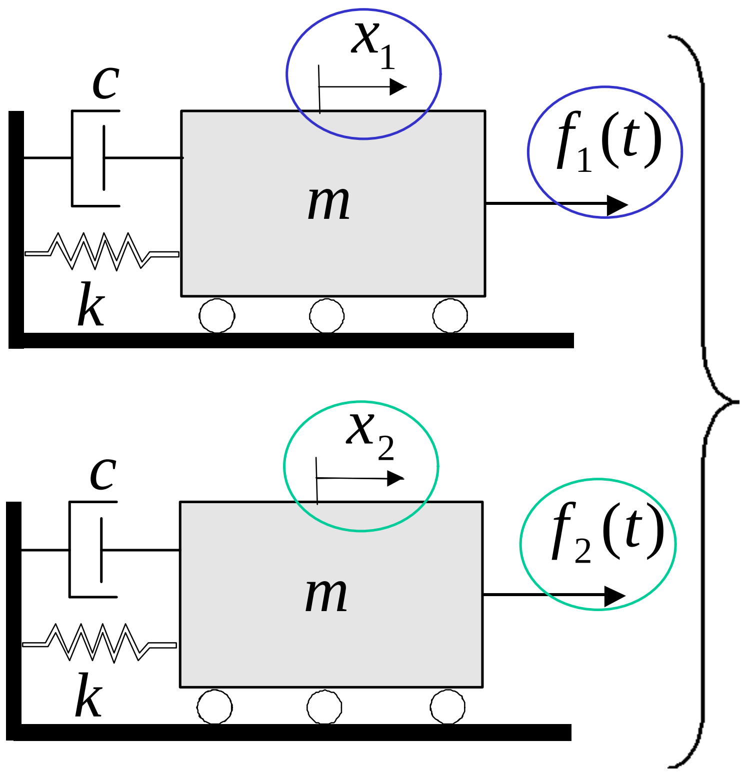
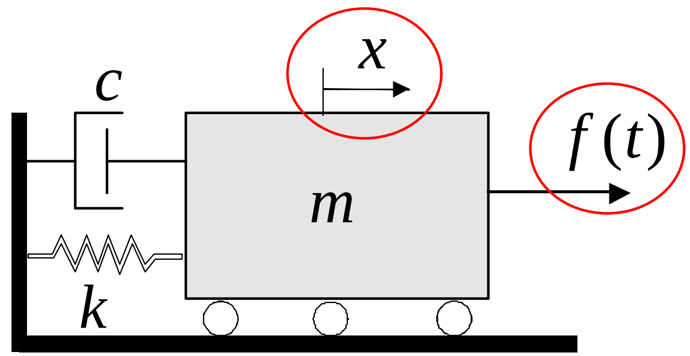
Réponse forcée à une excitation quelconque

Principe de superposition

Equation du mouvement

$$
\boxed{\begin{array}{l} m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t) \\ \text{C.I.} \quad x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array}}
$$



