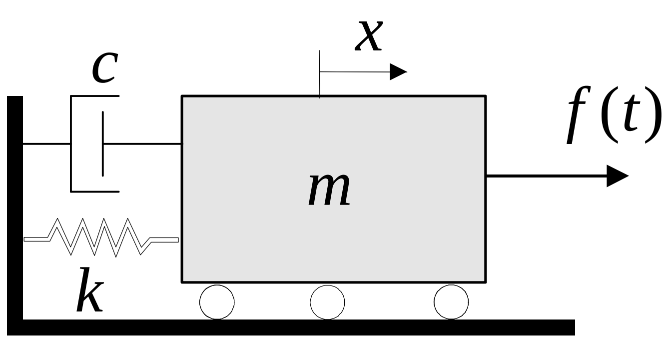
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique

## Réponse forcée du système amorti




Equation du mouvement

$$\boxed{\begin{array}{l} m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F_0 \cos w\,t \\ \text{C.I.} \quad x(0) = x_0\ , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array}}$$

**Réponse générale** $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Réponse du système libre

$$x_h(t) = e^{-e\,w_0\,t}\left(A\cos w_d\ t + B\sin w_d\ t\right)$$

Réponse forcée

$$x_p(t) = \left|X\right| \cos\!\left(w\ t - f\,\right)$$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (2)

## Réponse forcée

$$x_p(t) = |X| \cos(w\, t - f) = \Re e\left(X\ e^{i\,w\,t}\right)$$

$$|X| = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_0^2}\right)^2 + \left(2\,e\,\frac{w}{w_0}\right)^2}} \qquad \tan f = \frac{2\,e\,\frac{w}{w_0}}{1 - \frac{w^2}{w_0^2}}$$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (3)

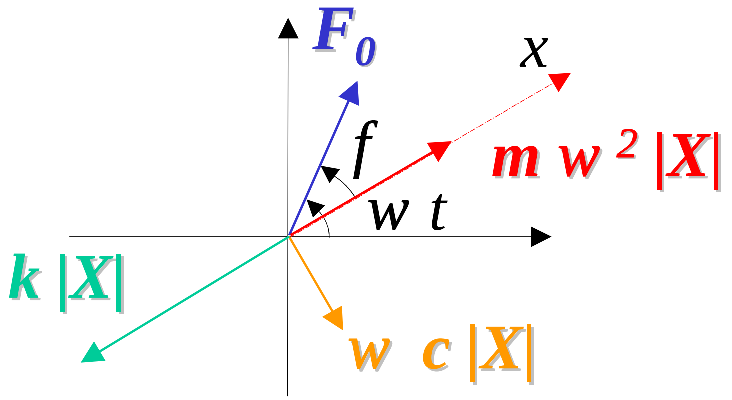
## Interprétation physique de l 'équilibre dynamique

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F_0\,e^{i\,w\,t}$$

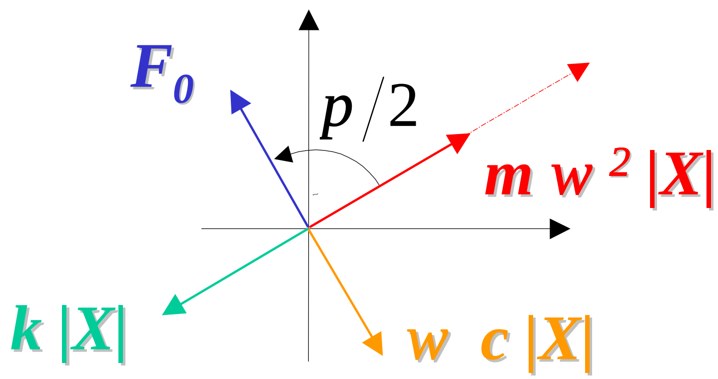
Ecrivons la solution sous la forme $X = \left|X\right|\,e^{-i\,f}$

$$F_0\,e^{i\,w\,t} + m\,w^2\,|X|\,e^{i\,(w\,t-f\,)} - i\,w\,c\,|X|\,e^{i\,(w\,t-f\,)} - k\,|X|\,e^{i\,(w\,t-f\,)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_0\,e^{i\,f} + m\,w^2\,|X| + w\;c\,|X|\,e^{-ip/2} - k\,|X| = 0$$




$$\frac{w}{w_0} < 1$$




$$\frac{w}{w_0} = 1$$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (4)

## Fonction de transfert (FRF)

Ecrivons la réponse sous la forme

$$x = X\, e^{i w t} = H(w)\, F_0\, e^{i w t}$$

Par définition

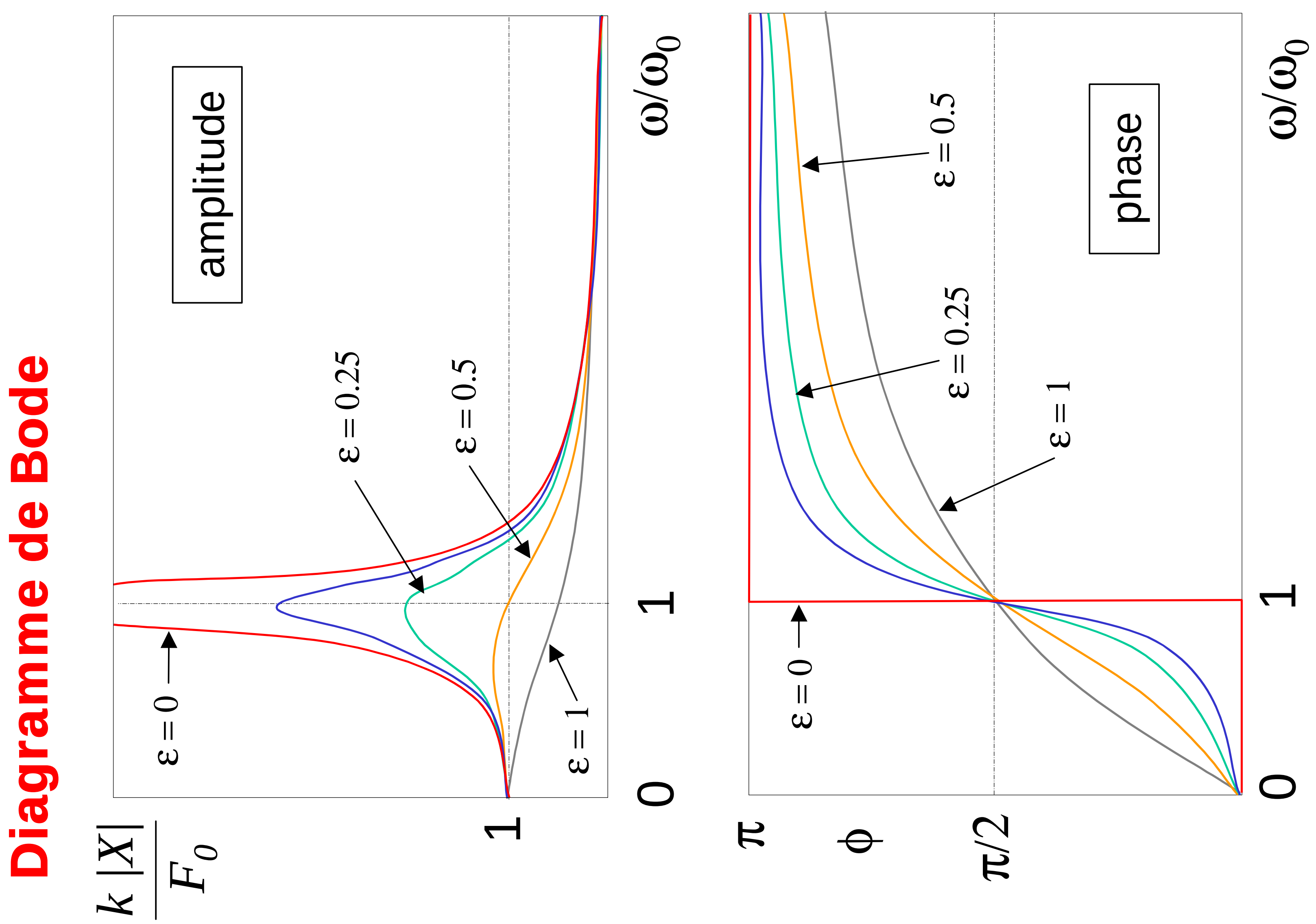
$$\boxed{H(w) = \frac{X}{F_0} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{Réponse statique}}\ \underbrace{\frac{1}{1 - \dfrac{w^2}{w_0^2} + 2\, i\, e\, \dfrac{w}{w_0}}}_{\text{Facteur d'amplification dynamique}}}$$

