CHƯƠNG I: HÀM GIẢI TÍCH

§ 1 SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TRƯỜNG SỐ PHỨC

I. Dạng đại số:

1. Định nghĩa: Dạng đại số của số phức có dạng: z=x+iy

x=Rez: phần thực

y=Imz: phần ảo

i: đơn vị ảo, $i^2 = -1$

Tập tất cả các số phức gọi là Trường số phức: ký hiệu C.

2. 2 số phức bằng nhau:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

3. Số phức liên hợp:

Số phức liên hợp của z=x+iy là $\bar{z} = x - iy$

4. Các phép toán về số phức:

- Phép cộng:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

- Phép trừ:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

- Phép nhân:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$\bar{z} z = x^2 + y^2$$

- Phép chia:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

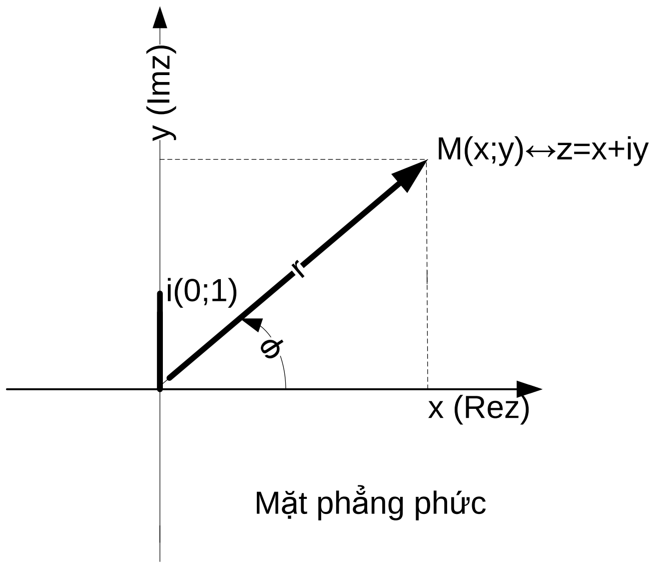
Ví dụ: Tính $A = \dfrac{1}{(2 - 3i)(1 + i)} = \dfrac{(2 - 3i)(1 + i)}{26} = \dfrac{5 + i}{26}$

Ví dụ : Rút gọn

$$B = \frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i} = \frac{i - 1 - i + 1 + i}{1 + i} = \frac{i(1 - i)}{2} = \frac{i + 1}{2}$$

II.Biểu diễn hình học và dạng lượng giác

1. Mặt phẳng phức



Mặt phẳng phức

2. Dạng lượng giác:

$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = Argument(z) = Arg(z) = \arg(z) + k2\Pi, (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$

φ là hàm đa trị

arg(z) là giá trị chính $(-\Pi < \arg(z) < \Pi)$

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \Pi + \arctan\dfrac{y}{x} & x < 0, y > 0 \\ -\Pi + \arctan\dfrac{y}{x} & x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\Pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\Pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Ví dụ:

Biểu diễn số phức z=-1-I về dạng lượng giác:

$r = \sqrt{2}$

$\arg z = -\Pi + \arctan 1 = -\Pi + \dfrac{\Pi}{4} = -\dfrac{3\Pi}{4}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\Pi}{4} - i\sin\dfrac{3\Pi}{4}\right)$

3. Phép nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác:

$$z_1 z_2 = r_1.r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

4. phép lũy thừa và phép khai căn

- $z^n = r^n\left[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right]$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\Pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\Pi}{n}\right)\right], k = \overline{0;n-1}$

Vậy căn bậc n của số phức z gồm n giá trị

Ví dụ:

- Tìm $\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\Pi}{4} + k2\Pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\Pi}{4} + k2\Pi}{3}\right)\right], k = \overline{0;n-1}$

5. Dạng mũ

Công thức Euler: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$z = re^{i\varphi}$

Ví dụ:

$z = -1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\Pi}{4}}$

5. Một số miền trong mặt phẳng phức:

- $|z_1 - z_2|$: Khoảng cách giữa 2 số phức.
- $|z - z_0| = r$: Đường tròn tâm Z_0, bán kính r.
- $|z - z_0| < r$: Hình tròn mở tâm Z_0, bán kính r (hình tròn không tính biên)
- $|z - z_0| \le r$: Hình tròn đóng tâm Z_0, bán kính r (hình tròn có biên)
- $|z - z_0| > r$: Phần ngoài hình tròn mở tâm Z_0, bán kính r.

BÀI TẬP

1. Viết dưới dạng mũ và dạng lượng giác các số phức sau:

a) z=-5 b) $1 - i\sqrt{3}$ c)-2+2i d) $-\sqrt{3} - i$

2. Tính và viết dưới dạng đại số:

$a)\ \frac{-2+i}{4-3i}$ b) $(1 + i\sqrt{3})^6$ c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$ d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$ e) $\sqrt[6]{1}$

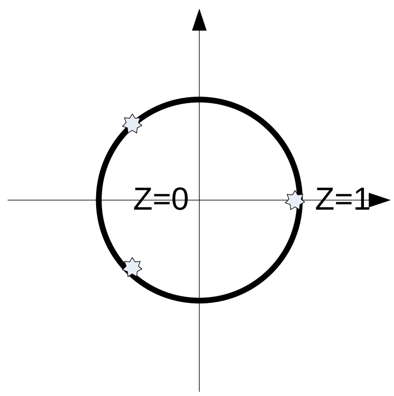
3.Tính và viết dưới dạng mũ:

a) $\sqrt[4]{1 - i\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[5]{-4 + i3}$

4. Tìm và biểu diễn hình học các số phức thỏa: $\bar{z} = z^2$

GIẢI:

$$\Leftrightarrow \overline{re^{i\varphi}} = r^2 e^{i2\varphi} \Leftrightarrow re^{-i\varphi} = r^2 e^{i2\varphi} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ re^{i3\varphi} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \dfrac{k2\Pi}{3}, k = 0;1;2 \end{cases} \end{array}\right.$$



5. Vẽ tập điểm xác định bởi

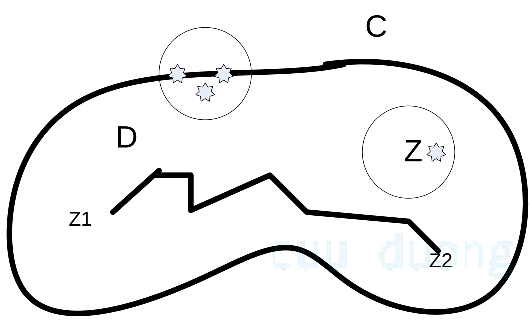
a) $|z - 1 + i| = 1$ b) $|z + i| \le 3$ c) $\mathrm{Re}(z - i) = 2$ d) $|2z - i| = 4$ e) $|z - 1| = |z + i|$

6. Vẽ miền trong của mp phức xác định bởi:

a) $0 < \mathrm{Re}\, z \le \mathrm{Im}\, z$ b) $|z - 1| \le \mathrm{Re}\, z$.

§2 HÀM 1 BIẾN PHỨC

I. Miền và biên trong mp phức:



Miền trong mp phức là tập D có tính chất sau:

1. D là tập mở $\Leftrightarrow \forall z \in D, \exists S(z, r) \subset D$
2. D liên thông $\Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in D$ có thể nối z_1, z_2 bằng đường gấp khúc nằm trọn trong D.
3. Biên của D là đường cong kín C: gồm các điểm của mp phức thỏa:
   a) $C \cap D = \Phi$
   b) $\exists$ hình tròn nếu chứa 1 điểm của C thì nó sẽ chứa ít ra 1 điểm của D
4. $\overline{D} = D \cup C$ gọi là miền đóng

II. Hàm biến phức

1. Định nghĩa: $S \subset C$, Hàm số f: $S \rightarrow C$ là 1 quy tắc cho mỗi $z \in S$ tương ứng 1 phần tử duy nhất $f(z) \in C$. Hàm biến phức này gọi là hàm đơn trị.
2. Trong lý thuyết hàm phức ta thường gặp các hàm đa trị nghĩa là ứng với mỗi z có thể có nhiều f(z).
3. Phần thực và phần ảo của hàm biến phức:

$z = x + iy \Rightarrow w = f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$

Ví dụ:

Cho $w = f(z) = x^2 - y^2 + i(x + y^2)$. Tính f(1+2i)

GIẢI:

Với x=1, y=2 ta có f(1+2i)=-3+5i.

Ví dụ:

Cho $w = f(z) = z^2$. Tính u(x;y), v(x;y)

GIẢI:

$$w = f(x+iy) = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}.$$

III. Giới hạn và liên tục

1. Giới hạn: w_0 gọi là Giới hạn của hàm $w = f(z)$ khi $z \to z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho khi $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |w - w_0| < \varepsilon$

Ký hiệu: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

2. Liên tục: f(z) gọi là liên tục tại $z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

3. $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ liên tục $\Leftrightarrow$ Các hàm u(x;y), v(x;y) cũng liên tục.

IV. Các hàm sơ cấp cơ bản

1. Hàm mũ:

- e^z : đơn trị và giải tích $\forall z$
- e^z : có thể âm.
- $(e^z)' = e^z$

2.Hàm lượng giác

- $\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z \end{cases} \Rightarrow \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- $(\cos z)' = -\sin z, (\sin z)' = \cos z$

3. Hàm Hypebolic:

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, tghz = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

4. Hàm Logarit:

$$z = re^{i\varphi} \Rightarrow Lnz = Lnr + i(\varphi + k2\Pi), (-\Pi < \varphi < \Pi)$$

- Vậy Lnz là hàm đa trị.
- Với k=0 ta được nhánh chính của Lnz.

BÀI TẬP:

1. Tính giá trị các hàm phức sau:

a) $Ln\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$ b) $Ln\left(1-i\sqrt{3}\right)$ c) $Ln\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Viết các hàm sau về dạng đại số:

a)ch(1-i) b)sin(1+i) c) $(1-i)^{2+i}$ d) i^{i} e) $(2+i)^{1-i}$ f) $(1-i)^{2i+1}$ g) 3^{2+i}

h) $\sin\left(\frac{\Pi}{2}+iLn\left(4+\sqrt{15}\right)\right)$

§3 ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa: Đạo hàm của hàm biến phức f(z) tại z nếu giới hạn sau tồn tại

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

2. Quy tắc:

a) $(w_1 \pm w_2)' = w_1' \pm w_2'$

b) $(w_1 w_2)' = w_1' w_2 \pm w_2' w_1$

c) $\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)' = \dfrac{w_1' w_2 - w_2' w_1}{w_2^2}$

d) $(w^n)' = n w^{n-1}.w'$

3. Điều kiện để hàm biến phức khả vi tại 1 điểm:

Định lý: Cho hàm $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, nếu các hàm 2 biến u(x;y), v(x;y) có các đạo hàm riêng liên tục và thỏa điều kiện Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Tại điểm z=x+iy thì f(z) khả vi tại điểm này.

4. Điều kiện để hàm biến phức giải tích tại 1 điểm:

Định lý: Nếu hàm $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ khả vi tại mọi điểm trong lân cận nào đó của điểm z_0 thì f(z) giải tích tại z_0.

NHẬN XÉT:

- Trong 1 miền thì tính khả vi và giải tích là tương đương nhau.
- Nhưng tại 1 điểm thì tính giải tích đòi hỏi điều kiện nhiều hơn tính khả vi.

Định lý: Cho hàm $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, nếu các hàm 2 biến u(x;y), v(x;y) có các đạo hàm riêng liên tục và thỏa điều kiện Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Trong miền D là điều kiện cần và đủ để hàm f(z) giải tích trong miền D và khi đó đạo hàm của f(z) cho bởi công thức:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

5. Liên hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hòa

Hàm u(x;y) gọi là hàm điều hòa trên miền D nếu nó thỏa pt LPLACE:

$$\nabla^2_u = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

5.2 Định lý: hàm $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ giải tích trên D $\Leftrightarrow$ phần thực và phần ảo là những hàm điều hòa trên D và thỏa điều kiện C-RVí dụ: xét tính giải tích và tính đạo hàm của các hàm sau:

a) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ b) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

GIẢI:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

Các đạo hàm riêng thỏa điều kiện C-R$\Rightarrow$ $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z$. Vậy

$(z^2)' = 2z$

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y e^x, \frac{\partial v}{\partial x} = \sin y e^x, \frac{\partial v}{\partial y} = \cos y e^x, \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin y e^x$

Các đạo hàm riêng thỏa điều kiện C-R$\Rightarrow$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$. Vậy $(e^z)' = e^z$

Ví dụ: xét tính khả vi của các hàm sau:

a) $f(z) = x^2 - 3y^3 + 9ixy$ b) $f(z) = (\bar{z})^2$ c) $f(z) = z^2 - i\bar{z} + iz\bar{z}$

GIẢI:

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = 9y, \frac{\partial v}{\partial y} = 9x, \frac{\partial u}{\partial y} = -9y^2$

Để hàm số khả vi khi và chỉ khi điều kiện C-R được thỏa ta có hệ pt:

$$\begin{cases} 2x = 9x \\ -9y^2 = -9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow (0;0) \vee (0;1)$$

b) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

Để hàm số khả vi khi và chỉ khi điều kiện C-R được thỏa ta có hệ pt:

$$\begin{cases} 2x = -2x \\ -2y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow (0;0)$$

c) $f(z) = x^2 - y^2 - y + i(x^2 + y^2 + 2xy - x)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2y - 1, \frac{\partial v}{\partial y} = 2y + 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 1$$

Để hàm số khả vi khi và chỉ khi điều kiện C-R được thỏa ta có hệ pt:

$$\begin{cases} 2x = 2y + 2x \\ 2x + 2y - 1 = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (1;0)$$

Ví dụ: Tìm hàm giải tích f(z)=u(x;y)+iv(x;y) biết

$v = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2; f(0) = 1$ b) $u = e^x \cos y, f(0) = 1$ c) $u = \ln(x^2 + y^2)$

GIẢI:

a)

- Kiểm tra v là hàm điều hòa

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 4x \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 4 + 6y - 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2 - 4y, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y - 4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Ta có V là hàm điều hòa

- Từ điều kiện C-R ta có hệ pt: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 - 4y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -6xy - 4x \end{cases}$

Ta có:

$$u = \int (-6xy - 4x)dy + g(x) = -3xy^2 - 4xy + g(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{dx} = -3y^2 - 4y + g'(x)$$

$$= 3x^2 - 3y^2 - 4y \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g(x) = x^3 + C$$

$$\Rightarrow f(z) = -3xy^2 - 4xy + x^3 + C + (3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2)i$$

$$Because: f(0) = C = 1, so: f(z) = -3xy^2 - 4xy + x^3 + 1 + (3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2)i$$

