Chương 2

ĐẠI SỐ BOOLE

2.1. CÁC TIÊN ĐỀ VÀ ĐỊNH LÝ ĐẠI SỐ BOOLE

Trong các mạch số, các tín hiệu thường được cho ở 2 mức điện áp, ví dụ: 0V và 5V. Những linh kiện điện tử dùng trong mạch số làm việc ở một trong hai trạng thái, ví dụ Transistor lưỡng cực (BJT) làm việc ở hai chế độ là tắt hoặc dẫn bão hoà… Do vậy, để mô tả các mạch số người ta dùng hệ nhị phân (binary), hai trạng thái của các linh kiện trong mạch số được mã hoá tương ứng là 0 hoặc 1.

Một bộ môn đại số phát triển từ cuối thế kỷ 19 mang tên người sáng lập ra nó: đại số Boole, còn được gọi là đại số logic, thích hợp cho việc mô tả mạch số. Đại số Boole là công cụ toán học quan trọng để phân tích và thiết kế các mạch số, được dùng làm chìa khoá để đi sâu vào mọi lĩnh vực liên quan đến kỹ thuật số.

2.1.1. Các tiên đề của đại số Boole

Cho một tập hợp B hữu hạn trong đó ta trang bị các phép toán + (cộng logic), x (nhân logic), - (bù logic/nghịch đảo logic) và hai phần tử 0 và 1 lập thành một cấu trúc đại số Boole (đọc là Bun).

$\forall$ x,y $\in$ B thì: x+y $\in$ B, x*y $\in$ B và thỏa mãn 5 tiên đề sau:

1. Tiên đề giao hoán

$\forall x,y \in B$: $x + y = y + x$

2. Tiên đề phối hợp

$\forall x,y,z \in B$: $(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z$

$(x.y).z = x.(y.z) = x.y.z$

3. Tiên đề phân phối

$\forall x,y, z \in B$: $x.(y + z) = x.y + x.z$

$x + (y.z) = (x + y).(x + z)$

4. Tiên đề về phần tử trung hòa

Trong tập B tồn tại hai phần tử trung hòa là **phần tử đơn vị** và **phần tử không.** Phần tử đơn vị ký hiệu là 1, phần tử không ký hiệu là 0.

$\forall x \in B$: $x + 1 = 1$

$x . 1 = x$

$x + 0 = x$

$x . 0 = 0$

5. Tiên đề về phần tử bù

$\forall x \in B$, bao giờ cũng tồn tại phần tử bù tương ứng, ký hiệu $\overline{x}$, sao cho luôn thỏa mãn:

$x + \overline{x} = 1$ và $x.\overline{x} = 0$

Nếu B = B* = {0,1} (B* chỉ gồm 2 phần tử 0 và 1) và thỏa mãn 5 tiên đề trên thì cũng lập thành cấu trúc đại số Boole nhưng là cấu trúc đại số Boole nhỏ nhất.

2.1.2. Các định lý cơ bản của đại số Boole

1. Vấn đề đối ngẫu trong đại số Boole

Hai mệnh đề (hai biểu thức, hai định lý) được gọi là đối ngẫu với nhau nếu trong mệnh đề này người ta thay phép toán cộng thành phép toán nhân và ngược lại, thay 0 bằng 1 và ngược lại, thì sẽ suy ra được mệnh đề kia.

Khi hai mệnh đề đối ngẫu với nhau, nếu 1 trong 2 mệnh đề được chứng minh là đúng thì mệnh đề còn lại là đúng. Dưới đây là ví dụ về các cặp mệnh đề đối ngẫu với nhau.

<u>Ví dụ 2.1</u>: $x.(y+z) = (x.y) + (x.z)$; $x + (y.z) = (x+y).(x+z)$ *Hai mệnh đề này là đối ngẫu*

<u>Ví dụ 2.2</u>: $x + \overline{x} = 1$; $x.\overline{x} = 0$ *Hai mệnh đề này là đối ngẫu*

2. Các định lý

<u>a. Định lí 1 (Định lý về phần tử bù là duy nhất)</u>

∀x, y ∈ B, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x.y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\overline{x}$$ là duy nhất (x và y là 2 phần tử bù của nhau)

Phần tử bù của một phần tử bất kỳ là duy nhất.

