Chương 1

KHÁI NIỆM VỀ DAO ĐỘNG

1. Định nghĩa

Dao động là quá trình mà đại lượng động học thay đổi theo thời gian và lặp lại ít nhất một lần. Dao động kỹ thuật là quá trình mà đại lượng kỹ thuật (máy móc, phương tiện cơ giới, công trình,…) thay đổi theo thời gian và lặp lại.

2. Phân loại

- Dựa vào số bậc tự do: dao động một bậc tự do, dao động hai bậc tự do, dao động nhiều bậc tự do.
- Dựa vào dạng dao động: dao động ngang, dao động xoắn, dao động uốn.
- Dựa vào nguyên nhân gây ra dao động: dao động tự do, dao động cưỡng bức, dao động tham số.
- Dựa vào kết quả khi đo đạt dao động: dao động tuần hoàn, không tuần hoàn, dao động điều hòa,….
- Dựa vào phương trình dao động: dao động tuyến tính, dao động phi tuyến.

3. Dao động điều hòa

3.1. Các tham số động học

- Phương trình chuyển động: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$
- Biên độ dao động A: là giá trị tuyệt đối của độ lệch lớn nhất trong đại lượng dao động.
- Góc pha $(\omega t + \varphi)$: là hàm theo thời gian t.
- Pha ban đầu φ : giá trị của góc pha ứng với t = 0; đơn vị rad.
- Tần số vòng (góc) ω đơn vị rad/s hay s^{-1}. Thường gọi tắt là tần số.
- Chu kỳ T: khoảng thời gian nhỏ nhất cần thiết để đại lượng dao động trở về vị trí ban đầu.

  $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$
- Tần số dao động f là số lần dao động thực hiện trong một giây, đơn vị s^{-1}.
- Quan hệ: $T = 2\pi f$ **.**
- Phương trình chuyển động cũng được viết theo cách khác: $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$

  Với $A^2 = C_1^2 + C_2^2$ và $tg\varphi = \dfrac{C_1}{C_2}$

  A, φ hay *C₁* , *C₂* xác định từ điều kiện đầu: $t = 0; x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

3.2. Biểu diễn phức của hàm điều hòa

Từ công thức Euler: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ta suy ra:

Hàm điều hòa $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ là phần ảo của số phức $y(t) = Ae^{(i\omega t+\varphi)}$ quay trong mặt phẳng phức với vận tốc góc ω.

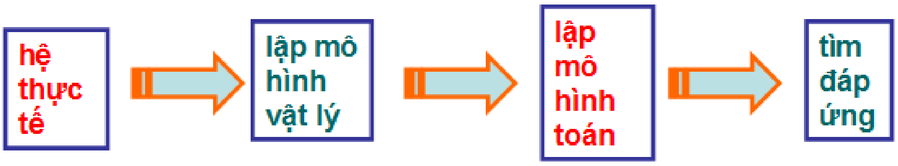
Ta có $y(t) = Ae^{(i\omega t+\varphi)} = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t} = \tilde{A}e^{i\omega t}$, với $\tilde{A} = Ae^{i\varphi}$ gọi là biên độ phức, là vị trí của số phức tại thời điểm t = 0.

4. Giải bài toán dao động

4.1. Bậc tự do của cơ hệ

Bậc tự do là tập hợp các tọa độ độc lập cần thiết để xác định vị trí của cơ hệ tại thời điểm bất kỳ. Dưới tác dụng của lực, hệ chuyển động hay nói cách khác là các tọa độ luôn thay đổi theo thời gian, tọa độ x là hàm theo t. Vậy x(t) xác định thì xác định được vị trí của hệ.

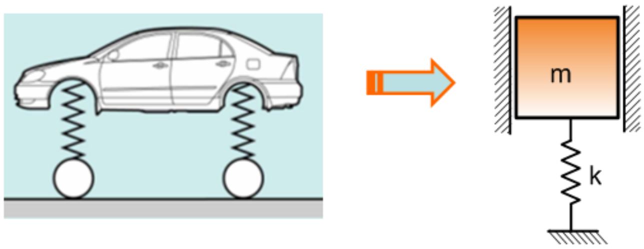
Để xác định được x(t), ta lần lượt tiến hành các bước:



4.2. Lập mô hình vật lý

Để giải một bài toán dao động của các cơ cấu thực tế, bước đầu tiên là phải lập mô hình phản ánh các đặc trưng của hệ, thể hiện sự liên kết giữa các phần tử khối lượng, giảm chấn, đàn hồi có sự tác dụng của các lực. Đây gọi là mô hình vật lý. Tùy thuộc vào phạm vi nghiên cứu và yêu cầu về độ chính xác của đáp ứng x(t), ta có mô hình từ đơn giản đến phức tạp, có một hoặc nhiều bậc tự do, tuyến tính hoặc phi tuyến. Lập mô hình để giải bài toán dao động các hệ kỹ thuật là một đặc trưng của môn học, điều nầy cũng cho thấy nhiều hệ thực tế có thể có cùng mô hình.

Ví dụ mô hình đơn giản khảo sát dao động ô tô (Hình 1)



Hình 1

4.3. Lập mô hình toán:

Thực chất của mô hình toán là viết phương trình vi phân dao động của cơ hệ. Cơ hệ có n bậc tự do thì có hệ n phương trình vi phân. Cơ sở để lập mô hình toán chủ yếu là sử dụng các kiến thức của môn học Cơ học kỹ thuật để giải mô hình vật lý. Có hai phương pháp thường dùng là phương pháp lực và phương pháp năng lượng.

4.3.1. Phương pháp lực

<u>a. Vật chuyển động tịnh tiến:</u> dùng định luật 2 Newton:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

b. Vật chuyển động quay: dùng phương trình vi phân của vật quay:

$$J_o\ddot{\theta} = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_k).$$

c.Vật chuyển động song phẳng: dùng phương trình vi phân của vật chuyển động song phẳng:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum F_{kx} \\ m\ddot{y}_C = \sum F_{ky} \\ J_z\ddot{\varphi} = \sum m_Z(\vec{F}_k) \end{cases}$$ C: là khối tâm của hệ z là trục đi qua khối tâm

d. Sử dụng nguyên lý d'Alembert.

4.3.2. Phương pháp năng lượng

Sử dụng phương trình Lagrange loại II

Hệ một bậc tự do: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q$ hay $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q$

Hệ n bậc tự do: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = Q_i,\ i = 1,2,\ldots,n$

T: Động năng của cơ hệ

Động năng của cơ hệ n chất điểm $T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} m_k v_k^2$

Động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến $T = \frac{1}{2}mv_C^2$

Động năng của vật rắn chuyển động quay $T = \frac{1}{2}J_z\omega^2$

Động năng của vật rắn chuyển động song phẳng $T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$

D: Hàm hao tán là năng lượng tiêu hao do giảm chấn.

V: Thế năng của hệ, gồm thế năng các lò xo và thế năng do trọng lực.

Q: Lực suy rộng được suy ra từ việc tính toán công ảo của các lực không bảo tồn.

4.4. Tìm đáp ứng

Tìm đáp ứng của cơ hệ là giải hệ phương trình vi phân của mô hình toán để tìm nghiệm của nó hay nói cách khác là viết phương trình chuyển động của hệ.

Chương 2

PHẦN TỬ CƠ BẢN – MÔ HÌNH HÓA CƠ HỆ

1. Các phần tử cơ bản

Khi mô hình hóa hệ thống cơ khí, hệ chỉ còn ba phần tử cơ bản là phần tử lò xo (phần tử đàn hồi), phần tử giảm chấn, và phần tử khối lượng. Đặc trưng các phần tử nầy là có ứng xử khi chuyển vị, vận tốc và gia tốc thay đổi. Rõ ràng với với ba phần tử cơ bản, việc tính toán cơ hệ trở nên dễ dàng.

5.1. Phần tử đàn hồi

Vật thể đàn hồi bị biến dạng dưới tác dụng của ngoại lực thì tạo ra nội lực đối kháng lại sự biến dạng.

Ví dụ lò xo khi kéo ra khỏi vị trí cân bằng thì phát sinh nội lực kéo nó về, đó là sự phục hồi. Khi tính toán trong dao động, các phần tử đàn hồi đều giả sử không khối lượng. Có nhiều loại phần tử đàn hồi như sau:

- Lò xo chịu kéo, nén: là phần tử đàn hồi tiêu biểu, ký hiệu như hình 2. Khi chuyển vị hai đầu lò xo là x_1 và x_2 thì lực đàn hồi là F_k.

  $F_k = k(x_2 - x_1)$

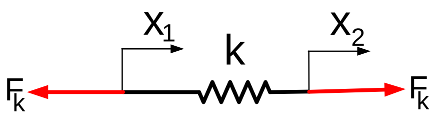
  k: gọi là hệ số đàn hồi hay độ cứng lò xo, đơn vị là *N/m*.

  F gọi là lực lò xo hay lực đàn hồi, đơn vị là *N*.

  Thế năng của lò xo:

  $$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2.$$

  Đơn vị của thế năng là *jun*.



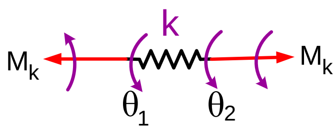
Hình 2

- Lò xo xoắn

  Khi chuyển vị hai đầu lò xo xoắn là θ_1 và θ_2 (Hình 3) thì mômen xoắn đàn hồi là M_k.

  $$M_k = k(\theta_2 - \theta_1).$$

  k là hệ số xoắn đàn hồi, đơn vị là *(N.m/rad)*.