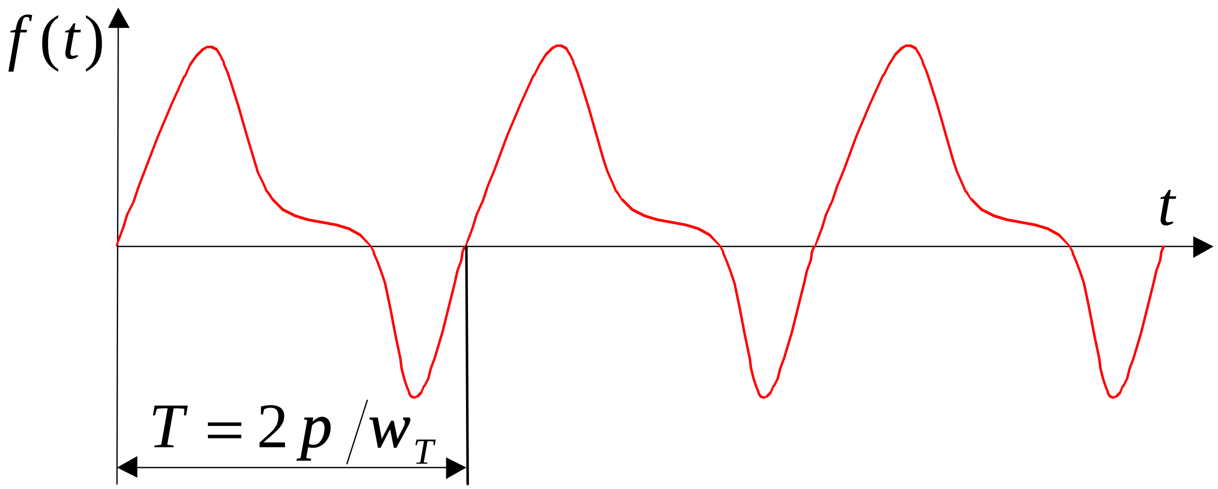


Si $\quad f(t) = c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)$

alors $\quad x(t) = c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t)$

Réponse forcée à une excitation quelconque (2)

Réponse à une excitation périodique



$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(a_p \cos p w_T \, t + b_p \sin p w_T \, t \right)$$

avec les coefficients

$$a_p = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos p w_T \, t \quad dt \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_p = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin p w_T \, t \quad dt \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Réponse forcée à une excitation quelconque (3)

Réponse forcée à une excitation quelconque (4)

Autre représentation de la série de Fourier

$$\boxed{f(t) = \Re e\left[\sum_{p=0}^{\infty} A_p \, e^{i\,p\,w_T\,t}\right]}$$

avec $$\boxed{A_p = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i\,p\,w_T\,t}\, dt \qquad p = 0, 1, 2, \ldots}$$

D 'où la réponse

$$x(t) = \Re e\left[\sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{H(p\,w_T)}\, A_p \, e^{i\,p\,w_T\,t}\right]$$

F.R.F. $$H(p\,w_T) = \frac{1}{k}\,\frac{1}{1-\left(\dfrac{p\,w_T}{w_0}\right)^2 + 2\,i\,e\,\dfrac{p\,w_T}{w_0}}$$

Réponse forcée à une excitation quelconque (5)

En termes de valeurs quadratiques moyennes,
on obtient :

$$\overline{f^2} = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\Re e \sum_{p=0}^{\infty} A_p\, e^{i\,p\,w_T\,t}\right)^2 dt$$

Tous calculs faits, on a

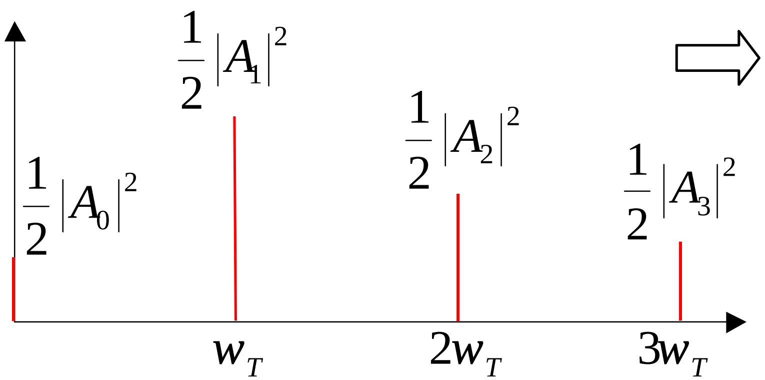
$$\overline{f^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\left|A_p\right|^2} \quad \text{et} \quad \overline{x^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\left|H_p\right|^2 \left|A_p\right|^2}$$

contribution de la fréquence $p\,\omega_T$
à l 'excitation ou à la réponse

Réponse forcée à une excitation quelconque (6)

Valeur quadratique moyenne : $\overline{f^2} = \dfrac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left|A_p\right|^2$

Représentation dans le plan fréquentiel



$\Rightarrow$ $$\boxed{G_f(w) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left|A_p\right|^2 d\left(w - p\,w_T\right)}$$

