LÝ THUYẾT & BÀI TẬP MÔN GIẢI TÍCH PHỨC

(Tài liệu chỉ có tính chất tham khảo – http://nguyenchiphuong.WordPress.com)

Trong tài liệu này xin tổng hợp lại tất cả các dạng bài tập có liên quan tới đề thi của các năm. Riêng các bài tập căn bản các bạn xem lại trong các ví dụ ở giáo trình trên lớp. Môn giải tích phức thực chất là một môn tương đối cơ bản nhưng lại có "môt chút rắc rối" (không phải ở môn học mà ở… các bạn chắc đã hiểu) vì vậy mọi người đừng chủ quan nhé. Sau đây là một số dạng bài tập mà chúng ta sẽ ôn tập

I. BÀI TOÁN 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

1.1. Kiến thức bổ trợ

a. Đồng nhất số phức

Cho $z = x + iy$ khi đó phương trình $z = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

b. Căn thức

Số phức w được gọi là căn bậc n của số phức z nếu $w^n = z$ (1) và phương trình (1) có đúng n nghiệm được xác định bởi công thức

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), n = 0,1,\dots,n-1$$

1.2. Bài tập mẫu

Bài 1.1 (bài 21.SGK,tr 18): Giải các phương trình sau:

a. $\boldsymbol{5z^2 + 2z + 10 = 0}$ **b.** $\boldsymbol{z^4 + 81 = 0}$ **c.** $\boldsymbol{2z = i(2 + 9i)}$

d. $\boldsymbol{z + 2\bar{z} = \frac{2-i}{1+3i}}$ **e.** $\boldsymbol{z^6 + 1 = \sqrt{3}i}$ **f.** $\boldsymbol{z^2 = i.}$

Giải:

a. $5z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{-1+7i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i \\ z_2 = \frac{-1-7i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i \end{array}\right.$

b. $z^4 + 81 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -81$

Ta có $-81 = 81(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Khi đó căn bậc 4 của -81 được xác định bởi

$$z_k = \sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), k = 0,1,2$$

$k=0 \Rightarrow z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$k=1 \Rightarrow z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$k=2 \Rightarrow z_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$k=3 \Rightarrow z_3 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy z_0, z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^4 + 81 = 0$

c. $2z = i(2+9i) \Leftrightarrow 2z = -9 + 2i \Leftrightarrow z = -\frac{9}{2} + i$

d. Đặt $z = x + iy$, khi đó

$$z + 2\bar{z} = \frac{2-i}{1+3i} \Leftrightarrow x + iy + 2(x - iy) = \frac{(2-i)(1-3i)}{10} \Leftrightarrow 3x - iy = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{1}{10} \\ -y = -\frac{7}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{30} \\ y = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Vậy $z = -\frac{1}{30} + \frac{7}{10}i$

e. $z^6 + 1 = \sqrt{3}i \Leftrightarrow z^6 = -1 + \sqrt{3}i$

Ta có $-1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Khi đó căn bậc 6 của $-1 + \sqrt{3}i$ được xác định bởi

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi + 3k\pi}{9} + i\sin\frac{\pi + 3k\pi}{9}\right)$$

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$

$k=3 \Rightarrow z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right)$

$k=4 \Rightarrow z_4 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$

$k=5 \Rightarrow z_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{16\pi}{9} + i\sin\frac{16\pi}{9}\right)$

Vậy $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ là nghiệm của phương trình $z^6 + 1 = \sqrt{3}i$.

f. $z^2 = i$

Ta có $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

Khi đó căn bậc 2 của i được xác định bởi

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} = \cos\frac{\pi + 4k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 4k\pi}{4}, k = 0,1.$$

$k=0 \Rightarrow z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy z_0, z_1 là nghiệm của phương trình $z^2 = i$.

Bài 1.2 (bài 24.SGK,tr 18): Giải phương trình:

$$\boldsymbol{z^2(1 - z^2) = 16}$$

Giải:

$$z^2(1 - z^2) = 16 \Leftrightarrow z^4 - z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 + 3\sqrt{7}i \\ z^2 = 1 - 3\sqrt{7}i \end{array}\right.$$

Xét $1 + 3\sqrt{7}i$ có $r = \sqrt{1 + 63} = 8$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{8} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \end{cases}$, khi đó căn bậc 2 của $1 + \sqrt{63}i$ được xác định bởi

$$z_k = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right), k = 0,1.$$

$k=0 \Rightarrow z_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$k=1 \Rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

Ta có $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}} = \pm\frac{3}{4}$ và $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{8}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Chọn $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$; $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, khi đó

$$\begin{cases} z_0 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4}i\right) \\ z_1 = -2\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4}i\right) \end{cases}$$

Vậy z_0, z_1 là nghiệm của phương trình $z^2 = 1 + 3\sqrt{7}i$

Làm tương tự với $1 - 3\sqrt{7}i$ trong đó chọn $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$; $\sin\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, khi đó

$$\begin{cases} z'_0 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{7}}{4}i\right) \\ z'_1 = -2\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{7}}{4}i\right) \end{cases}$$

Vậy z'_0, z'_1 là nghiệm của phương trình $z^2 = 1 - 3\sqrt{7}i$

Suy ra z_0, z_1, z'_0, z'_1 là nghiệm của phương trình $z^2(1 - z^2) = 16$

II. BÀI TOÁN 2: TÌM ẢNH VÀ TẠO ẢNH QUA ÁNH XẠ PHỨC

2.1. Kiến thức bổ trợ

Để tìm ảnh của một điểm, đường thẳng hay đường tròn qua ánh xạ phức $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, ta xác định mối liên hệ của u, v dựa trên miền cho trước

Ngược lại để tìm tạo ảnh của hàm $u(x,y), v(x,y)$, ta xác định mối liên hệ của x, y.

2.2. Bài tập mẫu

Bài 2.1 (bài 6, SGK, tr 55): Tìm ảnh của đường $x = 1$ qua ánh xạ phức $w = \frac{1}{z}$.

(Đề thi kết thúc môn GTP - khóa 16)

Giải:

Giả sử $z = x + iy$, khi đó $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Với $x = 1$, khi đó $u(x,y) = \frac{1}{1+y^2}$ và $v(x,y) = -\frac{y}{1+y^2}$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 = \frac{1+y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{1+y^2} = u \Leftrightarrow u^2 - u + v^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}$$

Vậy ảnh của đường $x = 1$ là đường tròn tâm $(\frac{1}{2}, 0)$, bán kính là $\frac{1}{2}$.

Bài 2.2 (bài 7, SGK, tr 55): Dùng tham số hóa để tìm ảnh của đường tròn $|z - z_0| = R$ qua ánh xạ phức $w = iz - 2$.

Giải:

Giả sử $z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0$

Ta có $|z - z_0| = R \Rightarrow\ z - z_0 = Re^{it} \Leftrightarrow z = z_0 + Re^{it}$, khi đó

$w = iz - 2 = i(z_0 + Re^{it}) - 2 = i\big(x_0 + iy_0 + R(\cos t + i\sin t)\big) - 2$

$\quad = (-y_0 - 2 - R\sin t) + i(x_0 + R\cos t) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = -y_0 - 2 - R\sin t \\ v(x,y) = x_0 + R\cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R\sin t = u(x,y) + y_0 + 2 \\ R\cos t = v(x,y) - x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (u + (y_0 + 2))^2 + (v - x_0)^2 = R^2$

Vậy ảnh của đường tròn $|z - z_0| = R$ qua ánh xạ $w = iz - 2$ là đường tròn tâm $(-y_0 - 2, x_0)$, bán kính R.

Bài 2.3: Cho hàm $w = z^2$. Tìm ảnh của:

a. **Đường tròn $|z| = 2$,**
b. **Miền quạt $0 < argz < \frac{\pi}{2}$.**

Giải:

a. Giả sử $z = x + iy$, khi đó $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

Ta có phương trình tham số của đường tròn $|z| = 2$ là: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{cases} u(x,y) = (2\cos t)^2 - (2\sin t)^2 = 4(\cos^2 t - \sin^2 t\ ) = 4\cos 2t \\ v(x,y) = 2.2\cos t\,.\,2\sin t = 4\sin 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{v}{4}\right)^2 = \cos^2 2t + \sin^2 2t = 1 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 16$$

Vậy ảnh của đường tròn $|z| = 2$ trong mp(z) là đường tròn có tâm là gốc tọa đô, bán kính là 4 trong mp(w)

b. Đặt $argz = \alpha \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Ta có $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow w = z^2 = r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) \Rightarrow argw = 2\alpha$

Ta coi miền quạt $0 < argz < \frac{\pi}{2}$ được quét bởi tia $argz = \alpha$, với biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$

Theo chứng minh trên thì ảnh của tia $argz = \alpha$ qua phép biến hình $w = z^2$ là tia $argw = 2\alpha$. Khi α biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ thì 2α biến thiên từ 0 đến π.

Vậy ảnh của miền quạt $0 < argz < \frac{\pi}{2}$ là nửa mặt phẳng trên $0 < argw < \pi$.

Bài 2.4: **Cho hàm $w = \frac{1}{z}, z = x + iy$. Tìm:**

a. **Ảnh của đường $x = c$**
b. **Tạo ảnh của đường $u = c$.**

Giải:

a. Ta có:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

+ Trường hợp $x = c = 0$, khi đó

$$\begin{cases} u(x,y) = 0 \\ v(x,y) = -\frac{1}{y}, (y \neq 0) \end{cases} \Rightarrow w = -\frac{i}{y}$$

Vậy ảnh của đường $x = 0$ là trục ảo trừ gốc tọa độ

+ Trường hợp $x = c \neq 0$, khi đó

$$\begin{cases} u(x,y) = \dfrac{c}{c^2+y^2} \\ v(x,y) = -\dfrac{y}{c^2+y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 = \frac{c^2+y^2}{(c^2+y^2)^2} = \frac{1}{c^2+y^2} = \frac{u}{c}$$

$$\Leftrightarrow u^2 - \frac{u}{c} + v^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4c^2}$$

Vậy ảnh của đường $x = c$ là đường tròn tâm $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$, bán kình là $\frac{1}{2|c|}$, $(c \neq 0)$.

b. $u = c \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = c$

+ Trường hợp $c = 0 \Rightarrow x = 0$

Vậy tạo ảnh của đường $u = 0$ là trục ảo trừ gốc tọa độ

+ Trường hợp $c \neq 0$, khi đó

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{c} \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{c} + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$$

Vậy tạo ảnh của đường $u = c$ là đường tròn tâm $\left(\frac{1}{2c}, 0\right)$, bán kình là $\frac{1}{2|c|}$, $(c \neq 0)$.

III. BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN VÀ CHỨNG MINH SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM PHỨC

3.1. Kiến thức bổ trợ

a. Giới hạn dãy số phức

Cho $\begin{cases} \{z_n\}, z_n = x_n + iy_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$

b. Giới hạn hàm phức

Cho $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0, l = \alpha + i\beta$, khi đó

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} u(x,y) = \alpha \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} v(x,y) = \beta \end{cases}$$

Nếu khi xét $z \to z_0$ theo các hướng khác nhau thì có các kết quả khác nhau thì ta kết luận không tồn tại giới hạn tại $z = z_0$.

c. Hàm liên tục

Cho $f(z)$ xác định trong lân cận điểm z_0, khi đó:

$$f(z) \text{ liên tục tại } z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} + f(z) xác\ định\ tại\ z_0 \\ + Tồn\ tại\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \\ + \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \end{cases}$$

$f(z)$ liên tục trên miền G nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc G.