<u>b. Định lí 2 (Đlý về sự đồng nhất của phép cộng và phép nhân logic)</u>

∀x ∈ B, ta có:

$$x + x + \ldots\ldots + x = x$$
$$x.\,x.\,x.\ldots\ldots x = x$$

<u>c. Định lý 3 (Định lý về phủ định hai lần)</u>

∀x ∈ B, ta có: $\overline{\overline{x}} = x$

<u>d. Định lí 4 (Định lý De Morgan)</u>

∀x, y, z ∈ B, ta có:

$$\overline{x+y+z} = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$$
$$\overline{x.y.z} = \overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$$

<u>Hệ quả:</u> ∀x, y, z ∈ B, ta có:

$$x + y + z = \overline{\overline{x+y+z}} = \overline{\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}}$$
$$x.\,y.\,z = \overline{\overline{x.y.z}} = \overline{\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}}$$

<u>e. Định lí 5 (Định lý dán)</u>

∀x, y ∈ B, ta có:

$$x.\,(\overline{x} + y) = x.y$$
$$x + (\overline{x}.y) = x + y$$

f. Định lí 6 (Định lý nuốt)

$\forall x, y \in B$, ta có:

$$x + x.y = x$$
$$x.(x + y) = x$$

g. Định lí 7 (Quy tắc tính đối với hằng)

Với $0, 1 \in B$, ta có:

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

2.2. HÀM BOOLE VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN

2.2.1. Hàm Boole

1. Định nghĩa

Hàm Boole là một ánh xạ từ đại số Boole vào chính nó. Nghĩa là $\forall x, y \in B$ được gọi là các biến Boole thì hàm Boole, ký hiệu là f, được hình thành trên cơ sở liên kết các biến Boole bằng các phép toán **+ (cộng logic)**, **x / . (nhân logic)**, **nghịch đảo logic (-)**.

Hàm Boole đơn giản nhất là hàm Boole theo 1 biến Boole, được cho như sau:

$$f(x) = x,\ \ f(x) = \overline{x},\ \ f(x) = \alpha \ (\alpha \text{ là hằng số })$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có hàm Boole theo n biến Boole được ký hiệu như sau:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

2. Các tính chất của hàm Boole

Nếu $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm Boole thì:

- $\alpha.f(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.
- $\overline{f}(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.

Nếu $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ là những hàm Boole thì:

- $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) + f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.
- $f_1(x_1, x_2, ..., x_n).f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.

Vậy, một hàm Boole f cũng được hình thành trên cơ sở liên kết các hàm Boole bằng các phép toán + (cộng logic), x (.) (nhân logic) hoặc nghịch đảo logic (-).

3. Giá trị của hàm Boole

Giả sử $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm Boole theo n biến Boole.

Trong f người ta thay các biến x_i bằng các giá trị cụ thể α_i ($i = \overline{1, n}$) thì giá trị $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ được gọi là giá trị của hàm Boole theo n biến.

Ví dụ 2.3:

Xét hàm $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Xét trong tập B = B* ={0,1, ta có các trường hợp sau (lưu ý đây là phép cộng logic hay còn gọi phép toán HOẶC / phép OR):

- $x_1 = 0, x_2 = 0 \rightarrow f(0,0) = 0 + 0 = 0$

- $x_1 = 0, x_2 = 1 \rightarrow f(0,1) = 0 + 1 = 1$
- $x_1 = 1, x_2 = 0 \rightarrow f(1,0) = 1 + 0 = 1$
- $x_1 = 1, x_2 = 1 \rightarrow f(1,1) = 1 + 1 = 1$

Ta lập được bảng giá trị của hàm trên.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

***<u>Ví dụ 2.4</u>*:**

Xét hàm cho bởi biểu thức sau: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2.x_3$

Xét tập B = B* = {0,1}. Hoàn toàn tương tự ta lập được bảng giá trị của hàm:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2.x_3$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2.2.2. Các phương pháp biểu diễn hàm Boole

1. Phương pháp biểu diễn hàm bằng bảng giá trị

Đây là phương pháp thường dùng để biểu diễn hàm số nói chung và cũng được sử dụng để biểu diễn các hàm logic. Phương pháp này gồm một bảng được chia làm hai phần:

- Một phần dành cho biến để ghi các tổ hợp giá trị có thể có của biến vào.
- Một phần dành cho hàm để ghi các giá trị của hàm ra tương ứng với các tổ hợp biến vào.

Bảng giá trị còn được gọi là bảng chân trị hay bảng chân lý (TRUE TABLE). Như vậy với một hàm Boole n biến bảng chân lý sẽ có:

- **(n+1) cột**: n cột tương ứng với n biến vào, 1 cột tương ứng với giá trị ra của hàm.
- **2^n hàng**: 2^n giá trị khác nhau của tổ hợp n biến.

***<u>Ví dụ 2.5</u>*:** Hàm 3 biến $f(x_1, x_2, x_3)$ có thể được cho bằng bảng giá trị như sau:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Trong các ví dụ 2.3 và 2.4 chúng ta cũng đã quen thuộc với phương pháp biểu diễn hàm bằng bảng giá trị.

2. Phương pháp giải tích

Đây là phương pháp biểu diễn hàm logic bằng các biểu thức đại số. Phương pháp này có 2 dạng: tổng của các tích số hoặc tích của các tổng số.

Dạng tổng của các tích số gọi là dạng chính tắc thứ nhất (Dạng chính tắc 1).

Dạng tích của các tổng số gọi là dạng chính tắc thứ hai (Dạng chính tắc 2).

Hai dạng chính tắc này là đối ngẫu nhau.