**Réponse statique**

**Facteur d'amplification dynamique**

| **Entrée** | **Système** | **Sortie** |
| --- | --- | --- |
| ***F(w)*** | ***H(w)*** | ***X(w)= H(w) F(w)*** |

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (5)



# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (6)

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (7)

## Définition de la résonance

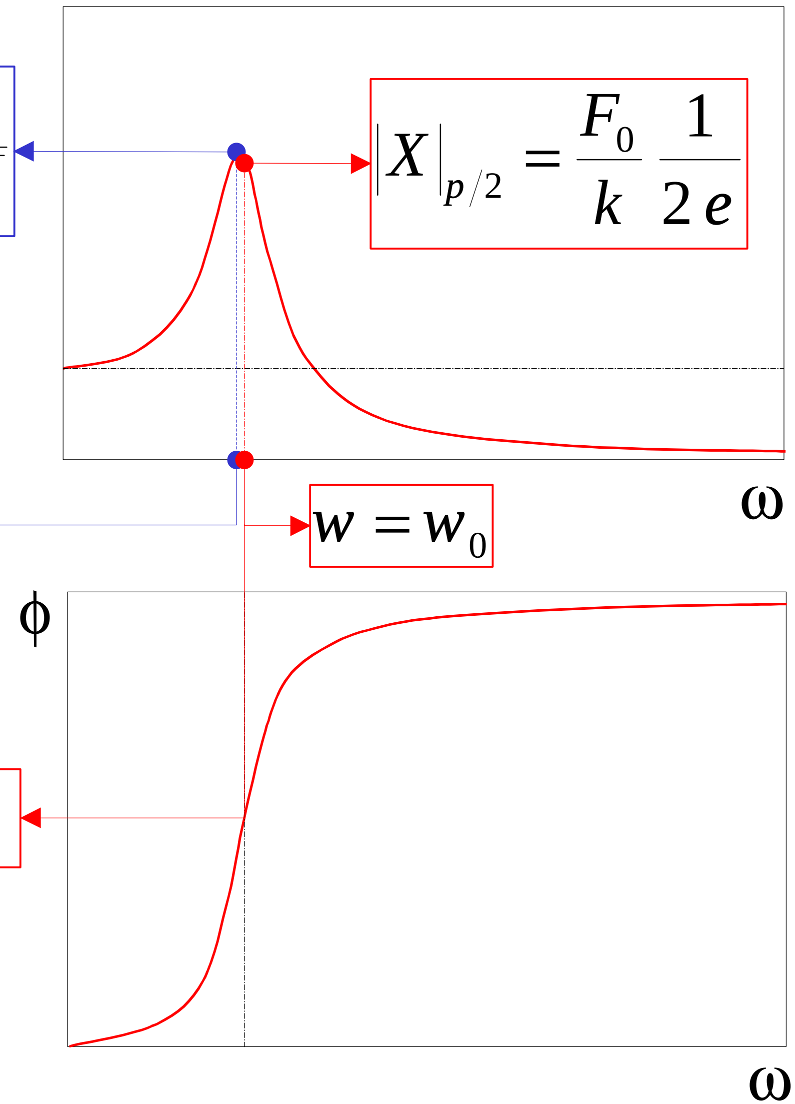
$$\left|X\right|_{\max} = \frac{F_0}{k}\,\frac{1}{2\,e}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\left|X\right|_{p/2} = \frac{F_0}{k}\,\frac{1}{2\,e}$$

**Résonance en amplitude**

$$w_a = w_0\,\sqrt{1-2\,e^2}$$

$$w = w_0$$

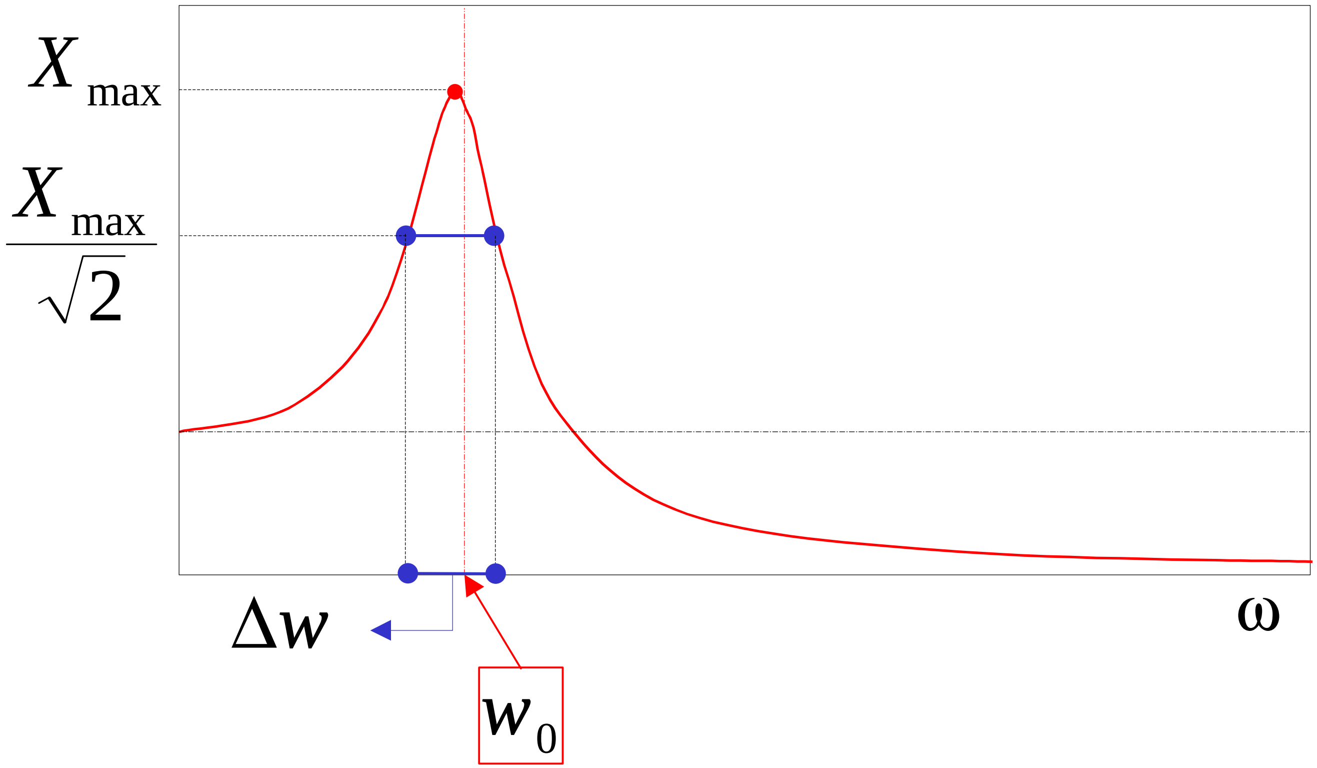



**Résonance de phase**

$$\pi/2$$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (8)