GIẢI:

a)

- Kiểm tra v là hàm điều hòa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^x \cos y, \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin y e^x, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\cos y e^x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Ta có V là hàm điều hòa

- Từ điều kiện C-R ta có hệ pt: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y \end{cases}$

$$v = \int e^x \sin y dx + g(y) = e^x \sin y + g(y) \Rightarrow \frac{\partial v}{dy} = e^x \cos y + g'(y)$$

Ta có: $= e^x \cos y \Rightarrow g'(y) = o \Rightarrow g(y) = C$

$$\Rightarrow f(z) = e^x \cos y + (e^x \sin y + C)i$$

$$Because\ : f(0) = iC + 1 = 1 \Rightarrow C = 0, so : f(z) = e^x \cos y + (e^x \sin y)i$$

c)

- Kiểm tra v là hàm điều hòa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(-y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Ta có v là hàm điều hòa

- Từ điều kiện C-R ta có hệ pt: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \end{cases}$

$$v = -\int \frac{2y}{x^2+y^2}dx + g(y) = -2\,acrtg\left(\frac{x}{y}\right) + g(y) \Rightarrow \frac{\partial v}{dy} = \frac{2x}{x^2+y^2} + g'(y)$$

Ta có: $$= \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

$$\Rightarrow f(z) = \ln(x^2+y^2) + \left(-2\,arctg\left(\frac{x}{y}\right) + C\right)i$$

BÀI TẬP: HÀM GIẢI TÍCH- HÀM KHẢ VI-TÍNH ĐẠO HÀM

1. Viết mỗi hàm sau đây thành 1 đa thức theo z=x+iy

$a)\ f(z) = (x^2 - y^2 - 2y + 1) + 2i(xy + x),\ b)\ f(z) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 + x)$

$c)\ f(z) = (-x^2 + y^2 - y + 2) + i(x - 2xy),\ d)\ f(z) = (2xy + 2x - 1) - i(x^2 - y^2 - 2y)$

2. Tính đạo hàm:

$a)\ w = -2z^2 + 3z + 4,\ b)\ w = 5z^2 - 4z + 2,\ c)\ w = z^3,\ d)\ w = |z|z,\ e)\ w = (\bar{z})^2$

3. Tìm các điểm mà tại đó hàm f(z) thỏa điều kiện C-R

$f(z) = xy^2 + ix^2y$

4. Chứng minh rằng các hàm sau thỏa PT: LAPLACE:

$a)\ \mathrm{Re}\, z^2\ \&\ \mathrm{Im}\, z^2,\ b)\ \mathrm{Re}\, z^3\ \&\ \mathrm{Im}\, z^3,\ c)\ \mathrm{Re}\, z^4\ \&\ \mathrm{Im}\, z^4$

5. Tìm hàm giải tích: f(z)=u(x;y)+iv(x;y) biết

$a)\ u = 2x - 2xy - \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ f(i) = i,\ b)\ v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

§4 PHÉP BIẾN HÌNH PHÂN TUYẾN TÍNH

I. Định nghĩa:

1.Ánh xạ phân tuyến tính có dạng:

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

$$z_1 = cz + d,\ z_2 = \frac{1}{z_1} \Rightarrow \omega = (az+b)z_2 = a\left(z + \frac{b}{a}\right)z_2 = \frac{a}{c}\left(cz + \frac{bc}{a}\right)z_2$$

$$= \frac{a}{c}\left(cz + d + \frac{bc}{a} - d\right)z_2 = \frac{a}{c}z_1 z_2 + \frac{bc-ad}{a}z_2 = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{a}z_2$$

2.Vậy phép biến hình phân tuyến tính là hợp của 3 phép:

1). $z_1 = cz + d$ là phép co và phép tịnh tiến.

2). $z_2 = \frac{1}{z_1}$ là phép nghịch đảo.

3). $\omega = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{a}z_2$ là phép co và phép tịnh tiến.

3. Ánh xạ phân tuyến tính có tính chất:

a) Ánh xạ phân tuyến tính có tính chất bảo giác.

b) Ánh xạ phân tuyến tính biến đường tròn thành đường tròn.

c) Ánh xạ phân tuyến tính biến miền thành miền.

d) Ánh xạ phân tuyến tính biến các điểm đối xứng thành điểm đối xứng.

4. Ánh xạ phân tuyến tính biến 3 điểm tương ứng thành 3 điểm:

$$z_1, z_2, z_3 \xrightarrow{w=f(z)} \omega_1, \omega_2, \omega_3$$

$$\frac{\omega-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}.\frac{\omega_3-\omega_2}{\omega-\omega_2} = \frac{z-z_1}{z_3-z_1}.\frac{z_3-z_2}{z-z_2}$$

ví dụ:

1) Tìm PBHPTT biến 3 điểm -1, 0, 1→ 0, i, 3i

$$\frac{z+1}{1+1}.\frac{1-0}{z-0} = \frac{\omega}{3i}.\frac{3i-i}{\omega-i} \Leftrightarrow \frac{z+1}{2z} = \frac{2\omega}{3}\frac{}{\omega-i} \Leftrightarrow \omega = 3i\frac{z+1}{3-z}$$

2) Tìm PBHPTT biến 3 điểm 1, 0, -1→ i, ∞ , 1

$$\frac{z-1}{-2}.\frac{-1}{z} = \frac{\omega-i}{1-i}.\frac{1-\infty}{\omega-\infty} \Leftrightarrow \omega = \frac{1-i}{2}\frac{z-1}{z} + i = \frac{(1+i)z + i - 1}{2z}$$

BÀI TẬP:

Tìm các PBHPTT sau:

$a)\ 0,1,i \to -\frac{1}{2}, 0, -1+i,$ $\quad b)\ 0,i,-i \to i, 1, \frac{1}{2}i$ $\quad c)\ 0,1,i \to i, \frac{i+1}{2}, \infty$ $\quad d)\ -1,0,1 \to -1, -i, 1$

CHƯƠNG II TÍCH PHÂN HÀM BIẾN PHỨC

§1 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA HÀM PHỨC

I. Định nghĩa và công thức:

1. Định nghĩa: Cho đường cong C định hướng, trơn từng khúc và trên C cho hàm phức f(z). Tích phân đường của f(z) dọc theo C được tính theo công thức:

1. $\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$

2. Nếu C cho dưới dạng tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ với $\alpha \le t \le \beta$, khi đó z(t)=x(t)+iy(t). Ta có $\oint_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$

II. Tính chất: Các tính chất của tích phân đường loại II của hàm thực vẫn còn đúng cho hàm phức:

a) $\oint_C [af(z) + bg(z)]dz = a\oint_C f(z)dz + b\oint_C g(z)dz$

b) $\oint_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$, with $C_1 \cap C_2 = \Phi$

c) $\oint_{AB} f(z)dz = -\oint_{BA} f(z)dz$

d) $\left|\oint_C f(z)dz\right| \le \oint_C |f(z)||dz| \le ML$

L: độ dài của C, $M = \max |f(z)|, z \in C$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

a) $I_k = \oint_{C_k} (\bar{z})^2 dz, k = 1,2$ trong đó C_1 là đoạn thẳng nối O→1+i

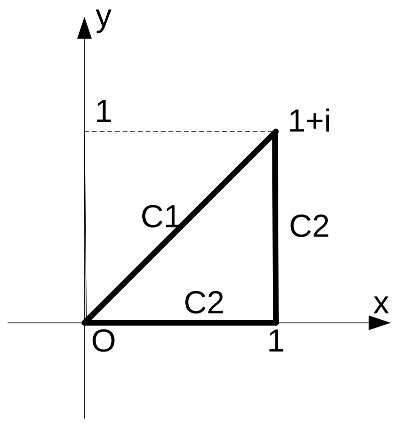
C_2 là đường gấp khúc nối O→1&1→1+i.

GIẢI:

Tham số hóa đường thẳng C_1: y=x $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x = t \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$

Z(t)=x(t)+iy(t)=t(1+i)

$$I_1 = \int_0^1 t^2(1-i)^2(1+i)dt = \int_0^1 t^2(2-2i)dt = \left.\frac{2(1-i)t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2(1-i)}{3}$$

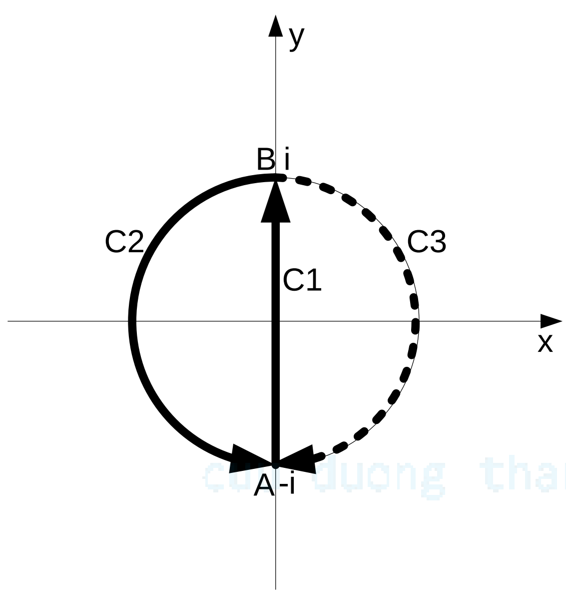


$$0 \to 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, 0 \le t \le 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z(t) = t$$

$$1 \to 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, 0 \le t \le 1 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow z(t) = 1 + it$$

$$I_2 = \int_0^1 t^2 t' dt + \int_0^1 (1 - it)^2 idt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 + \int_0^1 (1 - 2it - t^2) dt = \frac{1}{3} + i\left.\left(t - it^2 - \frac{t^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{2i}{3} + \frac{4}{3}$$

Ví dụ



Tính các tích phân sau $I_k = \oint_{C_k} |z| dz$ Trong đó C_1 là đường thẳng AB

C_2, C_3 là các nửa cung tròn đơn vị ($|z|=1$) có cùng điểm đầu và điểm cuối và chiều như hình vẽ.

GIẢI:

Tham số hóa đường thẳng C_1: AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ -1\le t\le 1 \end{cases}$

Z(t)=x(t)+iy(t)=ti

$$I_1=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,idt = i\int_{-1}^{1}|t|dt = i\left[\int_{-1}^{0}-tdt+\int_{0}^{1}tdt+\right]=i$$

Tham số hóa nửa đường tròn C_2: $\Leftrightarrow \begin{cases} z=re^{it}=e^{it} \\ r=1 \\ \frac{\Pi}{2}\le t\le\frac{3\Pi}{2} \end{cases}$

$$I_2=\int_{\frac{\Pi}{2}}^{\frac{3\Pi}{2}} ie^{it}dt = e^{it}\Big|_{\frac{\Pi}{2}}^{\frac{3\Pi}{2}} = \left(\cos\frac{3\Pi}{2}+i\sin\frac{3\Pi}{2}\right)-\left(\cos\frac{\Pi}{2}+i\sin\frac{\Pi}{2}\right)=-i-i=-2i$$

Tham số hóa nửa đường tròn C_3: $\Leftrightarrow \begin{cases} z=re^{it}=e^{it} \\ r=1 \\ -\frac{3\Pi}{2}\le t\le\frac{-\Pi}{2} \end{cases}$

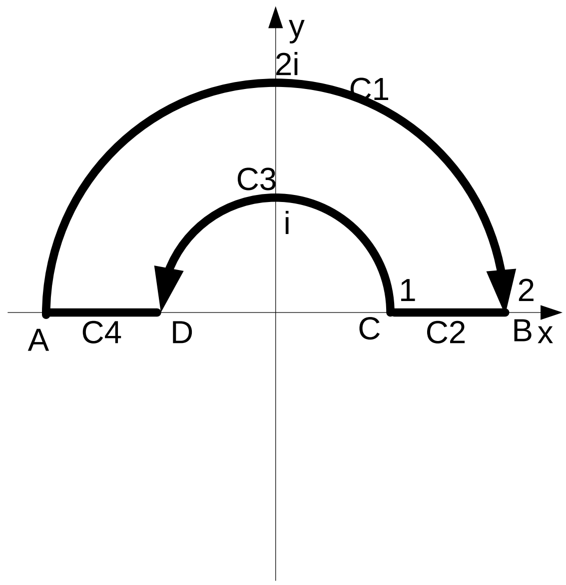
$$I_3=\int_{-\frac{3\Pi}{2}}^{-\frac{\Pi}{2}} i\,e^{it}dt = e^{it}\Big|_{-\frac{3\Pi}{2}}^{-\frac{\Pi}{2}} = \left(\cos\frac{-\Pi}{2}+i\sin\frac{-\Pi}{2}\right)-\left(\cos\frac{-3\Pi}{2}+i\sin\frac{-3\Pi}{2}\right)=-i-i=-2i$$

ví dụ: Tính tích phân sau với C là biên nửa trên hình vành khăn

$C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$ $\quad I=\oint_C\frac{z}{\bar{z}}dz$

GIẢI:

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=\oint_{C_1}\frac{z}{\bar{z}}dz+\oint_{C_2}\frac{z}{\bar{z}}dz+\oint_{C3}\frac{z}{\bar{z}}dz+\oint_{C_4}\frac{z}{\bar{z}}dz$$



Tham số hóa đường thẳng C_2: BC $\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$

Z(t)=x(t)+iy(t)=t

$$I_2 = \int_2^1 \frac{t}{t} dt = t\Big|_2^1 = -1$$

Tham số hóa đường thẳng C_4: DA $\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ -2 \le t \le -1 \end{cases}$

Z(t)=x(t)+iy(t)=t

$$I_2 = \int_{-1}^{-2} \frac{t}{t} dt = t\Big|_{-1}^{-2} = -1$$

Tham số hóa nửa đường tròn C_1: $\Leftrightarrow \begin{cases} z = re^{it} = 2e^{it} \\ r = 2 \\ \Pi \le t \le 2\Pi \end{cases}$

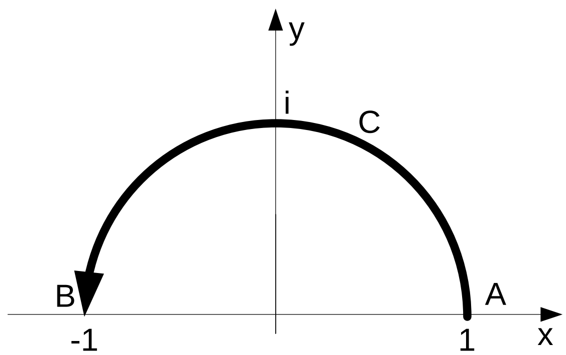
$$I_1 = \int_{\Pi}^{2\Pi} \frac{2e^{it}}{2e^{-it}} 2ie^{it} dt = \frac{2i}{3i} e^{3it}\Big|_{\Pi}^{2\Pi} = \frac{2}{3}\left(e^{6\Pi i} - e^{3\Pi i}\right) = \frac{4}{3}$$