Densité de puissance spectrale de l 'excitation

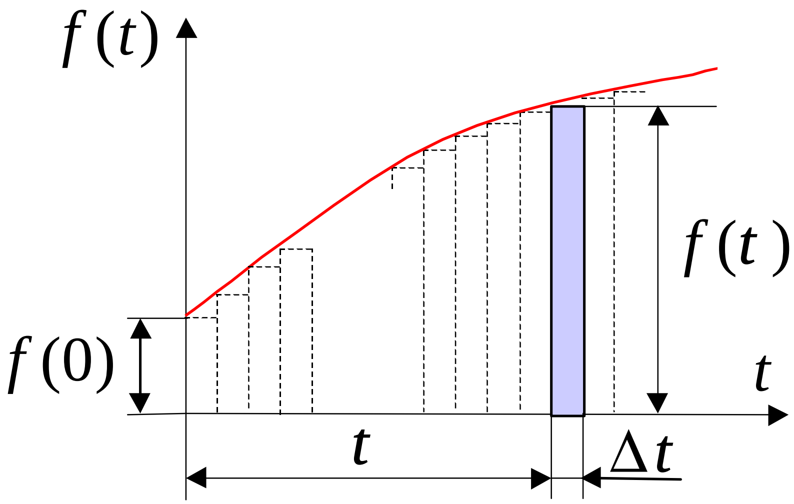
et par conséquent $\overline{f^2} = \displaystyle\int_0^{\infty} G_f(w)\,dw$

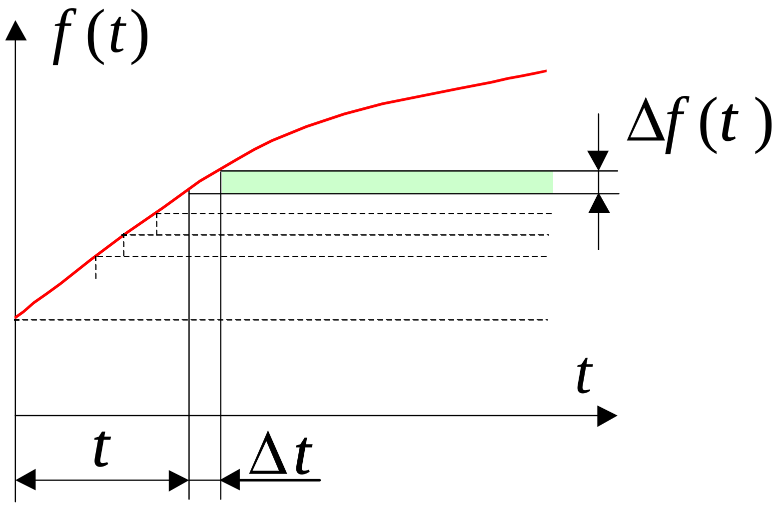
De même

$$\boxed{G_x(w) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left|H_p\right|^2\left|A_p\right|^2 d\left(w - p\,w_T\right)}$$ et $\overline{x^2} = \displaystyle\int_0^{\infty} G_x(w)\,dw$

Réponse forcée à une excitation quelconque (7)

Réponse à une excitation transitoire



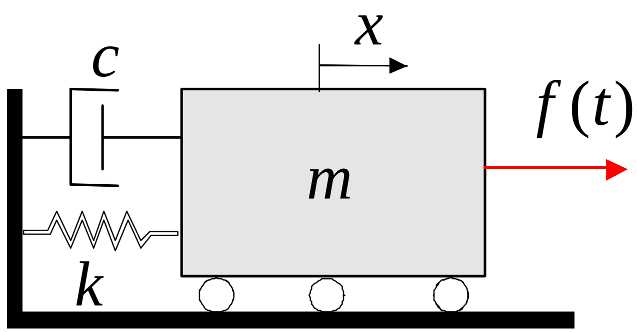


Décomposition en impulsions élémentaires

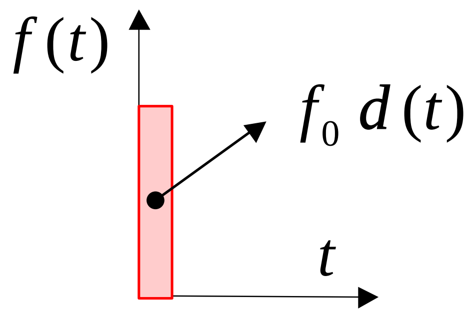
Décomposition en échelons élémentaires

Réponse forcée à une excitation quelconque (8)