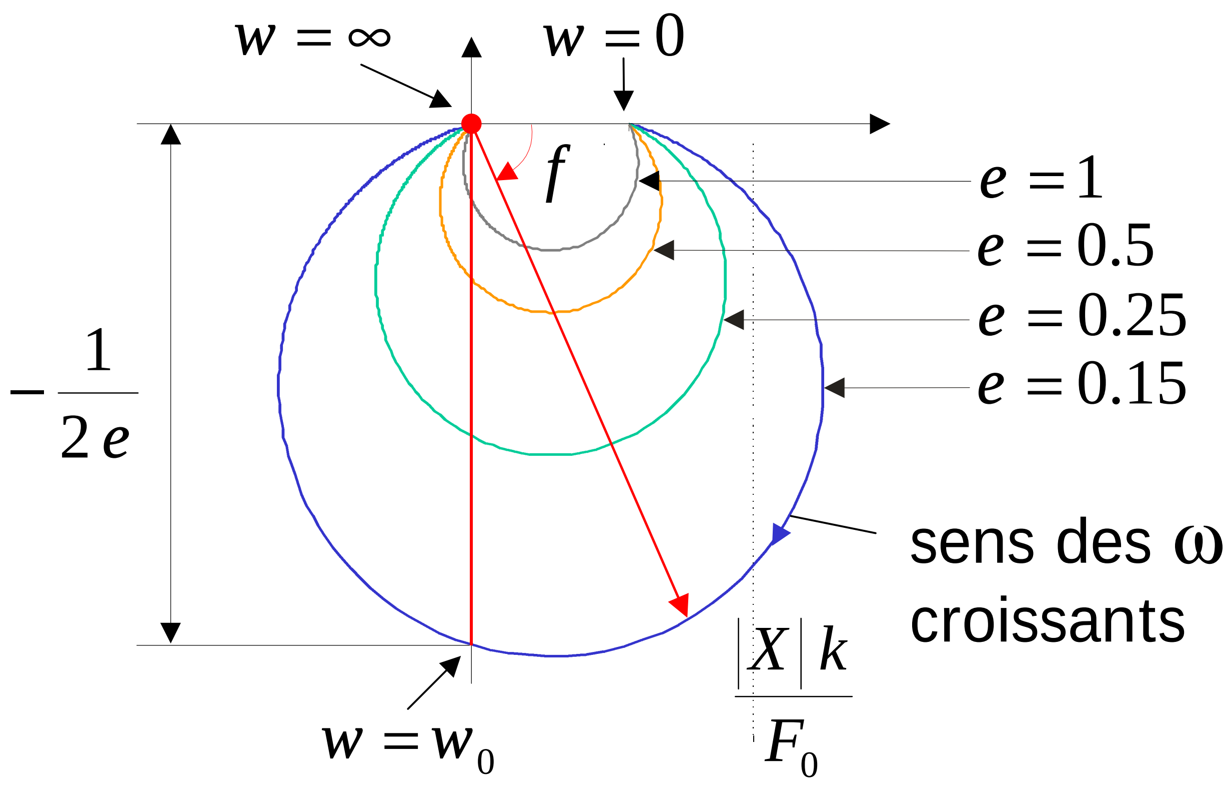
**Facteur de qualité** $$Q = \frac{w_0}{\Delta w} \cong \frac{1}{2e}$$



# Réponse forcée à 1 excitation harmonique (9)

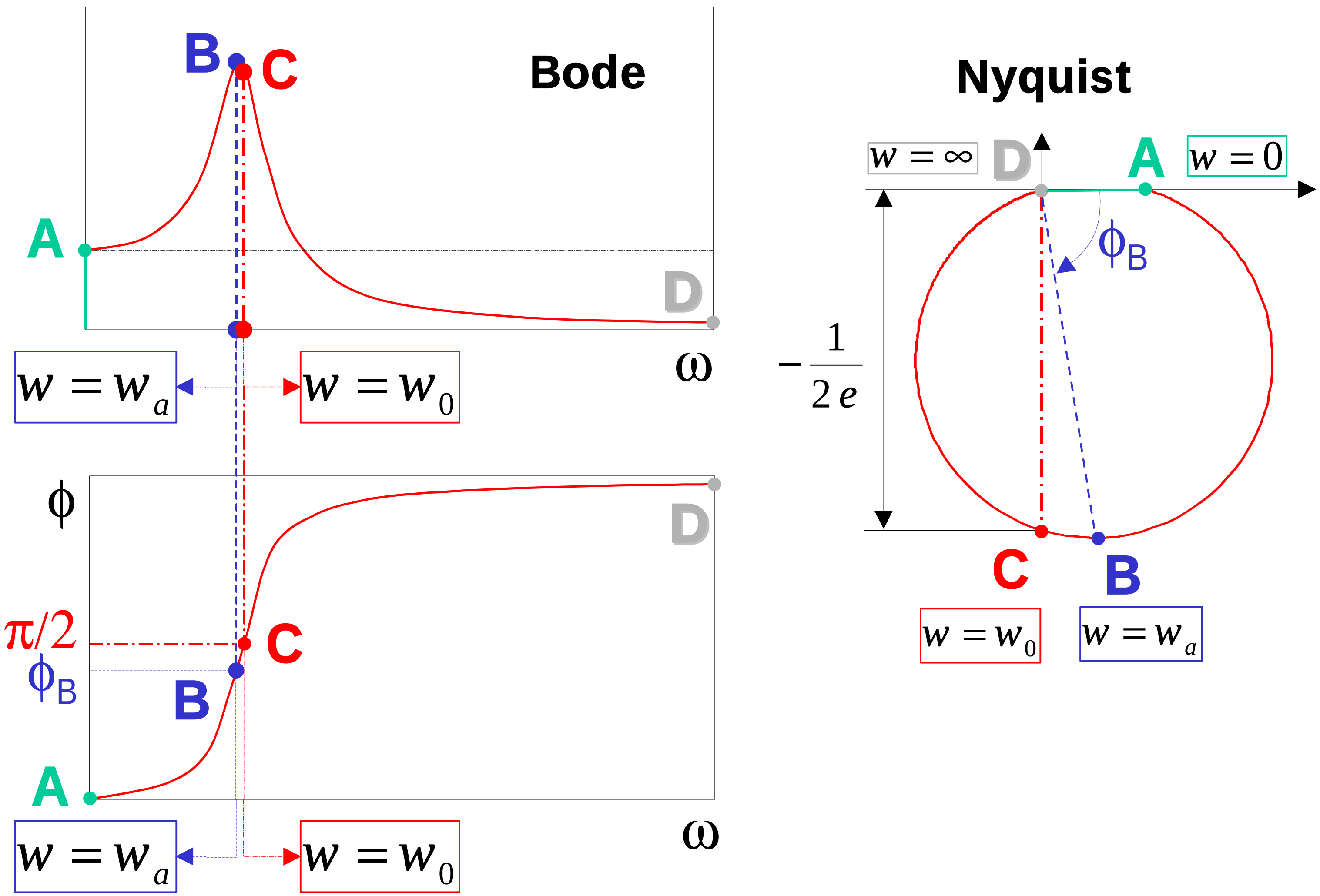
## Diagramme de Nyquist

Posons $H(w) = M + i\,N = \dfrac{k\,|X|}{F_0}\,e^{-i\,f}$



# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(10)