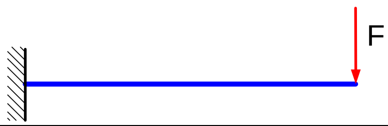
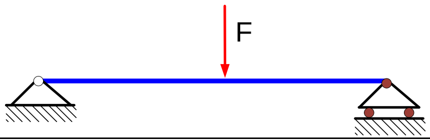
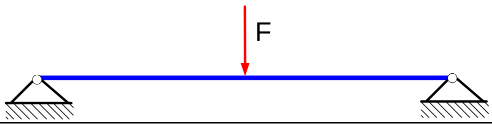
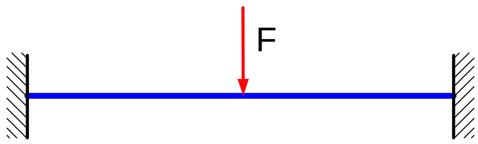
Hình 3

- Thanh cũng là phần tử đàn hồi nên khi tính toán dao động, ta cũng xem thanh như lò xo với hệ số đàn hồi tương đương k.

Thanh chịu xoắn, $k = \dfrac{GJ_p}{l}$; G: môđun xoắn đàn hồi, J_p là mômen quán tính độc cực.

Thanh chịu kéo, nén, $k = \dfrac{EA}{l}$; E: môđun đàn hồi, A là diện tích mặt cắt ngang.

Thanh chịu uốn, phụ thuộc điều kiện biên mà có hệ số đàn hồi tương đương khác nhau.Ví dụ dầm đầu ngàm chịu lực ở đầu (Hình 4) $k = \frac{3EI}{l^3}$; Dầm tĩnh định hai đầu gối tựa, chịu lực ở giữa (Hình 5): $k = \frac{48EI}{l^3}$; …

	$k = \frac{3EI}{l^3}$
	$k = \frac{48EI}{l^3}$
	$k = \frac{6EI}{l^3}$
	$k = \frac{192EI}{l^3}$

5.2. Phần tử giảm chấn

Giảm chấn đặc trưng là một cylinder bên trong có piston và chứa dầu nhớt. Piston có khoan nhiều lỗ nhỏ gọi là lỗ tiết lưu và được nối với cần (Hình 6). Khi tác dụng lực vào cần, piston di chuyển nhờ sự lưu thông của nhớt qua các lỗ tiết lưu trên piston.

Phần tử giảm chấn cũng được giả sử không có khối lượng.

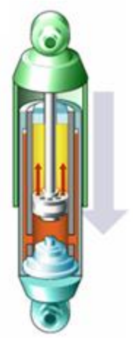
Phần tử giảm chấn có ký hiệu như Hình 7.

Khi vận tốc hai đầu giảm chấn là $\dot{x}_1$ và $\dot{x}_2$ thì lực giảm chấn là:

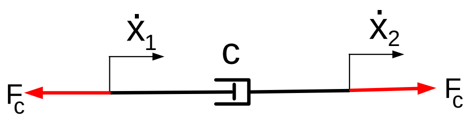
$$F_C = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Năng lượng tiêu hao do giảm chấn (Hàm hao tán):

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$



Hình 6

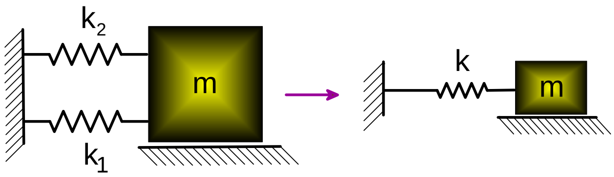


Hình 7

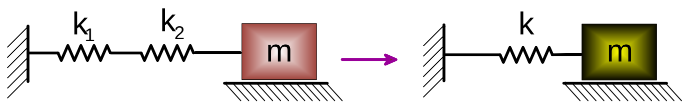
5.3. Phần tử đàn hồi, giảm chấn tương đương

5.3.1. Mắc song song

Khi có nhiều lò xo mắc song song nhau (Hình 8), lò xo tương đương có độ cứng $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$



Hình 8



Hình 9

Khi có nhiều giảm chấn mắc song song nhau, giảm chấn tương đương là: $c = \sum_{i=1}^{n} c_i$

5.3.2. Mắc nối tiếp

Khi có nhiều lò xo mắc nối tiếp nhau (Hình 9), lò xo tương đương có độ cứng $k = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \right)^{-1}$

Khi có nhiều lò xo giảm chấn mắc nối tiếp nhau, giảm chấn tương đương là: $c = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \right)^{-1}$

5.3.3. Các trường hợp khác

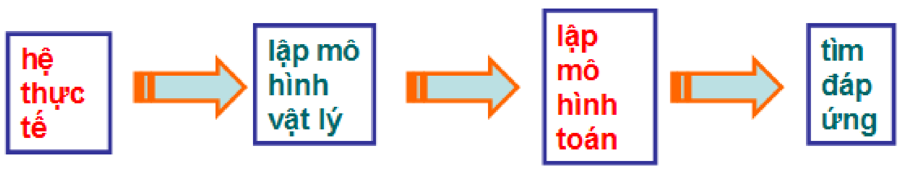
Khi các lò xo hoặc giảm chấn không mắc song song hay nối tiếp, ta dùng phương pháp thế năng tương đương để đơn giản hệ.

2. Mô hình hóa hệ dao động

4.1. Bậc tự do của cơ hệ

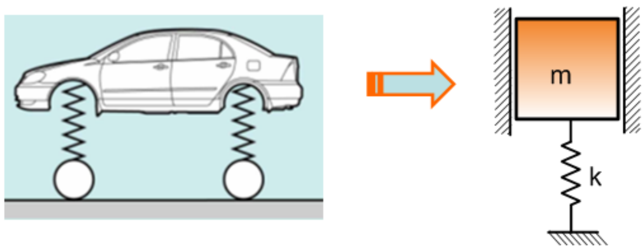
Bậc tự do là tập hợp các tọa độ độc lập cần thiết để xác định vị trí của cơ hệ tại thời điểm bất kỳ. Dưới tác dụng của lực, hệ chuyển động hay nói cách khác là các tọa độ luôn thay đổi theo thời gian, tọa độ x là hàm theo t. Vậy x(t) xác định thì xác định được vị trí của hệ.

Để xác định được x(t), ta lần lượt tiến hành các bước:



4.2. Lập mô hình vật lý

Để giải một bài toán dao động của các cơ cấu thực tế, bước đầu tiên là phải lập mô hình phản ánh các đặc trưng của hệ, thể hiện sự liên kết giữa các phần tử khối lượng, giảm chấn, đàn hồi có sự tác dụng của các lực. Đây gọi là mô hình vật lý. Tùy thuộc vào phạm vi nghiên cứu và yêu cầu về độ chính xác của đáp ứng x(t), ta có mô hình từ đơn giản đến phức tạp, có một hoặc nhiều bậc tự do, tuyến tính hoặc phi tuyến. Lập mô hình để giải bài toán dao động các hệ kỹ thuật là một đặc trưng của môn học, điều nầy cũng cho thấy nhiều hệ thực tế có thể có cùng mô hình.



Ví dụ mô hình đơn giản khảo sát dao động ô tô *Hình 1*

(Hình 1)

4.3. Lập mô hình toán:

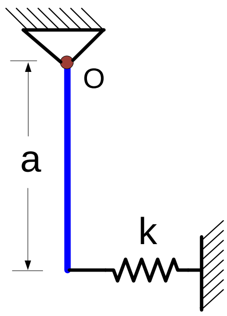
Thực chất của mô hình toán là viết phương trình vi phân dao động của cơ hệ. Cơ hệ có n bậc tự do thì có hệ n phương trình vi phân. Cơ sở để lập mô hình toán chủ yếu là sử dụng các kiến thức của môn học Cơ học kỹ thuật để giải mô hình vật lý. Có hai phương pháp thường dùng là phương pháp lực và phương pháp năng lượng.

Chương 3
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

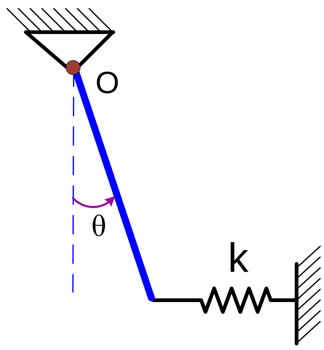
1. Thiết lập phương trình vi phân dao động

1.1. Bài toán 1

Thanh khối lượng m chiều dài a, quay quanh trục qua O và liên kết với lò xo như hình 10. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.



Hình 10



Hình 11

a. Phương pháp năng lượng

Chon tọa độ suy rộng θ (Hình 11)

Động năng: $T = \frac{1}{6} ma^2\dot{\theta}^2$

Năng lượng tiêu hao do giảm chấn: $D = 0$

Thế năng: $V = \frac{1}{2} ka^2\theta^2 - \frac{1}{2} mga\cos\theta$

Lực suy rộng: $Q = 0$

Phương trình Lagrange loại II ứng với hệ một bậc tự do:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q$$

Phương trình vi phân:

$$\frac{1}{3} ma^2\ddot{\theta} + (ka^2 + \frac{1}{2} mga)\theta = 0$$

b. Phương pháp lực

Các lực tác dụng vào thanh như hình 12

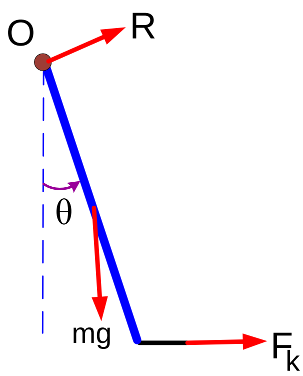
Phương trình vi phân của vật quay :

$$J_O\ddot{\theta} = R.0 + F_k a\cos\theta - \frac{1}{2} mga\sin\theta$$

Lực đàn hồi:

$$F_k = -ka\theta$$

Chú ý: vì dao động bé, chuyển vị nhỏ nên $\cos\theta \approx 1, \quad \sin\theta \approx \theta$



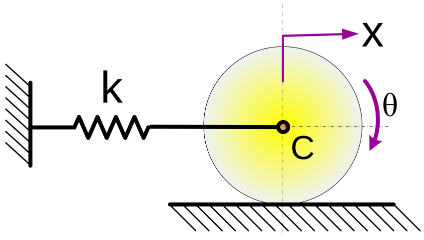
Hình 12

1.2. Bài toán 2

Đĩa tròn lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang khối lượng m, bán kính R liên kết với lò xo như hình 13.