Dạng tổng các tích số còn gọi là dạng *chuẩn tắc tuyển* (CTT), dạng tích các tổng số còn gọi là dạng *chuẩn tắc hội* (CTH).

a. Dạng chính tắc 1(Dạng tổng của các tích số)

Xét các hàm Boole một biến đơn giản: $f(x) = x$, $f(x) = \overline{x}$, $f(x) = \alpha$ (α là hằng số).

Đây là những trường hợp có thể có đối với hàm Boole 1 biến.

Chúng ta sẽ đi chứng minh biểu thức tổng quát của hàm logic 1 biến số đối với dạng chính tắc 1. Sau đó áp dụng biểu thức tổng quát của hàm 1 biến để tìm biểu thức tổng quát của hàm 2 biến với việc xem 1 biến là hằng số. Cuối cùng, chúng ta suy ra biểu thức tổng quát của hàm logic n biến cho trường hợp dạng chính tắc 1 (tổng các tích số).

Xét f(x) = x:

Ta có: $x = 0.\overline{x} + 1.x$

mặt khác:

$$f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $f(x) = x$ có thể biểu diễn:

$$f(x) = x = f(0).\overline{x} + f(1).x$$

trong đó: f (0), f (1) được gọi là các giá trị của hàm Boole theo một biến.

Xét f(x) = $\overline{x}$:

Ta có: $\overline{x} = 1.\overline{x} + 0.x$

Mặt khác:

$$f(x) = \overline{x} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Suy ra: $f(x) = \overline{x}$ có thể biểu diễn:

$$f(x) = \overline{x} = f(0).\overline{x} + f(1).x$$

Xét f(x) = α (α là hằng số)**:**

Ta có: $\alpha = \alpha.1 = \alpha.(x + \overline{x}) = \alpha.\overline{x} + \alpha.x$

Mặt khác:

$$f(x) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \alpha \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = \alpha$ có thể biểu diễn:

$$f(x) = \alpha = f(0).\overline{x} + f(1).x$$

Kết luận: Dù $f(x) = x$, $f(x) = \overline{x}$ hay $f(x) = \alpha$, ta đều có biểu thức tổng quát của hàm một biến viết theo dạng chính tắc thứ nhất như sau:

$$\mathbf{f(x) = f(0).\overline{x} + f(1).x}$$

Vậy $\mathbf{f(x) = f(0).\overline{x} + f(1).x}$, trong đó f(0), f(1) là giá trị của hàm Boole theo một biến, được gọi là biểu thức tổng quát của hàm 1 biến viết ở *dạng chính tắc thứ nhất (dạng tổng của các tích)*.

Biểu thức tổng quát của hàm hai biến $f(x_1, x_2)$:

Biểu thức tổng quát của hàm 2 biến viết theo dạng chính tắc thứ nhất cũng hoàn toàn dựa trên cách biểu diễn của dạng chính tắc thứ nhất của hàm 1 biến, trong đó xem một biến là hằng số.

Cụ thể là: nếu xem x_2 là hằng số, x_1 là biến số và áp dụng biểu thức tổng quát của dạng chính tắc thứ nhất cho hàm 1 biến, ta có:

$$f(x_1,x_2) = f(0,x_2).\overline{x}_1 + f(1,x_2).x_1$$

Bây giờ, các hàm $f(0,x_2)$ và $f(1,x_2)$ trở thành các hàm 1 biến số theo x_2. Tiếp tục áp dụng biểu thức tổng quát của dạng chính tắc thứ nhất cho hàm 1 biến, ta có:

$$f(0,x_2) = f(0,0).\overline{x}_2 + f(0,1).x_2$$

$$f(1,x_2) = f(1,0).\overline{x}_2 + f(1,1).x_2$$

Suy ra:

$$f(x_1,x_2) = f(0,0).\overline{x}_1\overline{x}_2 + f(0,1).\overline{x}_1x_2 + f(1,0).x_1\overline{x}_2 + f(1,1).x_1x_2$$

Đây chính là biểu thức tổng quát của dạng chính tắc thứ nhất (dạng tổng của các tích số) viết cho hàm Boole hai biến số $f(x_1,x_2)$.

Biểu thức tổng quát này có thể biểu diễn bằng công thức sau:

$$f(x_1,x_2) = \sum_{e=0}^{2^2-1} f(\alpha_1,\alpha_2)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$$

Trong đó e là số thập phân tương ứng với mã nhị phân (α_1,α_2) và:

$$x_1^{\alpha_1} = \begin{cases} x_1 & \text{nếu } \alpha_1 = 1 \\ \overline{x}_1 & \text{nếu } \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_2^{\alpha_2} = \begin{cases} x_2 & \text{nếu } \alpha_2 = 1 \\ \overline{x}_2 & \text{nếu } \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Biểu thức tổng quát cho hàm Boole n biến:

Từ biểu thức tổng quát viết ở dạng chính tắc thứ nhất của hàm Boole 2 biến, ta có thể tổng quát hoá cho hàm Boole **n biến $f(x_1,x_2, ..,x_n)$** như sau:

$$f(x_1,x_2, ..,x_n) = \sum_{e=0}^{2^n-1} f(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$$

trong đó e là số thập phân tương ứng với mã nhị phân $(\alpha_1,\alpha_2, ...,\alpha_n)$;

và:

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i & \text{nếu } \alpha_i = 1 \\ \overline{x}_i & \text{nếu } \alpha_i = 0 \quad (\text{với } i = 1, 2, 3,\dots,n) \end{cases}$$

Ví dụ 2.6:

Viết biểu thức của hàm 3 biến theo dạng chính tắc 1:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sum_{e=0}^{2^3-1} f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3).x_1^{\alpha 1}.x_2^{\alpha 2}.x_3^{\alpha 3}$$

Bảng dưới đây cho ta giá trị của số thập phân e và tổ hợp mã nhị phân ($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) tương ứng:

e	α_1	α_2	α_3
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Biểu thức của hàm 3 biến viết theo dạng tổng các tích như sau:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = {} & f(0,0,0)\,\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 + f(0,0,1)\,\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3 \\ & + f(0,1,0)\,\overline{x}_1 x_2\,\overline{x}_3 + f(0,1,1)\,\overline{x}_1\,x_2\,x_3 + f(1,0,0)\,x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3 \\ & + f(1,0,1)x_1\,\overline{x}_2\,x_3 + f(1,1,0)\,x_1\,x_2\,\overline{x}_3 + f(1,1,1)\,x_1\,x_2\,x_3 \end{aligned}$$

Vậy dạng chính tắc thứ nhất là dạng tổng của các tích số mà trong mỗi tích số chứa đầy đủ các biến Boole dưới dạng thật hoặc dạng bù (nghịch đảo).

b. Dạng chính tắc 2 (tích của các tổng số):

Dạng chính tắc 2 là dạng đối ngẫu của dạng chính tắc 1 nên **biểu thức tổng quát của dạng chính tắc 2 cho n biến** được viết như sau:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{e=0}^{2^n-1} [f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) + x_1^{\alpha 1} + x_2^{\alpha 2} + ... + x_n^{\alpha n})]$$

trong đó e là số thập phân tương ứng với mã nhị phân ($\alpha_1,\alpha_2, ...,\alpha_n$);
và:

$$x_i^{\alpha i} = \begin{cases} \overline{x}_i & \text{nếu } \alpha_i = 1 \\ x_i & \text{nếu } \alpha_i = 0 \qquad (\text{với } i = 1, 2, 3,\ldots,n) \end{cases}$$

Ví dụ 2.7: Biểu thức của hàm Boole 2 biến ở dạng tích các tổng số (dạng chính tắc 2) được viết như sau:

$$f(x_1,x_2)=[f(0,0)+x_1+x_2][f(0,1)+x_1+\overline{x}_2][f(1,0)+\overline{x}_1+x_2][f(1,1)+\overline{x}_1+\overline{x}_2]$$

Ví dụ 2.8: Biểu thức của hàm Boole 3 biến ở dạng chính tắc 2:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = {} & [f(0,0,0)+x_1+x_2+x_3].[f(0,0,1)+x_1+x_2+\overline{x}_3]. \\ & [f(0,1,0)+x_1+\overline{x}_2+x_3].[f(0,1,1)+x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3]. \\ & [f(1,0,0)+\overline{x}_1+x_2+x_3].[f(1,0,1)+\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3]. \\ & [f(1,1,0)+\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3].[f(1,1,1)+\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3] \end{aligned}$$

Vậy, dạng chính tắc thứ hai là dạng tích của các tổng số mà trong đó mỗi tổng số này chứa đầy đủ các biến Boole dưới dạng thật hoặc dạng bù.

Ví dụ 2.9:

Hãy viết biểu thức biểu diễn cho hàm Boole 2 biến $f(x_1,x_2)$ ở dạng chính tắc 1, với bảng giá trị của hàm được cho như sau:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Viết dưới dạng chính tắc 1 ta có:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= f(0,0).\overline{x}_1\overline{x}_2 + f(0,1).\overline{x}_1.x_2 + f(1,0).x_1.\overline{x}_2 + f(1,1).x_1.x_2 \\ &= 0.\overline{x}_1\overline{x}_2 + 1.\overline{x}_1.x_2 + 1.x_1.\overline{x}_2 + 1.x_1.x_2 \\ &= \overline{x}_1.x_2 + x_1.\overline{x}_2 + x_1.x_2 \end{aligned}$$

Nhận xét:

- *Dạng chính tắc thứ nhất, tổng của các tích số, là dạng liệt kê tất cả các tổ hợp nhị phân các biến vào sao cho tương ứng với những tổ hợp đó giá trị của hàm ra bằng 1 $\rightarrow$ chỉ cần liệt kê những tổ hợp biến làm cho giá trị hàm ra bằng 1.*
- *Khi liệt kê nếu biến tương ứng bằng 1 được viết ở dạng thật (x_i), nếu biến tương ứng bằng 0 được viết ở dạng bù ($\overline{x}_i$).*