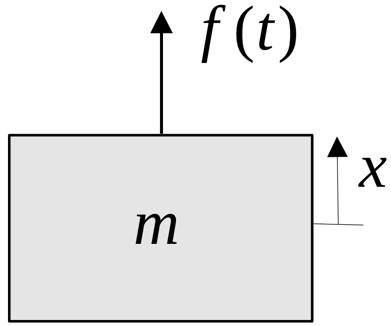
## Correspondance entre les diagrammes



# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(11)

## FRF d ’éléments particuliers

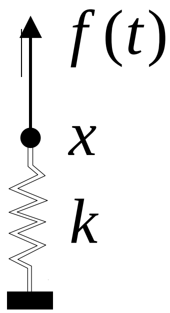
### masse




$$m\,\ddot{x} = f(t)$$

$$H(w) = -\frac{1}{w^2\,m}$$

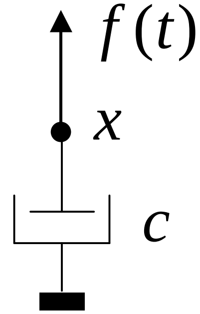
### raideur




$$f = k\,x$$

$$H(w) = \frac{1}{k}$$

### amortissement




$$f = c\,\dot{x}$$

$$H(w) = \frac{1}{i\,w\,c}$$

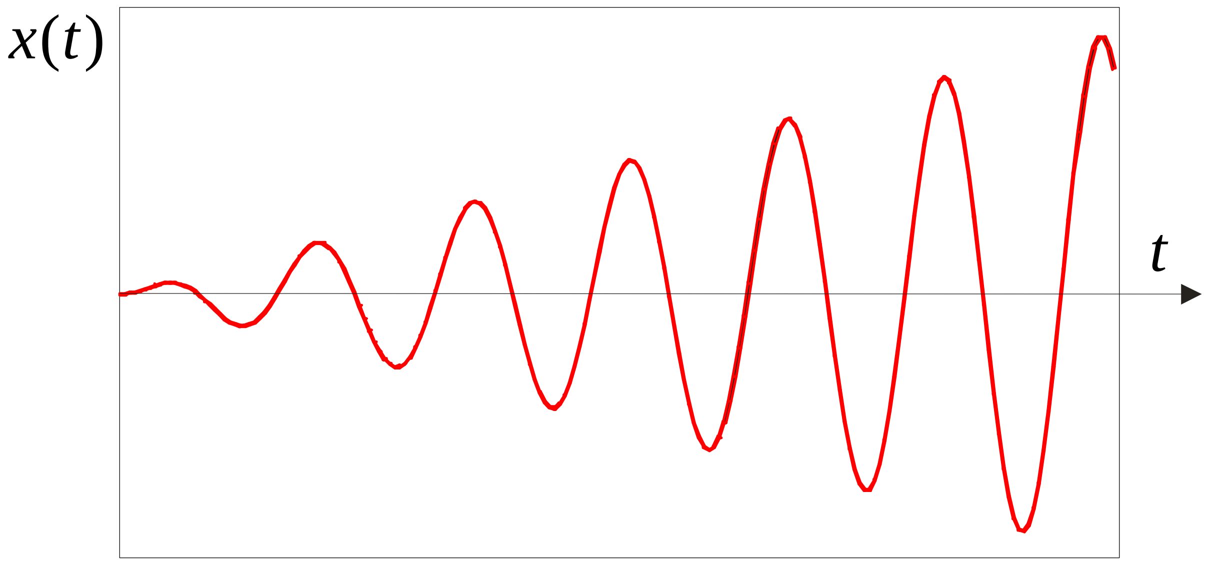
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(12)

## Cas particulier de la résonance

La réponse s 'écrit

$$x(t) = A\cos w_0\, t + B\sin w_0\, t + \frac{F_0}{k - w^2\, m}\cos w\, t$$

Lorsque $w \to w_0$ $\quad x(t) = \frac{F_0}{k}\frac{w_0\, t}{2}\sin w_0\, t$



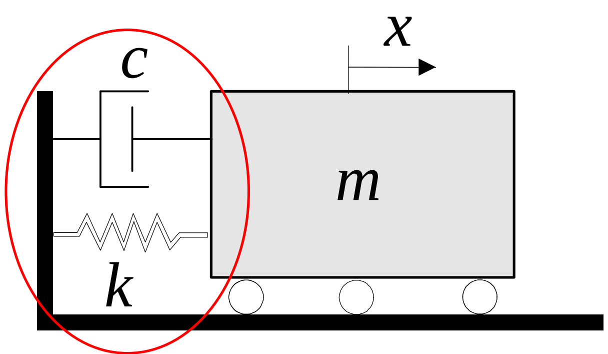
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(13)