Viết phương trình vi phân dao động của hệ.

Chọn tọa độ suy rộng *x*, θ (Hình 13), ta có $x = R\theta$



Hình 13

a. Phương pháp năng lượng

Động năng: $T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$

Thế năng: $V = \frac{1}{2}kx^2$

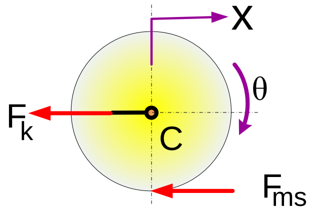
Lực suy rộng: $Q = 0$

Phương trình vi phân:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

b. Phương pháp lực

Các lực tác dụng vào thanh như hình 14, ta có:



Hình 14

$m\ddot{x} = -kx - F_{ms}$ (1)

$J_O\ddot{\theta} = RF_{ms}$ (2)

Từ (2): $\frac{1}{2}mR^2\frac{\ddot{x}}{R} = RF_{ms}$ (3)

Cộng (1) và (3) vế theo vế ta có kết quả

1.3. Bài toán 3

Con lắc lò xo gồm lò xo độ cứng k treo vật khối lượng m (Hình 15).

Viết phương trình vi phân dao động của con lắc.

Ở vị trí cân bằng tĩnh, lò xo dãn một đoạn Δ, ta có $k\Delta = mg$

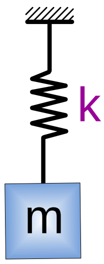
a. Chọn tọa độ suy rộng y, gốc tại vị trí lò xo chưa biến dạng (Hình 16).

Động năng: $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$

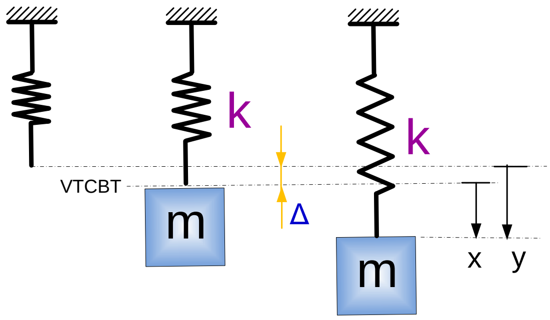
Thế năng: $V = \frac{1}{2}ky^2 - mgy$

Lực suy rộng: $Q = 0$

Phương trình vi phân: $m\ddot{y} + ky = mg$ *(1)*



Hình 15



Hình 16

b. Bây giờ chọn tọa độ suy rộng x, gốc tại vị trí cân bằng tĩnh, ta có $y = x + \Delta$

Từ *(1)*: $m(\ddot{x} + \ddot{\Delta}) + k(x + \Delta) = mg$

Phương trình vi phân: $m\ddot{x} + kx = 0$

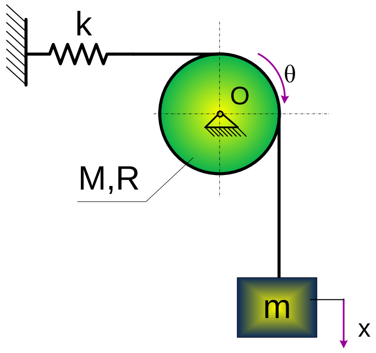
Vậy khi ở vị trí cân bằng tĩnh lò xo đã biến dạng, chọn gốc tọa độ ở đó thì ta bỏ *mg* hay *mgh* trong hai phương pháp giải.

1.4. Bài toán 4

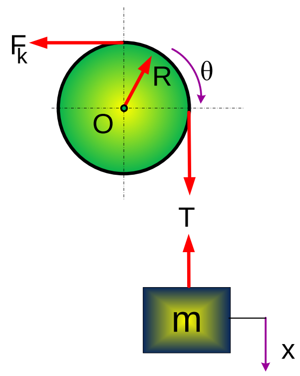
Ròng rọc tâm O khối lượng M bán kính R xem như đĩa tròn, liên kết với lò xo và vật nặng khối lượng m (Hình 17).

Viết phương trình vi phân dao động của hệ.

Chọn tọa độ suy rộng: Vật nặng chuyển động tịnh tiến chọn tọa độ suy rộng *x*, ròng rọc chuyển động quay chọn tọa độ suy rộng θ, ta có $x = R\theta$



Hình 17



Hình 18

a. Phương pháp năng lượng

Động năng: $T = \dfrac{1}{2}(\dfrac{M}{2} + m)\dot{x}^2$

Hàm hao tán: $D = 0$

Thế năng: $V = \dfrac{1}{2}kx^2$

Lực suy rộng: $Q = 0$

Phương trình vi phân:

$$(\frac{M}{2} + m)\ddot{x} + kx = 0$$

b. Phương pháp lực

Các lực tác dụng vào hệ như hình 18.

Ròng rọc chuyển động quay: $J_o\ddot{\theta} = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_k) \rightarrow J_O\ddot{\theta} = RT - RF_k$ (1)

Vật nặng chuyển động tịnh tiến: $m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_k \rightarrow m\ddot{x} = -T$ (2)

Từ (2): $\dfrac{1}{2}MR^2\dfrac{\ddot{x}}{R} = RT - RF_k$ (3)

Cộng (1) và (3) ta có: $(\dfrac{M}{2} + m)\ddot{x} + kx = 0$

2. Phương trình vi phân tổng quát

Từ phân tích trên ta thấy: Phương trình vi phân mô tả dao động của hệ có dạng tổng quát:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

m, c, k: khối lượng tương đương, giảm chấn tương đương và độ cứng tương đương của hệ.

Nếu *F(t) = 0* thì phương trình vi phân mô tả dao động tự do.

Nếu *c = 0* thì phương trình vi phân mô tả dao động không cản.

CHƯƠNG 5

TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

(FREE VBRATIONS OF ONE DEGREE OF FREEDOM SYSTEMS)

1. Dao động tự do không cản (free vibrations of undamped one degree of freedom systems)

1.1. Phương trình chuyển động

Phương trình vi phân dao động: $m\ddot{x} + kx = 0$

Dạng chuẩn: $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$

Trong đó ω_n là tần số riêng hay tần số tự nhiên (natural frequency), $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Phương trình đặc trưng (characteristic equation): $\lambda^2 + \omega_n^2 \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega_n$

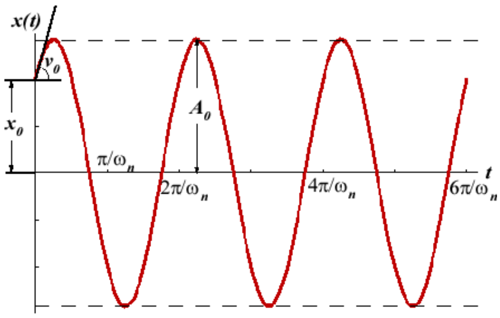
Phương trình chuyểnđộng:

$x(t) = C_1 \cos\omega_n t + C_2 \sin\omega_n t$

C_1 và C_2 là hai hằng số tích phân xác định từ điều kiện đầu (initial conditions)

$x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

Tính được: $C_1 = x_0$; $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_n}$



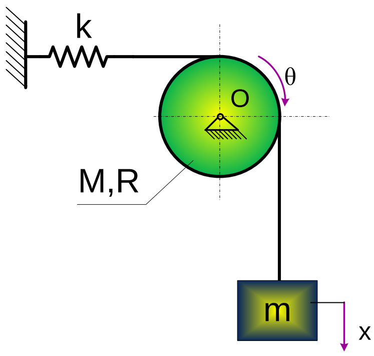
Hình 1

1.2. Đồ thị x(t)

Đồ thị như hình 1

1.3. Ví dụ

Ròng rọc tâm O khối lượng M bán kính R xem như đĩa tròn, liên kết với lò xo và vật nặng khối lượng m (Hình 2). Viết phương trình vi phân dao động của hệ.