Tham số hóa nửa đường tròn C_3: $\Leftrightarrow \begin{cases} z = re^{it} = e^{it} \\ r = 1 \\ 0 \le t \le \Pi \end{cases}$

$$I_3 = \int_0^{\Pi} \frac{e^{it}}{e^{-it}} ie^{it} dt = \frac{i}{3i} e^{3it}\Big|_0^{\Pi} = \frac{1}{3}\left(e^{3\Pi i} - e^{0}\right) = -\frac{2}{3}$$

Vậy $I = -1 - 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$

ví dụ: Tính tích phân sau với C là biên nửa trên đường tròn đơn vị $I = \oint_C |z| \bar{z} dz$



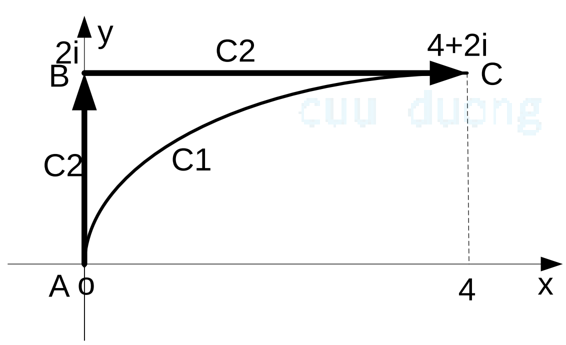
Tham số hóa nửa đường tròn C_3: $\Leftrightarrow \begin{cases} z = re^{it} = e^{it} \\ r = 1 \\ 0 \le t \le \Pi \end{cases}$

$$I_3 = \int_0^{\Pi} ie^{it} e^{-it} dt = it\Big|_0^{\Pi} = i\Pi$$

ví dụ: Tính tích phân $I = \oint_C \bar{z} dz$ với C là đường nối từ z=0→z=4+2i trong các trường hợp sau:

a) C_1 là đường $x = y^2$

b) C_2 là đường gấp khúc từ 0→2i & 2i→4+2i



GIẢI:

a) Tham số hóa đường cong $C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ 0 \le t \le 2 \end{cases}$

Z(t)=x(t)+iy(t)=$t^2 + it$

$$I = \int_0^2 (t^2 - it)(2t + i)dt = \left.\frac{t^4}{2} - \frac{it^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right|_0^2 = 10 - \frac{8i}{3}$$

b) Tham số hóa đường thẳng C_2: AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ 0 \le t \le 2 \end{cases}$

Z(t)=x(t)+iy(t)=it

$$I_1 = \int_0^2 -it\,idt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^2 = 2$$

Tham số hóa đường thẳng C_2: BC $\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ 0 \le t \le 4 \end{cases}$

Z(t)=x(t)+iy(t)=t+2i

$$I_2 = \int_0^4 (t - 2i)dt = \left.\frac{t^2}{2} - 2it\right|_0^4 = 8 - 8i \Rightarrow I = 2 + 8 - 8i = 10 - 8i$$

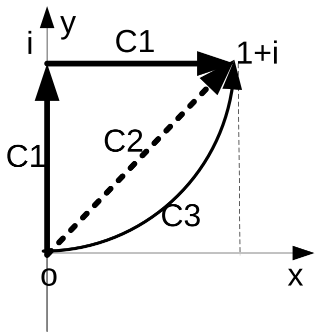
BÀITẬP:

1.Tính $I_k = \oint_{C_k} (x + y)dz$

với a) C_1 :0→i& i→1+i

b) C_2: 0→1+i theo đường thẳng: y=x

c) C_3: 0→1+i theo đường thẳng: $y = x^2$


y
i
C1
1+i
C2
C1
C3
o
x

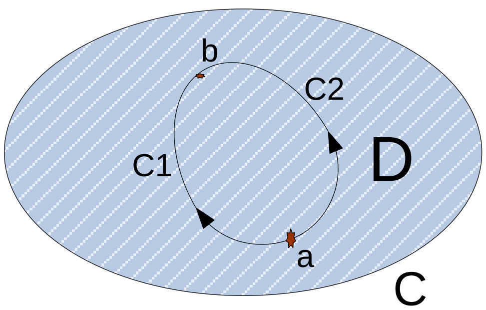
§2 TÍCH PHÂN CAUCHY CHO MIỀN ĐƠN LIÊN& ĐA LIÊN

I. Các định lý

1. Định lý 1

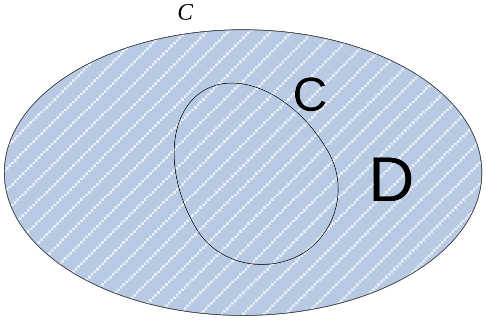
f(z) giải tích trong miền đơn liên D, thì $\oint_C f(z)\,dz$ đối với mọi đường cong trong miền này có cùng điểm đầu và điểm cuối sẽ có cùng giá trị:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz$$

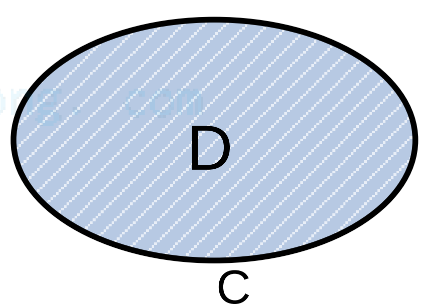


2. Định lý 2

f(z) giải tích trong miền đơn liên D và C là đường cong kín trơn từng khúc bất kỳ trong D thì $\oint_C f(z)\,dz = 0$



3. Mở rộng của định lý 2:



Nếu D là miền giới nội với biên C thì $\oint_C f(z)\,dz = 0$

3. Nguyên hàm và tích phân bất định

$$\int f(z)dz = F(z) + C$$

Ví dụ:

$$a)\int (2z + 4\cos z)dz = z^2 + 4\sin z + C$$

$$b)\int a^x dz = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

4. Công thức Newtons-Leibnitz:

f(z) giải tích trong miền đơn liên D, $\forall a, b \in D, \int_a^b f(z)dz = F(z)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

5. Các phương pháp đổi biến số và tích phân từng phần vẫn đúng cho tích phân hàm phức.

Ví dụ: Tính

5.

$$a) I = \int_0^{1+i} (z + 2)e^{iz}dz$$

$$\begin{cases} u = z + 2 \Rightarrow du = dz \\ v = \int e^{iz}dz = \dfrac{e^{iz}}{i} \end{cases}$$

$$I = (z + 2)\frac{e^{iz}}{i}\Bigg|_0^{1+i} - \frac{1}{i}\int_0^{1+i} e^{iz}d = (i + 3)\frac{e^{i-1}}{i} - \frac{2}{i} + e^{iz}\Big|_0^{1+i} = (2 - 3i)e^{i-1} + 2i - 1$$

$$b) I = \int_1^{1+i} (z - 1)^{20} zdz$$

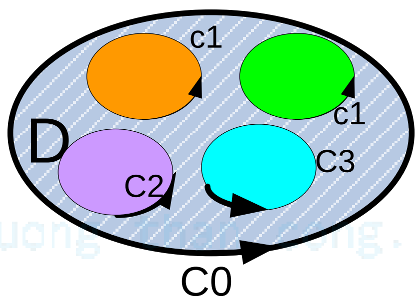
$$t = z - 1 \Rightarrow dt = dz \Rightarrow I = \int_0^i t^{20}(t + 1)dz = \int_0^i t^{21} + t^{20}dz = \left[\frac{t^{22}}{22} + \frac{t^{21}}{21}\right]_0^i = -\frac{1}{22} + \frac{i}{21}$$

5. Tích phân Cauchy cho miền đa liên:

Định lý: D là miền đa liên, bị chặn có biên là các đường cong C_0, C_1, …, C_n, trong đó C_0 bao các đường cong kín C_1, …, C_n.

f(z) là hàm giải tích trên D ta có:

$$\oint_{C_0} f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{Cn} f(z)\,dz$$



§3 CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

I. Các định lý:

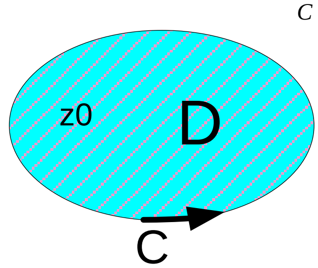
1. Định lý 1: Gỉa sử f(z) giải tích trên miền đơn liên D(giới nội và bị chặn), liên tục trên $\overline{D}, \forall z \in D$, ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)\,dt}{t - z}$$

- Hệ quả:

Gỉa sử f(z) giải tích trên miền đơn liên D(giới nội và bị chặn), liên tục trên $\overline{D}, \forall z_0 \in D$, ta có:

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$



2. Định lý 2: Gỉa sử f(z) giải tích trên $\overline{D}$, với biên C trơn từng khúc $\forall a \in D$,f(z) có đạo hàm moi cấp ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - a)^{n+1}}$$

- Hệ quả:

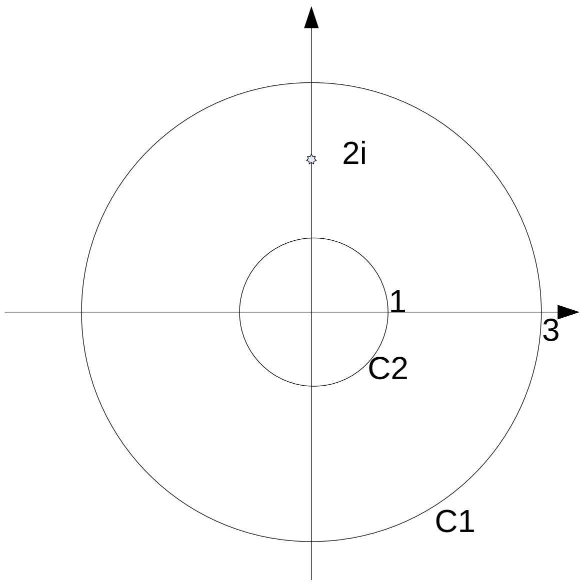
Gỉa sử f(z) giải tích trên miền đơn liên D(giới nội và bị chặn), liên tục trên $\overline{D}, \forall a \in D$, ta có:

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a), with\ : n = 0,1,2\ldots$$

CHÚ Ý:

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & if\ : n = 1 \\ 0 & if\ : n \neq 1 \end{cases}$$

Ví dụ: Tính tích phân $I_k = \oint_{C_k} \frac{z^2}{z - 2i} dz , With\ : a) C_1 : |z| = 3, b) C_2 : |z| = 1$



$a) I_1 = \oint\limits_{C_1} \frac{z^2}{z-2i}dz, With: f(z) = z^2$ giải tích trong hình tròn C_1,

$z_0 = 2i \in D_1 \Rightarrow I_1 = \oint\limits_{C_1} \frac{z^2}{z-2i}dz = 2\Pi i f(2i) = 2\Pi i (2i)^2 = -8\Pi i$

$b) I_2 = \oint\limits_{C_2} \frac{z^2}{z-2i}dz, With: f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$ giải tích trong hình tròn C_2,

$I_2 = \oint\limits_{C_2} \frac{z^2}{z-2i}dz = 0$

Vídụ: Tính tích phân

$I_k = \oint\limits_{C_k} \frac{1}{z^2+9}dz, With: a) C_1 : |z-2i| = 2, b) C_2 : |z+2i| = 2, c) C_3 : |z+2i| = \frac{1}{2}$

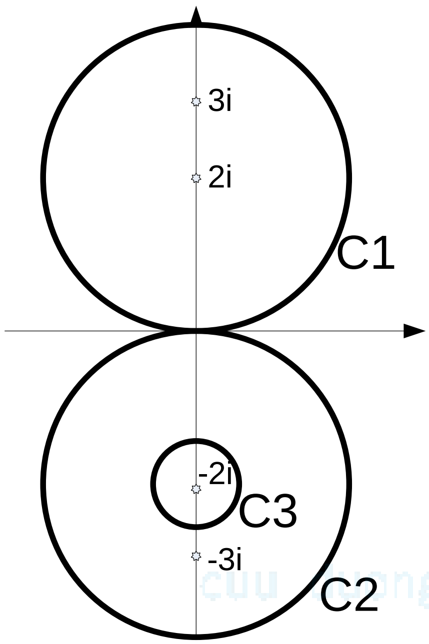
GIẢI:

$a) I_1 = \oint\limits_{C_1} \frac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i}dz, With: f(z) = \frac{1}{z+3i}$ giải tích trong C_1,

$z_0 = 3i \in D_1 \Rightarrow I_1 = \oint\limits_{C_1} \frac{f(z)}{z-3i}dz = 2\Pi i f(3i) = \frac{2\Pi i}{6i} = \frac{\Pi}{3}$

$b) I_2 = \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z-3i}}{z+3i} dz$, $With: f(z) = \frac{1}{z-3i}$ giải tích trong C_2,

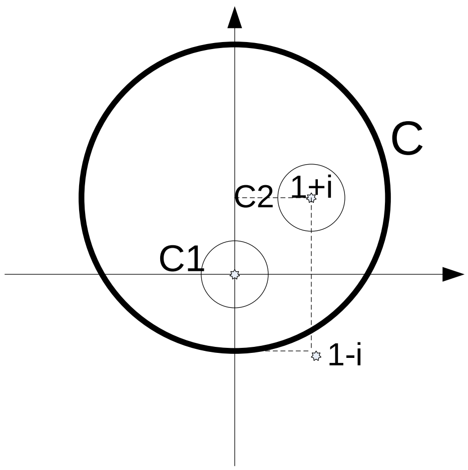
$$z_0 = -3i \in D_2 \Rightarrow I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z+3i} dz = 2\Pi i f(-3i) = \frac{2\Pi i}{-6i} = -\frac{\Pi}{3}$$



$c) I_3 = \oint_{C_2} \frac{1}{z^2+9} dz$, $With: f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ giải tích trong hình tròn C_3,

$$I_3 = \oint_{C_3} f(z) dz = 0$$

Vídụ: Tính tích phân $I = \oint_{C} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)} dz$, $With: C: |z-i| = 2$