## Puissance dissipée par amortissement

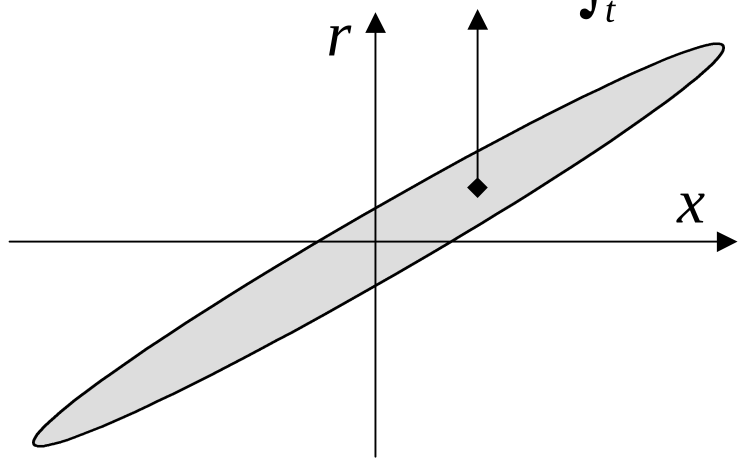
### Amortissement visqueux

Puissance dissipée

$$W = \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} r\,\dot{x}\,dt$$




$$r = k\,x + c\,\dot{x}$$

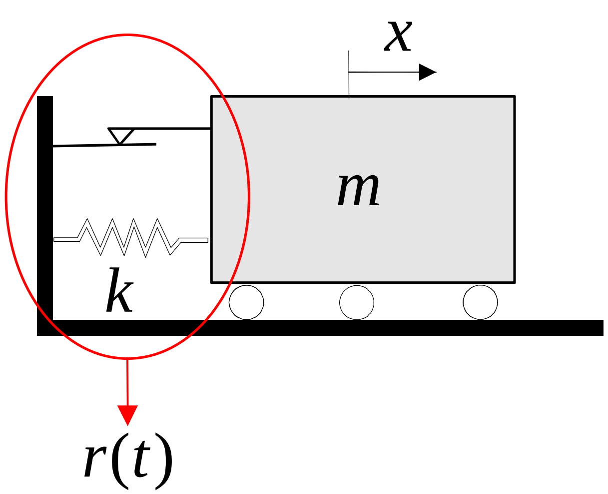


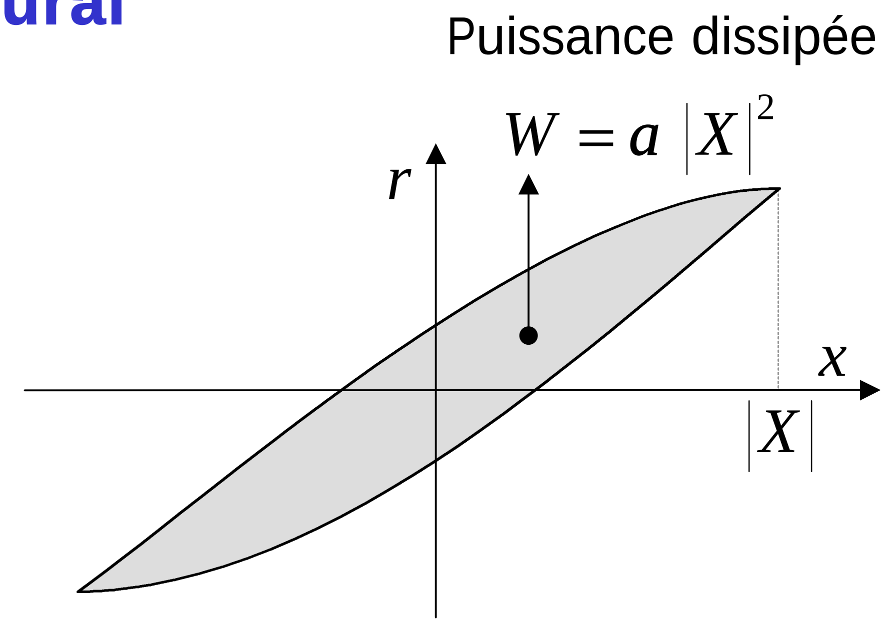

$$W = \pi\,c\,\omega\,|X|^2$$

$\Rightarrow$ Mesure de $c$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(14)

## Amortissement structural




Posons

$$W = p\ c_{eq}\ w\ |X|^2 \quad \Longrightarrow \quad c_{eq} = \frac{W}{p\ w\ |X|^2}$$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(15)

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(16)

## Modèle hystérétique

*Hypothèse* : mouvement <u>harmonique</u>

On écrit l 'équation du mouvement sous la forme

**Force d 'amortissement**

$$m\ddot{x} + \overbrace{i\,\gamma\,k\,x}^{\text{Force d'amortissement}} + k\,x = F_0\,e^{i\omega t}$$

Coefficient de proportionnalité ($\gamma$)

Déphasage de 90° par rapport à $k\,x$ ($i$)

On en déduit $\gamma = \dfrac{\omega\,c}{k} = \dfrac{\alpha}{\pi\,k}$

D 'où la réponse forcée $x(t) = \dfrac{F_0\,e^{i\omega t}}{k\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\,\gamma\right)}$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(17)

## Valeurs quadratiques moyennes de l 'excitation et de la réponse

Définition $\boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt \quad \text{et} \quad \overline{f^2} = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$

On obtient $\boxed{\sqrt{\overline{f^2}} = \frac{|F_0|}{\sqrt{2}} \quad et \quad \sqrt{\overline{x^2}} = \frac{|X|}{\sqrt{2}}}$

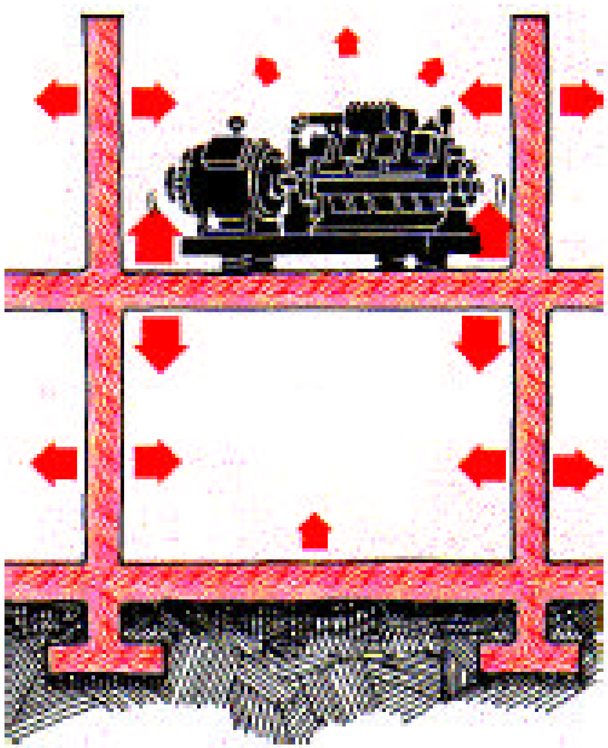
$|F_0|_{RMS}$ $|X|_{RMS}$

**Valeurs RMS** (Root Mean Square)

et par conséquent $\boxed{|X|_{RMS} = |H(w)|\ |F_0|_{RMS}}$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(18)

## Principes de l 'isolation vibratoire



2 cas à considérer :

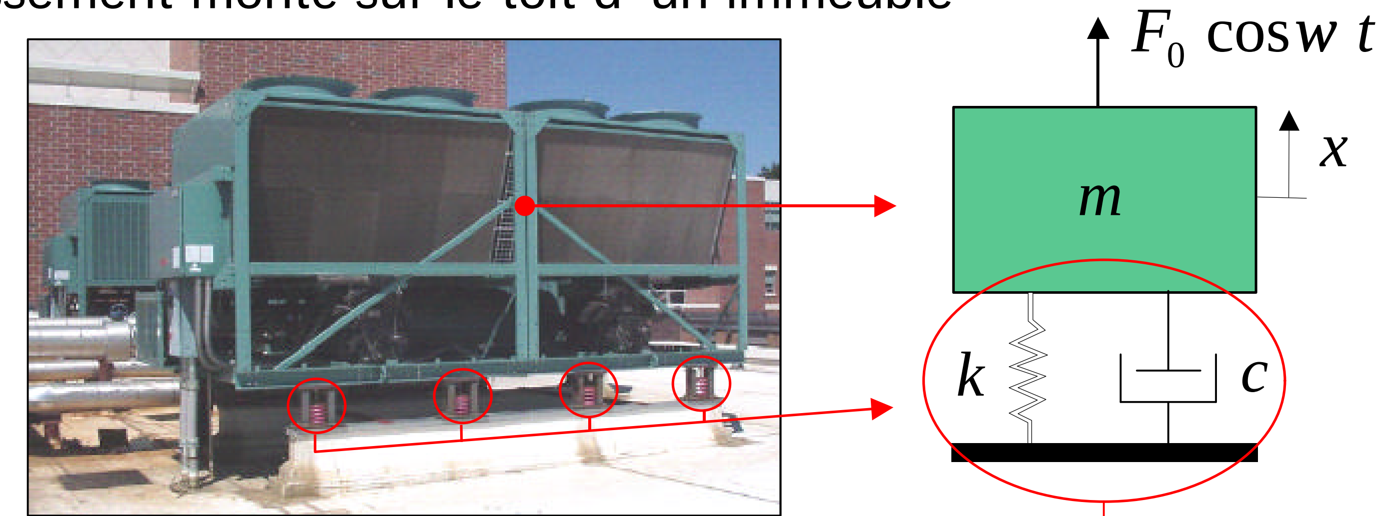
- machine ou équipement générateur de vibrations
- machine ou équipement sensible aux vibrations