***Ví dụ 2.10*:**

Viết biểu thức biểu diễn hàm $f(x_1,x_2,x_3)$ ở dạng chính tắc 2 với bảng giá trị của hàm ra được cho như sau:

x_3	x_2	x_1	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Viết dưới dạng chính tắc 2 (tích các tổng số):

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) = {} & (0+x_1+x_2+x_3).(0+x_1+x_2+\overline{x}_3).(0+x_1+\overline{x}_2+x_3). \\ & (1+x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3).(1+\overline{x}_1+x_2+x_3).(1+\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3). \\ & (1+\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3).(1+\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3) \end{aligned}$$

Áp dụng tiên đề về phần tử trung hòa 0 và 1 ta có:

$x + 1 = 1, \quad x . 1 = x$

$x + 0 = x, \quad x . 0 = 0$

nên suy ra biểu thức trên có thể viết gọn lại:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3).(x_1+x_2+\overline{x}_3).(x_1+\overline{x}_2+x_3)$$

Nhận xét:

- *Dạng chính tắc thứ hai là dạng liệt kê tất cả các tổ hợp nhị phân các biến vào sao cho tương ứng với những tổ hợp đó giá trị của hàm ra bằng 0 $\rightarrow$ chỉ cần liệt kê những tổ hợp biến làm cho giá trị hàm ra bằng 0.*
- *Khi liệt kê nếu biến tương ứng bằng 0 được viết ở dạng thật (x_i), nếu biến tương ứng bằng 1 được viết ở dạng bù ($\overline{x}_i$).*

Ví dụ đơn giản sau giúp SV hiểu rõ hơn về cách thành lập bảng giá trị của hàm, tìm hàm mạch và thiết kế mạch.

Ví dụ 2.11

Hãy thiết kế mạch điện sao cho khi công tắc 1 đóng thì đèn đỏ, khi công tắc 2 đóng đèn đỏ, khi cả hai công tắc đóng đèn đỏ ?

Lời giải:

Đầu tiên, ta qui định trạng thái của các công tắc và bóng đèn:

- Công tắc hở : 0 Đèn tắt : 0
- Công tắc đóng: 1 Đèn đỏ : 1

Bảng trạng thái mô tả hoạt động của mạch như sau:

Công tắc 1	Công tắc 2	Trạng thái đèn
x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Từ bảng trạng thái có thể viết biểu thức của hàm $f(x_1,x_2)$ theo dạng chính tắc 1 hoặc chính tắc 2.

- Theo dạng chính tắc 1 ta có:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \overline{x}_1.x_2 + x_1.\overline{x}_2 + x_1.x_2 \\ &= \overline{x}_1.x_2 + x_1(\overline{x}_2 + x_2) \\ &= \overline{x}_1.x_2 + x_1 \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

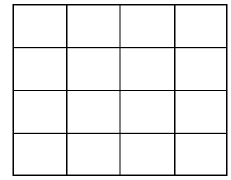
- Theo dạng chính tắc 2 ta có:

$$f(x_1, x_2) = (0+x_1+x_2) = x_1 + x_2$$

Từ biểu thức mô tả trạng thái đỏ/tắt của đèn $f(x_1,x_2)$ thấy rằng có thể thực hiện mạch bằng phần tử logic HOẶC có 2 ngõ vào (cổng OR 2 ngõ vào).

Bài tập áp dụng: Một hội đồng giám khảo gồm 3 thành viên. Mỗi thành viên có thể lựa chọn ĐỒNG Ý hoặc KHÔNG ĐỒNG Ý. Kết quả gọi là ĐẠT khi đa số các thành viên trong hội đồng giám khảo ĐỒNG Ý, ngược lại là KHÔNG ĐẠT. Hãy thiết kế mạch giải quyết bài toán trên.

3. Biểu diễn hàm bằng bảng Karnaugh (bìa Karnaugh)



Đây là cách biểu diễn lại của phương pháp bảng dưới dạng bảng gồm các ô vuông như hình bên.

Trên bảng này người ta bố trí các biến vào theo hàng hoặc theo cột của bảng. Trong trường hợp số lượng biến vào là chẵn, người ta bố trí số lượng biến vào theo hàng ngang bằng số lượng biến vào theo cột dọc của bảng. Trong trường hợp số lượng biến vào là lẻ, người ta bố trí số lượng biến vào theo hàng ngang nhiều hơn số lượng biến vào theo cột dọc 1 biến hoặc ngược lại.

Các tổ hợp giá trị của biến vào theo hàng ngang hoặc theo cột dọc của bảng được bố trí sao cho khi ta <u>đi từ một ô sang một ô lân cận với nó chỉ làm thay đổi một giá trị của biến</u>, như vậy <u>thứ tự bố trí hay sắp xếp các tổ hợp giá trị của biến vào theo hàng ngang hoặc theo cột dọc của bảng Karnaugh hoàn toàn tuân thủ theo mã Gray</u>.

