TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
KHOA ĐÀO TẠO CHẤT LƯỢNG CAO
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (16/6/2015)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0000-0016-0006-2015-0000-00 **(Nộp lại đề này)**

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

***<u>Câu 1</u>*** Cho hàm f(z) = $z^2 e^{\frac{3}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) f(z) = $z^2 + 3z + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{z.3!} + \frac{3^4}{z^2.4!} + \ldots$

B) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz = 9i\pi$

C) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz = \operatorname{Res}[z^2 e^{\frac{3}{z}}, 0]$

**<u>Câu 2</u>** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u} ch4u du\right] = \frac{p-5}{p\left((p-5)^2+16\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} \cos 6t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\cos 6t dt$

***<u>Câu 3</u>*** *Khẳng định nào sau đây **sai**?*

A) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+6i)^n}{2^n + n^n}$ có bán kính hội tụ là $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+(n+1)^{n+1}}{2^n+n^n}\right| = 2$

D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(6i-z)^n}{3+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-6i| < 5$.

***<u>Câu 4</u>*** Cho phương trình vi phân: y'-3y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 16.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: pY-3Y = $\frac{e^{-5p}}{p-2}$+16 (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-5p}}{(p-2)(p-3)} + \frac{16}{p-3}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-5p}\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2}\right) + \frac{16}{p-3}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{3(t-5)} - e^{2(t-5)}\right)u(t-5) + 16e^{3t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**<u>Câu 5</u>** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}$[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)

B) $\mathscr{L}^{-1}$[aF(p) + bG(p)] = af(t) +bg(t)

C) $\mathscr{L}\,[8t + t^3 e^{-2t} + \cos 5t] = \dfrac{8}{p^2} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} + \dfrac{p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{6p-18}{p^2-81}\right] = 6ch9t - 2sh9t$

**Câu 6** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-3+i|\}$, $F = \{z : |z-3-2i| \le 4\}$.

*Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $-1+i$ và $3-i$.

B) Tập F là hình tròn đóng tâm $3+2i$ bán kính bằng $4$.

C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.

D) Hai tập E và F đều là tập bị chặn (tập giới nội).

**Câu 7** Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ qua phép biến hình $w = z^3$ = u +iv là

A) đường tròn $u^2 + v^2 = 16$.

B) đường tròn $u^2 + v^2 = 8$.

C) đường tròn $u^2 + v^2 = 64$.

D) đường tròn $u^2 + v^2 = 4$.

***Câu 8*** Khẳng định nào sau đây ***sai****?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) Nếu a là cực điểm cấp hai của hàm $f(z)$ thì $\operatorname{Res}[f(z), a] \ne 0$

C) $z = 5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}$

D) $\displaystyle\oint\limits_{|3i-z|=8} \frac{z+3e^z}{(z-5i)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z+3e^z}{(z-5i)^2}, 5i\right] = 2\pi i(1+3e^{5i})$



**Câu 9** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = \dfrac{4}{1-i} + e^{-iz} = u + iv$ là:

A) $u = 2 + e^y \cos x$, $v = 2 - e^y \sin x$

B) $u = 2 + e^y \cos x$, $v = 2 + e^y \sin x$

C) $u = 4 + e^{-y} \cos x$, $v = 4 - e^{-y} \sin x$

D) $u = 4 + e^y \cos x$, $v = 4 - e^y \sin x$

**Câu 10** Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y), v(x,y) không khả vi trên miền D.

C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = $x_o$+i$y_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại ($x_o$,$y_o$).

D) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z) = (z-6i)\operatorname{Re} z - iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

***Câu 12*** (1*điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = \sin 2t + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$$

***Câu 13*** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'+3y=3 \\ x+y'-2y=e^{-5t} \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

***Câu 14*** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 7y' + 6y = 3 + e^{-6t} \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

Tính $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

**∗ Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, câu 12 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 13, câu 14 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.4 |

Ngày 12 tháng 6 năm 2015

THÔNG QUA TRƯỞNG NGÀNH

| TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015***<br>**MÔN**: **HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**<br>**Mã đề: 0000-0016-0006-2015-0000-00** | | Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: ...........<br>*Thời gian* : 90 phút (16/6/2015)<br>**Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm***. |
|---|---|---|
| ***Giám thị 1*** | ***Giám thị 2*** | |
| ***Giáo viên chấm thi 1&2*** | **ĐIỂM** | |