C
C2
1+i
C1
1-i

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z^2\left(z^2 - 2z + 2\right)}dz = \oint_C \frac{e^z}{z^2\left[z - (1 - i)\right]\left[z - (1 + i)\right]}dz =$$

$$With\ : C_1 : |z| = r_1, C_2 : |z - (1 + i)| = r_2, 1 - i \notin D$$

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z^2}dz,\ with\ : f(z) = \frac{e^z}{\left(z^2 - 2z + 2\right)}, GT\ in\ D_1,\ f'(z) = \frac{e^z\left(z^2 - 4z + 4\right)}{\left(z^2 - 2z + 2\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1$$

$$We\ have\ : I_1 = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z^2}dz = \frac{2\pi i f'(0)}{1!} = 2\pi i.$$

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - (1 + i)}dz,\ with\ : f(z) = \frac{e^z}{z^2\left[z - (1 - i)\right]}, GT\ in\ D_2$$

$$We\ have\ : I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - (1 + i)}dz = 2\pi i f(1 + i) = -\frac{\pi i e^{1+i}}{2}$$

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i - \frac{1}{2}\pi i e^{1+i} = \frac{\pi i\left(4 - e^{1+i}\right)}{2}$$

Vídụ: Tính tích phân $I = \oint_C \frac{e^z}{z^2\left(z^2 + 4\right)}dz, With\ : C\ : |z - 2i| = 3$

GIẢI:

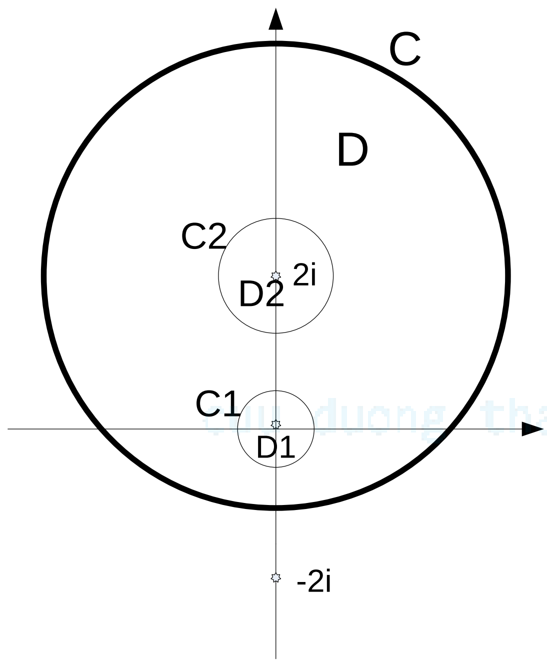
$$I = \oint_C \frac{e^z}{z^2(z + 2i)(z - 2i)}dz = I_1 + I_2 = \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{z^2}dz + \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{z - 2i}dz$$

$$With\ : f_1(z) = \frac{e^z}{z^2 + 4} GT\ in\ D_1\ \&\ f_1'(z) = \frac{e^z\left(z^2 - 2z + 4\right)}{\left(z^2 + 4\right)^2} \Rightarrow f_1'(0) = \frac{1}{4}$$

We have: $I_1 = \oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{z^2}dz = \frac{2\pi i f_1'(0)}{1!} = \frac{\pi i}{2}$.

$I_2 = \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{z-(2i)}dz$, with: $f_2(z) = \frac{e^z}{z^2(z+(2i))}$, GT in D_2

We have: $I_2 = \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{z-(2i)}dz = 2\pi i f_2(2i) = -\frac{\pi e^{2i}}{8}$



$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{8}\pi e^{2i} = \frac{\pi(4i - e^{2i})}{8}$$

BÀI TẬP TÍCH PHÂN CAUCHY

Tính các tích phân sau trên các miền đã chỉ ra:

$$a)\ I=\oint_C \frac{e^z}{\left(z^2+\Pi^2\right)^2}dz,\ With:\ C:\ |z-i|=4$$

$$b)\ I=\oint_C \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz,\ With:\ C:\ |z-2|=4$$

$$c)\ I=\oint_C \frac{\left(z^2\right)}{\left(z^2+1\right)(z+3)^2}dz,\ With:\ C:\ |z|=2$$

$$d)\ I=\oint_C \frac{\sin\frac{\Pi z}{4}}{\left(z^2-1\right)}dz,\ With:\ C:\ x^2+y^2-2x=0$$

CHƯƠNG III: CHUỖI HÀM PHỨC

§1 CHUỖI LŨY THỪA

Phần này trên cơ sở của chuỗi lũy thừa hàm thực sinh viên đã học ở toán cao cấp 3 Việc xét tính hội tụ và tìm bán kính hội tụ dựa trên các tiêu chuẩn D'Alembert và tiêu chuẩn Cauchy. Do đó bài này không nói lại lý thuyết, chỉ xét ví dụ và bài tập

1. Tiêu chuẩn D'Alembert

Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ là $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

2. Tiêu chuẩn Cauchy:

Bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ là $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Ví dụ: Tìm R và hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n4^n}$, $b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}$, $c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^n}{3^n}$, $d)\ \sum_{n=1}^{\infty}4^n(z-1)^n$,

GIẢI:

$$a)\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)4^{n+1}}{n4^n}=4$$

$$With\quad z\in\{|z|=4\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n4^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\quad phân\quad kỳ$$

$$MHT:|z|<4$$

$$b)\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}=1$$

$$With\quad z\in\{|z|=1\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n z^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\quad phân\quad kỳ$$

$$MHT:|z|<1$$

$$c)\ With\quad z'=z-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z')^n}{3^n}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n3^{n+1}}{(n+1)3^n}=3$$

$$With\quad z\in\{|z'|=3\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{nz'^n}{3^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n\quad phân\quad kỳ$$

$$MHT:|z-1|<3$$

$$d)\ With\quad z'=z-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}4^n z'^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}$$

$$With\quad z\in\left\{|z'|=\frac{1}{4}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|4^n z'^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1\quad phân\quad kỳ$$

$$MHT:|z-1|<\frac{1}{4}$$

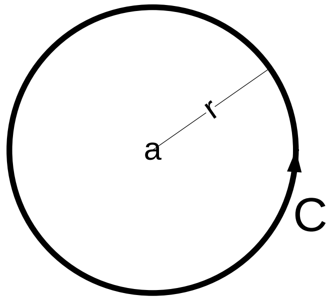
BÀI TẬPCHUỖI LŨY THỪA

Tìm R và hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{(n+1)^2 4^n},\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}e^{\sqrt{n}}(z+i)^n,\qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}n^4(z-1)^n,$$

§2 CHUỖI TAYLOR-CHUỖI MACLAURIN

I. Chuỗi Taylor và Maclaurin



Hàm f(z) giải tích trong hình tròn $|z-a| < R, \forall z \in$ *that square* ta có:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$ (chuỗi Taylor)

Khi a=0 ta có chuỗi Maclaurin:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Ví dụ:

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n$$ (chuỗi Taylor)

Khi a=0 ta có chuỗi Maclaurin:

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

II. Khai triển Maclaurin của 1 số hàm sơ cấp cơ bản

1) $e^{z} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} \quad \forall z \in C$

2) $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{2n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{2n!} \quad \forall z \in C$

3) $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1!} \quad \forall z \in C$

4) $(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \alpha(\alpha-1)\dfrac{z^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dfrac{z^3}{3!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\dfrac{z^n}{n!} + \ldots$

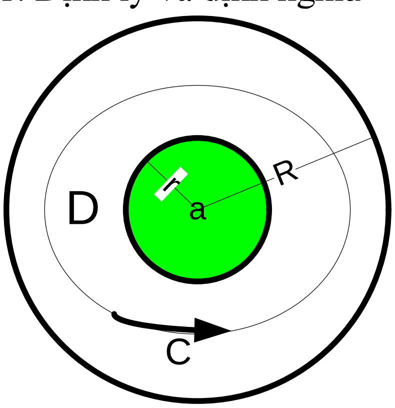
$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\dfrac{z^n}{n!} \quad \forall z \in C$

5) $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$

6) $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad |z| < 1$

III.Chuỗi Laurent và điểm bất thường cô lập của hàm giải tích

1. Định lý và định nghĩa



f(z)giải tích trên hình vành khănD: $0 \le r < |z-a| < R \le +\infty \quad \forall z \in D$,

ta có $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ (Chuỗi Laurent) với

$a_n = \dfrac{1}{2\Pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. (C) là đường cong bất kỳ bao quanh a và $(C) \subset D$

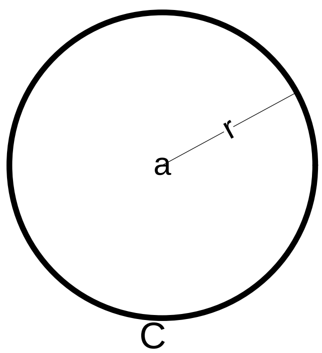
- Chuỗi $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ hội tụ trên $|z-a| < R$ gọi là phần đều.

- Chuỗi $f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n = \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots$ hội tụ trên $|z-a| > r$ gọi là phần chính.

2. Điểm bất thường cô lập của hàm giải tích

a) Định nghĩa: Hàm f(z) giải tích trên miền $0 < |z-a| < r$ thì a gọi là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích f(z). Khi đó f(z) có thể khai triển thành chuỗi Maclaurin trên miền $0 < |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n$$



NHẬN XÉT: $a_{-1} = \frac{1}{2\Pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt = \frac{1}{2\Pi i}\oint_C f(t)dt = \frac{1}{2\Pi i}\oint_C f(z)dz$

3. Phân loại

a) *Cực điểm*: Điểm cô lập bất thường z=a được gọi là cực điểm cấp m nếu khai triển Laurent của f(z) trong hình tròn $0 < |z-a| < r$ có dạng:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

$with \quad a_{-m} \neq 0$

- Nếu m=1 thì a gọi là cực điểm đơn.
- Nếu a là cực điểm cấp m của f(z) thì $\begin{cases} \lim_{z\to a} f(z) = \infty \\ \lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) = A \neq 0 \end{cases}$

b) Điểm bất thường bỏ được

Điểm bất thường cô lập z=a của f(z) gọi là điểm bất thường bỏ được, nếu khai triển Laurent của f(z) trên miền $0 < |z-a| < r$ có phần chính triệt tiêu, tức là $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$

c) *Điểm bất thường cốt yếu*

điểm bất thường cô lập z=a của f(z) gọi là điểm bất thường cốt yếu, nếu phần chính của khai triển Laurent trên miền $0<|z-a|<r$ có vô số số hạng.

Ví dụ : Khai triển Laurent của hàm số tại điểm bất thường cô lập đã chỉ ra và gọi tên các điểm bất thường cô lập đó.

$$a)\ f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-2)^3} \quad at \quad z=2$$

$$f(z)=\frac{e^4e^{2(z-2)}}{(z-2)^3}=\frac{e^4}{(z-2)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^n}{n!}$$

$$=\frac{e^4}{(z-2)^3}\left[1+\frac{2(z-2)}{1!}+\frac{2^2(z-2)^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n(z-2)^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{e^4}{(z-2)^3}+\frac{2e^4}{(z-2)^2}+\frac{2^2e^4}{(z-2)2!}+\frac{2^3e^4}{3!}+\ldots$$

$$We \quad have:\begin{cases}\lim\limits_{z\to 2} f(z)=\infty\\ \lim\limits_{z\to 2}(z-2)^3f(z)=e^4\neq 0\end{cases}$$

Vậy z=2 là cực điểm cấp 3.

$$b)\ f(z)=(z-1)\cos\frac{1}{z-1} \quad at \quad z=1$$

$$=(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{2n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n!(z-1)^{2n-1}}$$

z=1 là điểm bất thường cốt yếu vì phần chính có vô số số hạng

$$c)\ f(z)=\frac{\sin z}{z} \quad at \quad z=0$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

f(z) không có phần chính $\Rightarrow$ z=0 là điểm bất thường bỏ được

Ví dụ:

Khai triển $f(z)=\frac{1}{z^2+4z}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm z_0=2

GIẢI:

$$f(z)=\frac{1}{z(z+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{z-2}{2}\right)}-\frac{1}{6}\frac{1}{\left(1+\frac{z-2}{6}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^n}-\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^{n+3}-24.6^n}$$

Ví dụ:

Khai triển $f(z)=\frac{1}{1-z}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm z_0=3i

GIẢI:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-3i-(z-3i)}=\frac{1}{1-3i}\frac{1}{\left(1-\frac{z-3i}{1-3i}\right)}=\frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3i}{1-3i}\right)^n$$

$$\left|\frac{z-3i}{1-3i}\right|<1\Leftrightarrow|z-3i|<|1-3i|=\sqrt{10}$$

Ví dụ:

Khai triển $f(z)=e^{z^2-4z+3}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm z_0=2

GIẢI:

$$f(z)=e^{(z-2)^2-1}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{2n},\forall z$$

Ví dụ:

Khai triển $f(z)=\frac{z}{z^2+4}$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm z_0=0

GIẢI:

$$f(z)=\frac{z}{4}\frac{1}{1+\frac{z^2}{4}}=\frac{z}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$$

Vídụ

Khai triển f(z) thành chuỗi Taylor trong lân cận các điểm đã chỉ ra

$$1)\ f(z)=\frac{z-1}{z+1}\qquad at\qquad a=0,a=1$$

$$2)\ f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}\qquad at\qquad a=0,a=2$$

GIẢI:

$$1)\ When\ : a = 0,\ f(z) = 1 - \frac{2}{1+z} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad |z| < 1 \Rightarrow R = 1$$

$$When\ : a = 1,\ f(z) = (z-1)\frac{1}{2 + z - 1} = \frac{z-1}{2}.\frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \frac{z-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^{n+1} condition\ : \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 2 \Rightarrow R = 2$$

$$2)\ When\ : a = 0,\ f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), condition\ : \begin{cases} |z| < 1 \\ \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow |z| < 1 \Rightarrow R = 1$$

$$When\ : a = 2,\ f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1 + \frac{z-2}{3}\right)} - \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1 + \frac{z-2}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$$condition\ : \begin{cases} \left|\frac{z-2}{3}\right| < 1 \\ \left|\frac{z-2}{4}\right| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-2| < 3 \\ |z-2| < 4 \end{cases} \Leftrightarrow |z-2| < 3 \Rightarrow R = 3$$

BÀI TẬP:

Khai triển f(z) thành chuỗi Taylor trong lân cận các điểm đã chỉ ra

$1)\ f(z) = \dfrac{1}{z} \quad at \quad a = i$

$2)\ f(z) = e^{z} \quad at \quad a = \Pi i$

$3)\ f(z) = \dfrac{1}{3 - 2z} \quad at \quad a = 3$

$4)\ f(z) = \sin^{2} z \quad at \quad a = 0$

$5)\ f(z) = \dfrac{z}{z^{2} + 4} \quad at \quad a = i$

$6)\ f(z) = \sin(2z + 1) \quad at \quad a = -1$

$7)\ f(z) = \dfrac{3z + 1}{(z - 2)^{2}} \quad at \quad a = 0$

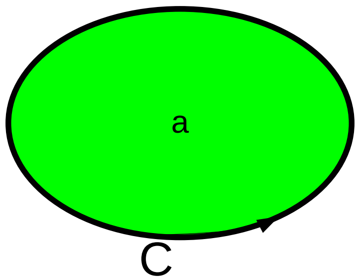
$8)\ f(z) = \dfrac{1}{z^{2}} \quad at \quad a = 2$

$9)\ f(z) = \dfrac{1}{1 + z + z^{2}} \quad at \quad a = 0$

CHƯƠNG IV: THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

§1 KHÁI NIỆM VỀ THẶNG DƯ VÀ CÁCH TÍNH

I. Khái niệm và định nghĩa:



1. Gỉa sử cần tính $\oint_C f(z)\,dz$ với điều kiện f(z) giải tích trên C, bên trong C, trừ điểm bất thường duy nhất a. Khai triển Laurent f(z) quanh điểm bất thường a ta có:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n$$

$$\text{that} \quad a_{-1} = \frac{1}{2\Pi i} \oint_C f(z)\,dz$$

II. Cách tính thặng dư

1. Thặng dư của hàm giải tích f(z) tại điểm bất thường cô lập a được định nghĩa và ký hiệu:

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), a\right] = \frac{1}{2\Pi i} \oint_C f(z)\,dz$$

Trong đó C là đường cong trơn hoặc trơn từng khúc, không tự cắt, bao điểm a, f(z) giải tích bên trong C, trên C trừ điểm a.