Giá trị ghi trong mỗi ô vuông này chính là giá trị của hàm ra tương ứng với các tổ hợp giá trị của biến vào. Ở những ô mà giá trị hàm là không xác định (có thể bằng 0 hay bằng 1), có nghĩa là giá trị của hàm là tùy ý (hay tùy định), người ta kí hiệu bằng chữ X.

<u>**Nếu hàm có n biến vào sẽ có 2^n ô vuông**</u>.

Phương pháp biểu diễn hàm bằng bảng Karnaugh chỉ thích hợp cho hàm có tối đa 6 biến, nếu vượt quá việc biểu diễn sẽ rất rắc rối.

Dưới đây là bảng Karnaugh cho các trường hợp hàm 2 biến, 3 biến, 4 biến và 5 biến:

$f(x_1,x_2)$

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0		
1		

f

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0				
1				

f

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

f

	$x_1=0$				$x_1=1$			
$x_4x_5 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

2.3. TỐI THIỂU HÓA HÀM BOOLE

2.3.1. Đại cương

Trong thiết bị máy tính người ta thường thiết kế gồm nhiều modul (khâu) và mỗi modul này được đặc trưng bằng một phương trình logic. Trong đó, mức độ phức tạp của sơ đồ tùy thuộc vào phương trình logic biểu diễn chúng. Việc đạt được độ ổn định cao hay không là tùy thuộc vào phương trình logic biểu diễn chúng ở dạng tối thiểu hóa hay chưa. Để thực hiện được điều đó, khi thiết kế mạch số người ta đặt ra vấn đề tối thiểu hóa các hàm logic. Điều đó có nghĩa là phương trình logic biểu diễn sao cho thực sự gọn nhất (số lượng các phép tính và số lượng các số được biểu diễn dưới dạng thật hoặc bù là ít nhất).

Các kỹ thuật để đạt được sự thực hiện hàm Boole một cách đơn giản nhất phụ thuộc vào nhiều yếu tố mà chúng ta cần cân nhắc:

Một là số lượng các phép tính và số lượng các số (số lượng literal) được biểu diễn dưới dạng thật hoặc bù là ít nhất, điều này đồng nghĩa với việc số lượng dây nối và số lượng đầu vào của mạch là ít nhất.

Hai là số lượng cổng cần thiết để thực hiện mạch phải ít nhất, chính số lượng cổng xác định kích thước của mạch. Một thiết kế đơn giản nhất phải ứng với số lượng cổng ít nhất chứ không phải số lượng literal ít nhất.

Ba là số mức logic của các cổng. Giảm số mức logic sẽ giảm trễ tổng cộng của mạch vì tín hiệu sẽ qua ít cổng hơn. Tuy nhiên nếu chú trọng đến vấn đề giảm trễ sẽ phải trả giá số lượng cổng tăng lên.

Bởi vậy trong thực tế không phải lúc nào cũng đạt được lời giải tối ưu cho bài toán tối thiểu hóa.

2.3.2. Các bước tiến hành tối thiểu hóa

- Dùng các phép tối thiểu để tối thiểu hóa các hàm số logic.
- Rút ra những thừa số chung nhằm mục đích tối thiểu hóa thêm một bước nữa các phương trình logic.

2.3.3. Các phương pháp tối thiểu hóa

Có nhiều phương pháp thực hiện tối thiểu hoá hàm Boole và có thể đưa về 2 nhóm là *biến đổi đại số* và dùng *thuật toán*. Phương pháp biến đổi đại số (phương pháp giải tích) dựa vào các tiên đề, định lý, tính chất của hàm Boole để thực hiện tối thiểu hoá.

Ở nhóm *thuật toán* có 2 phương pháp thường được dùng là: phương pháp bảng Karnaugh (còn gọi là bìa Karnaugh – bìa K) dùng cho các hàm có từ 6 biến trở xuống, và phương pháp Quine-Mc.Cluskey có thể sử dụng cho hàm có số biến bất kỳ cũng như cho phép thực hiện tự động theo chương trình được viết trên máy tính.

Trong phần này chỉ giới thiệu 2 phương pháp đại diện cho 2 nhóm:

- Phương pháp *biến đổi đại số* (nhóm biến đổi đại số).
- Phương pháp *bảng Karnaugh* (nhóm thuật toán).

1. Phương pháp biến đổi đại số

Đây là phương pháp tối thiểu hóa hàm Boole (phương trình logic) dựa vào các tiên đề, định lý, tính chất của đại số Boole.