3.2. Bài tập mẫu

Bài 3.1: Tính $\lim\limits_{z \to 1+i} (z^2 + i)$

Giải:

Giả sử $z = x + iy$, khi đó

$$z^2 + i = (x + iy)^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy + 1)i = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy + 1 \end{cases}; \ z_0 = 1 + i$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} u(x, y) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} (x^2 - y^2) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} v(x, y) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} (2xy + 1) = 3$$

Vậy $\lim\limits_{z \to 1+i} (z^2 + 1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} u(x, y) + i \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} v(x, y) = 3i$

Bài 3.2 (bài 6, SGK, tr51): Chứng minh rằng

$$\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i.$$

Giải:

$$VT = \lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = \lim_{z \to i} \frac{(z - i)[3z^3 + (3i - 2)z^2 + (5 - 2i)z + 5i]}{z - i}$$

$$= \lim_{z \to i} [3z^3 + (3i - 2)z^2 + (5 - 2i)z + 5i] = 3i^3 + (3i - 2)i^2 + (5 - 2i)i + 5i$$

$$= -3i - 3i + 2 + 5i + 2 + 5i = 4 + 4i$$

Bài 3.3 (bài 9, SGK, tr52): Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}$ **b.** $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}$ **c.** $\lim\limits_{z\to 0}(\cos z)^{\frac{1}{z^2}}$

Giải:

a. Đặt $f(z) = z^{10} + 1; g(z) = z^6 + 1$, khi đó

$f(i) = i^{10} + 1 = 0; g(i) = i^6 + 1 = 0$ và $g'^{(i)} = 6i^5 = 6i \neq 0$

Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$\lim_{z\to i}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to i}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to i}\frac{10z^9}{6z^5} = \lim_{z\to i}\frac{5}{3}z^4 = \frac{5}{3}i^4 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1} = \frac{5}{3}.$$

b. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{z}{2}\right)}{\sin z^2} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{\sin z^2} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}\right)^2}}{\frac{\sin z^2}{z^2}}$

Ta có $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} = 1$ và $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2} = \frac{1}{2}.$$

c. $\lim\limits_{z\to 0}(\cos z)^{\frac{1}{z^2}} =$

Bài 3.4: Xét sự tồn tại giới hạn của $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$.

Giải:

Giả sử $z = x + iy$, khi đó $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x+iy}{x-iy}$

+ Cho $z \to 0$ theo hướng trục Ox khi đó $y = 0$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\left(\frac{x}{x}\right)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} 1 = 1 \quad (1)$$

+ Cho $z \to 0$ theo hướng đường thẳng $y = x$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\left(\frac{x+ix}{x-ix}\right)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = -1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$

<u>Lưu ý:</u> điều kết luận trên cũng có nghĩa là hàm số $f(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$ không liên tục tại $z = 0$.

Bài 3.5: Xét tính liên tục của hàm

$$\boldsymbol{f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} & \text{nếu } |z| \neq 1 \\ 3 & \text{nếu } |z| = 1 \end{cases} \quad \text{tại } z_0 = 1, z_0 = i}$$

Giải:

+ Tại $z_0 = 1$ ta có:

$f(1) = 3$ và $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \lim\limits_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z-1} = \lim\limits_{z\to 1}(z^2 + z + 1) = 3$

Vậy $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $z_0 = 1$

+ Tại $z_0 = i$

$f(i) = 3$ và $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \lim\limits_{z\to i}\frac{z^3-1}{z-1} = \lim\limits_{z\to i}(z^2 + z + 1) = i$

Vậy $\lim\limits_{z\to i} f(z) \neq f(1)$ nên hàm số gián đoạn tại $z_0 = i$

Bài 3.6: Cho các hàm

a. $\boldsymbol{f(z) = \frac{Re(z)}{z}}$ **b.** $\boldsymbol{f(z) = \frac{z}{|z|}}$ **c.** $\boldsymbol{f(z) = \frac{zRe(z)}{|z|}}$

Có thể gán giá trị của hàm số tại $z = 0$ để nó trở thành hàm liên tục tại $z = 0$ hay không?

Giải:

a. Chọn 2 dãy $z_n = \frac{1}{n}$ và $z_n^* = \frac{i}{n}$, khi đó $z_n, z_n^* \to 0$ khi $n \to \infty$

Xét

$$\lim_{z_n\to 0} f(z_n) = \lim_{z_n\to 0}\frac{Re(z_n)}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{z_n^*\to 0} f(z_n^*) = \lim_{z_n^*\to 0}\frac{Re(z_n^*)}{z_n^*} = \lim_{n\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ nên không thể gán giá trị của hàm số tại điểm $z = 0$ để nó trở thành hàm liên tục tại $z = 0$.

b. Chọn 2 dãy $z_n = \frac{1}{n}$ và $z_n^* = \frac{1}{n} + \frac{i}{n}$, khi đó $z_n, z_n^* \to 0$ khi $n \to \infty$

Xét

$$\lim_{z_n\to 0} f(z_n) = \lim_{z_n\to 0} \frac{z_n}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{z_n^*\to 0} f(z_n^*) = \lim_{z_n^*\to 0} \frac{z_n^*}{|z_n^*|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{i}{n}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Suy ra không tồn tại $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ nên không thể gán giá trị của hàm số tại điểm $z = 0$ để nó trở thành hàm liên tục tại $z = 0$.

c. Giả sử $z = x + iy$

Khi đó $f(z) = \frac{zRe(z)}{|z|} = \frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} i = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ v(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Ta có

$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2}{|x|} = |x|$ mà $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x| = 0$ nên $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ (1)

$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ mà $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0$ nên $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} v(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{zRe(z)}{|z|} = 0$

Vậy có thể gán giá trị $f(z) = 0$ tại $z = 0$ để nó trở thành hàm liên tục tại $z = 0$.

Bài 3.7 (câu 2, đề thi môn GTP – K16): Chứng minh rằng hàm $f(z) = \bar{z}$ liên tục trên $\mathbb{C}$.

Giải:

Giả sử $z = x + iy$, khi đó $f(z) = \bar{z} = x - iy = u(x,y) + iv(x,y)$

$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases}$

Lấy tùy ý $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, khi đó ta có: $f(z_0) = x_0 - iy_0$

Xét

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} x = x_0$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (-y) = -y_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [u(x,y) + iv(x,y)] = x_0 - iy_0 = f(z_0)$

Suy ra hàm số liên tục tại $z = z_0$

Do z_0 lấy tùy ý trong $\mathbb{C}$ nên hàm $f(z)$ liên tục trên $\mathbb{C}$.

Bài 3.8 (bài 10, SGK,tr 52): Chứng minh rằng hàm $f(z) = z^2$ liên tục đều trên miền $|z| < 1$.

Giải:

Đặt C: $\{z: |z| < 1\}$

Với $z, z' \in C$ ta có

$$|f(z) - f(z')| = |z^2 - z'^2| = |z - z'||z + z'| \leq |z - z'|(|z| + |z'|) < 2|z - z'|$$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \forall z, z' \in C: |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < 2|z - z'| < 2\delta = \varepsilon$

Do đó $f(z) = z^2$ liên tục đều trên C: $|z| < 1$.

Bài 3.9 (bài 11, SGK, tr 52): Chứng minh rằng hàm $f(z) = \frac{1}{z}$ không liên tục đều trên miền $|z| < 1$.

Giải:

IV. BÀI TOÁN CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHỨC

4.1. Kiến thức bổ trợ

a. Điều kiện Cauchy-Riemann (dạng đại số)

Cho hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ có đạo hàm tại điểm $z = x + iy$ thì:

+ $u(x,y), v(x,y)$ có đạo hàm riêng tại điểm (x,y)

+ Các đạo hàm riêng của $u(x,y), v(x,y)$thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ và } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

Ngược lại nếu $u(x,y), v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm (x,y) và thỏa (1) thì $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ có đạo hàm tại điểm $z = x + iy$ và

$$f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) \text{ hoặc } f'(z) = v'_y(x,y) - iu'_y(x,y).$$

b. Điều kiện Cauchy-Riemann (dạng phức)

Ta có $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, khi đó điều kiện Cauchy-Rieamann dạng phức là

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ và } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

4.2. Bài tập mẫu

Bài 4.1: Khảo sát sự tồn tại đạo hàm của các hàm số sau:

a. $f(z) = z^3$ **b.** $f(z) = |z|^2$

Giải:

a. Giả sử $z = x + iy$, khi đó

$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = u(x,y) + iv(x,y)$

$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \\ v(x,y) = 3x^2y - y^3 \end{cases}$

Suy ra

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2; \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2; \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy; \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \text{ và } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy$

Vậy $u(x,y), v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại mọi điểm (x,y) và thỏa điều kiện Cauchy-Riemann nên $f(z)$ có đạo hàm tại mọi điểm z thuộc mặt phẳng phức

b. Giả sử $z = x + iy$, khi đó

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Hàm $f(z)$ có đạo hàm khi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Vậy hàm $f(z)$ có đạo hàm tại điểm $z = 0$, không có đạo hàm tại mọi điểm $z \neq 0$

Bài 4.2 (bài 13,14, SGK, tr52): Chứng minh rằng $\frac{d\bar{z}}{dz}$; $\frac{d}{dz}(z^2\bar{z})$ không tồn tại tại mọi điểm thuộc mặt phẳng phức.

Giải:

+ Chứng minh $\frac{d\bar{z}}{dz}$ không tồn tại tại mọi điểm thuộc mặt phẳng phức

Giả sử $z = x + iy$, đặt $f(z) = \bar{z}$, khi đó

$$f(z) = \bar{z} = x - iy = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Rõ ràng $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$ nên $f(z)$ không có đạo hàm tại mọi điểm z thuộc mặt phẳng phức.

Vậy $\frac{d\bar{z}}{dz}$ không tồn tại tại mọi điểm thuộc mặt phẳng phức

+ Chứng minh $\frac{d}{dz}(z^2\bar{z})$ không tồn tại tại mọi điểm thuộc mặt phẳng phức

Giả sử $z = x + iy$, đặt $f(z) = z^2\bar{z}$, khi đó

$$f(z) = z^2\bar{z} = (x+iy)^2(x-iy) = x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)i = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^3 + xy^2 \\ v(x,y) = x^2y + y^3 \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2; \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 + 3y^2; \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy; \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy$$

Hàm $f(z)$ có đạo hàm khi

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \\ 2xy = -2xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Suy ra hàm $f(z)$ có đạo hàm tại điểm $z = 0$, không có đạo hàm tại mọi điểm $z \neq 0$

Vậy $\frac{d}{dz}(z^2\bar{z})$ không tồn tại tại mọi điểm thuộc mặt phẳng phức

Bài 4.3: Cho hàm $f(x,y)$ có $Re(f) = x^2 - y^2$. Giả sử $f(z)$ có đạo hàm, tìm $f(z)$.

Giải:

Giả sử $z = x + iy, f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Theo giả thiết ta có $u(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

Do $f(z)$có đạo hàm nên ta có

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \ (1) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \ (2) \end{cases}$$

Từ (1): $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x \Rightarrow v(x,y) = 2xy + C(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x)$ thay vào (2) ta được

$2y + C'(x) = 2y \Leftrightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = C = const$

Vậy $f(z) = x^2 - y^2 + (2xy + C)i = (x + iy)^2 + Ci = z^2 + Ci$.