2. Cách tính thặng dư

a) Tổng quát: Nếu khai triển Laurent của f(z) quanh điểm a có dạng:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{thì} \quad \operatorname{Re}s\left[f(z), a\right] = a_{-1}$$

b) Nếu a là cực điểm cấp m của f(z) thì

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), a\right] = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

c) Nếu a cực điểm đơn của f(z) thì:

$$\operatorname{Re}s\left[f(z), a\right] = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

Ví dụ: Tìm thặng dư các hàm số tại các điểm bất thường cô lập

$$a)\ f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^3} \quad at \quad z = 2$$

$$f(z) = \frac{e^4}{(z-2)^3} + \frac{2e^4}{(z-2)^2} + \underbrace{\frac{2^2 e^4}{(z-2)2!}}_{\frac{a_{-1}}{z-2}} + \frac{2^3 e^4}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), 2] = a_{-1} = 2e^4$$

$$b)\ f(z) = (z-1)\cos\frac{1}{z-1} \quad at \quad z = 1$$

$$= (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^{2n}}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n!(z-1)^{2n-1}} = \frac{1}{(z-1)^{-1}} - \frac{1}{2!(z-1)} + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), 1] = -\frac{1}{2}$$

$$c)\ f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad at \quad z = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

f(z) không có phần chính $\Rightarrow a_{-1} = 0$ suy ra $\Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), 0] = 0$

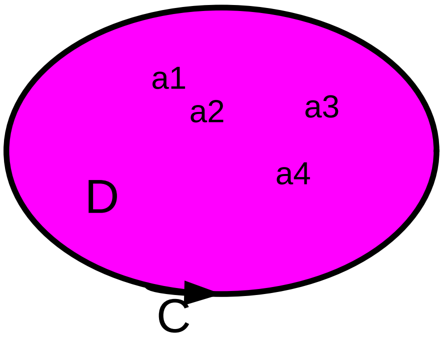
$$d)\ f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z} \quad at \quad z = 1$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 1] = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1!}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1)^2 z}\right]^{(1)} = \lim_{z\to 1}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -1$$

$$e)\ f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z} \quad at \quad z = 0$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z\to 1}\left[z\frac{1}{(z-1)^2 z}\right] = 1$$

III.ỨNG DỤNG THẶNG DƯ TÍNH TÍCH PHÂN



Tích phân dọc theo đường cong kín:

f(z) giải tích trên miền đóng $\overline{D}$, giới hạn bởi biên C là đường cong kín, trừ 1 số hữu hạn điểm bất thường cô lập a_1, a_2,…a_n. nằm trong D thì:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z), a_k\right]$$

Ví dụ:

a) Khai triển Laurent $f(z) = z\cos\left(\frac{1+\pi z}{z}\right)$ thành chuỗi Laurent quanh điểm bất thường cô lập z_0=0.

b)Tính TP $\oint_C z\cos\left(\frac{1+\pi z}{z}\right)dz\ ,With \quad C: |z| = 2$

GIẢI

$$a)\ f(z) = z\cos\left(\frac{1+\pi z}{z}\right) = -z\cos\frac{1}{z} = -z\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n!z^{2n}}\right]$$

$$= -z + \frac{1}{2z} - \frac{1}{4!z^3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n!z^{2n-1}}$$

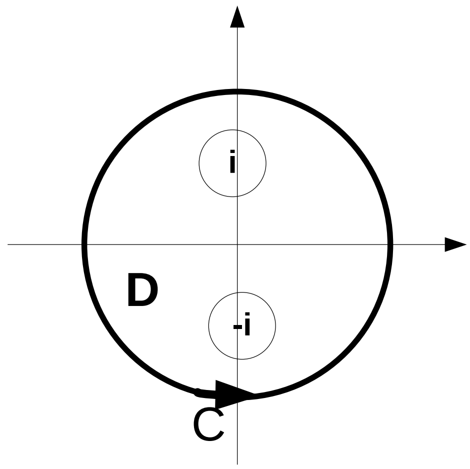
$$\Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\oint_C z\cos\left(\frac{1+\pi z}{z}\right)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z);0\right] = 2\pi i a_{-1} = \pi i$$

Ví dụ:

Tính TP $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)(z-4)}dz\ ,With \quad C: |z| = 2$

GIẢI:



f(z) có 3 cực điểm $\pm i \in D, 4 \notin D$

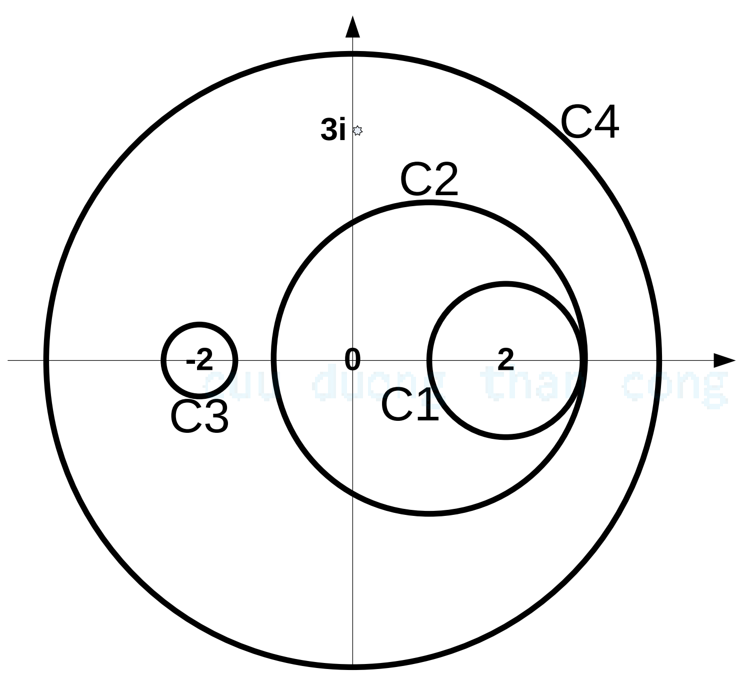
$$I = \operatorname{Res}\left[f(z), i\right] + \operatorname{Res}\left[f(z), -i\right] = \frac{\Pi e^{i}}{i-4} + \frac{\Pi e^{-i}}{i+4}$$

Ví dụ:

Tính TP

$$I_k = \oint_{C_k} \frac{1}{z(z+2)^2(z-3i)} dz, \quad k = 1,2,3,4$$

$that \quad in \quad C_1 : |Z-2| = 1, C_2 : |Z-1| = 2, C_3 : |Z+2| = \frac{1}{2}, C_4 : |Z| = 4$



$a)\ I_1 = 0$ vì f(z) giải tích trên và trong C_1.

b) $I_2 = \oint\limits_{C_2} \dfrac{1}{z(z+2)^2(z-3i)}dz$, f(z) có cực điểm đơn z=0 trong C_2.

$$I_2 = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z),0\right] = 2\pi i \lim_{z\to 0} zf(z) = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z+2)^2(z-3i)} = -\frac{\pi}{6}$$

c) $I_3 = \oint\limits_{C_3} \dfrac{1}{z(z+2)^2(z-3i)}dz$, f(z) có cực điểm cấp 2, z=-2 trong C_3.

$$I_3 = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z),-2\right] = 2\pi i \lim_{z\to -2} \frac{\left[(z+2)^2 f(z)\right]'}{1!} = 2\pi i \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{z(z-3i)}\right]' = \frac{\pi(63+16i)}{338}$$

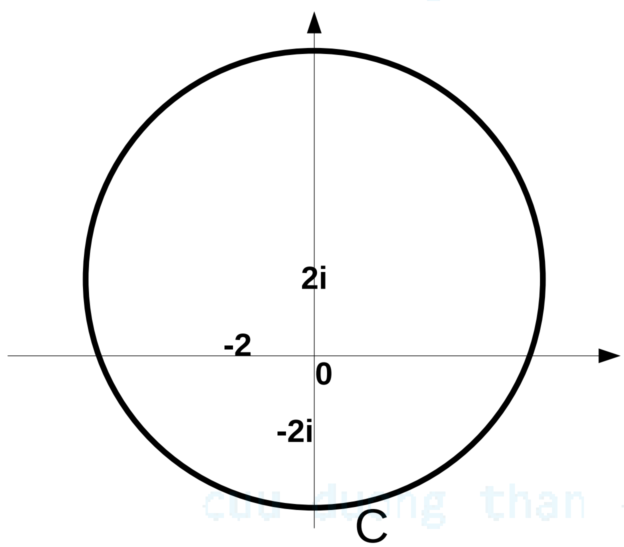
d) C_4 chứa 3 cực điểm:

$$I_4 = 2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[f(z),0\right] + \operatorname{Res}\left[f(z),-2\right] + \operatorname{Res}\left[f(z),3i\right]\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi(63+16i)}{338} + 2\pi i \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi(63+16i)}{338} + \frac{2\pi i(12+5i)}{507}$$

Ví dụ:

Tính TP $\oint\limits_C \dfrac{2z^2+5}{(z^2+4)(z+2)^2 z^2}dz\ , With \quad C: |z-2i| = 6$



C chứa 4 cực điểm, cấp 2: z=-2, z=0, cấp 1: z=-2i, 2i

$$I = \oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{4} \operatorname{Res}\left[f(z),z_k\right]$$

$$I_1 = \operatorname{Res}[f(z), -2] = \lim_{z \to -2} \frac{[(z+2)^2 f(z)]'}{1!} = \lim_{z \to -2} \left[\frac{2z^2+5}{z^2(z^2+4)} \right]' = \frac{23}{64}$$

$$I_2 = \operatorname{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} \frac{[z^2 f(z)]'}{1!} = \frac{5}{16}$$

$$I_3 = \operatorname{Res}[f(z), 2i] = \lim_{z \to 2i} (z-2i) f(z) = \lim_{z \to 2i} \left[\frac{2z^2+5}{z^2(z+2)^2(z+2i)} \right] = -\frac{3}{128}$$

$$I_4 = \operatorname{Res}[f(z), -2i] = \lim_{z \to -2i} (z+2i) f(z) = \lim_{z \to 2i} \left[\frac{2z^2+5}{z^2(z+2)^2(z-2i)} \right] = -\frac{3}{128}$$

$$I = 2\pi i \left(\frac{23}{64} + \frac{5}{16} - \frac{6}{128} \right) = \frac{5\pi i}{4}$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau trên các miền đã chỉ ra:

$a)\ I = \oint_C \frac{dz}{z^3+1} \qquad C: 2x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$ $\qquad b)\ I = \oint_C \frac{e^z dz}{(z^2+\pi^2)^2} \qquad C: |z - i| = 4$

$c)\ I = \oint_C \frac{(\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2) dz}{(z-1)(z-3)} \qquad C: |z| = 2$ $\qquad d)\ I = \oint_C \frac{z dz}{(z-1)(z+1)^2} \qquad C: |z-2| = 4$

$e)\ I = \oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)^2} \qquad C: |z| = 2$ $\qquad f)\ I = \oint_C \frac{z^2 dz}{(z^2+4)} \qquad C:$ *is squarte* $\pm 2, \pm 2 + 4i$

$g)\ I = \oint_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4} dz}{z^2-1} \qquad C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ $\qquad h)\ I = \oint_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2+2z+2)} \qquad C: |z| = 3$

$m)\ I = \oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)} \qquad C: |z - i| = 2$

$n)\ I = \oint_C \frac{2 + 3\sin \pi z dz}{z(z-1)^2} \qquad C:$ *is squarte* $-3 \pm 3i, 3 \pm 3i$

CHƯƠNG V: TOÁN TỬ LAPLCE VÀ ỨNG DỤNG

§1 KHÁI NIỆM VỀ TOÁN TỬ LAPLACE

I. Hàm gốc:

Là hàm phức biến thực: f(t)=u(t)+iv(t) thỏa:

1) f(t) liên tục hay liên tục từng khúc trên trục t.
2) f(t)=0 khi t<0.
3) f(t) có bậc mũ: $\exists M > 0, s \geq 0, \forall t > 0, |f(t)| \leq Me^{st}$