Ví dụ 2.12 Tối thiểu hoá hàm $f(x_1,x_2) = \overline{x}_1x_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= \overline{x}_1x_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1x_2 \\ &= (\overline{x}_1 + x_1).x_2 + x_1\overline{x}_2 \\ &= x_2 + x_1\overline{x}_2 \\ &= x_2 + x_1 \end{aligned}$$

Ví dụ 2.13 Tối thiểu hoá hàm 3 biến sau

$$f(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3$$

$$= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2(\overline{x}_3 + x_3)$$
$$= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2(\overline{x}_3 + x_3) + x_1x_2$$
$$= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1(\overline{x}_2 + x_2)$$
$$= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1$$
$$= x_1 + x_2x_3$$

<u>Ví dụ 2.14</u> Rút gọn biểu thức: f = $\overline{AB + \overline{\overline{C}}} + A\overline{C} + B$

Áp dụng định lý De Morgan ta có:

$$f = \overline{AB}.C + A\overline{C} + B$$
$$= (\overline{A} + \overline{B}).C + A\overline{C} + B$$
$$= \overline{A}C + \overline{B}C + A\overline{C} + B$$
$$= \overline{A}C + A\overline{C} + B + C$$
$$= (\overline{A} + 1).C + A\overline{C} + B$$
$$= C + \overline{C}A + B$$
$$= A + B + C$$

Vậy, để thực hiện mạch này có thể dùng cổng OR 3 ngõ vào.

2. Phương pháp bảng Karnaugh

Để tối thiểu hóa hàm Boole bằng phương pháp bảng Karnaugh phải tuân thủ theo qui tắc về ô kế cận: ***"Hai ô được gọi là kế cận nhau là hai ô mà khi ta từ ô này sang ô kia chỉ làm thay đổi giá trị của 1 biến."***

Quy tắc chung của phương pháp rút gọn bằng bảng Karnaugh là gom (kết hợp) các ô kế cận lại với nhau.

Khi gom 2 ô kế cận sẽ loại được 1 biến ($2=2^1$ loại 1 biến).

Khi gom 4 ô kế cận vòng tròn sẽ loại được 2 biến ($4=2^2$ loại 2 biến).

Khi gom 8 ô kế cận vòng tròn sẽ loại được 3 biến ($8=2^3$ loại 3 biến).

Tổng quát, khi gom 2^n ô kế cận vòng tròn sẽ loại được n biến. Những biến bị loại là những biến khi ta đi vòng qua các ô kế cận mà giá trị của chúng thay đổi.

<u>Những điều cần lưu ý:</u>

Vòng gom được gọi là hợp lệ khi trong vòng gom đó có ít nhất 1 ô chưa thuộc vòng gom nào.

Các ô kế cận muốn gom được phải là kế cận vòng tròn nghĩa là ô kế cận cuối cũng là ô kế cận đầu tiên.

Việc kết hợp những ô kế cận với nhau còn tùy thuộc vào phương pháp biểu diễn hàm Boole theo dạng chính tắc 1 hoặc chính tắc 2, cụ thể là:

- *Nếu biểu diễn hàm theo dạng chính tắc 1 (tổng các tích số)* ta chỉ quan tâm những ô kế cận có giá trị bằng 1 và tùy định. Kết quả mỗi vòng gom lúc này sẽ là một tích rút gọn. Kết quả của hàm biểu diễn theo dạng chính tắc 1 sẽ là tổng tất cả các tích số rút gọn của tất cả các vòng gom.
- *Nếu biểu diễn hàm theo dạng chính tắc 2 (tích các tổng số)* ta chỉ quan tâm những ô kế cận có giá trị bằng 0 và tùy định. Kết quả mỗi vòng gom lúc này sẽ là một tổng rút gọn.

Kết quả của hàm biểu diễn theo dạng chính tắc 2 sẽ là tích tất cả các tổng số rút gọn của tất cả các vòng gom.

Ta quan tâm những ô tùy định (X) sao cho những ô này kết hợp với những ô có giá trị bằng 1 (nếu biểu diễn theo dạng chính tắc 1) hoặc bằng 0 (nếu biểu diễn theo dạng chính tắc 2) **làm cho số lượng ô kế cận là 2^n lớn nhất.** Lưu ý các ô tùy định (X) chỉ là những ô thêm vào vòng gom để rút gọn hơn các biến mà thôi.

Các vòng gom bắt buộc phải phủ hết tất cả các ô có giá trị bằng 1 có trong bảng (nếu tối thiểu theo dạng chính tắc 1), tương tự các vòng gom bắt buộc phải phủ hết tất cả các ô có giá trị bằng 0 có trong bảng (nếu tối thiểu theo dạng chính tắc 2) thì kết quả tối thiểu hoá mới hợp lệ.

<u>Các trường hợp đặc biệt:</u>

Nếu tất cả các ô của bảng Karnaugh đều bằng 1 và tuỳ định (X) nghĩa là tất cả các ô đều kế cận $\rightarrow$ giá trị của hàm bằng 1.

Nếu tất cả các ô của bảng Karnaugh đều bằng 0 và tuỳ định (X) nghĩa là tất cả các ô đều kế cận $\rightarrow$ giá trị của hàm bằng 0.