Bài 4.4: Tìm z sao cho các hàm sau khả vi

a. $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

b. $f(z) = z^5 + \bar{z}$

c. $\boldsymbol{f(z)=\begin{cases}2 & khi\ |z|>3\\ 1 & khi\ |z|\le 3\end{cases}}$ **(đề thi môn GTP – K18)**

Giải:

a. $f(z)=x^2-y^2-2xy+i(x^2-y^2+2xy)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2-2xy\\ v(x,y)=x^2-y^2+2xy\end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2y;\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x-2y;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2x-2y;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2x+2y$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x-2y\ và\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2x-2y$$

Vậy $u(x,y),v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại mọi điểm (x,y) và thỏa điều kiện Cauchy-Riemann nên $f(z)$ có đạo hàm hay khả vi tại mọi điểm z thuộc mặt phẳng phức

b. Giả sử $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, khi đó

$$f(z)=z^5+\bar{z}=r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)+r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=(r^5\cos 5\theta+r\cos\theta)+i(r^5\sin 5\theta-r\sin\theta)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u(r,\theta)=r^5\cos 5\theta+r\cos\theta\\ v(r,\theta)=r^5\sin 5\theta-r\sin\theta\end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial r}=5r^4\cos 5\theta+\cos\theta\,;\ \frac{\partial v}{\partial r}=5r^4\sin 5\theta-\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-5r^5\sin 5\theta-r\sin\theta\,;\ \frac{\partial v}{\partial\theta}=5r^5\cos 5\theta-r\cos\theta$$

Rõ ràng

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{1}{r}(5r^5\cos 5\theta-r\cos\theta)=5r^4\cos 5\theta-\cos\theta\neq\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{1}{r}(-5r^5\sin 5\theta-r\sin\theta)=5r^4\sin 5\theta+\sin\theta\neq\frac{\partial v}{\partial r}$$

Vậy $u(r,\theta),v(r,\theta)$ có các đạo hàm riêng không thỏa điều kiện Cauchy-Riemann nên $f(z)$ không khả vi tại mọi z.

c. + Tập $A=\{z\colon |z|>3\}$ là tập mở

Ta có $f(z) = 2 = 2 + 0i = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = 2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ và } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Vậy $u(x,y), v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thỏa điều kiện Cauchy-Riemann trên tập A nên $f(z)$ có đạo hàm hay khả vi trên A.

+ Tương tự với $B = \{z: |z| < 3\}$ ta chứng minh được $f(z)$ có đạo hàm hay khả vi trên B

+ Xét $C = \{z: |z| = 3\}$, khi đó $f(z) = 1$

Xét dãy $z_n = (1 + \frac{1}{n})z$

$$|z_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)|z| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)3 > 3 \Rightarrow f(z_n) = 2$$

Ta có $z_n \to z$ khi $n \to \infty$, tuy nhiên $f(z_n) = 2 \neq 1 = f(z)$ nên hàm $f(z)$ không liên tục tại mọi điểm trên C. Do đó $f(z)$ không khả vi tại mọi $z: |z| = 3$.

Bài 4.5 (đề thi môn GTP – Cao học 2008-2009): Cho

$$\boldsymbol{f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{với } |z| \geq 1 \\ 1 & \text{với } |z| < 1 \end{cases}}$$

Hàm $f(z)$ có đạo hàm tại $z = z_0$ nào?

Giải:

+ Xét tập $A = \{z: |z| > 1\}$ là tập mở

Ta có $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$ và $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y$

Vậy $u(x, y), v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục và thỏa điều kiện Cauchy-Riemann trên tập A nên $f(z)$ có đạo hàm tại mọi điểm z trên A.

+ Xét tập $B = \{z: |z| < 1\}$ là tập mở

Ta có $f(z) = 1 = 1 + 0i = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = 1 \\ v(x, y) = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ và $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

Vậy $u(x, y), v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục và thỏa điều kiện Cauchy-Riemann trên tập B nên $f(z)$ có đạo hàm tại mọi điểm z trên B.

+ Xét $C = \{z: |z| = 1\}$, khi đó $f(z) = z^2$

Với $z = \pm 1$ thuộc C thì $f(z) = z^2 = 1 = 1 + 0i$ ta chứng minh được $f(z)$ khả vi tại $z = \pm 1$

Với $z \neq \pm 1$. Xét dãy $z_n = (1 - \frac{1}{n})z$

$$|z_n| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)|z| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)1 < 1 \Rightarrow f(z_n) = 1$$

Ta có $z_n \to z$ khi $n \to \infty$, tuy nhiên $f(z_n) = 1 \neq z^2 = f(z)$ nên hàm $f(z)$ không liên tục tại mọi điểm trên $C\backslash\{\pm 1\}$. Do đó $f(z)$ không khả vi tại mọi z trên $C\backslash\{\pm 1\}$.

V. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH HÀM GIẢI TÍCH, HÀM ĐIỀU HÒA

5.1. Kiến thức bổ trợ

a. Hàm giải tích

+ $f(z)$ giải tích trên miền mở D nếu f khả vi (tồn tại đạo hàm) tại mọi điểm thuộc D

+ (z) giải tích tại điểm z_0 nếu f khả vi trong lân cận của điểm z_0

+ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích trong miền D, các $u(x,y), v(x,y)$có đạo hàm riêng liên tục trên D thì $u(x,y), v(x,y)$ thỏa phương trình Laplace:

$$\frac{\partial^2\Phi}{x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{y^2} = 0.$$

b. Hàm điều hòa

+ Hàm thực hai biến có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục và thỏa phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa.

+ Hai hàm điều hòa $u(x,y), v(x,y)$ sao cho $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích được gọi là hai hàm điều hòa liên hợp.

+ Hàm $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ xác định trên miền D đơn liên và giải tích trên D thì $u(x,y), v(x,y)$ là các hàm điều hòa trên D.

+ $u(x,y)$ là hàm điều hòa trên D thì tồn tại $f(z)$ giải tích trên D sao cho $Re(f) = u(x,y)$

5.2. Bài tập mẫu

Bài 5.1 (đề thi môn GTP – CH 2008-2009): Cho $\boldsymbol{\Phi(x,y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1}$

a. Chứng tỏ $\boldsymbol{\Phi}$ là hàm điều hòa.
b. Tìm hàm giải tích $\boldsymbol{f(z)}$ sao cho $\boldsymbol{\Phi = \mathrm{Re}(f)}$. Tìm $\boldsymbol{Im(f)}$.

Giải:

a. Chứng minh Φ là hàm điều hòa.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 12xy^2 - 4x^3 - 1, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 12y^2 - 12x^2$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 12x^2y - 4y^3 + 1, \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 12x^2 - 12y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2 + 12x^2 - 12y^2 = 0$$

Vậy hàm thực Φ hai biến có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại mọi điểm (x,y) và thỏa phương trình Laplace nên Φ là hàm điều hòa (có thể gọi Φ là phần thực của hàm giải tích).

b. Tìm hàm giải tích

Giả sử hàm giải tích cần tìm có dạng: $f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$, với $\Psi(x,y)$ là hàm điều hòa liên hợp với $\Phi(x,y)$, khi đó $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ phải thỏa điều kiện Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = 12xy^2 - 4x^3 - 1 \ (1) \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = -12x^2y + 4y^3 - 1 \ \ (2) \end{cases}$$

Từ (1): $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 12xy^2 - 4x^3 - 1 \Rightarrow \Psi = 4xy^3 - 4x^3y - y + C(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y + C'(x)$ thay vào (2) ta có

$4y^3 - 12x^2y + C'(x) = -12x^2y + 4y^3 - 1 \Leftrightarrow C'(x) = -1 \Rightarrow C(x) = -x + C$

$\Rightarrow Im(f) = \ \Psi(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y - y - x + C$

Vậy $f(z) = \ 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1 + i(4xy^3 - 4x^3y - y - x + C)$.

Bài 5.2 (đề thi môn GTP – K15): Cho $\boldsymbol{u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)}$

a. **Chứng tỏ $\boldsymbol{u(x,y)}$ là hàm điều hòa trên một miền $\boldsymbol{D}$ thích hợp.**
b. **Tìm một hàm giải tích $\boldsymbol{f(z) = u(x,y) + iv(x,y)}$, giải tích trên miền $\boldsymbol{D}$.**
c. **Biểu diễn $\boldsymbol{f}$ trong câu (b) theo biến $\boldsymbol{z}$**

Giải:

a. Chứng minh $u(x, y)$ là hàm điều hòa.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + e^{-x}\sin y = e^{-x}(\sin y - x\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-x}(\sin y - x\sin y + y\cos y) - e^{-x}\sin y = e^{-x}(-2\sin y + x\sin y - y\cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x\cos y - \cos y + y\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x\sin y + \sin y + \sin y + y\cos y) = e^{-x}(2\sin y - x\sin y + y\cos y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Vậy $u(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại mọi điểm (x, y) và thỏa phương trình Laplace nên $u(x, y)$ là hàm điều hòa.

b. Hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ giải tích trên miền D nên $u(x, y), v(x, y)$ thỏa điều kiện Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^{-x}(\sin y - x\sin y + y\cos y)\ (1) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}(-x\cos y + \cos y - y\sin y)\ \ (2) \end{cases}$$

Từ (1): $\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x}(\sin y - x\sin y + y\cos y)$

$\Rightarrow v(x,y) = e^{-x}(-\cos y + x\cos y + y\sin y + \cos y) + C(x)$

$= e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + C(x)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + e^{-x}\cos y + C'(x)$

$= e^{-x}(\cos y - x\cos y - y\sin y) + C'(x)$

Thay vào (2) ta được:

$e^{-x}(\cos y - x\cos y - y\sin y) + C'(x) = e^{-x}(-x\cos y + \cos y - y\sin y)$

$\Leftrightarrow C'(x) = 0 \Leftrightarrow C(x) = C = const$

$\Rightarrow v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + C$

Vậy $f(z) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + i(e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + C)$

c. Biểu diễn $f(z)$ ở câu b theo biến z

$f(z) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + i(e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + C)$

$= e^{-x}x\sin y - e^{-x}y\cos y + ie^{-x}x\cos y + ie^{-x}y\sin y + Ci$

$= (e^{-x}x\sin y + ie^{-x}y\sin y) - (e^{-x}y\cos y - ie^{-x}x\cos y) + Ci$

$= (x+iy)e^{-x}\sin y - (y - ix)e^{-x}\cos y + Ci$

$= (x+iy)e^{-x}\sin y + i^2(y - ix)e^{-x}\cos y + Ci$

$= (x+iy)e^{-x}\sin y + i(x+iy)e^{-x}\cos y + Ci$

$= (x+iy)e^{-x}(\sin y + i\cos y) + Ci$

$= -i^2(x+iy)e^{-x}(\sin y + i\cos y) + Ci$

$= i(x+iy)e^{-x}(\cos y - i\sin y) + Ci$

$= i(x+iy)e^{-x}e^{-iy} + Ci$

$= i(x+iy)e^{-(x+iy)} + Ci$

$= ize^{-z} + Ci$

VI. BÀI TOÁN TÌM VÀ PHÂN LOẠI ĐIỂM BẤT THƯỜNG

6.1. Kiến thức bổ trợ

a. Điểm bất thường

+ z_0 được gọi là điểm bất thường của $f(z)$ nếu $f(z)$ không giải tích tại z_0.

+ z_0 được gọi là điểm bất thường cô lập của $f(z)$ nếu tồn tại một lân cận bán kính $\delta > 0$ sao cho trong lân cận đó hàm $f(z)$ không có điểm bất thường nào khác.

+ z_0 được gọi là điểm bất thường cốt yếu nếu không tồn tại số n nguyên dương sao cho

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0.$$

+ z_0 được gọi là điểm bất thường bỏ được của của $f(z)$ nếu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ tồn tại.

+ Điểm bất thường của $f(z)$ tại $z = \infty$ là điểm bất thường của hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$ tại $w = 0$.

b. Điểm cực

+ z_0 được gọi là điểm cực bậc n của $f(z)$ nếu tồn tại số n nguyên dương sao cho

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0.$$

+ Trường hợp $n = 1$ thì z_0 được gọi là điểm cực đơn.