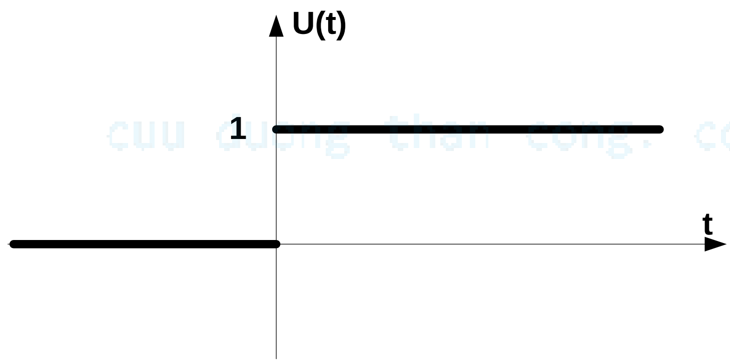
Ví dụ:

a) Hàm bậc thang đơn vị (unit step function)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Ký hiệu: u(t) là 1

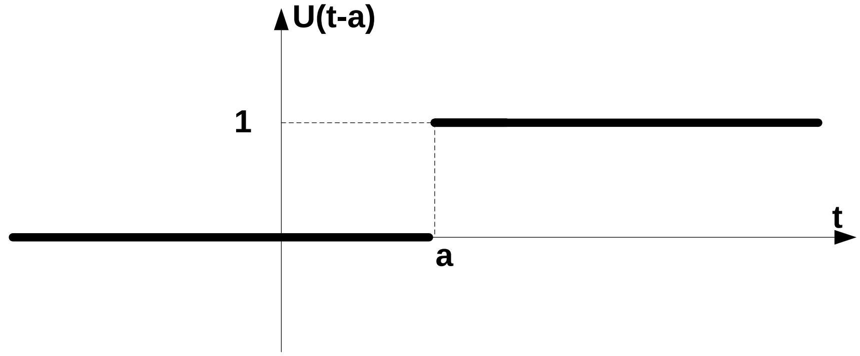
Đồ thị:



b) Hàm bậc thang đơn vị trễ a đơn vị thời gian

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

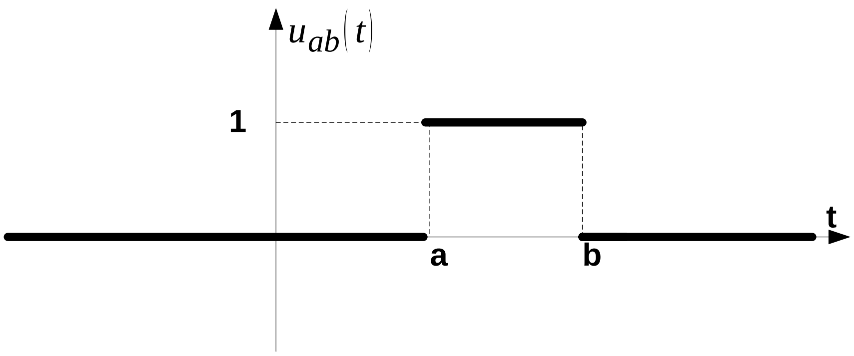
Đồ thị:


U(t-a)
1
t
a

c) Hàm lọc:

$$u_{ab}(t) = u(t-a) - u(t-b)$$

Đồ thị:



II.Hàm ảnh:

1. Định nghĩa: Hàm ảnh của f(t) là hàm F(p) với p=a+ib, F(p) xác định bởi toán tử Laplace:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = L[f(t)]$$

2. Ví dụ:

   a) f(t)=1

$$F(p) = L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^a = -\frac{1}{p}\left(\frac{1}{e^{pa}} - 1\right) = \frac{1}{p} \qquad (\operatorname{Re} p > 0)$$

   b) f(t)=$e^{\alpha t}$

$$F(p) = L\left[e^{\alpha t}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t}\,dt = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{1}{\alpha - p}e^{(\alpha - p)t}\right]_0^a = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\alpha - p}\left(\frac{1}{e^{(p-\alpha)a}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{p-\alpha} \qquad (\operatorname{Re} p > \alpha)$$

BẢNG ẢNH CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

$1)\ L[1] = \dfrac{1}{p} \qquad \operatorname{Re} p > 0$

$2)\ L[t] = \dfrac{1}{p^2} \qquad \operatorname{Re} p > 0$

$3)\ L[e^{\alpha t}] = \dfrac{1}{p-\alpha} \qquad \operatorname{Re} p > \alpha$

$4)\ L[\sin t] = \dfrac{1}{1+p^2} \qquad \operatorname{Re} p > 0$

$5)\ L[\cos t] = \dfrac{p}{1+p^2} \qquad \operatorname{Re} p > 0$

$6)\ L[a(t-a)] = \dfrac{e^{-pa}}{p} \qquad \operatorname{Re} p > 0$

III. Các tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace

1. Tính chất tuyến tính:

$If\ \ L[f(t)] = F(p), L[g(t)] = G(p), \forall \alpha, \beta \in C \quad THEN\ :$

$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$

Ví dụ: Tính

$a)\ L[5 - 3e^{2t} + 4\sin t] \quad b)\ L[sh\ \omega t] \quad c)\ L[ch\ \omega t] \quad d)\ L[a_{ab}(t)]$

2. Tính chất đồng dạng (thay đổi thang đo)

$a)\ L[f(\alpha t)] = \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$

$b)\ L^{-1}[F(\alpha p)] = \dfrac{1}{\alpha} f\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)$

Ví dụ:

$a)\ L[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{\omega^2 + p^2} \qquad b)\ L[\cos \omega t] = \dfrac{p}{\omega^2 + p^2}$

3. Tính chất dịch chuyển gốc:

$L[a(t-a) f(t-a)] = e^{-pa} F(p)$

Ví dụ:

$a)\ L[a(t-a)\sin \omega (t-2)] = e^{-2p} \dfrac{w}{w^2 + p^2} \qquad b)\ L^{-1}\left[e^{-p} \dfrac{1}{p^2}\right] = u(t-1)(t-1)$

4. Tính chất dịch chuyển ảnh:

$L\{e^{at} f(t)\} = F(p-a) \quad \mathrm{Re}(p-a) > 0$

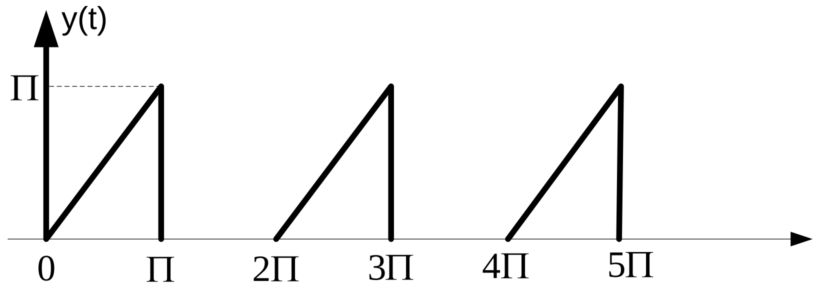
Ví dụ:

$a)\ L\{e^{\alpha t} t\} = \dfrac{1}{(p-\alpha)^2} \qquad b)\ L\{e^{\alpha t}\sin\omega t\} = \dfrac{\omega}{\omega^2+(p-\alpha)^2} \qquad c)\ L\{e^{\alpha t}\cos\omega t\} = \dfrac{p-\alpha}{\omega^2+(p-\alpha)^2}$

$d)\ L^{-1}\left[\dfrac{p+4}{p^2-4p+13}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{p+4}{(p-2)^2+9}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{p-2}{(p-2)^2+9} + 2.\dfrac{3}{(p-2)^2+9}\right] =$

$= e^{2t}\cos 3t + 2.e^{2t} si\ 3t$

5. Ảnh của hàm gốc tuần hoàn:



f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ T

$F(p) = L\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-pT}}\displaystyle\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

6. Đạo hàm của hàm gốc

$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$

$L\{f''(t)\} = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$

$L\{f'''(t)\} = p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$

$\vdots$

$L\{f^{(n)}(t)\} = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Ví dụ:

Giải phương trình vi phân: $y'' - y = t \quad (1),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Lấy ảnh Laplace 2 vế pt (1) ta có:

$$L\{y''\} - L\{y\} = L\{t\}$$

$$\Leftrightarrow \ p^2F(p) - py(0) - y'(0) - F(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow \ p^2F(p) - p - 1 - F(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow \ (p^2 - 1)F(p) = \frac{1}{p^2} + p + 1$$

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2(p^2-1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p^2-1)} - \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \ y(t) = L^{-1}\{F(p)\} = e^{-t} + sht - t$$

7. Tính chất đạo hàm của ảnh (nhân cho t)

$$L\{tf(t)\} = -F'(p)$$

$$L\{t^2 f(t)\} = F''(p)$$

$$L\{t^3 f(t)\} = -F'''(p)$$

$$\vdots$$

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

Ví dụ:

$$a)\, L\{t\sin\omega t\} = -F'(p) = -\left(\frac{\omega}{\omega^2 + p^2}\right)' = \frac{2p\omega}{(\omega^2 + p^2)^2}$$

$$b)\, L\{t^n\} = L\{t^n.1\} = (-1)^n\left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

8. Tích phân hàm gốc:

$$L\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(p)}{p} \qquad \mathrm{Re}\ p > 0$$

9. Tích phân hàm ảnh(chia cho t)

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{+\infty} F(u)\,du$$

Ví dụ:

$$a)\ L\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_p^{+\infty} F(u)\,du = \int_p^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \lim_{a\to+\infty} \int_p^a \frac{1}{1+u^2}\,du = \lim_{a\to+\infty} arctgu\,\Big|_p^a = \frac{\Pi}{2} - arctgp$$

$$b)\ L\left[\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right] = \frac{L\left[\frac{\sin u}{u}\right]}{P} = \frac{1}{P}\left[\frac{\Pi}{2} - arctgp\right]$$

§2 TÍCH CHẬP VÀ ẢNH CỦA TÍCH CHẬP

I. Tích chập

1.Định nghĩa: Tích chập của 2 hàm phức biến thực f(t) và g(t) với $0 \le t \le \infty$

Ký hiệu: $f * g$ được định nghĩa: $f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$

2. Ví dụ:

$$a)\ 1 * t = \int_0^t 1(t-u)du = \left[tu - \frac{u^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

$$b)\ e^t * 1 = \int_0^t e^u du = e^u\Big|_0^t = e^t - 1$$

$$c)\ \sin t * 1 = \int_0^t \sin u du = -\cos u\Big|_0^t = 1 - \cos t$$

$$d)\ t * \sin t = \int_0^t (t-u)\sin u du = -(t-u)\cos u\Big|_0^t - \int_0^t \cos u du = t - \sin t$$

3. Tính chất:

   a) Giao hoán: $f * g = g * f$
   b) Kết hợp: $(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h$
   c) Phân phối: $f * (g + h) = f * g + f * h$
   d) $(kf) * g = k(f * g)$
   e) $|f * g| \le |g||f|$

4. Ảnh của tích chập

Định lý Borel

$$IF \begin{cases} L[f(t)] = F(p) \\ L[g(t)] = G(p) \end{cases} \quad THEN \quad \begin{cases} L[f * g] = F(p).G(p) \\ L^{-1}[F(p).G(p)] = f * g \end{cases}$$

Ví dụ:

a)Tìm ảnh của hàm gốc:

$$f(t) = 5 + t.sh\,2t + e^{-2t}\cos 3t + \int_0^t e^{3u}\sin(t-u)\,du$$

$$F(p) = \frac{5}{p} + L\{t.sh\,2t\} + L\{e^{-2t}\cos 3t\} + L\left[\int_0^t e^{3u}\sin(t-u)\,du\right]$$

$$= \frac{5}{p} - \left(\frac{2}{p^2-4}\right)' + \frac{p+2}{(p+2)^2+9} + L\{e^{3t} * \sin t\}$$

$$= \frac{5}{p} - \left(\frac{4p}{(p^2-4)^2}\right) + \frac{p+2}{(p+2)^2+9} + L(e^{3t}).L(\sin t)$$

$$= \frac{5}{p} - \left(\frac{4p}{(p^2-4)^2}\right) + \frac{p+2}{(p+2)^2+9} + \frac{1}{p-3}.\frac{1}{p^2+1}$$

b) Tìm gốc của hàm ảnh

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p^2+1)}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p}.\frac{1}{p^2}.\frac{1}{p^2+1}\right] = L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = 1 * t * \sin t = 1 * (t * \sin t)$$

$$= 1 * (t - \sin t) = 1 * t - 1 * \sin t = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t$$

Ví dụ : Gỉai pt tích phân:

$$y(t) = 2 + \int_0^t \sin(t-u)\,y(u)\,du$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 2 + y(t) * \sin t$$

$$\Leftrightarrow L[y(t)] = L[2] + L[y(t) * \sin t]$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{2}{p} + L[y(t)].L[\sin t] = \frac{2}{p} + Y.\frac{1}{p^2+1}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{2(p^2+1)}{p^3} = 2\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p}.\frac{1}{p^2}\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}[Y] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{1}{p}.\frac{1}{p^2}\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = 2 + 2.L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] * L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = 2 + 2.1 * t = 2 + t^2$$

BÀI TẬP:

1. Tìm ảnh của các gốc

$a)\ f(t) = \sin 2t$ $\quad b)\ f(t) = \cos 5t$ $\quad c)\ f(t) = cht$ $\quad d)\ f(t) = sh\,\alpha t$ $\quad e)\ f(t) = \sin^2 mt$

$f)\ f(t) = \cos^2 mt$

GỈAI:

$$a)\ F(p) = \frac{2}{4 + p^2}$$

$$b)\ F(p) = \frac{p}{25 + p^2}$$

$$c)\ f(t) = cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{2}\left[L(e^t) + L(e^{-t})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right] = \frac{p}{p^2 - 1}$$

$$d)\ f(t) = sh\,\alpha t = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{2}\left[L(e^{\alpha t}) - L(e^{-\alpha t})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right] = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$$

$$e)\ f(t) = \sin^2 mt = \frac{1 - \cos 2mt}{2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{2}\left[L(1) - L(\cos 2mt)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{4m^2 + p^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{4m^2}{(4m^2 + p^2)p}\right]$$

$$f)\ f(t) = \cos^2 mt = \frac{1+\cos 2mt}{2} \Rightarrow F(p) = \frac{1}{2}\left[L(1) + L(\cos 2mt)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} + \frac{p}{4m^2+p^2}\right] = \left[\frac{p^2+2m^2}{(4m^2+p^2)p}\right]$$

2. Tìm ảnh của hàm gốc:

$a)\ e^{4t}\cos t \qquad b)\ e^{2t}\sin 3t \qquad c)\ e^{-3t}ch\,2t \qquad d)\ 3\cos 4t \qquad e)\ ch\,3t + t\,sh\,3t$