Calcul de la réponse à une impulsion



$$f(t) = f_0\, d(t)$$



Equation du mouvement $\qquad m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f_0\, d(t)$

C.I. $\quad x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0$

Par intégration et passage à la limite pour $\Delta t \to 0$

$$\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} m\,\ddot{x}\,dt}_{\boxed{m\,\dot{x}(0+)}} + \underset{=\,0}{\cancel{\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} c\,\dot{x}\,dt}} + \underset{=\,0}{\cancel{\lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} k\,x\,dt}} = \underbrace{f_0 \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} d(t)\,dt}_{\boxed{f_0}}$$

par continuité du déplacement

Réponse forcée à une excitation quelconque (9)

D 'où l 'équation du mouvement devient

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f_0\,d(t) \\ x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0 \\ x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0+) = \dfrac{f_0}{m} \end{cases}$$

Solution $$x(t) = \frac{f_0}{m\,w_d}\, e^{-e\,w_0\,t} \sin w_d\, t$$

Réponse impulsionnelle $(f_0 = 1)$

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{m\,w_d}\, e^{-e\,w_0\,t} \sin w_d\, t & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}}$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(10)

Calcul de la réponse à une excitation quelconque par superposition de réponses impulsionnelles

Excitation **Réponse**

$$d(t) \leftrightarrow h(t)$$

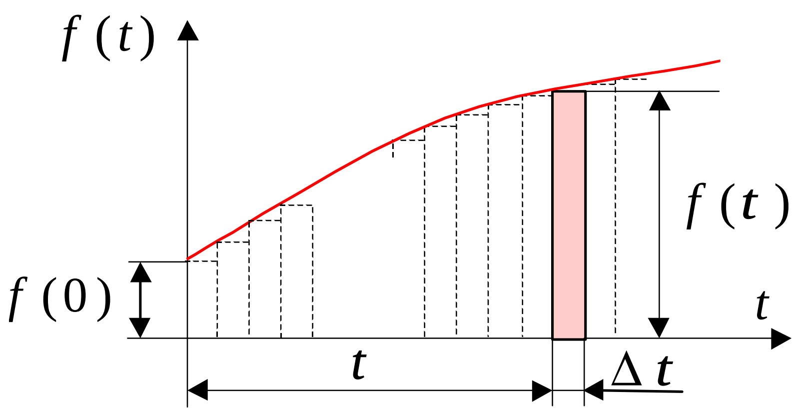
$$d(t-t) \leftrightarrow h(t-t)$$

$$f(t)\,\Delta t\; d(t-t) \leftrightarrow f(t)\,\Delta t\;\; h(t-t)$$

$$f(t) = \sum f(t)\,\Delta t\; d(t-t) \leftrightarrow x(t) = \sum f(t)\,\Delta t\;\; h(t-t)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum f(t)\, h(t-t)\,\Delta t$$