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

**TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**
**KHOA ĐÀO TẠO CHẤT LƯỢNG CAO**
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ** ***HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (16/6/2015)
Đề thi gồm 3 trang — Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0001-0016-0006-2015-0001-01 (**Nộp lại đề này**)

## PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**Câu 1** Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$

B) $\mathscr{L}^{-1}[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)$

C) $\mathscr{L}[8t + t^3e^{-2t} + \cos 5t] = \dfrac{8}{p^2} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} + \dfrac{p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{6p-18}{p^2-81}\right] = 6ch9t - 2sh9t$

***Câu 2*** Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) Nếu a là cực điểm cấp hai của hàm $f(z)$ thì $\text{Res}\left[f(z), a\right] \neq 0$

C) $z = 5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm f(z) = $\dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}$

D) $\oint\limits_{|3i-z|=8} \dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}dz = 2\pi i \,\text{Res}\left[\dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}, 5i\right] = 2\pi i(1+3e^{5i})$



**Câu 3** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = \dfrac{4}{1-i} + e^{-iz} = u + iv$ là:

A) $u = 2 + e^y\cos x$, $v = 2 - e^y\sin x$

B) $u = 2 + e^y\cos x$, $v = 2 + e^y\sin x$

C) $u = 4 + e^{-y}\cos x$, $v = 4 - e^{-y}\sin x$

D) $u = 4 + e^y\cos x$, $v = 4 - e^y\sin x$

**Câu 4** Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y), v(x,y) không khả vi trên miền D.

C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = $x_o+iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại $(x_o,y_o)$.

D) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

**Câu 5** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-3+i|\}$, $F = \{z : |z-3-2i| \le 4\}$.

*Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $-1+i$ và $3-i$.

B) Tập F là hình tròn đóng tâm $3+2i$ bán kính bằng $4$.

C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.

D) Hai tập E và F đều là tập bị chặn (tập giới nội).

**Câu 6** Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ qua phép biến hình $w = z^3$ = u +iv là

A) đường tròn $u^2 + v^2 = 16$.

B) đường tròn $u^2 + v^2 = 8$.

C) đường tròn $u^2 + v^2 = 64$.

D) đường tròn $u^2 + v^2 = 4$.

***Câu 7*** *Khẳng định nào sau đây* ***sai****?*

A) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+6i)^n}{2^n+n^n}$ có bán kính hội tụ là $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+(n+1)^{n+1}}{2^n+n^n}\right|=2$

D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(6i-z)^n}{3+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-6i|<5$.

***Câu 8*** Cho phương trình vi phân: y'-3y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 16.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: pY-3Y = $\frac{e^{-5p}}{p-2}$ +16 (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-5p}}{(p-2)(p-3)}+\frac{16}{p-3}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-5p}\left(\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-2}\right)+\frac{16}{p-3}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{3(t-5)}-e^{2(t-5)}\right)u(t-5)+16e^{3t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**Câu 9** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch4udu\right]=\frac{p-5}{p\left((p-5)^2+16\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases}\cos 6t & khi\quad 0<t<\pi\\ 0 & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\cos 6tdt$

***Câu 10*** Cho hàm f(z) = $z^2e^{\frac{3}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) f(z) = $z^2+3z+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{z.3!}+\frac{3^4}{z^2.4!}+\dots$

B) $\oint_{|z-2i|=5} z^2e^{\frac{3}{z}}dz = 9i\pi$

C) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint_{|z-2i|=5} z^2e^{\frac{3}{z}}dz=\operatorname{Re}s[z^2e^{\frac{3}{z}},0]$

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z)=(z-6i)\operatorname{Re}z-iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

***Câu 12*** (1*điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)=\sin 2t+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$$

***Câu 13*** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'+3y=3 \\ x+y'-2y=e^{-5t} \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

***Câu 14*** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' + 7y' +6 y = $3+e^{-6t}$ với điều kiện y(0) = 0 và y'(0) = 0

Tính $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

---

✱ **Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, câu 12 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 13, câu 14 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.4 |

Ngày 12 tháng 6 năm 2015

THÔNG QUA TRƯỞNG NGÀNH

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0001-0016-0006-2015-0001-01</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ...........<br>Thời gian : 90 phút (16/6/2015)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

| | |
|---|---|
| **TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH KHOA ĐÀO TẠO CHẤT LƯỢNG CAO** BỘ MÔN TOÁN | **ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015*** **MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE*** Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (16/6/2015) Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu Mã đề: 0010-0016-0006-2015-0010-10 **(Nộp lại đề này)** |

## PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

***Câu 1*** *Khẳng định nào sau đây* ***sai****?*

A) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+6i)^n}{2^n+n^n}$ có bán kính hội tụ là $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+(n+1)^{n+1}}{2^n+n^n}\right|=2$

D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(6i-z)^n}{3+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-6i|<5$.