$f)\ \sin 2t - 2t\cos 2t$

GIẢI:

$$a)\ F(p) = \frac{p-4}{1+(p-4)^2}$$

$$b)\ F(p) = \frac{3}{9+(p-2)^2}$$

$$c)\ F(p) = \frac{p+3}{(p+3)^2-4}$$

$$d)\ F(p) = \frac{3p}{16+p^2}$$

$$e)\ L(f(t)) = L(ch\,3t) + L(t\,sh\,3t) = \frac{p}{p^2-9} - F'(p) = \frac{p}{p^2-9} - \left(\frac{3}{p^2-9}\right)'$$

$$= \frac{p}{p^2-9} + \frac{6p}{(p^2-9)^2} = \frac{p^3-3p}{(p^2-9)^2}$$

$$f)\ L(f(t)) = L(\sin 2t) - 2L(t\cos 2t) = \frac{2}{p^2+4} - 2F'(p) = \frac{2}{p^2+4} - 2\left(\frac{p}{p^2+4}\right)'$$

$$= \frac{2}{p^2+4} + \frac{2(4-p^2)}{(p^2+4)^2} = \frac{16}{(p^2+4)^2}$$

2. Tìm ảnh của hàm gốc:

$a)\ t^2e^{\alpha t} \qquad b)\ \int_0^t \sin u\,du \qquad c)\ \int_0^t \cos 2u\,du \qquad d)\ \frac{\sin^2 t}{t} \qquad e)\ \frac{1-\cos t}{te^t} \qquad f)\ \sin 7t\sin 3t$

GIẢI

$$a)\, L\left[t^2 e^{\alpha t}\right] = F''(p) = \left(\frac{1}{p-\alpha}\right)'' = \left(\frac{1}{(p-\alpha)^2}\right)' = \frac{2}{(p-\alpha)^3}$$

$$b)\, L\left[\int_0^t \sin u\,du\right] = \frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p}.\frac{1}{1+p^2}$$

$$c)\, L\left[\int_0^t \cos 2u\,du\right] = \frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p}.L\left[\cos 2t\right] = \frac{1}{p}.\frac{p}{4+p^2} = \frac{1}{4+p^2}$$

$$d)\, L\left[\frac{1-\cos 2t}{2t}\right] = \frac{1}{2}\int_p^{+\infty} L\left[1-\cos 2u\right]du = \frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right)du = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\int_p^a\left(\frac{1}{u} - \frac{d(u^2+4)}{2(u^2+4)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left[\ln u\Big|_p^a - \frac{1}{2}\ln(u^2+4)\Big|_p^a\right] = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left[\ln\frac{u}{\left(\sqrt{u^2+4}\right)}\Bigg|_p^a\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{a\to+\infty}\ln\frac{a}{\left(\sqrt{a^2+4}\right)} - \ln\frac{p}{\left(\sqrt{p^2+4}\right)}\right] = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4}{p^2}$$

$$e)\, L\left[\frac{1-\cos t}{te^t}\right] = \int_p^{+\infty} F_1(u)\,du \;,With \quad F_1 = L\left[e^{-t} - e^{-t}\cos t\right] = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{1+(p+1)^2}$$

$$= \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+2p+2} \Rightarrow L\left[f(t)\right] = \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{u+1}{u^2+2u+2}\right)du =$$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_p^a\left(\frac{1}{u+1} - \frac{d(u^2+2u+2)}{2(u^2+2u+2)}\right)du = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln(u+1)\Big|_p^a - \frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2)\Big|_p^a\right]$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left[\ln\frac{u+1}{\left(\sqrt{u^2+2u+2}\right)}\Bigg|_p^a\right] = -\ln\frac{p+1}{\left(\sqrt{p^2+2p+2}\right)} = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+2p+2}{p+1}$$

$$f)\ \frac{1}{t}\left(\sin 7t\sin 3t\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 10t - \cos 4t}{t}\right)$$

$$L\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(\cos 10t - \cos 4t\right)}{t}\right] = -\frac{1}{2}\left[\int_p^{+\infty} F_1(u)\,du - \int_p^{+\infty} F_2(u)\,du\right] = -\frac{1}{2}\left[\int_p^{+\infty}\left(\frac{u}{u^2+10^2} - \frac{u}{u^2+4^2}\right)du\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\lim_{a\to+\infty}\int_p^a \frac{1}{2}\left(\frac{d\left(u^2+10^2\right)}{u^2+10^2} - \frac{d\left(u^2+4^2\right)}{u^2+4^2}\right)\right] = -\frac{1}{4}\lim_{a\to+\infty}\left[\ln\frac{u^2+10^2}{u^2+4^2}\Bigg|_p^a\right] = -\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+10^2}{p^2+4^2}$$

3. Các bài tập dùng Định lý hoãn

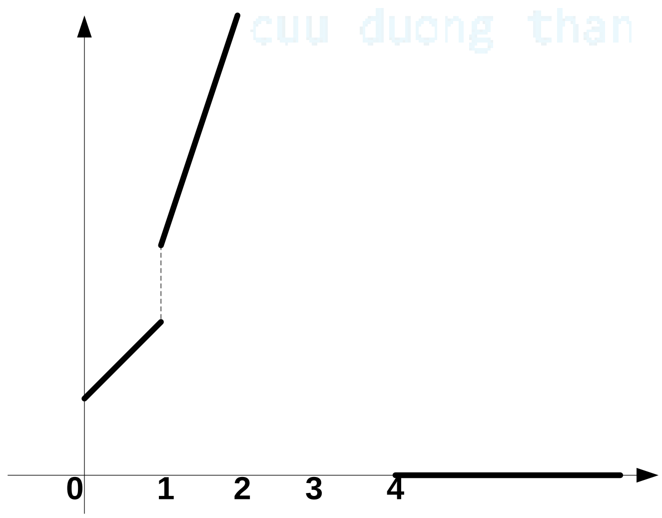
CHÚ Ý CÁC CÔNG THỨC

$a)\ L\left[u(t-a)f(t-a)\right] = e^{-pa}F(p)$

$b)\ u_{ab}(t) = u(t-a) - u(t-b)$

a) Tìm ảnh của hàm sau:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t+1 & 0 \le t < 1 \\ 3t & 1 \le t < 4 \\ 0 & t \ge 4 \end{cases}$$



$$f(t) = (t+1)\left[u(t) - u(t-1)\right] + 3t\left[u(t-1) - u(t-4)\right]$$

$$= tu(t) + u(t) + 2(t-1)u(t-1) + u(t-1) - 3(t-4)u(t-4) - 12u(t-4)$$

$$\Rightarrow L\left[f(t)\right] = L(t) + L(1) + 2L\left[(t-1)u(t-1)\right] + L\left[u(t-1)\right] - 3L\left[(t-4)u(t-4)\right] - 12L\left[u(t-4)\right]$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + e^{-p}\left(\frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}\right) - e^{-4p}\left(\frac{3}{p^2} + \frac{12}{p}\right)$$

b) Tìm ảnh của hàm sau:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 3 & 1\le t<4\\ 0 & t\ge 4\end{cases}$$

GIẢI

$$f(t)=3\left[u(t-1)-u(t-4)\right]$$

$$=3u(t-1)-3u(t-4)$$

$$\Rightarrow L\left[f(t)\right]=3L\left[u(t-1)\right]-3L\left[u(t-4)\right]$$

$$=\frac{3e^{-p}}{p}-\frac{3e^{-4p}}{p}$$

b) Tìm ảnh của hàm sau:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t<a\\ a & t>a\end{cases}$$

GIẢI

$$f(t)=t\left[u(t)-u(t-a)\right]+au(t-a)$$

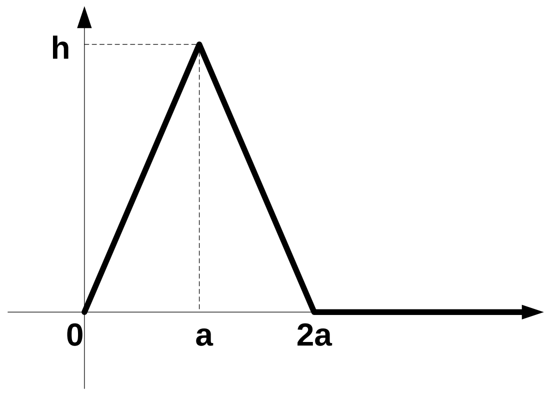
$$=tu(t)-(t-a)u(t-a)$$

$$\Rightarrow L\left[f(t)\right]=L\left[t\right]-L\left[(t-a)u(t-a)\right]$$

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-ap}}{p^2}$$

b) Tìm ảnh của hàm sau:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{h}{a}t & 0\le t<a\\ -\frac{h}{a}(t-2a) & a\le t<2a\\ 0 & t\ge 2a\end{cases}$$



GIẢI

$$f(t) = \frac{h}{a}t\left[u(t) - u(t-a)\right] - \frac{h}{a}(t-2a)\left[u(t-a) - u(t-2a)\right]$$

$$= \frac{h}{a}t\,u(t) - \frac{2h}{a}(t-a)\,u(t-a) + \frac{h}{a}(t-2a)\,u(t-2a)$$

$$\Rightarrow L\left[f(t)\right] = \frac{h}{a}\frac{1}{p^2} - \frac{2h}{a}\frac{e^{-ap}}{p^2} + \frac{h}{a}\frac{e^{-2ap}}{p^2}$$

Ví dụ Tìm hàm gốc biết ảnh của chúng:

$$a)\ F(p) = \frac{2p-1}{p^2+p-3} \qquad b)\ F(p) = \frac{6}{(p-3)(p-1)(p+2)} + \frac{p+6}{(p+2)^2+4^2}$$

$$c)\ F(p) = \frac{10p+6}{(p+3)(p-1)(p-4)} + \frac{p+8}{p^2-6p+25} \qquad d)\ F(p) = \frac{4}{(p-3)(p-1)} + \frac{p+1}{p^2-6p+25}$$

$$e)\ F(p) = \frac{5p+3}{(p^2+2p+5)(p-1)} \qquad f)\ F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)}$$

$$g)\ F(p) = \frac{6}{(p-5)(p-2)} + \frac{p}{p^2-2p+2}$$

GIẢI:

$$a)\,F(p)=\frac{2p-1}{p^2+p-3}=\frac{2\left(p+\frac{1}{2}\right)-2}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}-\frac{2\frac{\sqrt{13}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(p)\}=2e^{-\frac{1}{2}t}ch\frac{\sqrt{13}}{2}t-\frac{4}{\sqrt{13}}e^{-\frac{1}{2}t}sh\frac{\sqrt{13}}{2}t$$

$$b)\ F(p)=\underbrace{\frac{6}{(p-3)(p-1)(p+2)}}_{F_1}+\underbrace{\frac{p+6}{(p+2)^2+4^2}}_{F_2}$$

$$L^{-1}\left[F_1(p)\right]=\lim_{p\to 3}\frac{6e^{3t}}{(p-1)(p+2)}+\lim_{p\to 1}\frac{6e^{t}}{(p-3)(p+2)}+\lim_{p\to -2}\frac{6e^{-2t}}{(p-1)(p-3)}=$$

$$=\frac{3}{5}e^{3t}-3e^{t}+\frac{2}{5}e^{-2t}$$

$$L^{-1}\left[F_2(p)\right]=L^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+2)^2+4^2}+\frac{4}{(p+2)^2+4^2}\right]=e^{-2t}\cos 4t+e^{-2t}\sin 4t$$

$$c)\ F(p)=\underbrace{\frac{10p+6}{(p+3)(p-1)(p-4)}}_{F_1}+\underbrace{\frac{p+8}{p^2-6p+25}}_{F_2}$$

$$L^{-1}\left[F_1(p)\right]=\lim_{p\to -3}\frac{(10p+6)e^{-3t}}{(p-1)(p-4)}+\lim_{p\to 1}\frac{(10p+6)e^{t}}{(p+3)(p-4)}+\lim_{p\to 4}\frac{(10p+6)e^{4t}}{(p-1)(p+3)}=$$

$$=-\frac{24}{28}e^{-3t}-\frac{16}{12}e^{t}+\frac{46}{21}e^{4t}$$

$$L^{-1}\left[F_2(p)\right]=L^{-1}\left[\frac{p-3}{(p-3)^2+4^2}+\frac{11}{4}\frac{4}{(p+2)^2+4^2}\right]=e^{3t}\cos 4t+\frac{11}{4}e^{3t}\sin 4t$$

$$d)\ F(p)=\frac{4}{(p-3)(p-1)}+\frac{p+1}{p^2-6p+25}$$

$$=\frac{1}{2}.4\left(\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1}\right)+\frac{p-3}{(p-3)^2+4^2}+\frac{4}{(p-3)^2+4^2}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[F(p)\right]=2\left(e^{3t}-e^{t}\right)+e^{3t}\cos 4t+e^{3t}\sin 4t$$

$$e)\ F(p)=\frac{5p+3}{(p^2+2p+5)(p-1)}=\frac{5p+3}{\left((p+1)^2+4\right)(p-1)}=\frac{5p+3}{(p+1+2i)(p+1-2i)(p-1)}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[F(p)\right]=\lim_{p\to 1}\frac{(5p+3)e^{t}}{(p+1+2i)(p+1-2i)}+\lim_{p\to 1}\frac{(5p+3)e^{(1+2i)t}}{(p+1+2i)(p-1)}+$$

$$+\lim_{p\to 1}\frac{(5p+3)e^{(1-2i)t}}{(p+1-2i)(p-1)}$$

$$f)\ F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)} = \frac{1}{5}\left(\frac{p}{p^2+2^2} - \frac{p}{p^2+3^2}\right) \Rightarrow L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{5}(\cos 2t - \cos 3t)$$

$$g)\ F(p) = \frac{6}{(p-5)(p-2)} + \frac{p}{p^2-2p+2} = \frac{6}{3}\left(\frac{1}{p-5} - \frac{1}{p-2}\right) + \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{1}{(p-1)^2+1}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(p)\} = 2(e^{5t} - e^{2t}) + e^t\cos t + e^t\sin t$$

BÀI TẬP

1. Tìm ảnh của hàm gốc sau:

$a)\ e^{-t}\sin^2 t$

$b)\ 3t^5e^{-t} + 3te^t + 7$

$c)\ 2e^{-3t}\sin t - 5e^t\cos 2t + 3$

$d)\ t\cos 2t - 3t\sin 3t + 4$

$e)\ 4e^{3t}\sin^2 t + 2t^3e^{2t} + 5e^{-t}sh\,3t + 4\cos^2 t$

$f)\ 4e^t\sin^4 t + t^3e^{2t} + 6e^t sh\,2t + 3$

$g)\ te^t\cos t + t^2e^{-3t}\sin 2t$

$h)\ te^{-2t}chat$

$m)\ \frac{t^2}{2} + 1 + te^t + t\cos^3 t$

§3 ỨNG DỤNG CỦA TOÁN TỬ LAPLACE

I. Gỉai phương trình vi phân

Ví dụ: Gỉai phương trình vi phân: $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\sin t \ (1) \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