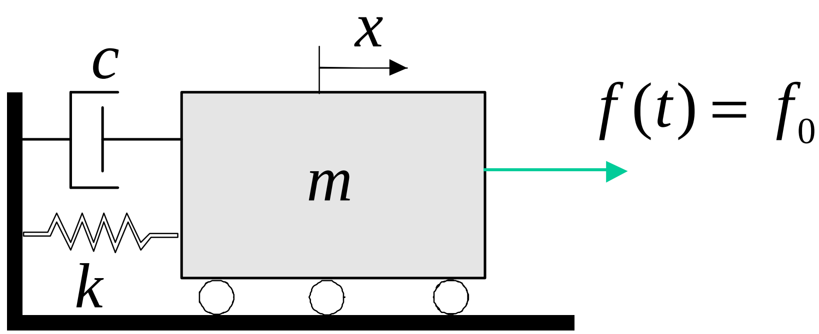


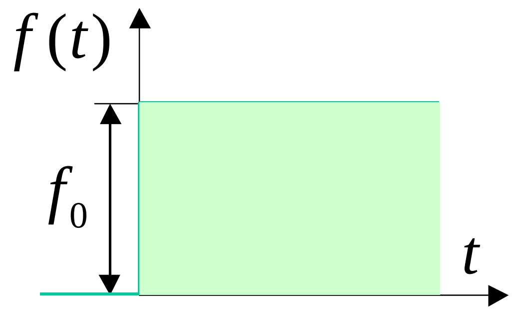
$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(t)\, h(t-t)\, dt}$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(11)

Réponse forcée à une excitation quelconque(12)

Calcul de la réponse à un échelon





Equation du mouvement $m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f_0 \quad t > 0$

C.I. $x(0) = 0\,,\quad \dot{x}(0) = 0$

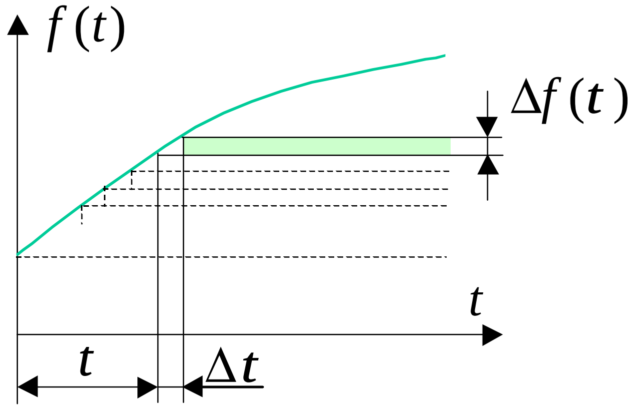
Solution $x(t) = \dfrac{f_0}{k}\left(1 - e^{-e\,w_0\,t}\left(\cos w_d\;t + \dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin w_d\;t\right)\right)$

Réponse indicielle

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\left(1 - e^{-e\,w_0\,t}\left(\cos w_d\;t + \dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\sin w_d\;t\right)\right) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(13)

Calcul de la réponse à une excitation quelconque par superposition de réponses indicielles



Excitation		Réponse
$u(t)$	$\leftrightarrow$	$g(t)$
$u(t-t)$	$\leftrightarrow$	$g(t-t)$
$\Delta f(t)\,u(t-t)$	$\leftrightarrow$	$\Delta f(t)\,g(t-t)$

$$f(0)+\sum \Delta f(t)\,u(t-t) \quad \leftrightarrow \quad f(0)\,g(t)+\sum \Delta f(t)\,g(t-t)$$

$$\Rightarrow \qquad x(t)= f(0)\,g(t)+\lim_{\Delta t\to 0}\sum \frac{\Delta f(t)}{\Delta\tau}\,g(t-t)\;\Delta\tau$$

$$\boxed{x(t)= f(0)\,g(t)+\int_0^t \frac{df(t)}{dt}\,g(t-t)\,dt}$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(14)

$$\boxed{x(t) = f(0)\, g(t) + \int_0^t \frac{df(t)}{dt}\, g(t-t)\, dt}$$

$$x(t) = \cancel{f(0)\, g(t)} + \left[f(t)\, g(t-t) \right]_0^t + \int_0^t f(t)\, \frac{dg(t-t)}{dt}\, dt$$

$$f(t)\, \underbrace{g(0)}_{=\,0} - \cancel{f(0)\, g(t)}$$

Pour rappel $\boxed{x(t) = \int_0^t f(t)\, h(t-t)\, dt}$

Réponse impulsionnelle $\boxed{h(t) = \dfrac{dg}{dt}}$ **Dérivée de la réponse indicielle**

Réponse forcée à une excitation quelconque(15)

Calcul de la réponse à une excitation quelconque par transformée de Fourier

Définition de la transformée de Fourier

Excitation

$$\boxed{\begin{aligned} F(w) &= \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-i w t}\, dt \\ f(t) &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{i w t}\, dw \end{aligned}}$$