Viết phương trình chuyển động khi:

$x(0) = 0{,}2m$; $\dot{x}(0) = 0{,}5m/s$; k = 100N/m;

m = 10kg; M = 20kg; R = 0,3m

Chọn tọa độ suy rộng: Vật nặng chuyển động tịnh tiến chọn tọa độ suy rộng *x*, ròng rọc chuyển động quay chọn *Hình 2*

tọa độ suy rộng θ, ta có $x = R\theta$

Phương trình vi phân dao động: $(\frac{M}{2} + m)\ddot{x} + kx = 0$

Phương trình chuyển động:

$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$

$\omega_n = 2{,}2361 \left({}^{rad}\!/\!_{s} \right)$

$C_1 = 0{,}2m; \quad C_2 = 0{,}2236m$

$x(t) = 0{,}2\cos 2{,}2361t + 0{,}2236\sin 2{,}2361t$

1.4. Tìm phương trình chuyển động với hàm lũy thừa

Phương trình vi phân dao động: $m\ddot{x} + kx = 0$

Dạng chuẩn: $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$

Biểu thức nghiệm: $x(t) = Xe^{st}$

Đạo hàm thế vào phương trình vi phân:

$s^2 + \omega_n^2 = 0 \rightarrow s = \pm i\omega_n$

Phương trình chuyển động của hệ:

$x(t) = X_1 e^{i\omega_n t} + X_2 e^{-i\omega_n t}$

Sử dụng công thức Euler:

$x(t) = (X_1 + X_2)\cos \omega_n t + (X_1 - X_2) i \sin \omega_n t$

Các hệ số của hàm sin và cosin chỉ là số thực nên

$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$

2. Dao động tự do có cản (free vibrations one degree of freedom systems with viscous damping)

Phương trình vi phân dao động: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

Dạng chuẩn: $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

Hệ số cản còn gọi là dộ cản Lehr hay hệ số tắt dần (damping factor): $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0$

$\Delta = \zeta^2 \omega_n^2 - \omega_n^2$

2.1. Trường hợp cản nhỏ (tắt dần yếu, dưới giảm chấn, under damping) $\zeta < 1$

- Phương trình chuyển động

$\Delta = i^2\omega_n^2(1-\varsigma^2) < 0 \rightarrow \lambda = -\varsigma\omega_n \mp i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Vậy: $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[C_1\cos\omega_d t + C_2\sin\omega_d t\right]$

Tần số giảm chấn (damped natural frequency): $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

C_1 và C_2 là hai hằng số tích phân xác định từ điều kiện đầu

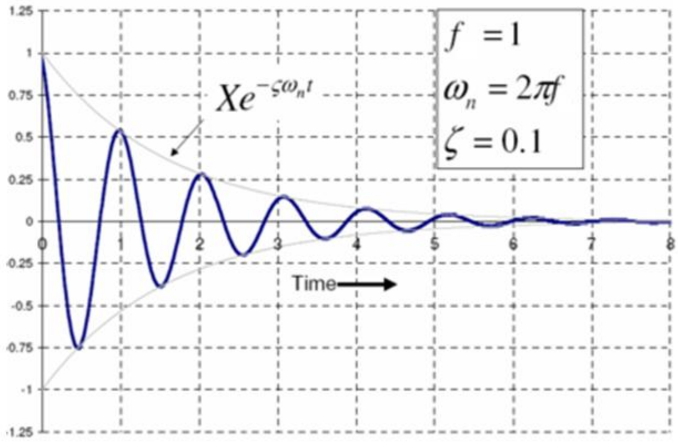
$x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\zeta\omega_n x_0}{\omega_d} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d}$$

Phương trình chuyển động dạng khác: $x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \varphi)$

- Đồ thị x(t)

Đồ thị khi φ = 0 như hình 3



Hình 3

- Độ tắt lôga (logarithmic decrement)

Độ tắt lôga δ có được bằng cách lấy logarit của tỉ biên độ, biên độ tại vị trí bất kỳ và sau đó một chu kỳ:

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T_d)}; \quad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Tính toán ta được: $\delta = \dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

2.2. *Trường hợp cản tới hạn (tắt dần tới hạn, giảm chấn tới hạn, critical damping)*: $\zeta = 1$

Phương trình đặc trưng có nghiệm kép

Phương trình chuyển động: $x(t) = e^{-\omega_n t}[C_1 + C_2 t]$

Điều kiện đầu: $x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$C_1 = x_0; \quad C_2 = \dot{x}_0 + \omega C_1$

2.3. ***Trường hợp cản lớn (tắt dần mạnh, quá giảm chấn, over damping):*** $\zeta > 1$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 & λ_2 mà : $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

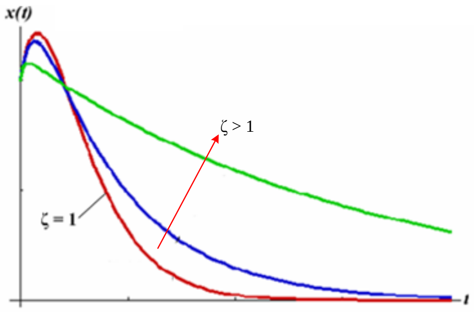
Phương trình chuyển động:

$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

Điều kiện đầu: $x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$C_1 = \dfrac{\dot{x}_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad C_2 = -\dfrac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$

Đồ thị x(t) trong hai trường hợp $\zeta = 1$ và $\zeta > 1$ như hình 4



Hình 4

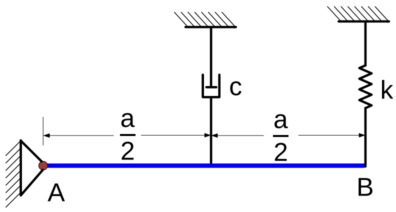
2.4. Ví dụ

Thanh AB quay quanh trục qua A có chiều dài a, khối lượng m, liên kết với lò xo, giảm chấn như hình 5.

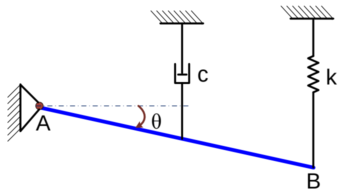
a. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.

b. Cho: k = 3kN/m, c = 4000 Ns/m, m = 1000kg, a = 0,5m; và điều kiện đầu:

$t = 0, \theta(0) = 0; \ \dot{\theta}(0) = 0{,}5 rad/s$ (góc quay tính từ vị trí cân bằng tĩnh). Viết phương trình chuyển động của hệ.



Hình 5



Hình 6

__Câu a:__ Chọn tọa độ suy rộng: Thanh chuyển động quay chọn tọa độ suy rộng *θ*.

Động năng: $T = \dfrac{1}{6} m a^2 \dot{\theta}^2$

Năng lượng tiêu hao do giảm chấn: $D = \dfrac{1}{4} c a^2 \dot{\theta}^2$

Thế năng: $V = \dfrac{1}{2} k a^2 \theta^2$

Lực suy rộng: $Q = 0$

P.trình vi phân:

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}ca^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0$$

Câu b:

Tần số riêng: $\omega_n = 3\left(rad/s\right)$

Hệ số cản (độ cản Lehr): $\zeta = 0{,}5$

$\zeta < 1$ nên phương trình chuyển động có dạng:

$$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t\right]$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2{,}5981(rad/s)$$
$$C_1 = 0(rad); C_2 = 0{,}1924(rad)$$

Vậy phương trình chuyển động:

$$\theta(t) = 0{,}1924e^{-1{,}5t}\sin 2{,}5981t$$

Độ tắt lôga: $\delta = 0{,}05$

TÍNH TOÁN DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

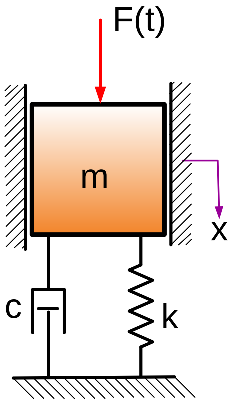
(HARNOMIC EXCITATION OF ONE DEGREE OF FREEDOM SYSTEMS)

1. Các dạng kích động

Có nhiều dạng kích động gây ra dao động cưỡng bức. Ứng với mỗi dạng đều có độ khuyếch đại và pha ban đầu riêng. Sau đây là một số dạng kích động cơ bản.

1.1. Kích động động lực

Vật có khối lượng m liên kết và chịu lực điều hòa $F(t) = F_0 \sin\omega t$ như hình 3.1. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.



Hình 3.1

Chọn tọa độ suy rộng x.

Động năng: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Năng lượng tiêu hao do giảm chấn: $D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$

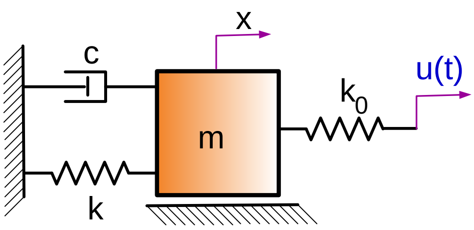
Thế năng: $V = \frac{1}{2}kx^2$

Lực suy rộng: $Q = F_0 \sin\omega t$

Phương trình vi phân: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$

1.2. Kích động bằng lực đàn hồi

Vật có khối lượng m liên kết và chịu lực như hình 3.2. Đầu lò xo k_0 chịu tác động của chuyển vị điều hòa $u(t) = U_0 \sin\omega t$. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.



Hình 3.2

Chọn tọa độ suy rộng x.

Động năng: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Năng lượng tiêu hao do giảm chấn:

$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$

Thế năng: $V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_0(u - x)^2$

Lực suy rộng: *Q = 0*

Phương trình vi phân:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k + k_0)x = k_0 U_0 \sin\omega t$

1.3. Kích động động học (base motion)

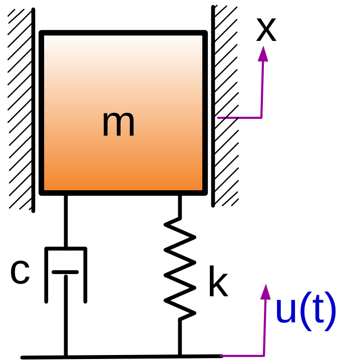
Vật có khối lượng m liên kết và chịu lực như hình 3.3. Chân đế của lò xo và giảm chấn chịu tác động của chuyển vị điều hòa $u(t) = U_0 \sin\omega t$. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.

Chọn tọa độ suy rộng x.