**Câu 2** Cho phương trình vi phân: y'-3y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 16. Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: pY-3Y = $\frac{e^{-5p}}{p-2}+16$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-5p}}{(p-2)(p-3)}+\frac{16}{p-3}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-5p}\left(\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-2}\right)+\frac{16}{p-3}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{3(t-5)}-e^{2(t-5)}\right)u(t-5)+16e^{3t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**Câu 3** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch4udu\right]=\frac{p-5}{p\left((p-5)^2+16\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D) Nếu $f(t)=\begin{cases}\cos 6t & khi\quad 0<t<\pi\\ 0 & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] $=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi}e^{-pt}\cos 6tdt$

**Câu 4** Cho hàm f(z) = $z^2e^{\frac{3}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) f(z) = $z^2+3z+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{z.3!}+\frac{3^4}{z^2.4!}+...$

B) $\oint_{|z-2i|=5}z^2e^{\frac{3}{z}}dz=9i\pi$

C) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint_{|z-2i|=5}z^2e^{\frac{3}{z}}dz=\operatorname{Res}[z^2e^{\frac{3}{z}},0]$

**Câu 5** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p), $\mathscr{L}$[g(t)] = G(p) và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$

B) $\mathscr{L}^{-1}[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)$

C) $\mathscr{L}[8t + t^3e^{-2t} + \cos 5t] = \dfrac{8}{p^2} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} + \dfrac{p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{6p-18}{p^2-81}\right] = 6ch9t - 2sh9t$

**_Câu 6_** Khẳng định nào sau đây ***sai***?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) Nếu a là cực điểm cấp hai của hàm $f(z)$ thì $\operatorname{Res}[f(z), a] \neq 0$

C) $z = 5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}$

D) $\displaystyle\oint_{|3i-z|=8} \frac{z+3e^z}{(z-5i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z+3e^z}{(z-5i)^2}, 5i\right] = 2\pi i(1+3e^{5i})$

**_Câu 7_** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = \dfrac{4}{1-i} + e^{-iz} = u + iv$ là:

A) $u = 2 + e^y \cos x$, $v = 2 - e^y \sin x$

B) $u = 2 + e^y \cos x$, $v = 2 + e^y \sin x$

C) $u = 4 + e^{-y} \cos x$, $v = 4 - e^{-y} \sin x$

D) $u = 4 + e^y \cos x$, $v = 4 - e^y \sin x$

**_Câu 8_** Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.

B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y), v(x,y) không khả vi trên miền D.



C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm z = $x_o + iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại $(x_o, y_o)$.

D) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

**_Câu 9_** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-3+i|\}$, $F = \{z : |z-3-2i| \leq 4\}$.

*Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $-1+i$ và $3-i$.

B) Tập F là hình tròn đóng tâm $3+2i$ bán kính bằng $4$.

C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.

D) Hai tập E và F đều là tập bị chặn (tập giới nội).

**_Câu 10_** Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ qua phép biến hình $w = z^3 = u + iv$ là

A) đường tròn $u^2 + v^2 = 16$.

B) đường tròn $u^2 + v^2 = 8$.

C) đường tròn $u^2 + v^2 = 64$.



D) đường tròn $u^2 + v^2 = 4$.

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z) = (z-6i)\operatorname{Re} z - iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

***Câu 12*** (1*điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = \sin 2t + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$$

***Câu 13*** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = 3 \\ x + y' - 2y = e^{-5t} \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

***<u>Câu 14</u>*** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' + 7y' +6 y = $3 + e^{-6t}$ với điều kiện y(0) = 0 và y'(0) = 0

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

---

**∗ Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, câu 12 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 13, câu 14 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.4 |

Ngày 12 tháng 6 năm 2015

THÔNG QUA TRƯỞNG NGÀNH

| TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015***<br>**MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**<br>**Mã đề: 0010-0016-0006-2015-0010-10** | | Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: ............<br>*Thời gian* : 90 phút (16/6/2015)<br>**Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.*** |
|---|---|---|
| ***Giám thị 1*** | ***Giám thị 2*** | |
| ***Giáo viên chấm thi 1&2*** | **ĐIỂM** | |