GIẢI:

Đặt $Y = F(p) = L[y(t)]$

$$L[y''] + 2L[y'] + 5L[y] = L[e^{-t}\sin t]$$

$$\Leftrightarrow p^2Y - py(0) - y'(0) + 2[pY - y(0)] + 5Y = \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow p^2Y + 2pY + 5Y - 1 = \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{p^2+2p+3}{(p^2+2p+5)(p^2+2p+2)} = \frac{2}{3}.\frac{1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}[Y] = \frac{2}{3}e^{-t}\sin 2t + \frac{1}{3}e^{-t}\sin t$$

Ví dụ: Gỉai phương trình vi phân: $y'' + 3y' + 2y = f(t) \ (1) \quad y(0) = 0 = y'(0) = 0$ with $f(t) = \begin{cases} e^t & 0 < t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$

GIẢI:Đặt

$$Y = F(p) = L[y(t)]$$

$$f(t) = e^t[u(t) - u(t-2)] + u(t-2) = e^t u(t) - u(t-2)e^2 u(t-2)e^{t-2}$$

$$L\{y''\} + 3L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{f(t)\}$$

$$\Leftrightarrow p^2Y - py(0) - y'(0) + 3(pY - y(0)) + 2Y = L\{e^t u(t)\} + L\{u(t-2)\} - e^2 L\{u(t-2)e^{t-2}\}$$

$$\Leftrightarrow p^2Y + 3pY + 2Y = \frac{1}{(p-1)} + \frac{e^{-2p}}{p} - e^2 e^{-2p}\frac{1}{(p-1)}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(p-1)(p^2+3p+2)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2+3p+2)} - e^2 e^{-2p}\frac{1}{(p-1)(p^2+3p+2)}$$

$$\frac{1}{P(p^2+3p+2)} = \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$$

$$A = \lim_{p\to 0}\frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{2},\ B = \lim_{p\to -1}\frac{1}{p(p+2)} = -1,\ C = \lim_{p\to -2}\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(p-1)(p^2+3p+2)} = \frac{1}{(p-1)(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$$

$$A = \lim_{p\to 1}\frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{6},\ B = \lim_{p\to -1}\frac{1}{(p-1)(p+2)} = -\frac{1}{2},\ C = \lim_{p\to -2}\frac{1}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{3}$$

$$L\left[\frac{1}{(p-1)6} - \frac{1}{(p+1)2} + \frac{1}{(p+2)3}\right] = \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$L\left[\frac{e^{-2p}}{(p)2} - \frac{e^{-2p}}{(p+1)} + \frac{e^{-2p}}{(p+2)2}\right] = \frac{1}{2}u(t-2) - u(t-2)e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}u(t-2)e^{-2(t-2)}$$

$$L\left[\frac{e^{-2p}}{(p-1)6} - \frac{e^{-2p}}{2(p+1)} + \frac{e^{-2p}}{(p+2)3}\right] = \frac{1}{6}u(t-2)e^{(t-2)} - \frac{1}{2}u(t-2)e^{-(t-2)} + \frac{1}{3}u(t-2)e^{-2(t-2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y\} = \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t} +$$

$$+ u(t-2)\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} - \frac{1}{6}e^2 e^{(t-2)} - \frac{1}{2}e^2 e^{-(t-2)} + \frac{1}{3}e^2 e^{-2(t-2)}\right]$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân: $y'' + 6y' + 9y = 9e^{3t} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

GIẢI:

Đặt $Y = F(p) = L\{y(t)\}$

$$L\{y''\} + 6L\{y'\} + 9L\{y\} = L\{e^{3t}9\}$$

$$\Leftrightarrow p^2Y - py(0) - y'(0) + 6(pY - y(0)) + 9Y = \frac{9}{(p-3)}$$

$$\Leftrightarrow p^2Y + 6pY + 9Y = \frac{9}{(p-3)}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{9}{(p-3)(p+3)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y\} = 9L^{-1}\left[\frac{1}{(p-3)(p+3)^2}\right] = 9\{\operatorname{Re}s[F(p)e^{pt};3] + \operatorname{Re}s[F(p)e^{pt};-3]\}$$

$$\operatorname{Re}s[F(p)e^{pt};3] = \lim_{p\to 3}\left[\frac{(p-3)e^{3t}}{(p-3)(p+3)^2}\right] = \frac{e^{3t}}{36}$$

$$\operatorname{Re}s[F(p)e^{pt};-3] = \lim_{p\to -3}\left[\frac{(p+3)^2e^{-3t}}{(p-3)(p+3)^2}\right]' = \lim_{p\to -3}\left[\frac{-6te^{-3t} - e^{-3t}}{(p-3)^2}\right] = -\frac{e^{-3t}(6t+1)}{36}$$

$$y = \frac{e^{3t}}{4} - \frac{e^{-3t}(6t+1)}{4}$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân: $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

GIẢI:

Đặt $Y = F(p) = L\{y(t)\}$

$$L\{y''\} + 3L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{0\}$$

$$\Leftrightarrow p^2Y - py(0) - y'(0) + 3(pY - y(0)) + 2Y = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2Y + 3pY + 2Y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân: $y'' + 3y' + 2y = e^{-3t}$ $y(0) = 1, y'(0) = -1$

GIẢI:

Đặt $Y = F(p) = L[y(t)]$

$$L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] = L[e^{-3t}]$$

$$\Leftrightarrow p^2Y - py(0) - y'(0) + 3[pY - y(0)] + 2Y = \frac{1}{(p+3)}$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + 3p + 2)Y - p - 2 = \frac{1}{(p+3)}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(p+3)(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}[Y] = L^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)}\right] =$$

$$= \{\text{Re}\, s[F(p)e^{pt}; -1] + \text{Re}\, s[F(p)e^{pt}; -2] + \text{Re}\, s[F(p)e^{pt}; -3]\} + e^{-t}$$

$$\text{Re}\, s[F(p)e^{pt}; -1] = \lim_{p \to -1}\left[\frac{(p+1)e^{-t}}{(p+2)(p+1)(p+3)}\right] = \frac{e^{-t}}{2}$$

$$\text{Re}\, s[F(p)e^{pt}; -2] = \lim_{p \to -2}\left[\frac{(p+2)e^{-2t}}{(p+2)(p+1)(p+3)}\right]' = -e^{-2t}$$

$$\text{Re}\, s[F(p)e^{pt}; -3] = \lim_{p \to -3}\left[\frac{(p+3)e^{-3t}}{(p+2)(p+1)(p+3)}\right]' = \frac{1}{2}e^{-3t}$$

$$y = \frac{e^{-t}}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{2} + e^{-t}$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân: $y'' - 3y' + 2y = te^t \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$

GIẢI:

Đặt $Y = F(p) = L[y(t)]$

$$L[y''] - 3L[y'] + 2L[y] = L[te^t]$$

$$\Leftrightarrow p^2Y - py(0) - y'(0) - 3[pY - y(0)] + 2Y = \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (p^2 - 3p + 2)Y = p - 5 + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{p-5}{(p-1)(p-2)} + \frac{1}{(p-1)^3(p-2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}[Y] = L^{-1}\left[\underbrace{\frac{p-5}{(p-1)(p-2)}}_{F_1} + \underbrace{\frac{1}{(p-1)^3(p-2)}}_{F_2}\right] =$$

$$= \{\text{Re}s[F_1(p)e^{pt};1] + \text{Re}s[F_1(p)e^{pt};2]\}$$

$$\text{Re}s[F_1(p)e^{pt};1;2] = \lim_{p\to 1}\left[\frac{(p-5)e^t}{(p-2)}\right] + \lim_{p\to 2}\left[\frac{(p-5)e^{2t}}{(p-1)}\right] = 4e^t - 3e^{2t}$$

$$\text{Re}s[F_2(p)e^{pt};1;2] = \lim_{p\to 1}\left[\frac{e^t}{(p-2)}\right]'' + \lim_{p\to 2}\left[\frac{e^{2t}}{(p-1)^3}\right] = \frac{1}{2}.e^t(t^2 - 2t - 2) + 2e^{2t}$$

$$y = e^t\left(-\frac{1}{2}t^2 - t + 3\right) - 2e^{2t}$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y' + 3y = 0 \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 10$

GIẢI:

Đặt $Y = F(p) = L[y(t)]$

$$L\{y''\} - 4L\{y'\} + 3L\{y\} = L\{0\}$$

$$\Leftrightarrow p^2Y - py(0) - y'(0) - 4\left(pY - y(0)\right) + 3Y = 0$$

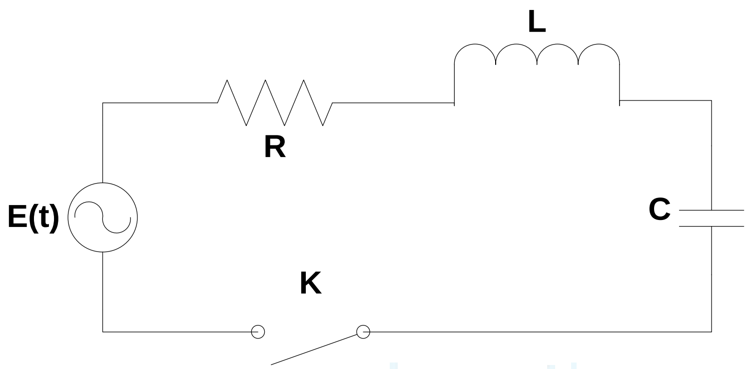
$$\Leftrightarrow p^2Y - 4pY + 3Y - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{10}{(p-1)(p-3)} = 5\left[\frac{1}{(p-3)} - \frac{1}{(p-1)}\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y\} = 5\left(e^{3t} - e^{t}\right)$$

II. ỨNG DỤNG GIẢI TÍCH MẠCH ĐIỆN:

1. Xét mạch gồm R,L,C



Theo Định luật Kirchhoff 1:

$$V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = E(t)$$

$$\Leftrightarrow Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{R}{L}i(t) + \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{E(t)}{L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{E(t)}{L} \qquad (1)$$

If circuit only have R, L then

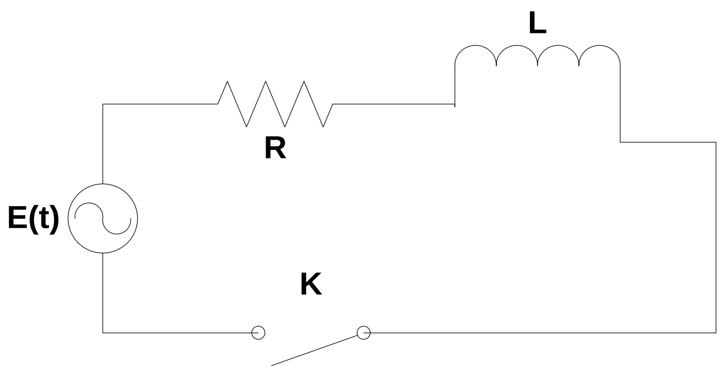
$$\Leftrightarrow L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t) \qquad (2)$$

If circuit only have R, C then

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t) \qquad (3)$$

Ví dụ:

Xét mạch điện gồm R,L biết $i(0) = 0,\ R, L\ is\ const$



a) Cho $E(t) = E_0 = const$. Tìm biểu thức của dòng điện tức thời $i(t)$

b) Tìm $i(t)$ $If \quad E(t) = E_0 \sin \omega t, with \quad \omega = const$.

GIẢI:

a) Mạch chỉ gồm R,L nên áp dụng công thức (2) ta có:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t) \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E(t)}{L} = \frac{E_0}{L}$$

$$I = I(p) = L[i(t)], we \quad have: L[i'(t)] = pI - i(0) = pI$$

Đặt $(2) \Leftrightarrow pI + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L}\frac{1}{p}$

$$\Leftrightarrow I = \frac{E_0}{L}\frac{1}{p}\frac{1}{\left(p + \frac{R}{L}\right)} = \frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\left(p + \frac{R}{L}\right)}\right) \Rightarrow i(t) = L^{-1}[I] = \frac{E_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

b) Trường hợp nguồn AC hình sin

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E(t) \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E(t)}{L} = \frac{E_0 \sin \omega t}{L}$$

Đặt

$$I = I(p) = L[i(t)],\ we\quad have\ : L[i'(t)] = pI - i(0) = pI,\ L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$(2) \Leftrightarrow pI + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{E_0}{L}\frac{1}{\left(p+\frac{R}{L}\right)}\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow i(t) = L^{-1}[I] = \frac{E_0}{L}L^{-1}\left[\frac{1}{\left(p+\frac{R}{L}\right)}\right] * L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]$$

$$i(t) = \frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t} * \sin\omega t = \frac{E_0}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-u)}.\sin\omega u du = \frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int_0^t e^{\frac{R}{L}(u)}.\sin\omega u du\right]$$

$$\left[\int_0^t e^{\frac{R}{L}(u)}.\sin\omega u du\right] = -\frac{L^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t + \frac{LR}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t + \frac{L^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}$$

$$\Rightarrow i(t) = -\frac{E_0L\omega}{R^2+L^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{E_0R}{R^2+L^2\omega^2}\sin\omega t + \frac{E_0L\omega e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2+L^2\omega^2}$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình vi phân sau:

1) $y'' + 4y = 2\sin 2t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

2) $y''' + 4y' = 1,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

3) $y'' + 2y' + 2y = 2 + 2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

4) $y'' - 2y' + 10y = \cos 2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

5) $y'' + y = t - (t-1)u(t-1),\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

6) $2y'' - 3y = 4\sin t + 5\cos t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2$

7) $y'' + 2y = 3\cos 2t,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Võ Đăng Thảo. Hàm phức và Toán tử LAPLACE. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh -2004.

[2] Ngô Hữu Tâm. Gíao Trình Hàm biến phức và phép biến đổi Laplace. Trường Đại học sư phạm kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh -2005.

[3] Nguyễn Kim Đính. Hàm phức và ứng dụng. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh -2001.

[4] Nguyễn Kim Đính. Phép biến đổi Laplace. Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh -2003.

[5] Trương Văn Thương. Hàm số biến số phức. Nhà xuất bản Gíao Dục 2007.

[6] Nguyễn Thủy Thanh. Hướng dẫn giải bài tập hàm biến phức. Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội -2005.

MỤC LỤC