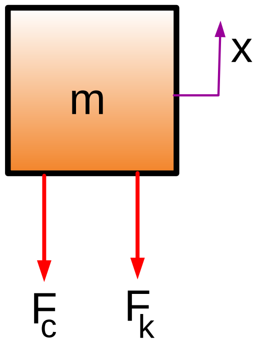
Các lực tác dụng vào vật như hình 3.4

$m\ddot{x} = -F_k - F_c$

$m\ddot{x} = -k(x - u) - c(\dot{x} - \dot{u})$



Hình 3.3



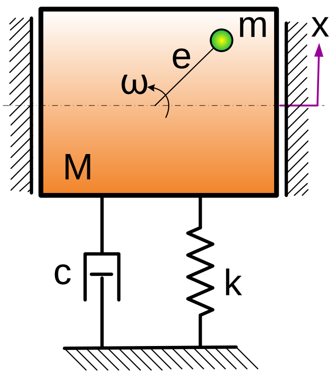
Hình 3.4

Phương trình vi phân:

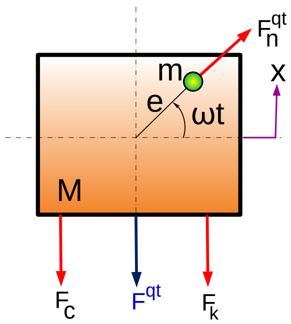
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kU_0 \sin\omega t + cU_0\omega\cos\omega t$$

1.4. Kích động bởi khối lượng lệch tâm (rotating unbalance)

Vật có khối lượng M liên kết với lò xo và giảm chấn như hình 3.5. Trên vật có bộ phận chuyển động quay đều với vận tốc góc ω và có khối lượng mất cân bằng m, độ lệch tâm e. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.



Hình 3.5



Hình 3.6

Chọn tọa độ suy rộng x.

Giải bài toán bằng nguyên lý d'Alembert.

Các lực tác dụng vào vật và lực quán tính như hình 3.6.

$$F_n^{qt} = ma_n = me\omega^2$$

$$F^{qt} = M\ddot{x}$$

$$(\vec{F}_k, \vec{F}_c, \vec{F}_{qt}, \vec{F}_r^{qt}) \sim 0$$

$$-F_k - F_c - F_{qt} + F_r^{qt}\sin\omega t = 0$$

Phương trình vi phân:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin\omega t$$

Chú ý: Khi khối lượng vật không bao gồm khối lượng mất cân bằng m thì phương trình vi phân:

$(M+m)\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$

2. Tính toán dao động cưỡng bức không cản

Phương trình vi phân dao động: $m\ddot{x}+kx=F_0\sin\omega t$

2.1. Trường hợp xa cộng hưởng: $\omega\neq\omega$

Nghiệm riêng (steady state response):

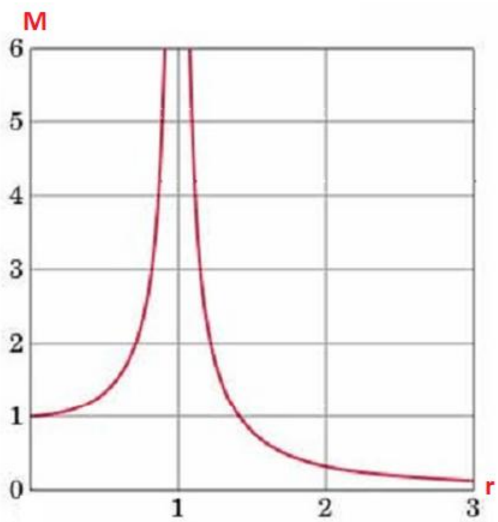
$x(t)=M\cos\omega t+N\sin\omega t$

$\Rightarrow M=0; N=\dfrac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}$

Nghiệm tổng quát (complete solution): $x(t)=C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t+\dfrac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\Omega t$

Điều kiện đầu: $t=0, x(0)=x_0; \dot{x}(0)=\dot{x}_0$

$x(t)=x_0\cos\omega_n t+\dot{x}_0\sin\omega_n t-\dfrac{F_0\omega}{m\omega_n(\omega_n^2-\omega^2)}+\dfrac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\omega t$



Phương trình chuyển động bình ổn:

$x(t)=\dfrac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\omega t$

Độ khuếch đại (magnification factor): là tỉ số biên độ đáp ứng điều hòa và đáp ứng tĩnh:

$M=\dfrac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}:\dfrac{F_0}{k}$ $\qquad M=\dfrac{1}{|1-r^2|}$

Tỉ tần số: $r=\dfrac{\omega}{\omega_n}$

Hình 3.7

Đồ thị *M(r)* như hình 3.7.

* Chú ý: Khi phương trình vi phân là $m\ddot{x}+kx=F_0\cos\omega t$ thì phương trình chuyển động bình ổn: $x(t)=X_0\cos\omega t$

2.2. Trường hợp gần cộng hưởng $\omega_n\approx\omega$

đặt $2\varepsilon=\omega-\omega_n$

Phương trình chuyển động:

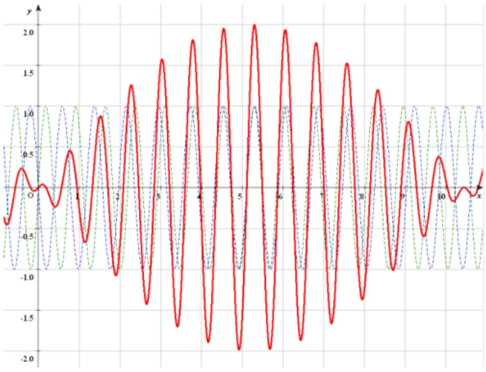
$x(t)=\dfrac{-F_0\sin\varepsilon t}{2m\varepsilon\omega}\cos\omega t$

Đồ thị x(t) tiếp xúc với đồ thị hàm $x_1(t) = \dfrac{F_0}{2m\omega}\cos\omega t$ (hình 3.8). Trên đồ thị ta thấy số lần dao động trong chu kỳ tăng trong khi biên độ dao động bị giới hạn, đây gọi là hiện tượng phách (beating).

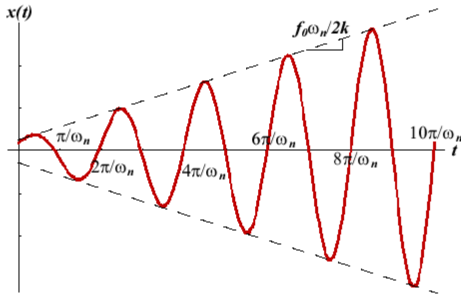
2.3. Trường hợp cộng hưởng $\omega_n = \omega$

$$x(t) = \frac{-F_0 t}{2m\omega}\cos\omega t$$

Đồ thị x(t) như hình 3.9: Biên độ càng lớn khi t càng lớn gọi là hiện tượng cộng hưởng (resonance).



Hình 3.8



Hình 3.9

2.4. Ví dụ

Thanh AB có khối lượng m quay quanh A, liên kết với lò xo và chịu lực như hình 3.10.

a. Viết phương trình vi phân dao động.

b. Cho: *k = 340 N/m; a = 0.49 m; m = 30kg; F(t) = 100sin40t (N)*. Viết phương trình chuyển động và tính độ khuếch đại.

Chọn tọa độ suy rộng θ *(Hình 3.11)*

Động năng: $T = \frac{1}{2}\frac{m}{3}a^2\dot{\theta}^2$

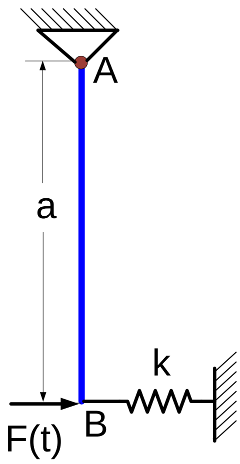
Thế năng: $V = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 - \frac{1}{2}mga\cos\theta$

Lực suy rộng: $Q = aF(t)$

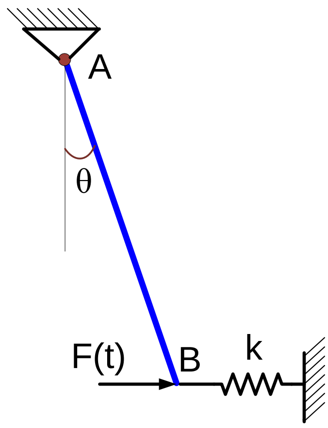
P.trình vi phân:

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} + [ka^2 + \frac{1}{2}mga]\theta = aF(t)$$

Tần số riêng: $\omega = 8\left(rad/s\right)$



Hình 3.10



Hình 3.11

Trường hợp xa cộng hưởng nên phương trình chuyển động bình ổn: $\theta(t) = \dfrac{F_{td}}{m_{td}(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin 40t$

Phương trình chuyển động: $\theta(t) = -0{,}0133 \sin 40t$

Tỉ tần số: $r = 5$

Độ khuếch đại: $M = 0{,}0417$

3. Tính toán dao động cưỡng bức có cản

3.1. Phương trình chuyển động bình ổn

Phương trình vi phân dao động: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = H_1 \sin \omega t + H_2 \cos \omega t$

$$\ddot{x} + 2\varsigma\omega\dot{x} + \omega^2 x = h_1 \sin \omega t + h_2 \cos \omega t$$

Nghiệm riêng (Phương trình chuyển động bình ổn):

$$x(t) = M \cos \omega t + N \sin \omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_n^2 - \omega^2)N - 2\varsigma\omega_n\omega M = h_1 \\ 2\varsigma\omega_n\omega N + (\omega_n^2 - \omega^2)M = h_2 \end{cases}$$

$$M = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)h_2 - 2\varsigma\omega_n\omega h_1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\varsigma\omega_n\omega)^2} \quad \text{và} \quad N = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)h_1 + 2\varsigma\omega_n\omega h_2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\varsigma\omega_n\omega)^2}$$