⇩

Isolation par un filtre mécanique (suspension)

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(19)

**Exemple :** compresseur à pistons et tour de refroidissement monté sur le toit d 'un immeuble




Force transmise à la fondation

$$r = k\; x + c\; \dot{x} = |R| \cos(w\; t - y\;)$$

On en déduit :

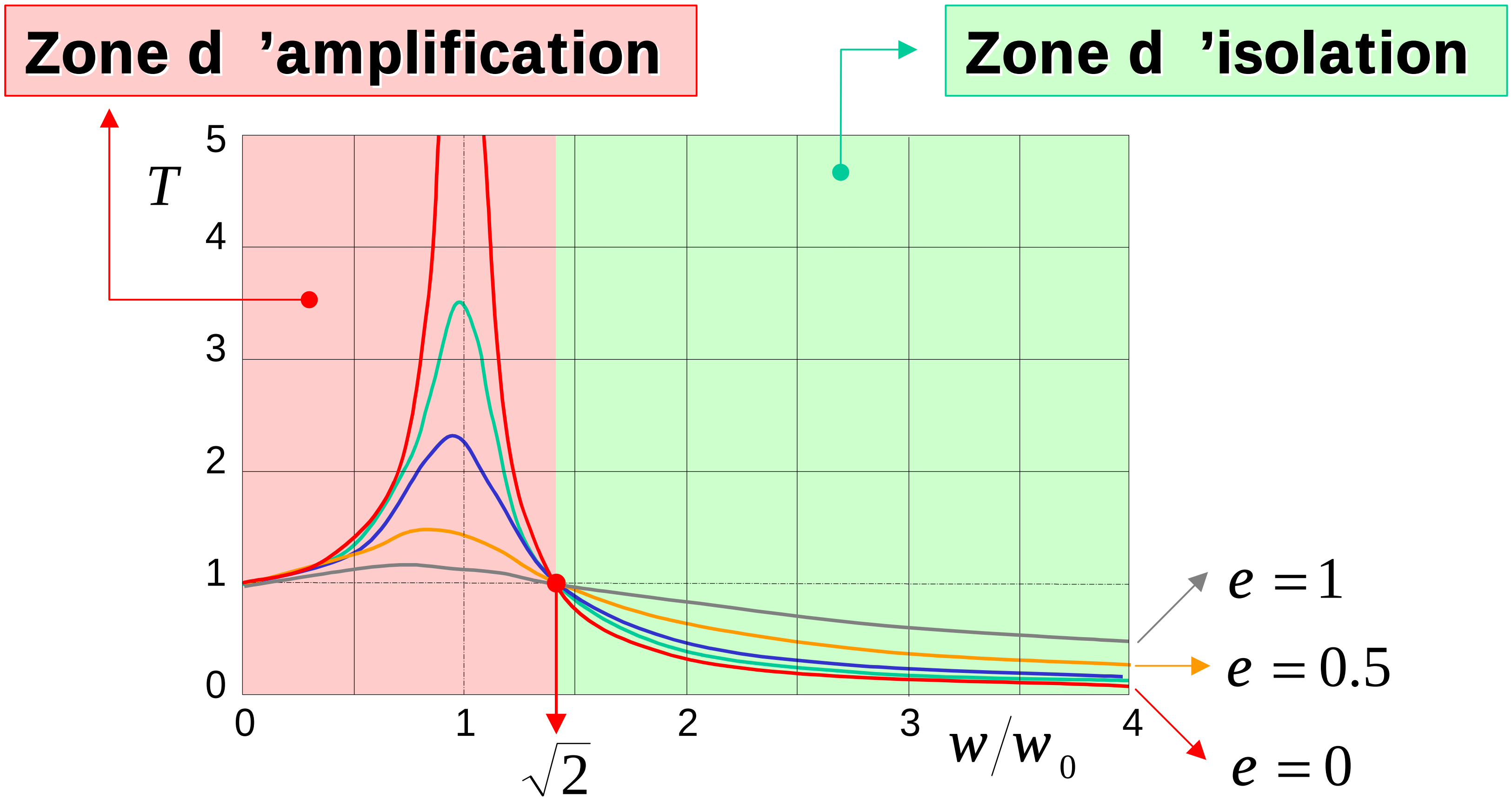
$$|R| = |X|\,\sqrt{k^2 + w^2\; c^2} \quad \Rightarrow$$

**Transmissibilité absolue**

$$\boxed{T = \frac{|R|}{F_0}}$$

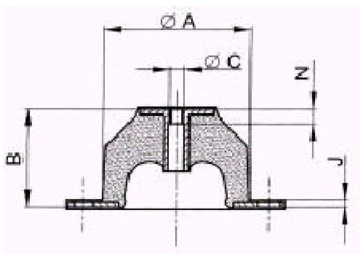
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(20)

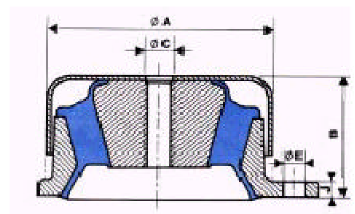
$$T = \sqrt{\frac{1 + (2\,e\,w/w_0)^2}{\left(1 - w^2/w_0^2\right)^2 + (2\,e\,w/w_0)^2}}$$

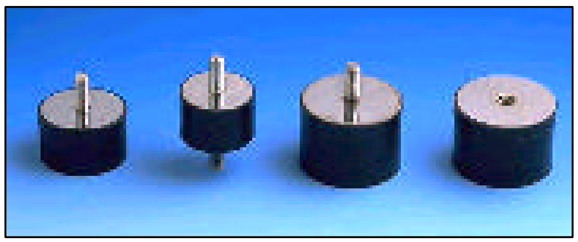


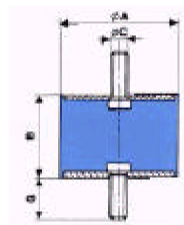
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(21)

## Exemples d ’isolateurs (catalogue Paulstra)



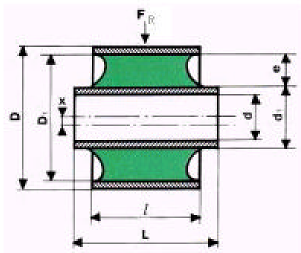




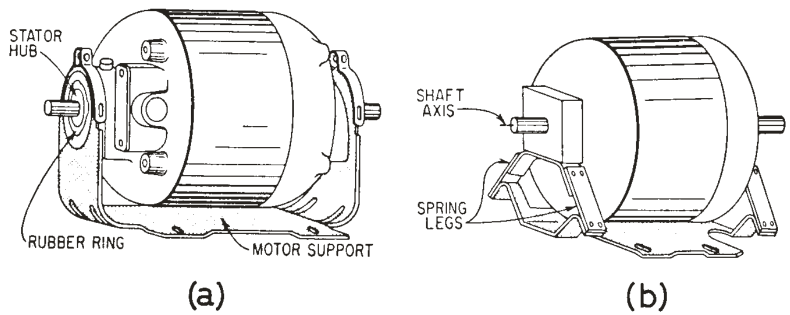
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(22)