6.2. Bài tập mẫu

Bài 6.1: Xác định các điểm bất thường của các hàm số sau:

a. $\boldsymbol{f(z) = \frac{z}{\left(z^2+4\right)^2}}$ **b.** $\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{\cos\frac{1}{z}}}$ **c.** $\boldsymbol{f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}}$

Giải:

a. $f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2} = \frac{z}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$

Vậy hàm $f(z)$ có 2 điểm bất thường $z = 2i$ và $z = -2i$

+ Xét $\lim\limits_{z \to 2i} (z - 2i)^2 f(z) = \lim\limits_{z \to 2i} (z - 2i)^2 \frac{z}{(z^2+4)^2} = \lim\limits_{z \to 2i} \frac{z}{(z+2i)^2} = \frac{2i}{16i^2} = \frac{1}{8i} \neq 0$

Do đó $z = 2i$ là điểm cực bậc 2 của $f(z)$.

Tương tự $z = -2i$ cũng là điểm cực bậc 2 của $f(z)$.

+ Xét điểm $z = 2i$. Tồn tại lân cận của điểm $z = 2i$, bán kính $\delta = 1 > 0$ mà trong lân cận đó không có điểm bất thường nào khác của hàm $f(z)$ trừ điểm $z = 2i$. Vậy $z = 2i$ là điểm bất cô lập của $f(z)$.

Tương tự $z = -2i$ cũng là điểm bất thường cô lập của $f(z)$.

b. Hàm $f(z) = \frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ không xác định tại $z = 0$ nên $z = 0$ là điểm bất thường của $f(z)$

GPT: $\cos\frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm bất thường của $f(z)$.

+ Xét $\lim\limits_{z\to\frac{2}{(2k+1)\pi}} \left(z - \frac{2}{(2k+1)\pi}\right) f(z) = \lim\limits_{z\to\frac{2}{(2k+1)\pi}} \frac{z - \frac{2}{(2k+1)\pi}}{\cos\frac{1}{z}} = \lim\limits_{z\to\frac{2}{(2k+1)\pi}} \frac{1}{\frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z}}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right)^2}\sin\frac{1}{\frac{2}{(2k+1)\pi}}} = \frac{\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right)^2}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}} = \frac{(-1)^k 4}{(2k+1)^2\pi^2} \neq 0$$

Do đó $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm cực đơn của $f(z)$.

+ Các điểm $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ là các điểm rời rạc được đặt trên trục thực trong một khoảng hữu hạn chứa điểm 0. Do đó tại mỗi điểm tồn tại lân cận bán kính $\delta > 0$ nào đó không chứa điểm bất thường nào khác. Do đó $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ là các điểm bất thường cô lập.

+ Do $z = \frac{2}{(2k+1)\pi} \to 0$ khi $k \to \infty$ nên với mọi $\delta > 0$, mọi lân cận bán kính δ luôn chứa điểm bất thường khác 0. Do đó $z = 0$ không là điểm bất thường cô lập.

+ Xét $\lim\limits_{z\to 0}(z-0)^n f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{z^n}{\cos\frac{1}{z}} = 0 \Rightarrow$ Không tồn tại n nguyên dương thỏa mãn $\lim\limits_{z\to 0}(z-0)^n f(z) \neq 0$. Do đó $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu của $f(z)$.

c. $z = 0$ là điểm bất thường của $f(z)$

+ $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1$. Do đó $z = 0$ là điểm bất thường bỏ được của $f(z)$.

Bài 6.2 (đề thi môn GTP – CH K18):

a. Xác định tất cả các điểm bất thường của hàm sau

$$\boldsymbol{f(z) = \frac{z^8 + z^4 + 2}{(z-1)^3(3z+2)^2}}.$$

b. Xác định các điểm mà tại đó $f(z)$ giải tích.

Giải:

Ta có $f(z)$có hai điểm bất thường $z = 1$ và $z = -\frac{2}{3}$

+ Xét $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^3 f(z) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)^3 \frac{z^8+z^4+2}{(z-1)^3(3z+2)^2} = \lim\limits_{z\to 1} \frac{z^8+z^4+2}{(3z+2)^2} = \frac{4}{25} \neq 0$

Do đó $z = 1$ là điểm cực bậc 3 của $f(z)$.

+ Xét $\lim\limits_{z\to -\frac{2}{3}} \left(z+\frac{2}{3}\right)^2 f(z) = \lim\limits_{z\to -\frac{2}{3}} \left(z+\frac{2}{3}\right)^2 \frac{z^8+z^4+2}{(z-1)^3(3z+2)^2} = \lim\limits_{z\to -\frac{2}{3}} \frac{z^8+z^4+2}{9(z-1)^3} = -\frac{14674}{273375} \neq 0$

Do đó $z = -\frac{2}{3}$ là điểm cực bậc 2 của $f(z)$.

+ Tại điểm $z = 1$ tồn tại lân cận bán kính $\delta = 1 > 0$ mà trong đó không chứa điểm bất thường nào khác trừ điểm $z = 1$. Do đó $z = 1$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$.

Tương tự $z = -\frac{2}{3}$ cũng là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$.

+ Xét tại $z = \infty$

Đặt $z = \frac{1}{w} \Rightarrow f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\left(\frac{1}{w}\right)^8 + \left(\frac{1}{w}\right)^4 + 2}{\left(\frac{1}{w}-1\right)^3\left(3\frac{1}{w}+2\right)^2} = \frac{2w^8+w^4+1}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2}$

Rõ ràng $w = 0$ là điểm bất thường của hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$

Xét $\lim\limits_{w\to 0}(w-0)^3 f(\frac{1}{w}) = \lim\limits_{w\to 0}(w-0)^3 \frac{2w^8+w^4+1}{w^3(1-w)^3(3+2w)^2} = \lim\limits_{w\to 0} \frac{2w^8+w^4+1}{(1-w)^3(3+2w)^2} = \frac{1}{9} \neq 0$

Do đó $w = 0$ là điểm cực bậc 3 của hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$ hay $z = \infty$ là điểm cực bậc 3 của hàm $f(z)$.

b. Theo câu a thì $f(z)$ sẽ giải tích tại mọi điểm z: $z \neq 1, z \neq -\frac{2}{3}, z \neq \infty$

Bài 6.3 (bài 28, SGK, tr54): CMR hàm $f(z) = \frac{(z+3i)^5}{(z^2-2z+5)^2}$ có hai điểm cực bậc 2 tại $z = 1 \pm 2i$ và một cực điểm đơn tại vô cực.

Giải:

$$f(z) = \frac{(z+3i)^5}{(z^2-2z+5)^2} = \frac{(z+3i)^5}{(z-1-2i)^2(z-1+2i)^2}$$

Hàm $f(z)$ có 2 điểm bất thường $z = 1 + 2i$ và $z = 1 - 2i$

+ Xét $\lim\limits_{z\to 1+2i}(z-1-2i)^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 1+2i}(z-1-2i)^2 \frac{(z+3i)^5}{(z-1-2i)^2(z-1+2i)^2}$

$$= \lim_{z\to 1+2i} \frac{(z+3i)^5}{(z-1+2i)^2} = \frac{(1+5i)^5}{(4i)^2} = \frac{2876+1900i}{-16} = -\frac{719}{4} - \frac{475}{4} i \neq 0$$

Do đó $z = 1 + 2i$ là điểm cực bậc 2 của $f(z)$

Tương tự ta cũng có $z = 1 + 2i$ là điểm cực bậc 2 của $f(z)$.

+ Tại $z = \infty$.

Đặt $z = \frac{1}{w} \Rightarrow f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\left(\frac{1}{w}+3i\right)^5}{\left(\left(\frac{1}{w}\right)^2 - 2\frac{1}{w} + 5\right)^2} = \frac{(1+3wi)^5}{w(5w^2-2w+1)^2}$

Rõ ràng $w = 0$ là điểm bất thường của hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$

Xét $\lim_{w\to 0}(w-0)f\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w\to 0}(w-0)\frac{(1+3wi)^5}{w(5w^2-2w+1)^2} = \lim_{w\to 0}\frac{(1+3wi)^5}{(5w^2-2w+1)^2} = 1 \neq 0$

Do đó $w = 0$ là điểm cực đơn của $f\left(\frac{1}{w}\right)$ hay $z = \infty$ là điểm cực đơn của hàm $f(z)$.

Bài 6.4 (bài 30,SGK, tr54): CMR hàm $f(z) = e^{z^2}$ có một điểm bất thường cốt yếu ở vô cực.

Giải:

Đặt $z = \frac{1}{w} \Rightarrow f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\left(\frac{1}{w}\right)^2} = e^{\frac{1}{w^2}}$

Rõ ràng $f\left(\frac{1}{w}\right)$ không xác định tại $w = 0$ nên $w = 0$ là điểm bất thường của hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$

Xét $\lim_{w\to 0}(w-0)^n f\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w\to 0}(w-0)^n e^{\frac{1}{w^2}} = \lim_{w\to 0} w^n e^{\frac{1}{w^2}} = 0$

Do đó không tồn tại n nguyên dương nào để $\lim_{w\to 0}(w-0)^n f\left(\frac{1}{w}\right) \neq 0$ nên $w = 0$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$ hay $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$.

VII. BÀI TOÁN TÍNH TÍCH PHÂN

7.1. Kiến thức bổ trợ

a. Tích phân đường

+ Nếu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ thì tích phân đường của $f(z)$ trên đường cong C

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

+ Nếu đường cong C có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; a \leq t \leq b$ thì

$$\int_C f(z)dz = \int_C \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}.[x'(t) + iy'(t)]dt$$

b. Định lý Green (dạng phức)

$P(z, \bar{z}), Q(z, \bar{z})$ liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trên miền D, khi đó ta có:

$\oint_C P(z, \bar{z})dz + Q(z, \bar{z})d\bar{z} = 2i \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \bar{z}}\right) dA$, dA biểu thị yếu tố diện tích $dxdy$.

c. Định lý Cauchy cho miền đơn liên

Giả sử hàm f giải tích trong miền D đơn liên và f' liên tục trong D. Khi đó với mọi đường cong đơn, đóng C nằm trong D, ta có:

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

d. Định lý Cauchy-Goursat

Giả sử hàm f giải tích trong miền D. Khi đó ta có:

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

với mỗii đường cong đơn, đóng trong C.

e. Các hệ quả của định lý Cauchy

+ Nếu hàm f giải tích trong miền D đơn liên và a, z là 2 điểm thuộc D thì $\int_a^z f(z)dz$ không phụ thuộc vào đường nối hai điểm a và z.

+ Cho f giải tích trong miền D giới hạn bởi hai đường cong kín C, C_1 (C_1 nằm trong C) và trên các đường cong này, khi đó:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz\,.$$

+ Tích phân $\oint_C \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0 & \text{khi } z = a \text{ nằm ngoài } C \\ 2\pi i & \text{khi } z = a \text{ nằm trong } C \end{cases}$ với C là đường cong đơn đóng.