Phương trình chuyển động bình ổn viết dưới dạng khác:

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$X_0^2 = M^2 + N^2; \quad tg\varphi = \frac{M}{N}$$

$$X_0 = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\omega_n^2 \sqrt{(2\zeta.r)^2 + (1 - r^2)^2}}$$

Độ khuếch đại (magnification factor): $M = \dfrac{X_0}{\hat{y}}$

$\hat{y}$: tùy thuộc các trường hợp kích động

3.2. Kích động động lực hay kích động qua lò xo

$\hat{y} = \dfrac{F_0}{k}$ hay $\hat{y} = \dfrac{k_0 U_0}{k}$

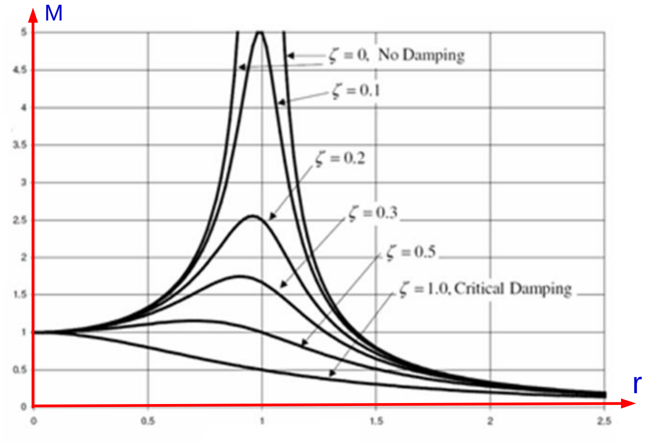
Tỉ tần số: $r = \dfrac{\omega}{\omega_n}$

Độ khuếch đại: $M = \dfrac{1}{\sqrt{(2\zeta.r)^2 + (1-r^2)^2}}$

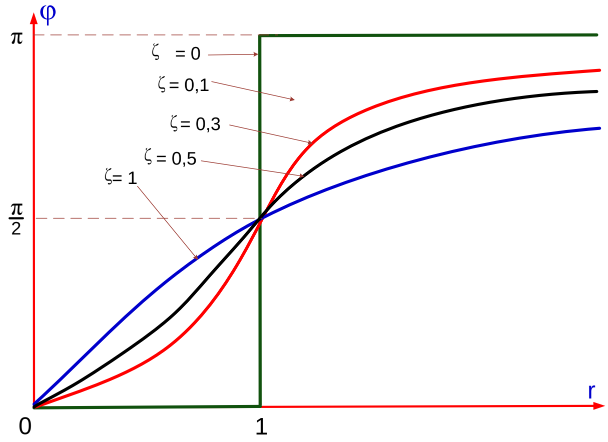
Đồ thị *M(r)* như hình 3.12.

Pha ban đầu: $tg\varphi = \dfrac{-2\zeta r}{1-r^2}$

Đồ thị φ*(r)* như hình 3.13.



Hình 3.12



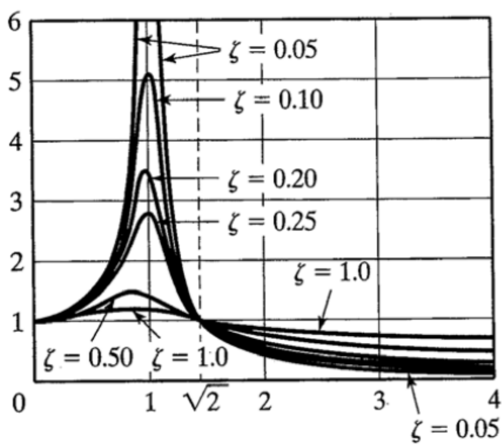
Hình 3.13

3.3. Kích động động học

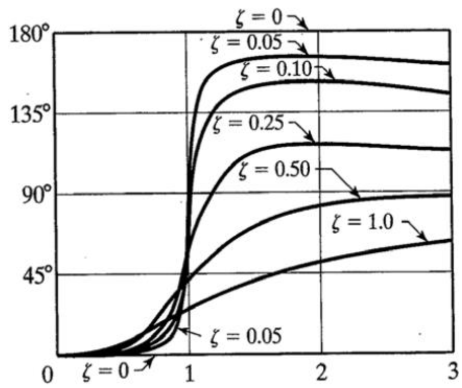
$\hat{y} = \dfrac{kU_0}{k} = U_0$; $h_1 = \dfrac{kU_0}{m} = \omega_n^2 \hat{y}$; $h_2 = \dfrac{cU_0\omega}{m} = 2\varsigma r \omega_n^2 \hat{y}$

Độ khuếch đại: $M = \dfrac{\sqrt{1+(2\varsigma r)^2}}{\sqrt{(2\zeta.r)^2 + (1-r^2)^2}}$

Pha ban đầu: $tg\varphi = \dfrac{-2\zeta.r^3}{(2\zeta r)^2 + (1-r^2)}$



Hình 3.14



Hình 3.15

Đồ thị *M(r)* như hình 3.14.

Đồ thị φ*(r)* như hình 3.15.

3.4. Kích động bởi khối lượng lệch tâm

$$\hat{y} = \frac{m_1 e}{m_0 + m_1}$$

hay $\hat{y} = \dfrac{me}{M}$; $h_1 = \dfrac{me}{M}\omega^2 = \hat{y}\omega^2$

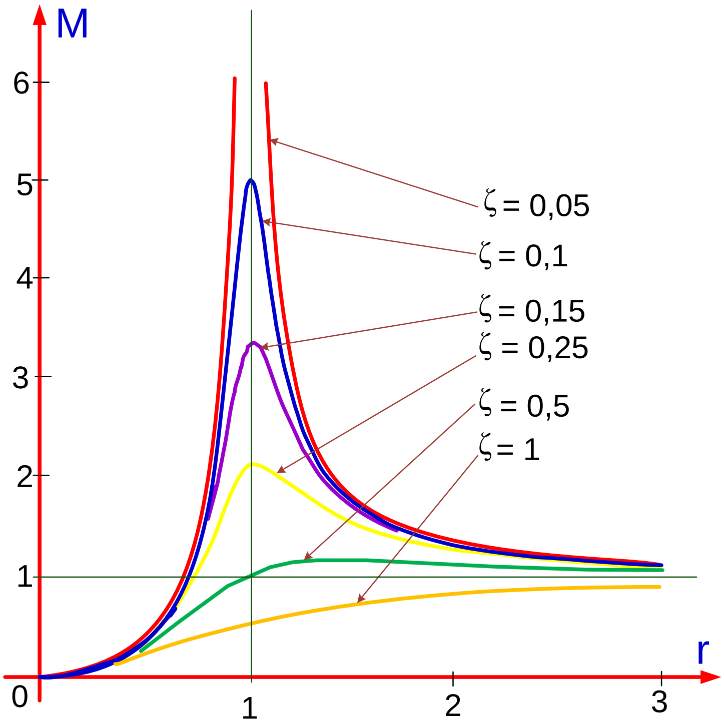
Độ khuếch đại:

$$M = \frac{r^2}{\sqrt{(2\zeta.r)^2 + (1-r^2)^2}}$$

Đồ thị *M(r)* như hình 3.16.

Pha ban đầu:

$$tg\varphi = \frac{-2\zeta.r}{1-r^2}$$



Hình 3.16

**** Chú ý: Khi vế phải $H_1 = 0$:***

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = H_2 \cos\Omega t$$

Phương trình chuyển động:

$$x(t) = X_0 \cos(\Omega t - \theta)$$

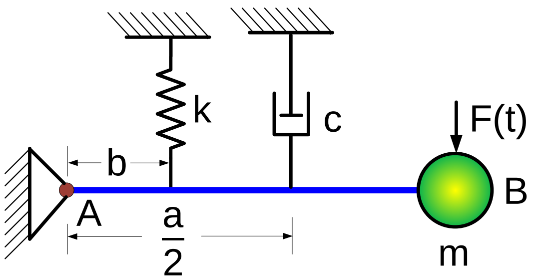
$$tg\theta = \frac{N}{M} = \frac{2\zeta.r}{1-r^2}$$

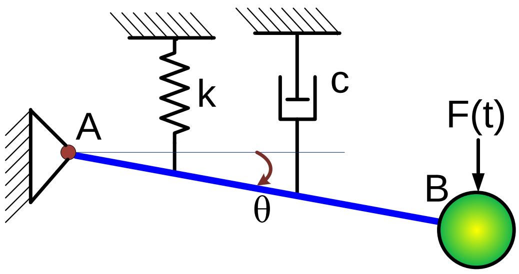
3.5. Ví dụ

a. Thanh nhẹ AB, chiều dài a, đầu thanh có vật nhỏ xem như chất điểm khối lượng m. Thanh liên kết với lò xo, giảm chấn và chịu lực như hình3.17 Viết phương trình vi phân dao động.

b. Cho: k = 8kN/m, c = 200Ns/m, m = 5kg, a = 4m, b = 1m, F(t) = 80 sin20t (N). Viết phương trình chuyển động.

Chọn tọa độ suy rộng θ (Hình 3.18).





