\hat{h}_i}{\gamma_i\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_i^2}\right)} \sin \Omega t$$

Trở lại toạ độ q_k:

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^{n} v_{ki} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_{ki}\hat{h}_i}{\gamma_i\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_i^2}\right)} \sin \Omega t$$

Ta thấy khi Ω bằng tần số riêng ω_i thì xảy ra hiện tượng cộng hưởng.

Dao động cưỡng bức có cản

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ là:

$$M\ \ddot{q} + B\,\dot{q} + C\,q = f(t) \qquad (1)$$

Trong kỹ thuật ta hay gặp trường hợp:

$$B = \alpha M + \delta C$$

Bằng các phép biến đổi tương tự như trên ta đưa (1) về dạng:

$$\mu_i \ddot{p}_i + \beta_i \dot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i(t) \quad i = 1 \rightarrow n \qquad (2)$$

Phương trình này đã được nghiên cứu kỹ trong các phần trên.

the end