+ Tích phân $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{khi } n = 1 \\ 0 & \text{khi } n \neq 1 \end{cases}$ với C là đường cong đơn đóng và $z = a$ nằm trong C .

f. Công thức tích phân Cauchy

+ Giả sử D là miền đa liên giới hạn bởi các đường cong C_0 và các đường cong $C_1, C_2, \dots, C_n$ nằm trong C_0, $f(z)$ giải tích trong D và trên biên của nó, khi đó:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i . f(z_0).$$

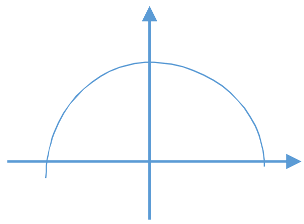
+ $f(z)$ giải tích trong miền D đơn liên, C là đường cong đơn, đóng nằm trong D, khi đó:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} . f^{(n)}(z_0).$$

7.2. Bài tập mẫu

Bài 7.1: Tính tích phân $I = \oint_C |z|\bar{z}dz$ trong đó C là biên của miền $\begin{cases} |z| = 1 \\ Im(z) = 0 \end{cases}$

Giải:



Chia C thành 2 đường

$C_1: |z| = 1$ và $C_2: y = 0$

+ Trên C_1 ta có $z = e^{it}, 0 \le t \le \pi \Rightarrow dz = ie^{it}dt$

Khi đó $\int_{C_1} |z|\bar{z}dz = \int_0^\pi e^{-it} ie^{it}dt = i\int_0^\pi dt = \pi i$

+ Trên C_2 ta có $z = x, -1 \le x \le 1 \Rightarrow dz = dx$

Khi đó $\int_{C_2} |z|\bar{z}dz = \int_{-1}^1 |x|xdx = -\int_{-1}^0 x^2dx + \int_0^1 x^2dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

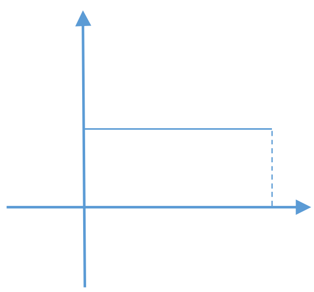
Vậy $I = \oint_C |z|\bar{z}dz = \int_{C_1} |z|\bar{z}dz + \int_{C_2} |z|\bar{z}dz = \pi i.$

Bài 7.2 (bài 3,SGK, tr86): Tính $I = \int_C \bar{z}dz$ từ $z = 0$ đến $z = 4 + 2i$ dọc theo đường cong C được xác định bởi:

a. $z = t^2 + it.$

b. Đường thẳng từ $z = 0$ đến $z = 2i$, rồi từ $z = 2i$ đến $z = 4i$.

Giải:



a. với $z = 0 \Rightarrow t = 0$ và $z = 4 + 2i \Rightarrow t = 2$

Ta có $z = t^2 + it \Rightarrow dz = (2t + i)dt$

Khi đó

$I = \int_C \bar{z}dz = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i)dt = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)dt$

$= \frac{1}{2}t^4 - \frac{i}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\Big|_0^2 = 10 - \frac{8}{3}i$

b. Giả sử $z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy$

Khi đó $I = \int_C \bar{z}dz = \int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C xdx + ydy + i\int_C xdy - ydx$

+ Đoạn thẳng đi từ $z = 0$ đến $z = 2i$ tương ứng với đường thẳng đi từ điểm $O(0,0)$ đến $A(0,2)$, khi đó trên OA thì $x = 0$, $0 \le y \le 2$.

$\Rightarrow \int_{OA} xdx + ydy + i\int_{OA} xdy - ydx = \int_0^2 ydy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^2 = 2$

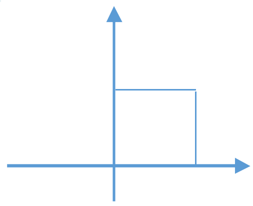
+Đoạn thẳng đi từ $z = 2i$ đến $z = 4 + 2i$ tương ứng với đường thẳng đi từ điểm $A(0,2)$ đến điểm $B(4,2)$, khi đó trên AB thì $y = 2, 0 \le x \le 4$

$\Rightarrow \int_{AB} xdx + ydy + i\int_{AB} xdy - ydx = \int_0^4 xdx - 2i\int_0^4 dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^4 - 2ix|_0^4 = 8 - 8i$

Vậy $I = 2 + (8 - 8i) = 10 - 8i$.

Bài 7.3 (bài 4,SGK, tr 86): Tính $I = \int_C |z|^2 dz$ dọc theo biên C của hình vuông có các đỉnh $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$.

Giải:



Giả sử $z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy$, khi đó

$I = \int_C |z|^2 dz = \int_C (x^2 + y^2)(dx + idy)$

$= \int_C (x^2 + y^2)\, dx + i\int_C (x^2 + y^2)\, dy$

+ Trên đoạn OA thì $y = 0, 0 \le x \le 1$

$\Rightarrow \int_{OA}(x^2 + y^2)\, dx + i\int_{OA}(x^2 + y^2)\, dy = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

+ Trên đoạn AB thì $x = 1, 0 \le y \le 1$

$\Rightarrow \int_{AB}(x^2 + y^2)\, dx + i\int_{AB}(x^2 + y^2)\, dy = i\int_0^1 (1 + y^2)dy = i\left(y + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}i$

+ Trên đoạn BC thì $y = 1, 0 \le x \le 1$

$\Rightarrow \int_{BC}(x^2 + y^2)\, dx + i\int_{BC}(x^2 + y^2)\, dy = \int_0^1 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$

Vậy $I = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i + \frac{4}{3} = 1 + \frac{4}{3}i$.

Bài 7.4 (bài 5,SGK, tr86): Tính $I = \int_i^{2-i}(3xy + iy^2)^2 dz$ trong các trường hợp sau:

a. **Dọc theo đường thẳng nối hai điểm $z = i$ và $z = 2 - i$.**
b. **Dọc theo đường cong $x = 2t - 2, y = 1 + t - t^2$.**

Giải:

a. Giả sử $z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy$, khi đó

$$I = \int_i^{2-i}(3xy + iy^2)^2 dz = \int_i^{2-i}(3xy + iy^2)^2(dx + idy)$$

$$= \int_i^{2-i}(9x^2y^2 - y^4)dx - 6xy^3dy + i\left(\int_i^{2-i} 6xy^3dx + (9x^2y^2 - y^4)dy\right)$$

Đường thẳng đi từ $z = i$ và $z = 2 - i$ tương ứng với đường thẳng đi từ điểm $A(0,1)$ đến điểm $B(2,-1)$, khi đó trên AB ta có: $y = -x + 1, 0 \leq x \leq 2$

$$\Rightarrow I = \int_0^2(9x^2(-x + 1)^2 - (-x + 1)^4)dx - 6x(-x + 1)^3(-dx) +$$

$$+i\int_0^2 6x(-x + 1)^3dx + (9x^2(-x + 1)^2 - (-x + 1)^4)(-dx)$$

$$= \int_0^2(2x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 10x - 1)dx - i\int_0^2(2x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 10x - 1)dx$$

$$= \left(\frac{2}{5}x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x\right)\Big|_0^2 - i\left(\frac{2}{5}x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x\right)\Big|_0^2$$

$$= -\frac{126}{5} + \frac{126}{5}i\ .$$

b. Tại điểm $z = i \Rightarrow t = 1$ và $z = 2 - i \Rightarrow t = 2$

Ta có $z = x + iy = 2t - 2 + i(1 + t - t^2) \Rightarrow dz = [2 + i(1 - 2t)]dt$

Khi đó

$$\Rightarrow I = \int_1^2[3(2t - 2)(1 + t - t^2) + i(1 + t - t^2)^2][2 + i(1 - 2t)]dt$$

$$= \int_1^2[(-14t^3 + 27t^2 + t - 13) + i(12t^4 - 30t^3 + 10t^2 + 14t - 4)]dt$$

$$= \left[\left(-\frac{7}{2}t^4 + 9t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 13t\right) + i\left(\frac{12}{5}t^5 - \frac{15}{2}t^4 + \frac{10}{3}t^3 + 7t^2 - 4t\right)\right]_1^2$$

$$= \left(20 + \frac{52}{15}i\right) - \left(-7 + \frac{37}{30}i\right)$$

$$= 27 + \frac{67}{30}i\ .$$

Bài 7.5: Tính tích phân $I = \oint_C \frac{dz}{z^2}$ trong đó C: $(x - 2)^2 + \frac{1}{4}(y - 5)^2 = 1$

Giải:

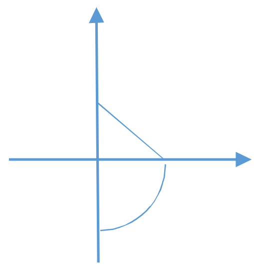
Ta có $f(z) = \frac{1}{z^2}$ không giải tích tại điểm $z = 0$ nhưng điểm $z = 0$ không nằm trong và trên C. Vậy hàm $f(z)$ giải tích trong và trên C

Theo định lý Cauchy-Goursat ta có

$$I = \oint_C \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Bài 7.6: Tính tích phân $I = \int_C (4z - 1)dz$, với C được cho như hình vẽ

Giải:

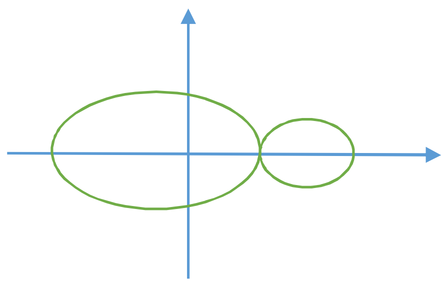


Ta có $f(z)$ $=4z - 1$ giải tích trên toán mặt phẳng phức nên áp dụng hệ quả 1 thì tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường nối 2 điểm $z = i$ và $z = -i$ nên ta có thể thay C bằng đoạn thẳng C_1 nối 2 điểm $z = i$ và $z = -i$. Khi đó ta có

$$I = \int_c (4z - 1)dz = \int_{c_1} (4z - 1)dz = \int_{-i}^{i} (4z - 1)dz = (2z^2 - z)|_{-i}^{i} = -2i$$

Bài 7.7: Tính $I = \oint_C \frac{8z-3}{z^2-z} dz$, với C là chu tuyến như hình vẽ

Giải:



Ta có$f(z) = \frac{8z-3}{z^2-1} = \frac{5}{z-1} + \frac{3}{z}$

C không là đường cong đơn nhưng có thể xem C là hợp của hai đường cong đơn, đóng C_1, C_2 như hình vẽ

Khi đó

$$I = \oint_C \frac{8z-3}{z^2-z} dz = \oint_{C_1} \frac{8z-3}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{8z-3}{z^2-z} dz = \oint_{C_1} \frac{8z-3}{z^2-z} dz - \oint_{-C_2} \frac{8z-3}{z^2-z} dz$$

$$= 5\int_{C_1} \frac{dz}{z-1} + 3\int_{C_1} \frac{dz}{z} - 5\int_{C_2} \frac{dz}{z-1} - 3\int_{C_2} \frac{dz}{z}$$

+ $z = 0$ nằm trong C_1, $z = 1$ nằm ngoài C_1 nên theo hệ quả 5 ta có:

$\int_{C_1} \frac{dz}{z-1} = 0$ và $\int_{C_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$

+ $z = 1$ nằm trong C_2, $z = 0$ nằm ngoài C_2 nên theo hệ quả 5 ta có:

$\int_{C_2} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i$ và $\int_{C_2} \frac{dz}{z} = 0$

Vậy $I = 3.2\pi i - 5.2\pi i = -4\pi i.$

Bài 7.6: Tính $I = \oint_C \left(\frac{3}{z+i} - \frac{1}{z-2i}\right) dz$, với $C: |z| = 5$; $C: |z - 2i| = \frac{1}{2}$

Giải:

+ Với $C: |z| = 5$. Ký hiệu G_c là miền bao bởi C

Rõ ràng $z = -i$ và $z = 2i$ đều nằm trong G_c

Bao hai điểm $z = -i$ và $z = 2i$ lần lượt bởi các đường tròn $C_1: |z + i| = 1$ và $C_2: |z - 2i| = 1$, khi đó

$I = \oint_C \left(\frac{3}{z+i} - \frac{1}{z-2i}\right) dz = \oint_{C_1} \left(\frac{3}{z+i} - \frac{1}{z-2i}\right) dz + \oint_{C_2} \left(\frac{3}{z+i} - \frac{1}{z-2i}\right) dz$

$= 3\oint_{C_1} \frac{dz}{z+i} - \oint_{C_1} \frac{dz}{z-2i} + 3\oint_{C_2} \frac{dz}{z+i} - \oint_{C_2} \frac{dz}{z-2i}$