Hình 3.17 *Hình 3.18*

Động năng: $T = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$

Năng lượng tiêu hao do giảm chấn: $D = \frac{1}{8} c a^2 \dot{\theta}^2$

Thế năng: $V = \frac{1}{2} k b^2 \theta^2$

Lực suy rộng: *Q = aF(t)*

Phương trình vi phân:

$$m a^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{4} c a^2 \dot{\theta} + k a^2 \theta = aF(t)$$

Phương trình chuyển động: $\theta(t) = \theta_0 \sin(20t + \varphi)$

Tần số riêng: $\omega_n = 10\left(rad/_s\right)$

Độ cản Lehr: $\zeta = 0{,}5$

Tỉ tần số: $r = \frac{\omega}{\omega_n} = 2$

Hệ chịu kích động động lực nên:

Độ khuếch đại: $M = \frac{1}{\sqrt{(2\zeta.r)^2 + (1 - r^2)^2}} = 0{,}2774$

Biên độ: $\theta_0 = M.\hat{y} = 0{,}0111(rad)$

$tg\varphi = 0{,}6667 \rightarrow \varphi = 0{,}588\ (rad)$

Vậy: $\theta(t) = 0{,}0111 \sin(20t + 0{,}588)$

CHƯƠNG 6

DAO ĐỘNG CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

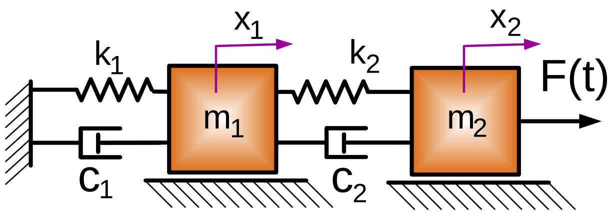
1. Phương trình vi phân dao động

Hai vật có khối lượng m_1 và m_2 liên kết và chịu lực như hình 4.1. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.

Chọn tọa độ suy rộng x_1 và x_2.

Động năng: $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2;$

Thế năng: $V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$



Hình 4.1

Hàm hao tán: $D = \frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$

Lực suy rộng: Tính công khả dĩ của các lực, suy ra lực suy rộng:

$$Q_i = \left.\frac{\sum \delta A_k}{\delta q_i}\right|_{\delta q_j = 0};i \neq j$$

$$\sum \delta A_k = \delta A(\vec{F}(t))$$

$$\delta A(\vec{F}) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z$$

$$\sum \delta A_k = F(t)\delta x_2$$

$$Q_1 = \left.\frac{\sum \delta A_k}{\delta x_1}\right|_{\delta x_2 = 0} = 0$$

$$Q_2 = \left.\frac{\sum \delta A_k}{\delta x_2}\right|_{\delta x_1 = 0} = F(t)$$

$Q_1 = 0; Q_2 = F(t)$

Sử dụng phương trình Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_1} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2)\right) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2\right) = c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2\right)=k_1x_1-k_2(x_2-x_1)$$

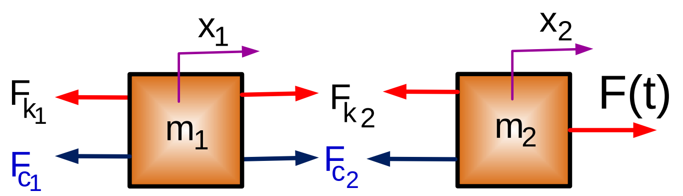
Phương trình vi phân:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Phương trình vi phân có dạng tổng quát: $M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=F$

Trong đó: M, C, K: ma trận khối lượng, ma trận giảm chấn, ma trận độ cứng, đó là các ma trận vuông cấp n đối xứng hoặc chéo.

Phương trình vi phân có vế phải bằng 0 thì dao động tự do, còn C = 0 thì mô tả dao động không cản.



Hình 4.2

Để giải bằng phương pháp lực ta sử dụng sơ đồ trên hình 4.2. Vật chuyển động tịnh tiến, dùng định luật 2 Newton:

$$m_1\ddot{x}_1=-F_{k1}-F_{c1}+F_{k2}+F_{c2}\,(1)$$

$$m_2\ddot{x}_2=-F_{k2}-F_{c2}+F(t)\quad(2)$$

$$F_{k1}=k_1x_1\ F_{k2}=k_2(x_2-x_1)\ F_{c1}=c_1\dot{x}_1\ F_{c2}=c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)-c_1\dot{x}_1+c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \\ m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)-c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+F(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=F(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Hệ chịu xoắn

Động năng: $T=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2$;

Thế năng: $V=\frac{1}{2}k_1\theta_1^2+\frac{1}{2}k_2(\theta_2-\theta_1)^2+\frac{1}{2}k_3\theta_2^2$

Hàm hao tán: $D=0$

Công khả dĩ của các lực:

$$\sum\delta A_k=\delta A(\vec{M}_1(t))+\delta A(\vec{M}_2(t))$$

$$=M_1(t)\delta\theta_1+M_2(t)\delta\theta_2$$

$$Q_1=\left.\frac{\sum\delta A_k}{\delta\theta_1}\right|_{\delta\theta_2=0}=M_1(t)$$

$$Q_2 = \frac{\sum \delta A_k}{\delta\theta_2}\bigg|_{\delta\theta_1=0} = M_2(t)$$

2. Tính toán dao động tự do không cản

2.1. Tần số riêng

Phương trình vi phân dao động: $M\ddot{x} + Kx = 0$

Khai triển:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Biểu thức nghiệm: $x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ X_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix}$

Đạo hàm, thế vào:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -X_1\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ -X_2\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ X_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & k_{12} - m_{12}\omega^2 \\ k_{21} - m_{21}\omega^2 & k_{22} - m_{22}\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Để có nghiệm không tầm thường (nontrivial solution):

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 & k_{12} - m_{12}\omega^2 \\ k_{21} - m_{21}\omega^2 & k_{22} - m_{22}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_{11} - m_{11}\omega^2)(k_{22} - m_{22}\omega^2) - (k_{12} - m_{12}\omega^2)(k_{21} - m_{21}\omega^2) = 0$$

$$(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})\omega^4 + (k_{12}m_{21} + k_{21}m_{12} - k_{11}m_{22} - k_{22}m_{11})\omega^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0$$

Đây là một phương trình trùng phương bậc bốn gọi là phương trình đặc trưng tần số.

Giải phương trình nầy ta được các tần số dao động riêng *ω_1 và ω_2.*

2.2. Kiểu dạng dao động riêng

2.2.1. Kiểu dạng dao động riêng thứ nhất

Khi hệ dao động với tần số riêng thứ nhất ω_1, ta có các biên độ tương ứng $X_1^{(1)}$ và $X_2^{(1)}$

Tỉ biên độ:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = -\frac{k_{11} - m_{11}\omega_1^2}{k_{12} - m_{12}\omega_1^2}$$

Khi $X_1^{(1)} = 1 \Rightarrow X_2^{(1)} = r_1 \to V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix}$

V_1 gọi là vectơ mode hay vectơ dạng riêng thứ nhất. Từ đó xác định được kiểu dạng dao động riêng thứ nhất hay mode thứ nhất.

2.2.2. Kiểu dạng dao động riêng thứ hai

Khi hệ dao động với tần số riêng thứ hai ω_2, ta có ta có các biên độ tương ứng $X_1^{(2)}$ & $X_2^{(2)}$

Tỉ biên độ:

$$r_1 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = -\frac{k_{11} - m_{11}\omega_2^2}{k_{12} - m_{12}\omega_2^2}$$

Khi $X_1^{(2)} = 1 \Rightarrow X_2^{(2)} = r_2 \rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix}$

V_2 gọi là vectơ mode hay vectơ dạng riêng thứ hai. Từ đó xác định được kiểu dạng dao động riêng thứ hai.

Ma trận dạng riêng M: mô tả các kiểu dạng dao động của hệ.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}$$

Chú ý: Khi tìm các kiểu dạng dao động riêng ở các phương trình vi phân dao động có cản hoặc cưỡng bức đều bỏ C, F.

2.2.3. Tính trực giao của dạng riêng

Các dạng riêng vuông góc với nhau qua ma trận khối lượng hoặc ma trận độ cứng.

Trực giao qua ma trận khối lượng: $V_1^T M V_2 = V_2^T M V_1 = 0$

Trực giao qua ma trận độ cứng: $V_1^T K V_2 = V_2^T K V_1 = 0$

2.3. Phương trình chuyển động

Phương trình chuyển động của hệ:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} B\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

A, B, φ_1, φ_2 xác định từ 4 điều kiện đầu: $x_1(0) = x_{10}; \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$ và $x_2(0) = x_{20}; \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$

2.4. Ví dụ

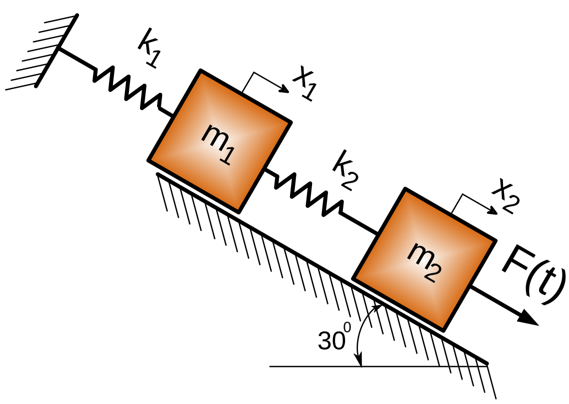
Hai vật có khối lượng m_1 và m_2 đặt trên mặt nghiêng, liên kết và chịu lực như hình 4.3.

a. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.

b. Tìm các mode dao động riêng. Cho $k_1 = 2k_2 = 2k$, $m_1 = 2m_2 = 2m$.