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

| | |
|---|---|
| **TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH** | **ĐỀ THI CUỐI KỲ** ***HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015*** |
| **KHOA ĐÀO TẠO CHẤT LƯỢNG CAO** | **MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE*** |
| BỘ MÔN TOÁN | Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (16/6/2015) |
| | Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu |
| | Mã đề: 0011-0016-0006-2015-0011-11 (**Nộp lại đề này**) |

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**Câu 1** Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ qua phép biến hình $w = z^3 = u + iv$ là

A) đường tròn $u^2 + v^2 = 16$.
B) đường tròn $u^2 + v^2 = 8$.
C) đường tròn $u^2 + v^2 = 64$.
D) đường tròn $u^2 + v^2 = 4$.

**Câu 2** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-3+i|\}$, $F = \{z : |z-3-2i| \le 4\}$.

*Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm $-1+i$ và $3-i$.
B) Tập F là hình tròn đóng tâm $3+2i$ bán kính bằng $4$.
C) Các tập E và F đều là các tập liên thông.
D) Hai tập E và F đều là tập bị chặn (tập giới nội).

**Câu 3** Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$, $\mathscr{L}[g(t)] = G(p)$ và a, b là các hằng số. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$
B) $\mathscr{L}^{-1}[aF(p) + bG(p)] = af(t) + bg(t)$
C) $\mathscr{L}[8t + t^3e^{-2t} + \cos 5t] = \dfrac{8}{p^2} + \dfrac{3!}{(p-2)^4} + \dfrac{p}{p^2+25}$
D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{6p-18}{p^2-81}\right] = 6ch9t - 2sh9t$

***Câu 4*** Khẳng định nào sau đây ***sai****?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).
B) Nếu a là cực điểm cấp hai của hàm $f(z)$ thì $\operatorname{Res}[f(z), a] \ne 0$
C) $z = 5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}$
D) $\oint\limits_{|3i-z|=8} \dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\dfrac{z+3e^z}{(z-5i)^2}, 5i\right] = 2\pi i(1+3e^{5i})$

**Câu 5** Phần thực và phần ảo của hàm phức $f(z) = \dfrac{4}{1-i} + e^{-iz} = u + iv$ là:

A) $u = 2 + e^y \cos x$, $v = 2 - e^y \sin x$
B) $u = 2 + e^y \cos x$, $v = 2 + e^y \sin x$
C) $u = 4 + e^{-y} \cos x$, $v = 4 - e^{-y} \sin x$
D) $u = 4 + e^y \cos x$, $v = 4 - e^y \sin x$

**Câu 6** Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu các hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D thì f(z) = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên miền D.
B) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y), v(x,y) không khả vi trên miền D.
C) Nếu hàm phức f(z) = u(x,y) + iv(x,y) khả vi tại điểm $z = x_o + iy_o$ thì các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann tại $(x_o, y_o)$.
D) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

**Câu 7** Cho hàm f(z) = $z^2 e^{\frac{3}{z}}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) f(z) = $z^2 + 3z + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{z.3!} + \frac{3^4}{z^2.4!} + \ldots$

B) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz = 9i\pi$

C) z = 0 là điểm bất thường cốt yếu của f(z).

D) $\oint\limits_{|z-2i|=5} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz = \operatorname{Res}[z^2 e^{\frac{3}{z}}, 0]$

**Câu 8** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u} ch4u du\right] = \frac{p-5}{p\left((p-5)^2+16\right)}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D) Nếu $f(t) = \begin{cases} \cos 6t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\cos 6t dt$

***Câu 9*** *Khẳng định nào sau đây **sai**?*

A) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

B) Hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa (nếu có) thì duy nhất.

C) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+6i)^n}{2^n+n^n}$ có bán kính hội tụ là $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+(n+1)^{n+1}}{2^n+n^n}\right| = 2$

D) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(6i-z)^n}{3+5^n}$ có hình tròn hội tụ là $|z-6i| < 5$.

**Câu 10** Cho phương trình vi phân: y'-3y = u(t-5)$e^{2(t-5)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 16.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: pY-3Y = $\frac{e^{-5p}}{p-2}$ +16 (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-5p}}{(p-2)(p-3)} + \frac{16}{p-3}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-5p}\left(\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-2}\right) + \frac{16}{p-3}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{3(t-5)} - e^{2(t-5)}\right)u(t-5) + 16e^{3t}$

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

**Câu 11** (1 *điểm*) Tìm tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mà tại đó hàm số $f(z) = (z-6i)\operatorname{Re} z - iz$ ***có đạo hàm*** và *tính đạo hàm* của hàm số tại các điểm đó.