+ $z = -i$ nằm trong C_1, $z = 2i$ nằm ngoài C_1 nên theo hệ quả 5 ta có:

$\oint_{C_1} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i$ và $\oint_{C_1} \frac{dz}{z-2i} = 0$

+ $z = 2i$ nằm trong C_2, $z = -i$ nằm ngoài C_2 nên theo hệ quả 5 ta có:

$\oint_{C_2} \frac{dz}{z+i} = 0$ và $\oint_{C_2} \frac{dz}{z-2i} = 2\pi i$

Vậy $I = 3.2\pi i - 2\pi i = 4\pi i$

+ Với $C: |z - 2i| = \frac{1}{2}$. Ký hiệu G_c là miền bao bởi C

Rõ ràng $z = -i$ nằm ngoài G_c, $z = 2i$ nằm trong G_c

Bao điểm $z = 2i$ bởi đường tròn $C_1: |z - 2i| = \frac{1}{4}$, khi đó

$I = \oint_C \left(\frac{3}{z+i} - \frac{1}{z-2i}\right) dz = \oint_{C_1} \left(\frac{3}{z+i} - \frac{1}{z-2i}\right) dz = -\oint_{C_1} \frac{dz}{z-2i} = -2\pi i$

Bài 7.7: Tính $I = \oint_{C_k} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$ trong các trường hợp sau:

a. $C_1: |z - 2| = \frac{3}{2}$ **b. $C_2: |z| = \frac{1}{4}$** **c. $C_3: \left|z - \frac{1}{2}\right| = 5$**

Giải:

a. Ta có $I = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z-3)} dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-3} dz$

Đặt $f(z) = \frac{e^z}{z}, z_0 = 3$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C_1 nên áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có

$I = 2\pi i. f(3) = 2\pi i. \left(\frac{e^z}{z}\right)\Big|_{z=3} = \frac{2}{3}e^3\pi i$.

b. Ta có $I = \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z-3)}dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z-3}}{z}dz$

Đặt $f(z) = \frac{e^z}{z-3}, z_0 = 0$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C_2 nên áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có

$I = 2\pi i. f(0) = \left(\frac{e^z}{z-3}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{2}{3}\pi i$.

c. Ta thấy $z = 0$ và $z = 3$ đều nằm trong C_3 nên theo định lý Cauchy-Goursat cho miền đa liên và theo câu a, câu b ta có

$I = \oint_{C_3} \frac{e^z}{z(z-3)}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z-3)}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z-3)}dz = \frac{2}{3}e^3\pi i - \frac{2}{3}\pi i = \frac{2}{3}(e^3 - 1)\pi i$.

Bài 7.8: Tính $I = \oint_C \frac{\cos z}{z^n}dz$ trong các trường hợp sau:

a. $n = 1$ **b. $n = 2$** **c. $n = 3$ với $C: |z| = 1$**

Giải:

a. Với $n = 1$ ta có $I = \oint_C \frac{\cos z}{z}dz$

Đặt $f(z) = \cos z, z_0 = 0$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C nên áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có:

$I = 2\pi i f(0) = 2\pi i. \cos 0 = 2\pi i$.

b. Với $n = 2$ ta có $I = \oint_C \frac{\cos z}{z^2}dz$

Đặt $f(z) = \cos z, z_0 = 0 \Rightarrow f'(z) = -\sin z$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C nên áp dụng công thức tích phân Cauchy cho đạo hàm ta có:

$I = \frac{2\pi i}{1!}f'(0) = -2\pi i. \sin 0 = 0$.

c. Với $n = 3$ ta có $I = \oint_C \frac{\cos z}{z^3}dz$

Đặt $f(z) = \cos z\,, z_0 = 0 \Rightarrow f'(z) = -\sin z \Rightarrow f''(z) = -\cos z$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C nên áp dụng công thức tích phân Cauchy cho đạo hàm ta có:

$I = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{2\pi i}{2}.\cos 0 = -\pi i$.

Bài 7.9 (bài 17, SGK, tr87): Tính

a. $\boldsymbol{I = \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz}$ **b.** $\boldsymbol{I = \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz}$ **với** $\boldsymbol{C: |z| = 3}$**.**

Giải:

a. Nhận thấy $z = 1$ và $z = 2$ đều nằm trong C nên áp dụng theo định lý Cauchy-Goursat cho miền đa liên ta có

$I = \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_{C_1} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz + \oint_{C_2} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = I_1 + I_2$

Với $C_1: |z-1| = \frac{1}{4}$ và $C_2: |z-2| = \frac{1}{4}$

+ Tính $I_1 = \oint_{C_1} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2}}{z-1} dz$

Đặt $f(z) = \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2}, z_0 = 1$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C_1 nên áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có:

$I_1 = 2\pi i. f(1) = 2\pi i \frac{\sin \pi + \cos \pi}{1-2} = 2\pi i$

+ Tính $I_2 = \oint_{C_2} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_{C_2} \frac{\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1}}{z-2} dz$

Đặt $g(z) = \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1}, z_0 = 2$

Rõ ràng $g(z)$ giải tích trong và trên C_2 nên áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có:

$I_2 = 2\pi i. g(2) = 2\pi i \frac{\sin 4\pi + \cos 4\pi}{2-1} = 2\pi i$

Vậy $I = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$.

b. $I = \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$

Đặt $f(z) = e^{2z}, z_0 = -1 \Rightarrow f'(z) = 2e^{2z} \Rightarrow f''(z) = 4e^{2z} \Rightarrow f'''(z) = 8e^{2z}$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C nên áp dụng công thức tích phân Cauchy cho đạo hàm ta có:

$I = \frac{2\pi i}{3!}.f'''(-1) = \frac{2\pi i}{6}.8e^{-2} = \frac{8}{3e^2}\pi i$.

Bài 7.10 (bài 21, SGK,tr88): CMR $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz = \sin t$, nếu $t > 0$ và C: $|z| = 3$.

Giải:

Đặt $I = \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)}dz$

Nhận thấy $z = i$ và $z = -i$ đều nằm trong C. Bao hai điểm $z = i$ và $z = -i$ lần lượt bởi các đường tròn C_1: $|z - i| = \frac{1}{2}$ và C_2: $|z + i| = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có

$I = \oint_C \frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)}dz = \oint_{C_1} \frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)}dz + \oint_{C_2} \frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)}dz = I_1 + I_2$

+ Tính $I_1 = \oint_{C_1} \frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^{zt}}{z+i}}{z-i}dz$

Đặt $f(z) = \frac{e^{zt}}{z+i}, z_0 = i$

Rõ ràng $f(z)$ giải tích trong và trên C_1 nên áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có:

$I_1 = 2\pi i.f(i) = 2\pi i.\left(\frac{e^{zt}}{z+i}\right)\Big|_{z=i} = 2\pi i.\frac{e^{it}}{2i} = \pi e^{it}$.

+ Tính $I_2 = \oint_{C_1} \frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^{zt}}{z-i}}{z+i}dz$

Đặt $g(z) = \frac{e^{zt}}{z-i}, z_0 = -i$

Rõ ràng $g(z)$ giải tích trong và trên C_2 nên áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có:

$I_2 = 2\pi i.g(-i) = 2\pi i.\left(\frac{e^{zt}}{z-i}\right)\Big|_{z=-i} = 2\pi i.\frac{e^{-it}}{-2i} = -\pi e^{-it}$.

Vậy $I = \pi e^{it} - \pi e^{-it} = \pi(e^{it} - e^{-it}) = \pi.2i\sin t = 2\pi i \sin t$

Suy ra $\frac{1}{2\pi i}I = \sin t$ hay $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz = \sin t$ (đpcm)

VIII. BÀI TOÁN TÌM SỐ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

8.1. Kiến thức bổ trợ

Định lý Rouche:

Cho $f(z)$ và $g(z)$ giải tích trong và trên đường cong C đơn đóng. $|g(z)| < |f(z)|, \forall z \in C$

Khi đó $f(z) + g(z)$ và $f(z)$ có cùng số không điểm trong C.

8.2. Bài tập mẫu

Bài 8.1 (câu 4, đề thi môn GTP – K18): Tìm số nghiệm của đa thức

$$\boldsymbol{P(z) = z^5 + 2z^2 + 9z + 1}$$

- **a. Trong hình tròn $|z| < 1$.**
- **b. Trong hình vành khăn $1 \leq z < 2$.**

Giải:

a. Đặt $f(z) = 9z; g(z) = z^5 + 2z^2 + 1$

Trên $C_1: |z| = 1$ ta có

$$|g(z)| = |z^5 + 2z^2 + 1| \leq |z|^5 + 2|z|^2 + 1 = 4 < 9 = |f(z)|$$

Do đó theo địnhl ý Rouche thì $f(z) + g(z) = z^5 + 2z^2 + 9z + 1 = P(z)$ có cùng số không điểm với $f(z) = 9z$ trong $C_1: |z| < 1$. Mà $f(z)$ có một không điểm trong C_1 nên suy ra $P(z)$ cũng có một không điểm tức là có một nghiệm trong $C_1: |z| < 1$.

b. Đặt $f(z) = z^5; g(z) = 2z^2 + 9z + 1$

Trên $C_2: |z| = 2$ ta có

$$|g(z)| = |2z^2 + 9z + 1| \leq 2|z|^2 + 9|z| + 1 = 27 < 2^5 = |f(z)|$$

Do đó theo định lý Rouche thì $f(z) + g(z) = z^5 + 2z^2 + 9z + 1 = P(z)$ có cùng số không điểm với $f(z) = z^5$ trong $C_2: |z| < 2$. Mà $f(z)$ có năm không điểm trong C_2 nên suy ra $P(z)$ cũng có năm không điểm tức là có năm nghiệm trong $C_2: |z| < 2$

Suy ra $P(z)$ có $5 - 1 = 4$ nghiệm trong hình vành khăn $1 \leq z < 2$.

Bài 8.2: Tìm số nghiệm của đa thức

$$\boldsymbol{P(z) = z^3 - 5z + 1}$$

- **a. Trong hình tròn $|z| < 1$.**
- **b. Trong hình vành khăn $1 \leq |z| < 3$.**
- **c. Trong hình vành khăn $2 \leq |z| < 3$.**

Giải:

a. Đặt $f(z) = -5z; g(z) = z^3 + 1$

Trên $C_1: |z| = 1$ ta có

$$|g(z)| = |z^3 + 1| \leq |z|^3 + 1 = 2 < 5 = |f(z)|$$

Do đó theo định lý Rouche thì $f(z) + g(z) = z^3 - 5z + 1 = P(z)$ có cùng số không điểm với $f(z) = -5z$ trong $C_1: |z| < 1$. Mà $f(z)$ có một không điểm trong C_1 nên suy ra $P(z)$ cũng có một không điểm tức là có một nghiệm trong $C_1: |z| < 1$.

b. Đặt $f(z) = z^3; g(z) = -5z + 1$

Trên $C_2: |z| = 3$ ta có

$$|g(z)| = |-5z + 1| \leq 5|z| + 1 = 16 < 3^3 = |f(z)|$$

Do đó theo định lý Rouche thì $f(z) + g(z) = z^3 - 5z + 1 = P(z)$ có cùng số không điểm với $f(z) = z^3$ trong $C_2: |z| < 3$. Mà $f(z)$ có ba không điểm trong C_2 nên suy ra $P(z)$ cũng có ba không điểm tức là có ba nghiệm trong $C_2: |z| < 3$

Suy ra $P(z)$ có $3 - 1 = 2$ nghiệm trong hình vành khăn $1 \leq z < 3$.

c. Đặt $f(z) = -5z; g(z) = z^3 + 1$

Trên $C_3: |z| = 2$ ta có

$$|g(z)| = |z^3 + 1| \leq |z|^3 + 1 = 9 < 10 = |f(z)|$$

Do đó theo định lý Rouche thì $f(z) + g(z) = z^3 - 5z + 1 = P(z)$ có cùng số không điểm với $f(z) = -5z$ trong $C_2: |z| < 2$. Mà $f(z)$ có một không điểm trong C_3 nên suy ra $P(z)$ cũng có một không điểm tức là có một nghiệm trong $C_3: |z| < 2$

Suy ra $P(z)$ có $3 - 1 = 2$ nghiệm trong hình vành khăn $2 \leq z < 3$.