Réponse

$$\boxed{\begin{aligned} X(w) &= \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-i w t}\, dt \\ x(t) &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)\, e^{i w t}\, dw \end{aligned}}$$

$$\rightarrow X(w) = H(w)\, F(w)$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(16)

Plan temporel

Entrée → **Système** → **Sortie**

$f(t)$ → $h(t)$ → $x(t) = \int_0^t f(t)\, h(t-t)\, dt$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$

Entrée → **Système** → **Sortie**

$F(w)$ → $H(w)$ → $X(w) = H(w)\, F(w)$

Plan fréquentiel

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\, e^{iwt}\, dw}$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(17)

Réponse spectrale

Objectif : évaluer la réponse à partir de réponses précalculées pour certaines formes d 'excitation prédéfinies

Soit $$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t)$$

Posons $f(t) = F_0\, f(t)$ et $x_{stat} = \dfrac{F_0}{k}$

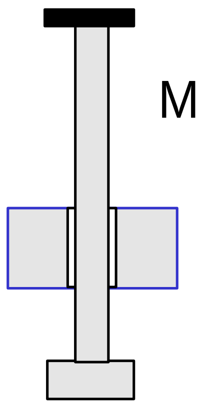
facteur de réponse dynamique

$$\boxed{n(w_0, e) = \max_{0<t<\infty}\left(\frac{x}{x_{stat}}\right)}$$

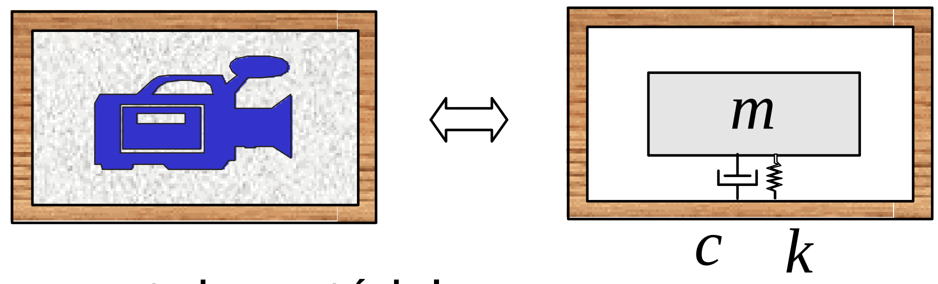
avec $$x(t) = \int_0^t f(t)\, h(t-t)\, dt$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(18)

Exemples : Impact d 'un projectile sur une structure
(ex : oiseau sur un avion, ...)

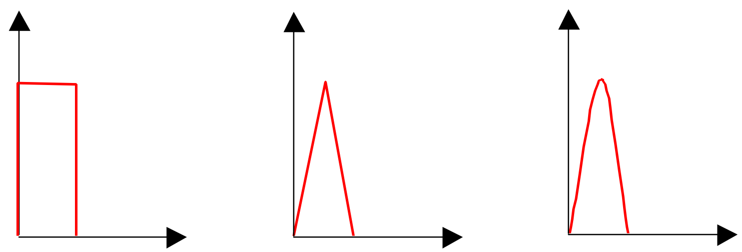


Mise en charge
rapide



Transport de matériel
(camion,train, bateau, ...)

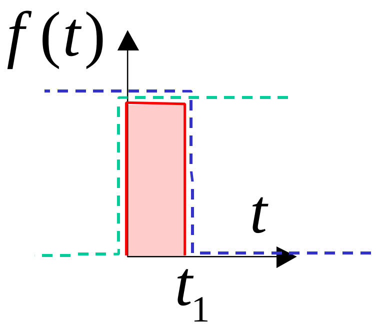
Différents types d 'impulsion



etc.