## Exemples de procédés d 'isolation

Articulation flexible

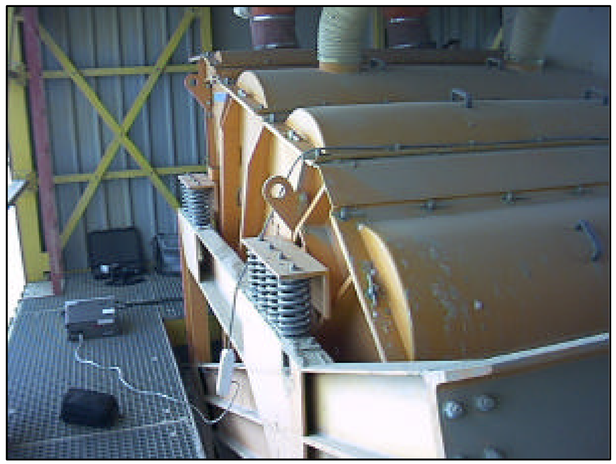



Moteur électrique



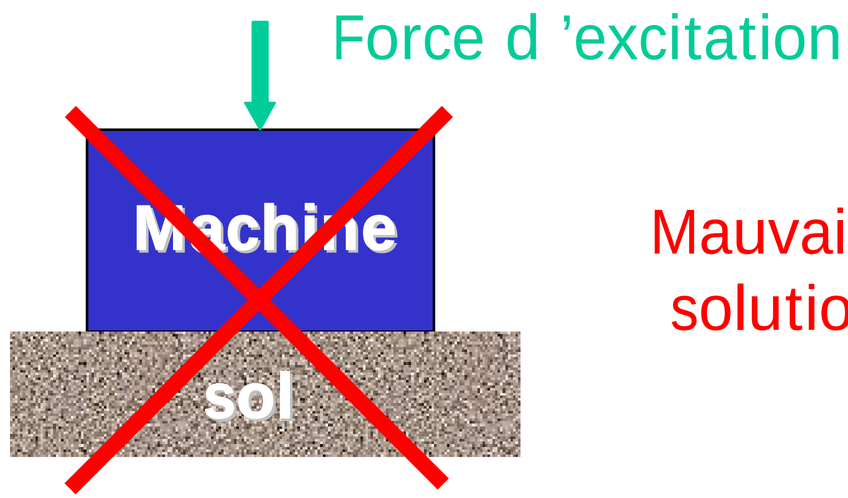

Ressort
+
Coussin
métallique

Tamis de cimenterie

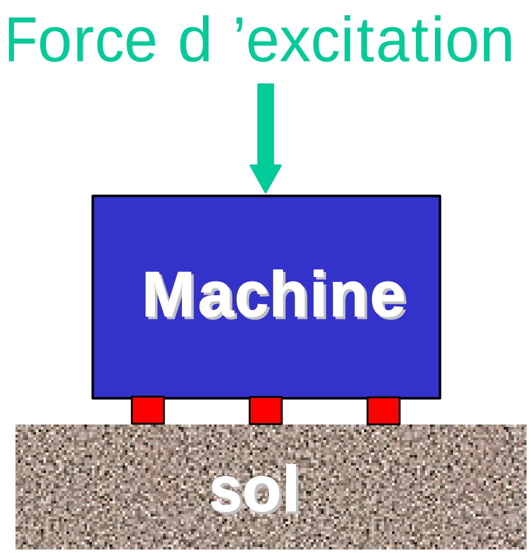


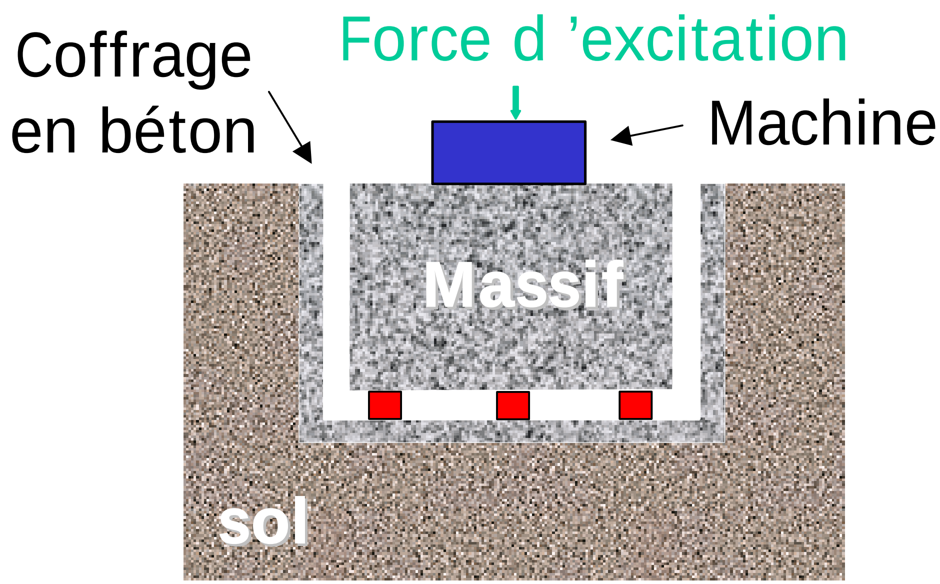
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(23)

**En résumé**




Mauvaise
solution



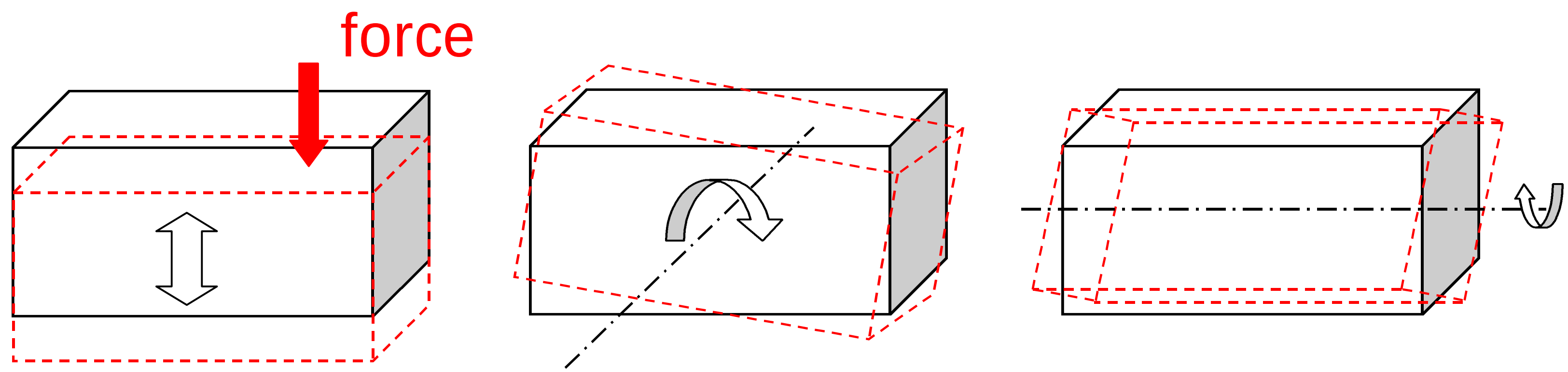
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(24)