IX. BÀI TOÁN KHAI TRIỂN CHUỖI VÀ TÌM MIỀN HỘI TỤ

9.1. Kiến thức bổ trợ

Một số chuỗi Maclouren thường gặp

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Miền hội tụ đối với các chuỗi trên là $|z| < \infty$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 - z + z^2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Miền hội tụ đối với các chuỗi trên là $|z| < 1$

9.2. Bài tập mẫu

Bài 9.1: Khai triển chuỗi Taylor của các hàm sau theo lũy thừa $z - z_0$. Xác định miền hội tụ của chuỗi vừa tìm được

a. $f(z) = \frac{1}{z^2-6z+5}, z_0 = 3$ b. $f(z) = \frac{1}{z^2}, z_0 = 2$

c. $f(z) = \sin(z^2 + 4z), z_0 = -2$ d. $f(z) = e^{z^2-4z+1}, z_0 = 2$

Giải:

a. $f(z) = \frac{1}{z^2-6z+5} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-1}\right]$

Ta có

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{-2+z-3} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{z-3}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-3)^n$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+z-3} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^n$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{4}\left[= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-3)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^n\right] = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^n$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}(z-3)^{2n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}(z-3)^{2n}$$

Miền hội tụ: $\left|\frac{z-3}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-3| < 2.$

b. $f(z) = \frac{1}{z^2}$

Ta có

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+z-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$

Đạo hàm 2 về ta có

$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-2)^n$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-2)^n$

Miền hội tụ: $\left|\frac{z-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-2| < 2$.

c. $f(z) = \sin(z^2+4z) = \sin((z+2)^2-4) = \sin(z+2)^2\cos 4 - \sin 4\cos(z+2)^2$

Ta có

$\sin(z+2)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{4n+2}}{(2n+1)!}$

$$\cos(z+2)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{4n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow f(z) = \cos 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{4n+2}}{(2n+1)!} - \sin 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{4n}}{(2n)!}$$

Miền hội tụ: $|z+2| < \infty$.

d. $f(z) = e^{z^2-4z+1} = e^{z^2-4z+4-3} = \frac{e^{(z-2)^2}}{e^3}$

Ta có

$e^{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{e^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}$

Miền hội tụ: $|z-2| < \infty$.

Bài 9.2: Khai triển chuỗi Laurent của hàm $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ tại $z = 0, z = 1, z = \infty$.

Giải:

+ Tại $z = 0$

$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n = -\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}$

Miền hội tụ: $0 < |z| < 1$.

+ Tại $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1}$$

Miền hội tụ: $0 < |z-1| < 1$.

+ Tại $z = \infty$

Đặt $z = \frac{1}{w} \Rightarrow f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}-1\right)} = \frac{w^2}{1-w} = w^2\frac{1}{1-w} = w^2\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^{n+2}$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+2}$.

Bài 9.3: Khai triển chuỗi Laurent của các hàm $f(z) = \frac{1+z}{(z-1)(z-2)}$ trong các hình vành khăn

a. $1 < |z| < 2$ **b. $1 < |z-3| < 2$**

Giải:

a. $f(z) = \frac{1+z}{(z-1)(z-2)} = 3\frac{1}{z-2} - 2\frac{1}{z-1}$

Ta có

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

b. $f(z) = \frac{1+z}{(z-1)(z-2)} = 3\frac{1}{z-2} - 2\frac{1}{z-1}$

Ta có

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-3+1} = \frac{1}{z-3}\frac{1}{1+\frac{1}{z-3}} = \frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2+z-3} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-3)^n .$$

Bài 9.4: Khai triển chuỗi Laurent của các hàm $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ trong các hình vành khăn

a. $1 < |z| < 2$ **b. $0 < |z-2| < 1$**

Giải:

a. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - 2\frac{1}{1+z^2}$

Ta có

$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+2}}$

$\Rightarrow f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+2}}$

Miền hội tụ: $\begin{cases} \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \\ \left|\frac{1}{z^2}\right| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| < 2 \\ |z^2| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| < 2 \\ |z|^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| < 2 \\ |z| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < |z| < 2.$

b. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - 2\frac{1}{1+z^2}$

Bài 9.5 (bài 19, SGK, tr118): Khai triển chuỗi Laurent của các hàm tại $z = z_0$

a. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, z_0 = 1$ b. $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}, z_0 = -2$ c. $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}, z_0 = 3$

Giải:

a. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = e^2 e^{2(z-1)}\frac{1}{(z-1)^3}$

Ta có

$e^{2(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[2(z-1)]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z-1)^n$

$\Rightarrow f(z) = e^2\frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n e^2}{n!}(z-1)^{n-3}$

Miền hội tụ: $|2(z-1)| < \infty \Leftrightarrow |z-1| < \infty$

b. $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (z+2)\sin\frac{1}{z+2} - 5\sin\frac{1}{z+2}$

Ta có

$\sin\frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{1}{z+2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+2)^{2n+1}}$

$\Rightarrow f(z) = (z+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+2)^{2n+1}} - 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+2)^{2n+1}}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n}} - 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2n+1}}$$

Miền hội tụ: $\left|\frac{1}{z+2}\right| < \infty \Leftrightarrow |z+2| > 0.$

c. $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{(z-3)^2}\frac{1}{z^2}$

Ta có

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+z-3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-3}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^n$$

Đạo hàm 2 vế ta có:

$$\frac{1}{z^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}(z-3)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{(z-3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}(z-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+2}}{3^{n+2}}(z-3)^{n-2}$$

Miền hội tụ: $\left|\frac{z-3}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-3| < 3.$

Bài 9.6 (bài 21,SGK, tr 118): Khai triển chuỗi Laurent của hàm $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+1)}$ trong các miền đã chỉ ra:

a. $0 < |z+1| < 3$ **b. $0 < |z| < 2$**

Giải:

a. $f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+1)} = \frac{2}{3}\frac{1}{z-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z+1}$

Ta có

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{z+1} - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n.$$

b.

Bài 9.7 (bài 22,SGK,tr 118): Khai triển chuỗi Laurent của hàm $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3}$ trong các miền đã chỉ ra

a. $0 < |z-2| < 1$ **b. $0 < |z-1| < 1$**

Giải:

a. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{(z-1)^3}$

Ta có

$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1}$

a. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3}\frac{1}{z-2}$

Ta có

$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-1+z-1} = -\left(\frac{1}{1-(z-1)}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$

$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-3}$

X. BÀI TOÁN PHÂN LOẠI ĐIỂM BẤT THƯỜNG DỰA VÀO CHUỖI LAURENT

10.1. Kiến thức bổ trợ

Giả sử z_0 là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $f(z)$ có khai triển chuỗi Laurent

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{phần\ chính} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{phần\ giải\ tích} \qquad (1)$$

+ Nếu phần chính của chuỗi (1) bằng 0 ($a_{-n} = 0, \forall n$) thì z_0 là điểm bất thường bỏ được.

+ Nếu phần chính của chuỗi (1) có hữu hạn các số hạng thì z_0 là cực điểm cấp n ($n = 1$ thì z_0 là điểm cực đơn).

+ Nếu phần chính của chuỗi (1) có vô hạn các số hạng thì z_0 là điểm bất thường cốt yếu.

10.2. Bài tập mẫu

Bài 10.1 (câu 5, đề thi GTP – K18):

a. Khai triển chuỗi Laurent của hàm sau trong lân cận của điểm $z = 2$:

$$f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$$

Xác định miền hội tụ của chuỗi vừa tìm.

b. Phân loại các điểm bất thường của hàm $f(z)$.

Giải:

a. Đặt $u = z - 2 \Rightarrow z = u + 2$, khi đó:

$$f(z) = f(u+2) = e^{\frac{u+2}{u}} = e^{1+\frac{2}{u}} = e.e^{\frac{2}{u}} = e.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{u}\right)^n}{n!} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{1}{u^n}$$

Suy ra

$$f(z) = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{1}{(z-2)^n} = e + \frac{2e}{z-2} + \cdots + \frac{2^n e}{n!\,(z-2)^n} + \cdots \quad (1)$$

Miền hội tụ: $\left|\frac{2}{z-2}\right| < \infty \Longrightarrow |z-2| > 0$

b. Ta thấy chuỗi Laurent (1) của hàm $f(z)$ có phần chính gồm vô hạn các số hạng nên điểm $z = 2$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$.

Bài 10.2: Cho hàm số $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$

a. **Khai triển chuỗi Laurent trong lân cận $z = -2$.**
b. **Phân loại các điểm bất thường của hàm $f(z)$.**

Giải:

a. Theo câu b bài 9.5 ta có

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+2)^{2n}} - 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z+2)^{2n+1}}$$

$$= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{3!(z+2)^3} + \cdots \quad (1)$$

b. ta thấy chuỗi (1) của hàm $f(z)$có phần chính gồm vô hạn các số hạng nên điểm $z = -2$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$.

XI. BÀI TOÁN TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

11.1. Kiến thức bổ trợ

a. Công thức tính thặng dư

+ Nếu z_0 là cực điểm đơn của hàm $f(z)$ khi đó:

$$Res[f(z), z = z_0] = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

+ Nếu z_0 là cực điểm cấp n của hàm $f(z)$ khi đó:

$$Res[f(z), z = z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

b. Định lý thặng dư Cauchy

Giả sử D là miền đơn liên, C là đường cong đơn, đóng nằm trong D. $f(z)$ giải tích trong và trên C trừ một số hữu hạn cực điểm nằm trong C, khi đó:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i. \sum_{k=0}^{n} Res[f(z), z = z_k]$$

c. *Tích phân dạng* $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$, R là hàm hữu tỷ

Phương pháp:

Đặt $z = e^{i\theta} \to d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ và $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$

Khi θ biến thiên từ $0 \to 2\pi$ thì z chạy một vòng trên đường tròn đơn vị C: $|z| = 1$

Tường tự với tích phân dạng $\int_0^{2\pi} R(\sin m\theta, \cos m\theta)d\theta$.

d. Tích phân suy rộng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$, F là hàm hữu tỷ

- Nếu $F(z)$ là hàm hữu tỷ thỏa:
  + Bậc mẫu lơn hơn bậc tử ít nhất 2 đơn vị
  + $F(z)$ có hữu hạn n cực điểm $a_1, \dots, a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên
  + $F(z)$ không có cực điểm nằm trên trục thực
  $\Longrightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[F(z), z = a_k]$
- Nếu $F(z)$ là hàm hữu tỷ thỏa:
  + Bậc mẫu lơn hơn bậc tử ít nhất 2 đơn vị
  + $F(z)$ có hữu hạn n cực điểm $a_1, \dots, a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên
  + $F(z)$ có m cực điểm $b_1, \dots, b_n$ nằm trên trục thực
  $\Longrightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[F(z), z = a_k] + \pi i \sum_{j=1}^{m} Res\left[F(z), z = b_j\right]$

e. Tích phân dạng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x\, dx$ *và* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x\, dx$

Theo công thức Euler ta có:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x\, dx = Re \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x\, dx = Im \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx$$

- Nếu $F(z)$ là hàm hữu tỷ thỏa:
  + Bậc mẫu lơn hơn bậc tử ít nhất 1 đơn vị
  + $F(z)$ có hữu hạn n cực điểm $a_1, \dots, a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên
  + $F(z)$ không có cực điểm nằm trên trục thực
  $\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[F(z)e^{i\alpha z}, z = a_k]$
- Nếu $F(z)$ là hàm hữu tỷ thỏa:
  + Bậc mẫu lơn hơn bậc tử ít nhất 1 đơn vị
  + $F(z)$ có hữu hạn n cực điểm $a_1, \dots, a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên
  + $F(z)$ có m cực điểm $b_1, \dots, b_n$ nằm trên trục thực

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[F(z)e^{i\alpha z}, z = a_k] + \pi i \sum_{j=1}^{m} Res\left[F(z)e^{i\alpha z}, z = b_j\right]$$

11.2. Bài tâp mẫu

Bài 11.1 (bài 10, SGK, tr 137): Tính $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$ bằng phương pháp thặng dư.