Réponse forcée à une excitation quelconque(19)

Cas de l ’impulsion rectangulaire



$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{si} \quad 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Réponse à un échelon

$$x_h(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-e\, w_0\, t}\left(\cos w_d\, t + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin w_d\, t\right)\right)$$

Réponse à l ’impulsion rectangulaire

$$x(t) = \begin{cases} x_h(t) & \text{si} \quad 0 < t \leq t_1 \\ x_h(t) - x_h(t - t_1) & \text{si} \quad t > t_1 \end{cases}$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(20)

Cas non amorti

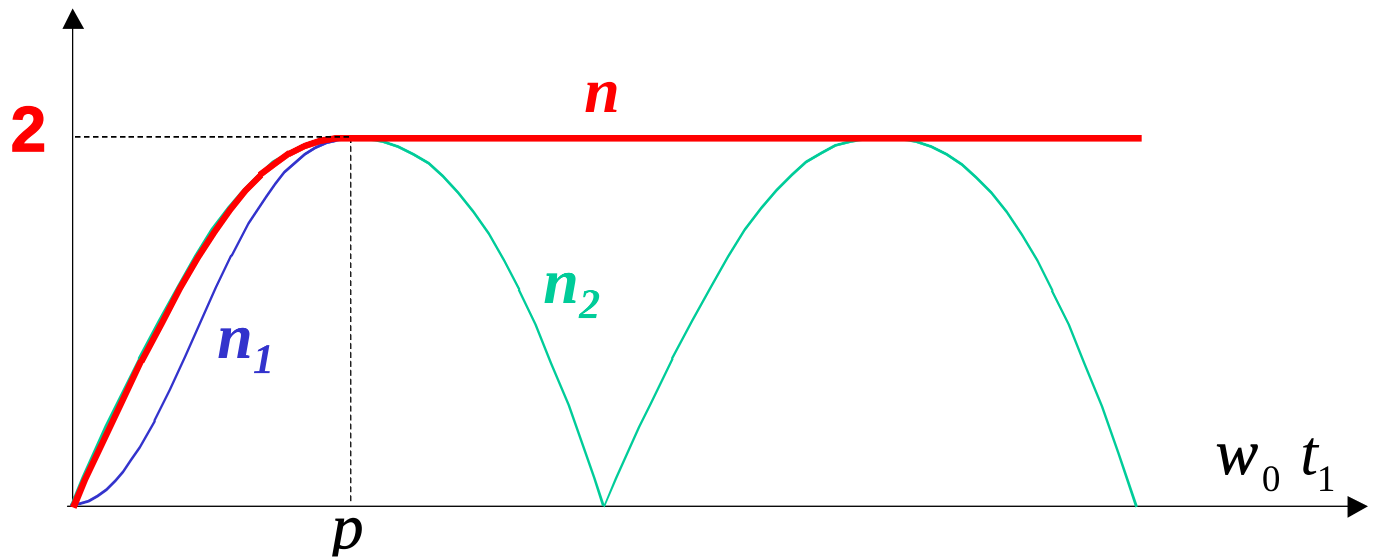
$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{k}\left(1-\cos w_0\, t\right) & \text{si} \quad 0<t\le t_1\\[2ex] \dfrac{F_0}{k}\left(\cos w_0\,(t-t_1)-\cos w_0\, t\right) & \text{si} \quad t>t_1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad n=\left(\frac{x}{x_{stat}}\right)_{\max}=\max\begin{cases}1-\cos w_0\, t & \text{si} \quad 0<t\le t_1\\[1ex] 2\sin\dfrac{w_0\, t_1}{2}\sin w_0\left(\dfrac{t-t_1}{2}\right) & \text{si} \quad t>t_1\end{cases}$$

$$n=\max\begin{cases}n_1=\left(1-\cos w_0\, t_1\right)\\[2ex] n_2=2\sin\left(\dfrac{w_0\, t_1}{2}\right)\end{cases}\left\langle\begin{array}{lll}1-\cos w_0\, t_1 & \text{pour} & w_0\, t_1\le p\\ 2 & \text{pour} & w_0\, t_1>p\end{array}\right.$$

Réponse forcée à une excitation quelconque(21)

Spectre de réponse



⇨ Contrainte dynamique maximum = **2** x Contrainte statique