Câu a. Phương trình vi phân dao động:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$



Hình 4.3

Câu b. Tìm các kiểu dạng dao động riêng, ta giải hệ:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Biểu thức nghiệm: $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ X_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix}$

Phương trình đặc trưng tần số:

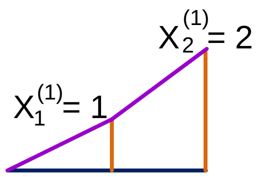
$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \rightarrow 2m^2\omega^4 - 5km\omega^2 + 2k^2 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}(rad/s) \text{ và } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}(rad/s)$$

- Khi hệ dao động với tần số riêng thứ nhất ω_1, ta có các biên độ tương ứng $X_1^{(1)}$ và $X_2^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} 3k - 2m\omega_1^2 & -k \\ -k & k - m\omega_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$(3k - 2m\omega^2)X_1^{(1)} - kX_2^{(1)} = 0$$



Hình 4.4

Tỉ biên độ:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = 2$$

Khi $X_1^{(1)} = 1 \Rightarrow X_2^{(1)} = 2 \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

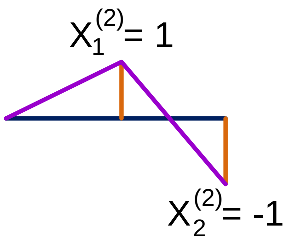
Mode dao động riêng thứ nhất (Hình 4.4).

- Khi hệ dao động với tần số riêng thứ hai ω_2, ta có các biên độ tương ứng $X_1^{(2)}$ và $X_2^{(2)}$

Tỉ biên độ:

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = -1$$

Khi $X_1^{(2)} = 1 \Rightarrow X_2^{(2)} = -1 \rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



Hình 4.5

Mode dao động riêng thứ hai (Hình 4.5)

Trên hình cho thấy một điểm thuộc lò xo thứ hai không dao động gọi là điểm nút.

3. Tính toán dao động cưỡng bức không cản

3.1. Phương trình chuyển động

Phương trình vi phân dao động: $M\ddot{x} + Kx = F\sin\omega t$

Trong đó: $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$; $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$; $F(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin\omega t \\ F_2 \sin\omega t \end{Bmatrix}$

Biểu thức nghiệm: $x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \sin\omega t \\ X_2 \sin\omega t \end{Bmatrix}$

Từ đó: $\begin{bmatrix} k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2 \\ k_{21}-m_{21}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$

Nghiệm: $X_1=\dfrac{D_1}{D}; X_2=\dfrac{D_2}{D}$ Trong đó D là định thức hệ số, $D=\det(K-\omega^2 M)$ còn D_i bỏ cột thứ i thay bằng F. Biện luận:

- Khi D = 0 và $D_i \neq 0$: Tần số cưỡng bức ω trùng với một trong các tần số riêng ω_1,ω_2 . Biên độ dao động tăng lên vô cùng. Đây là trường hợp cộng hưởng.
- Khi $D=0 \Rightarrow \omega=\omega_i$ và D_i = 0 đồng thời $\lim\limits_{D\to\infty}\dfrac{D_i}{D}<\infty$: Tần số kích động trùng với tần số riêng nhưng biên độ vẫn bị giới hạn. Đây là trường hợp giả cộng hưởng. Nếu dạng vô định $\lim\limits_{D\to\infty}\dfrac{D_i}{D}=\infty$ thì đây là trường hợp cộng hưởng.
- Khi D ≠ 0 và D_i = 0 ta có X_i = 0: Dao động với tọa độ thứ i bị dập tắt.

Chú ý: Khi vế phải có dạng $F(t)=F\cos\omega t$ thì biểu thức nghiệm là $x(t)=X\cos\omega t$

3.2. Bộ tắt chấn động lực

Khi D ≠ 0 và D_i = 0 ta có X_i = 0: Dao động với tọa độ thứ i bị dập tắt, đây là cơ sở để thiết kế các bộ tắt chấn.

$D_1=\begin{vmatrix} F_1 & k_{12}-m_{12}\omega^2 \\ F_2 & k_{22}-m_{22}\omega^2 \end{vmatrix}$; D_1= 0 khi $(k_{22}-m_{22}\omega^2)F_1=(k_{12}-m_{12}\omega^2)F_2$

Nếu thêm điều kiện F_2 = 0, ta có X_1=0 khi $k_{22}-m_{22}\omega^2=0$ (1).

Vậy trước tiên chọn k_{22} sao cho X_2 nhỏ và sau đó chọn m_2 thỏa (1).

3.3. **Ví dụ**

Hai vật có khối lượng m_1 và m_2 liên kết và chịu lực như hình 4.6.

a. Viết phương trình vi phân dao động của hệ.

b. Cho m_1 = m_2 = 5kg ; $F_1(t)$ = 5sin2t; $F_2(t)$ = 10sin2t, k_1 = k_2 = k_3 = 100N/m. Viết phương trình chuyển động.

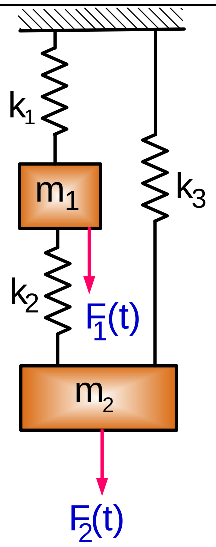
Câu a: Phương trình vi phân dao động là:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

Câu b: Phương trình chuyển động có dạng:

$$x(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1\sin 2t \\ X_2\sin 2t \end{Bmatrix}$$

Ta có: D = 22400; D_1 = 1900; D_2 = 2300



Hình 4.6

Từ đó: X_1 = 0.0848(m) và X_2 = 0.1027(m).

Vậy $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}0848\sin 2t \\ 0{,}1027\sin 2t \end{Bmatrix}$

4. Tính toán dao động tự do có cản

Phương trình vi phân dao động: $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Biểu thức nghiệm: $x(t) = Xe^{st} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{st} \\ X_2 e^{st} \end{Bmatrix}$

Đạo hàm thế vào phương trình vi phân: $(s^2M + sC + K)X = 0$

Khai triển: $\begin{bmatrix} s^2 m_{11} + sc_{11} + k_{11} & s^2 m_{12} + sc_{12} + k_{12} \\ s^2 m_{21} + sc_{21} + k_{21} & s^2 m_{22} + sc_{22} + k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Để có nghiệm không tầm thường:

$\det(s^2M + sC + K) = 0$

Đây là phương trình đặc trưng, giải ra được 4 nghiệm s. Các trường hợp:

- Cả 4 nghiệm đều là số thực âm: quá giảm chấn.
- Cả 4 nghiệm đều phức, có hai cặp phức liên hợp: dưới giảm chấn.
- Có 2 nghiệm thực âm và hai nghiệm phức liên hợp.

* Khi $s = s_i$, ta có các biên độ tương ứng $X_1^{(i)}$ và $X_2^{(i)}$

Tỉ biên độ:

$$r_i = \frac{X_2^{(i)}}{X_1^{(i)}} = -\frac{s^2 m_{11} + sc_{11} + k_{11}}{s_i^2 m_{12} + s_i c_{12} + k_{12}}; \quad i = 1,2,3,4.$$

Phương trình chuyển động của hệ là chồng chất 4 nghiệm:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} X_1^{(1)} e^{st} + \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} X_1^{(2)} e^{st} + \begin{bmatrix} 1 \\ r_3 \end{bmatrix} X_1^{(3)} e^{st} + \begin{bmatrix} 1 \\ r_4 \end{bmatrix} X_1^{(4)} e^{st}$$

$X_1^{(i)}$ xác định từ 4 điều kiện đầu: $x_1(0) = x_{10}; \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$ và $x_2(0) = x_{20}; \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$

5. Tính toán dao động cưỡng bức có cản

Phương trình vi phân dao động: $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Fe^{i\omega t}$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 e^{i\omega t} \\ F_2 e^{i\omega t} \end{Bmatrix}$$

Biểu thức nghiệm $x(t) = Xe^{i\omega t} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{i\omega t} \\ X_2 e^{i\omega t} \end{Bmatrix}$

Đạo hàm thế vào phương trình vi phân: $(-\omega^2 M + i\omega C + K)Xe^{i\omega t} = Fe^{i\omega t}$

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_{11}\omega^2 + i\omega c_{11} & k_{12} - m_{12}\omega^2 + i\omega c_{12} \\ k_{21} - m_{21}\omega^2 + i\omega c_{21} & k_{22} - m_{22}\omega^2 + i\omega c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$X_1 = \frac{D_1}{D}; X_2 = \frac{D_2}{D}$

D là định thức hệ số: $D = \det(K - \omega^2 M + i\omega C)$.

D_i bỏ cột thứ i thay bằng F.

- X_1 và X_2 là các số phức dạng (a + ib) .

Biểu diễn biên độ sang dạng lũy thừa $X = Ae^{i\varphi}$.

Trong đó $A = \sqrt{\mathrm{Re}(X)^2 + \mathrm{Im}(X)^2}$.

Pha $tg\varphi = \frac{\mathrm{Im}(X)}{\mathrm{Re}(X)}$

Vậy phương trình chuyển động: $x(t) = Ae^{(i\omega t + \varphi)}$

- Khi vế phải có dạng $F(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin\omega t \\ F_2 \sin\omega t \end{Bmatrix}$ hay $F(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \cos\omega t \\ F_2 \cos\omega t \end{Bmatrix}$

Biểu thức nghiệm cũng là $x(t) = Xe^{i\omega t}$.

Kết quả cuối cùng lấy Im(x) hay Re(x).