Giải:

Ta có $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z+1-i)(z+1+i)}$

Hàm $f(z)$ có 2 cực điểm cấp hai là $z = i, z = -i$ và 2 cực điểm đơn $z = -1 + i, z = -1 - i$ nhưng chỉ có cực điểm cấp hai $z = i$ và cực điểm đơn $z = -1 + i$ nằm trong nửa mặt phẳng trên. Khi đó ta có:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = 2\pi i\{Res[f(z), z = i] + Res[f(z), z = -1 + i]\}$$

$$Res[f(z), z = i] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^2 f(z)] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right] = \lim_{z\to i}\frac{2z(z+i)^2(z^2+2z+2) - z^2\left[2(z+i)(z^2+2z+2) + (z+i)^2(2z+2)\right]}{(z+i)^4(z^2+2z+2)^2}$$

$$= \frac{2i(i+i)^2(i^2+2i+2) - i^2\left[2(i+i)(i^2+2i+2) + (i+i)^2(2i+2)\right]}{(i+i)^4(i^2+2i+2)^2} = \frac{16-8i-16-4i}{16(4i-3)} = -\frac{3}{25} + \frac{9}{100}i$$

$$Res[f(z), z = -1 + i] = \lim_{z\to -1+i}(z + 1 - i)f(z) = \lim_{z\to -1+i}(z + 1 - i)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

$$= \lim_{z\to -1+i}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)} = \frac{(-1+i)^2}{((-1+i)^2+1)^2(-1+i+1+i)} = \frac{-2i}{(-3-4i)2i} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

$$\Longrightarrow I = 2\pi i\left(= -\frac{3}{25} + \frac{9}{100}i + \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) = \frac{7}{50}\pi.$$

Bài 11.2 (bài 12, SGK, tr 137): Chứng tỏ rằng:

a. $\boldsymbol{I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}}$ **b.** $\boldsymbol{I = \int_0^{2\pi} \frac{cos^2 3\theta d\theta}{5-4cos2\theta} = \frac{3\pi}{8}}$ **.**

Giải:

a. Đặt $z = e^{i\theta} \Longrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}; \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{iz(5-3\frac{z^2-1}{2iz})^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{iz\frac{(10iz-3z^2+3)^2}{-4z^2}} = -\frac{4}{i}\int_0^{2\pi} \frac{zdz}{(3z^2-10iz-3)^2}$$

GPT: $3z^2 - 10iz + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3i \\ z = \frac{1}{3}i \end{array}\right.$

Hàm $f(z) = \frac{z}{(3z^2-10iz-3)^2}$ có hai cực điểm cấp 2 là $z = 3i, z = \frac{1}{3}i$ nhưng chỉ có điểm $z = \frac{1}{3}i$ nằm trong hình tròn $C: |z| = 1$ và nằm trong nửa mặt phẳng trên. Khi đó ta có

$$\int_0^{2\pi} \frac{zdz}{(3z^2-10iz-3)^2} = 2\pi i. Res\left[f(z), z = \frac{1}{3}i\right]$$

$$Res\left[f(z), z = \frac{1}{3}i\right] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\frac{1}{3}i}\frac{d}{dz}\left[\left(z-\frac{1}{3}i\right)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to\frac{1}{3}i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{9(z-3i)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\lim_{z\to\frac{1}{3}i}\frac{-z-3i}{(z-3i)^3} = -\frac{5}{256}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{zdz}{(3z^2-10iz-3)^2} = 2\pi i.\left(-\frac{5}{256}\right) = -\frac{5}{128}\pi i$$

Vậy $I = -\frac{4}{i}\int_0^{2\pi} \frac{zdz}{(3z^2-10iz-3)^2} = -\frac{4}{i}\left(-\frac{5}{128}\pi i\right) = \frac{5}{32}\pi i.$

b. Làm tương tự như câu a

Bài 11.3: Tính $\boldsymbol{I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}}$ **bằng phương pháp thặng dư.**

Giải:

Ta có $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}$

Hàm $f(z)$ có 4 cực điểm đơn nhưng chỉ có $z = i$ và $z = 3i$ nằm trong nửa mặt phẳng trên. Khi đó ta có:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i\{Res[f(z), z = i] + Res[f(z), z = 3i]\}$$

$$Res[f(z), z = i] = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{1}{16i}$$

$$Res[f(z), z = 3i] = \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z) = \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i}\frac{1}{(z^2+1)(z+3i)} = -\frac{1}{48i}$$

$\Longrightarrow I = 2\pi i\left(\frac{1}{16i} - -\frac{1}{48i}\right) = \frac{\pi}{12}$.

Bài 11.4: Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx$ bằng phương pháp thặng dư.

Giải:

$I = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}Im\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+9}e^{ix}dx$ (do hàm $\frac{x\sin x}{x^2+9}$ là hàm lẻ)

Ta có $f(z) = \frac{z}{z^2+9} = \frac{z}{(z-3i)(z+3i)}$

Hàm $f(z)$ có 2 cực điểm đơn nhưng chỉ có $z = 3i$ nằm trong nửa mặt phẳng trên. Khi đó ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+9}e^{ix}dx = 2\pi i.Res[f(z)e^{iz}, z = 3i] = 2\pi i.\lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)e^{iz}$$

$$= 2\pi i.\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{z}{z^2+9}e^{iz} = 2\pi i.\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{iz}}{z+3i} = 2\pi i.\frac{3ie^{-3}}{6i} = \frac{\pi}{e^3}i$$

Vậy $I = \frac{1}{2}Im\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+9}e^{ix}dx = \frac{\pi}{2e^3}$.

Bài 11.5 (câu 6, đề thi GTP – K18): Dùng thặng dư để tính tích phân: $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$

Giải:

$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$

Đặt $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$

Giải phương trình $z^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -1$

Ta có $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Khi đó căn bậc 6 của -1 được xác định bởi:

$z_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}, k = 0,1,2,3,4,5$

$+ k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$+ k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$+ k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$+ k = 3 \Rightarrow z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$+ k = 4 \Rightarrow z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

+ $k = 5 \Rightarrow z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Vậy $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ là nghiệm của phương trình $z^6 + 1 = 0$

Hay hàm $f(z)$ có 6 điểm cực đơn nhưng chỉ có 3 điểm cực đơn z_0, z_1, z_2 nằm trong nửa mặt phẳng trên. Khi đó ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} = 2\pi i Res\left[f(z), z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] + 2\pi i Res[f(z), z = i] + 2\pi i Res\left[f(z), z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

Trong đó

$$Res\left[f(z), z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\frac{z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{z^6+1}$$

$$= \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5} = \frac{16}{3(\sqrt{3}+i)^5} = \frac{1}{3(-\sqrt{3}+i)} = -\frac{\sqrt{3}+i}{12}$$

$$Res[f(z), z = i] = \lim_{z\to i}(z - i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6i^5} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}$$

$$Res\left[f(z), z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)f(z) = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\frac{1}{6z^5}$$

$$= \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5} = \frac{16}{3(-\sqrt{3}+i)^5} = \frac{1}{3(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{12}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{3}+i}{12}\right) + 2\pi i\left(-\frac{i}{6}\right) + 2\pi i\left(\frac{\sqrt{3}-i}{12}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$.

Bài 11.6 (câu 5, đề thi GTP – niên học 2008-2009): Tính bằng thặng dư

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta.$$

Giải:

$$I = \int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

Đặt $t = \theta + \pi \Rightarrow dt = d\theta$

Đổi cận: $\theta = -\pi \Rightarrow t = 0$; $\theta = \pi \Rightarrow t = 2\pi$, khi đó:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(t-\pi)}{5+4\cos(t-\pi)}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{-\cos t}{5-4\cos t}dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{5-4\cos t}dt$$

Đặt $z = e^{it} \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}; \cos t = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$

$$I = -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5-4\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(2z^2-5z+2)}dz$$

Hàm $f(z) = \frac{z^2+1}{z(2z^2-5z+2)} = \frac{z^2+1}{2z(z-2)(z-\frac{1}{2})}$

Nhận thấy hàm $f(z)$ có 3 cực điểm đơn nhưng chỉ có 2 cực điểm $z = 0, z = \frac{1}{2}$ nằm trong miền $|z| = 1$ khi đó ta có:

$$I = \frac{1}{4i}.2\pi i\left\{Res[f(z), z = 0] + Res\left[f(z), z = \frac{1}{2}\right]\right\} = \frac{\pi}{2}\left\{Res[f(z), z = 0] + Res\left[f(z), z = \frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$Res[f(z), z = 0] = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{2z^2-5z+2} = \frac{1}{2}$$

$$Res\left[f(z), z = \frac{1}{2}\right] = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^2+1}{2z(z-2)} = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Bài 11.7 (câu 6, đề thi GTP – niên học 2008-2009) : Tính thặng dư

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^4+1)dx}{x^6+1}$$

Giải:

Xét $f(z) = \frac{z^4+1}{z^6+1}$

GPT: $z^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -1$

Ta có $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Khi đó căn bậc 6 của -1 được xác định bởi:

$$z_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}, k = 0,1,2,3,4,5$$

$+ k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$+ k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$+ k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$+ k = 3 \Rightarrow z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$+\ k = 4 \Rightarrow z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

$+\ k = 5 \Rightarrow z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Vậy $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ là nghiệm của phương trình $z^6 + 1 = 0$

Hay hàm $f(z)$ có 6 điểm cực đơn nhưng chỉ có 3 điểm cực đơn z_0, z_1, z_2 nằm trong nửa mặt phẳng trên. Khi đó ta có

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^4+1)dx}{x^6+1} = 2\pi i Res\left[f(z), z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] + 2\pi i Res[f(z), z = i] + 2\pi i Res\left[f(z), z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$

Trong đó

$$Res\left[f(z), z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\frac{\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(z^4+1)}{z^6+1}$$

$$= \lim_{z\to\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\frac{z^4+1+4z^3\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{6z^5} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^4+1}{6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5} = \frac{(\sqrt{3}+i)^4+16}{3(\sqrt{3}+i)^5} = \frac{8(1+\sqrt{3}i)}{3.16(-\sqrt{3}+i)} = -\frac{4i}{24} = -\frac{i}{6}$$

$$Res[f(z), z = i] = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^4+1+4z^3(z-i)}{6z^5} = \frac{i^4+1}{6i^5} = \frac{2}{6i} = -\frac{i}{3}$$

$$Res\left[f(z), z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)f(z) = \lim_{z\to-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\frac{z^4+1+4z^3\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{6z^5}$$

$$= \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^4+1}{6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5} = \frac{(-\sqrt{3}+i)^4+16}{3(-\sqrt{3}+i)^5} = \frac{8(1-\sqrt{3}i)}{3.16(\sqrt{3}+i)} = -\frac{4i}{24} = -\frac{i}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^4+1)dx}{x^6+1} = 2\pi i\left(-\frac{i}{6} - \frac{i}{3} - \frac{i}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

Vậy $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^4+1)dx}{x^6+1} = \frac{4\pi}{3}$.