## Isolation verticale

## Effets « secondaires »

Translation

Mouvements de rotation




etc. …

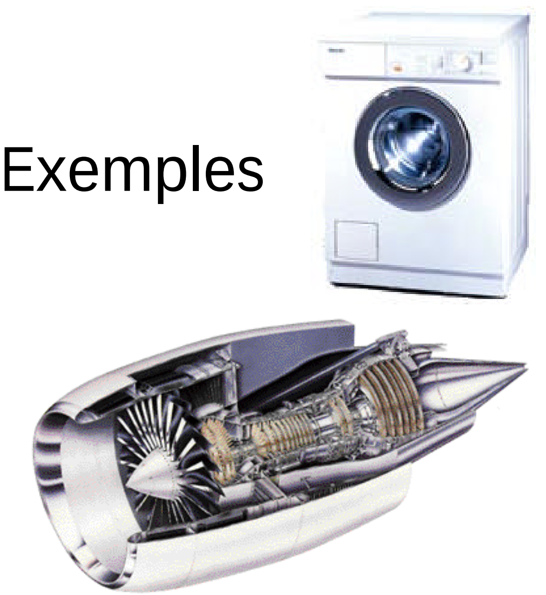
6 degrés de liberté

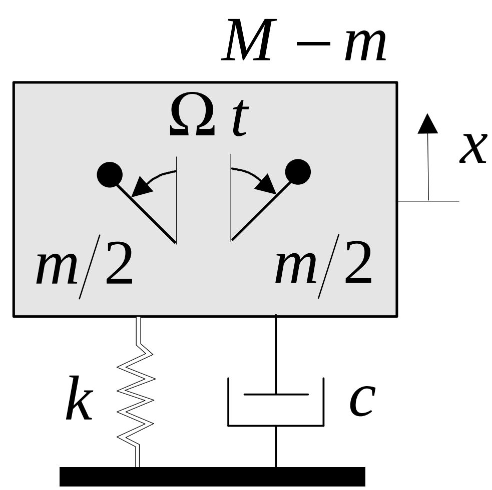
Il faut donc s ’assurer que tous les modes seront parfaitement contrôlés.

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(25)

## Machines présentant un balourd

Exemples






Déplacement vertical des masses *m/2*

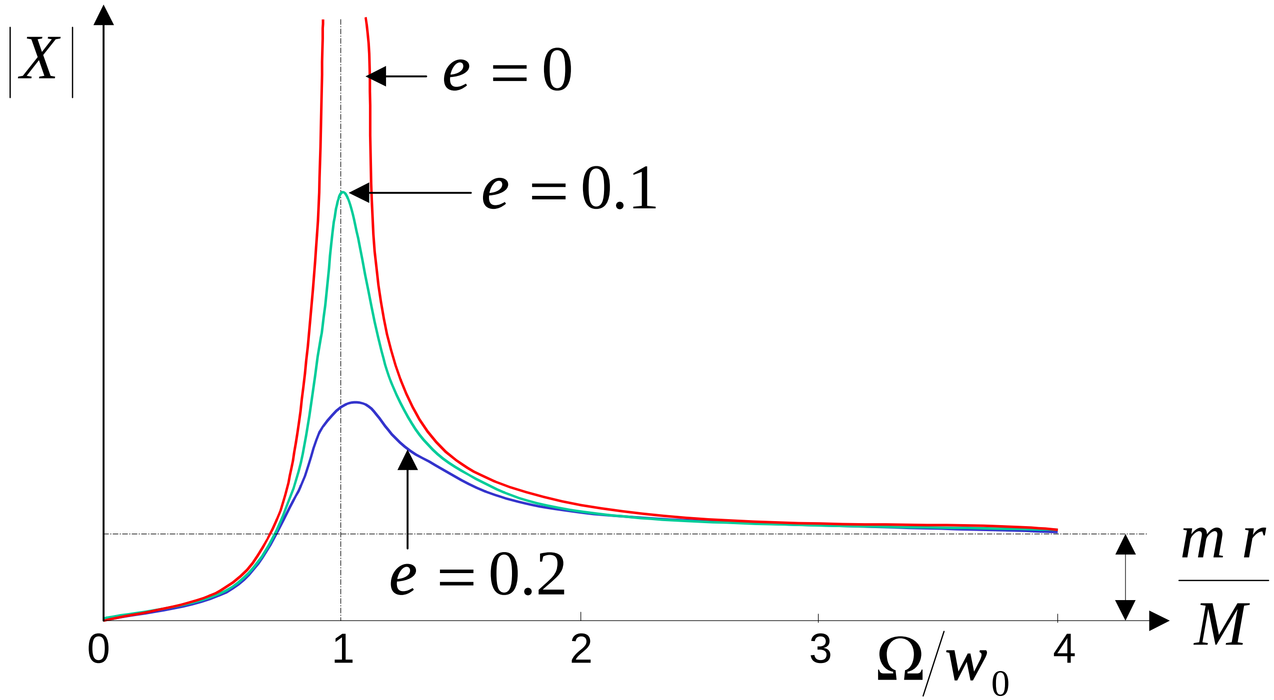
$$x + r\cos\Omega\, t$$

$$\Rightarrow \quad (M-m)\,\ddot{x} + m\,\frac{d^2}{dt^2}\left(x + r\cos\Omega\, t\right) + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

$$M\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = \underbrace{m\,\Omega^2\,r\cos\Omega\, t}_{\text{Force de balourd}}$$

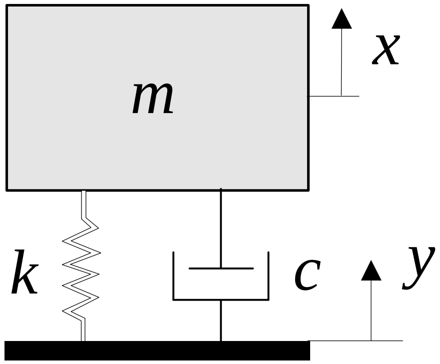
# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(26)

$$|X| = \frac{m\,r}{M}\left(\frac{\Omega}{w_0}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{w_0^2}\right)^2+\left(2\,e\,\frac{\Omega}{w_0}\right)^2}}$$



# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(27)

## Excitation par le support




Equation du mouvement

$$m\,\ddot{x} + c\,(\dot{x} - \dot{y}) + k\,(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = k\,y + c\,\dot{y}$$

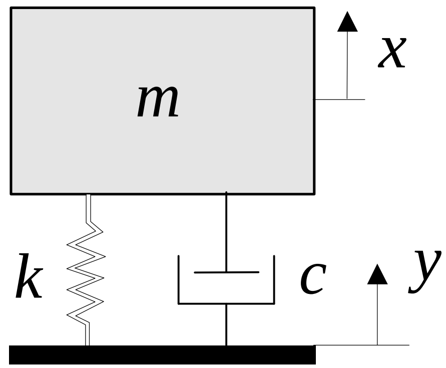
Pour un mouvement harmonique du support

$$y = Y\,e^{i w t} \qquad\qquad x = X\,e^{i w t}$$

**Transmissibilité absolue =** $\boxed{\dfrac{X}{Y}}$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(28)

## Excitation par le support




Equation du mouvement

$$m\,\ddot{x} + c\,(\dot{x} - \dot{y}) + k\,(x - y) = 0$$

Mouvement relatif $\quad z = x - y$

$$\Longrightarrow \qquad m\,\ddot{z} + c\,\dot{z} + k\,z = -m\,\ddot{y}$$

Pour un mouvement harmonique du support

$$y = Y\,e^{i\,w\,t} \qquad\qquad z = Z\,e^{i\,w\,t}$$

**Transmissibilité relative =** $\boxed{\dfrac{Z}{Y}}$

# Réponse forcée à 1 excitation harmonique(29)

$$\left|\frac{Z}{Y}\right| = \left(\frac{w}{w_0}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2 + \left(2e\frac{w}{w_0}\right)^2}} \qquad \tan f = \frac{2e\frac{w}{w_0}}{1-\frac{w^2}{w_0^2}}$$