**Câu 12** (1*điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = \sin 2t + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$$

**Câu 13** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' + 3y = 3 \\ x + y' - 2y = e^{-5t} \end{cases}$$ với điều kiện x(0) = 0 và y(0) = 0

***<u>Câu 14</u>*** (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

y'' + 7y' +6 y = $3 + e^{-6t}$ với điều kiện y(0) = 0 và y'(0) = 0

Tính $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

---

**∗ Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, câu 12 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 13, câu 14 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.4 |

Ngày 12 tháng 6 năm 2015

THÔNG QUA TRƯỞNG NGÀNH

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0011-0016-0006-2015-0011-11</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ...........<br>Thời gian : 90 phút (16/6/2015)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

*ĐÁP ÁN MÔN*

**HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**

(Ngày thi: 16/6/2015)

## PHẦN TRẮC NGHIỆM

**Mã đề: 0011-0016-0006-2015-0011-11**

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | C | D | C | B | A | B | D | B | C | A |

**Mã đề: 0000-0016-0006-2015-0000-00**

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | D | B | C | A | C | D | C | B | A | B |

**Mã đề: 0001-0016-0006-2015-0001-01**

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | C | B | A | B | D | C | C | A | B | D |

**Mã đề: 0010-0016-0006-2015-0010-10**

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | C | A | B | D | C | B | A | B | D | C |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN



| *Câu hỏi* | **Nội dung** | *Điểm* |
|---|---|---|
| **Câu 11 điểm** | | **1** |
| | **Tập xác định hàm số là $\mathbb{C}$** | |
| | $f(z)=(z-6i)\operatorname{Re} z-iz \;=(x+iy-6i)x-i(x+iy)=\underbrace{(x^2+y)}_{u}+i\underbrace{(xy-7x)}_{v}$ | 0,25đ |
| | Các đạo hàm riêng $u'_x=2x, u'_y=1,\;\; v'_x=y-7, v'_y=x$ đều liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên u, v khả vi trên $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ (1). | |
| | Điều kiện (C-R): $\begin{cases} u'_x=v'_y \\ u'_y=-v'_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=x \\ 1=7-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}$ (2). | 0,25đ |
| | Hàm số có đạo hàm khi và chỉ khi hàm số khả vi (3). | |
| | Từ (1),(2) và (3) suy ra tập tất cả các điểm hàm số có đạo hàm là $\{6i\}$. | 0,25đ |
| | $f'(6i)=u'_x(0,6)+iv'_x(0,6)=\;2\times 0+i(6-7)=\;-i$ | 0,25đ |
| ***Câu 12*** | | ***1đ*** |
| | Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại $y(t)=\sin 2t+2y(t)*\cos t$ <br> Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$ [y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được | |

| | | |
|---|---|---|
| | $$Y = \frac{2}{p^2+4} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p^2+4} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$ Giải phương trình với Y là ẩn ta được $$Y = \frac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p^2+4)} = \frac{A(p-1)+B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+2D}{p^2+4}$$ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p-1} + B\frac{1}{(p-1)^2} + C\frac{p}{p^2+4} + D\frac{2}{p^2+4}]$$ $$\Leftrightarrow y(t) = Ae^t + Bte^t + C\cos 2t + D\sin 2t$$ Tìm $A, B, C$ dựa vào đẳng thức $$\frac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p^2+4)} = \frac{A(p-1)+B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+2D}{p^2+4}$$ $$A = \frac{12}{25},\quad B = \frac{4}{5},\quad C = -\frac{12}{25},\quad D = \frac{9}{25}$$ Vậy nghiệm phương trình tích phân là $y(t) = \frac{12}{25}e^t + \frac{4}{5}te^t - \frac{12}{25}\cos 2t + \frac{9}{25}\sin 2t$ | ***0.5đ*** <br> ***0.5đ*** |
| ***Câu 13*** | | ***1.5đ*** |
| | Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được: $$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] + 3\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[3] \\ \mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y'] - 2\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{-5t}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX + 3Y = \frac{3}{p} \\ X + (p-2)Y = \frac{1}{p+5} \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{3p^2+6p-30}{p(p+1)(p-3)(p+5)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p+5} \\ Y = \frac{p^2-3p-15}{p(p+1)(p-3)(p+5)} = \frac{E}{p} + \frac{F}{p+1} + \frac{G}{p-3} + \frac{H}{p+5} \end{cases}$$ Biến đổi ngược hai vế ta được: $$\begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[X] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+1} + C\frac{1}{p-3} + D\frac{1}{p+5}] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[E\frac{1}{p} + F\frac{1}{p+1} + G\frac{1}{p-3} + H\frac{1}{p+5}] \end{cases}$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = A + Be^{-t} + Ce^{3t} + De^{-5t} \\ y = E + Fe^{-t} + Ge^{3t} + He^{-5t} \end{cases}$$ ♦ Tìm $A, B, C, D$ dựa vào $$\frac{3p^2+6p-30}{p(p+1)(p-3)(p+5)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p+5}$$ $$A = \frac{3\times 0^2 + 6\times 0 - 30}{(0+1)(0-3)(0+5)} = 2,\quad B = \frac{3(-1)^2 + 6\times(-1) - 30}{-1(-1-3)(-1+5)} = \frac{-33}{14},$$ $$C = \frac{3\times 3^2 + 6\times 3 - 30}{3(3+1)(3+5)} = \frac{5}{32},\quad D = \frac{3\times(-5)^2 + 6\times(-5) - 30}{-5(-5+1)(-5-3)} = -\frac{3}{32}$$ ♦ Tìm $E, F, G, H$ dựa vào: $\frac{p^2-3p-15}{p(p+1)(p-3)(p+5)} = \frac{E}{p} + \frac{F}{p+1} + \frac{G}{p-3} + \frac{H}{p+5}$ | ***0.5đ*** <br> ***0.5đ*** <br> ***0.5đ*** |

$$E=\frac{0^2-3\times 0-15}{(0+1)(0-3)(0+5)}=1,\quad F=\frac{(-1)^2-3\times(-1)-15}{-1(-1-3)(-1+5)}=-\frac{11}{16}$$

$$G=\frac{3^2-3\times 3-15}{3(3+1)(3+5)}=-\frac{5}{32},\quad H=\frac{(-5)^2-3\times(-5)-15}{-5(-5+1)(-5-3)}=-\frac{5}{32}$$

Vậy nghiệm hệ phương trình vi phân là $\begin{cases} x=2-\frac{33}{16}e^{-t}+\frac{5}{32}e^{3t}-\frac{3}{32}e^{-5t} \\ y=1-\frac{11}{16}e^{-t}-\frac{5}{32}e^{3t}-\frac{5}{32}e^{-5t} \end{cases}$

**_Câu 14_** **_1,5đ_**

Đặt $Y=Y(p)=\mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y-py(0)-y'(0)+7\big(pY-y(0)\big)+6Y=\mathscr{L}\left[3+e^{-6t}\right]$$

$$\Leftrightarrow Y(p^2+7p+6)=\frac{3}{p}+\frac{1}{p+6}$$

**_0.5đ_**

$$\Leftrightarrow Y=\frac{4p+18}{p(p+1)(p+6)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C(p+6)+D}{(p+6)^2}$$

**_0.25đ_**

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y]=\mathscr{L}^{-1}\left[A\frac{1}{p}+B\frac{1}{p+1}+C\frac{1}{p+6}+D\frac{1}{(p+6)^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow y(t)=A+Be^{-t}+Ce^{-6t}+Dte^{-6t}$$

**_0.5đ_**



$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=A=\frac{1}{2}$ (tính A bên dưới) nên sau khoảng thời gian t đủ lớn $y(t)\approx\frac{1}{2}$

**_0.25đ_**

Tìm $A,B,C,D$ dựa vào đẳng thức:

$$\frac{4p+18}{p(p+1)(p+6)^2}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C(p+6)+D}{(p+6)^2}$$

$$A=\frac{4\times 0+18}{(0+1)(0+6)^2}=\frac{1}{2},\quad B=\frac{4\times(-1)+18}{-1(-1+6)^2}=-\frac{14}{25},\quad D=\frac{4\times(-6)+18}{-6(-6+1)}=-\frac{1}{5}$$

Cho $p=-2$: $\frac{5}{16}=\frac{A}{-2}+\frac{B}{-2+1}+\frac{C(-2+6)+D}{(-2+6)^2}$

Suy ra $C=\frac{3}{50}$



Vậy nghiệm phương trình vi phân là $y(t)=\frac{1}{2}-\frac{14}{25}e^{-t}+\frac{3}{50}e^{-6t}-\frac{1}{5}te^{-6t}$

*** HẾT***