<u>Ví dụ 2.15</u>: Tối thiểu hóa hàm sau

$f(x_1,x_2)$ — x_2 \ x_1	0	1
0	0	1
1	1	1

Tối thiểu hoá theo chính tắc 2:

$$\mathbf{f(x_1,x_2) = x_1 + x_2}$$

<u>Ví dụ 2.16</u>:

$f(x_1,x_2,x_3)$ — x_3 \ x_1,x_2	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

Vòng gom 1: $\mathbf{x_1}$

Vòng gom 2: $\mathbf{x_2.x_3}$

Tối thiểu theo chính tắc 1: Ta chỉ quan tâm đến những ô có giá trị bằng 1 và tùy định (X), như vậy sẽ có 2 vòng gom để phủ hết các ô có giá trị bằng 1: vòng gom 1 gồm 4 ô kế cận, và vòng gom 2 gồm 2 ô kế cận (hình vẽ).

Đối với vòng gom 1: Có 4 ô = 2^2 nên loại được 2 biến. Khi đi vòng qua 4 ô kế cận trong vòng gom chỉ có giá trị của biến x_1 không đổi (luôn bằng 1), còn giá trị của biến x_2 thay đổi (từ $1\rightarrow0$) và giá trị của biến x_3 thay đổi (từ $0\rightarrow1$) nên các biến x_2 và x_3 bị loại, chỉ còn lại biến x_1 trong kết quả của vòng gom 1. Vì x_1=1 nên kết quả của vòng gom 1 theo dạng chính tắc 1 sẽ có x_1 viết ở dạng thật: x_1

Đối với vòng gom 2: Có 2 ô = 2^1 nên sẽ loại được 1 biến. Khi đi vòng qua 2 ô kế cận trong vòng gom giá trị của biến x_2 và x_3 không đổi, còn giá trị của biến x_1 thay đổi (từ $0\rightarrow1$) nên các biến x_2 và x_3 được giữ lại, chỉ có biến x_1 bị loại. Vì x_2=1 và x_3=1 nên kết quả của vòng gom 2 theo dạng chính tắc 1 sẽ có x_2 và x_3 viết ở dạng thật: $x_2.x_3$

Kết hợp 2 vòng gom ta có kết quả tối giản theo chính tắc 1:

$$\mathbf{f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2.x_3}$$

Tối thiểu theo chính tắc 2: Ta quan tâm đến những ô có giá trị bằng 0 và tùy định (X), như vậy cũng có 2 vòng gom (hình vẽ), mỗi vòng gom đều gồm 2 ô kế cận.

Đối với vòng gom 1: Có 2 ô = 2^1 nên loại được 1 biến, biến bị loại là x_2 (vì có giá trị thay đổi từ $0\rightarrow1$). Vì $x_1=0$ và $x_3=0$ nên kết quả của vòng gom 1 theo dạng chính tắc 2 sẽ có x_1 và x_3 ở dạng thật: $x_1+ x_3$.

Đối với vòng gom 2: Có 2 ô = 2^1 nên loại được 1 biến, biến bị loại là x_3 (vì có giá trị thay đổi từ $0\rightarrow1$). Vì $x_1=0$ và $x_2=0$ nên kết quả của vòng gom 2 theo dạng chính tắc 2 sẽ có x_1 và x_2 ở dạng thật: x_1+x_2.

$f(x_1,x_2,x_3)$

x_3 \ x_1,x_2	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

Vòng gom 1: $\mathbf{x_1 + x_3}$

Vòng gom 2: $\mathbf{x_1 + x_2}$

Kết hợp 2 vòng gom có kết quả của hàm f viết theo dạng chính tắc 2 như sau:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_3).(x_1+x_2)\\
&= x_1.x_1 + x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3\\
&= x_1 + x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3\\
&= x_1(1+ x_2 + x_3) + x_2.x_3\\
&= x_1 + x_2.x_3
\end{aligned}
$$

<u>Nhận xét:</u> Trong ví dụ này, hàm ra viết theo dạng chính tắc 1 và hàm ra viết theo dạng chính tắc 2 là giống nhau. Tuy nhiên có trường hợp hàm ra của hai dạng chính tắc 1 và 2 là khác nhau, nhưng giá trị của hàm ra ứng với một tổ hợp biến đầu vào là duy nhất trong cả 2 dạng chính tắc.

<u>Chú ý:</u> Người ta thường cho hàm Boole dưới dạng biểu thức rút gọn. Vì có 2 cách biểu diễn hàm Boole theo dạng chính tắc 1 hoặc 2 nên sẽ có 2 cách cho giá trị của hàm Boole ứng với 2 dạng chính tắc đó:

<u>Dạng chính tắc 1: Tổng các tích số.</u>

$$f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma(3,4,7) + d(5,6)$$

Trong đó ký hiệu d chỉ giá trị các ô này là tùy định (d: Don’t care)

$f(x_1,x_2,x_3)$

x_3 \ x_1,x_2	00	01	11	10
0	0	0	X	1
1	0	1	1	X

Lúc đó bảng Karnaugh sẽ được cho như hình trên. Từ biểu thức rút gọn của hàm ta thấy tại các ô ứng với tổ hợp nhị phân các biến vào có giá trị là 3, 4, 7 hàm ra có giá trị bằng 1; tại các ô ứng với tổ hợp nhị phân các biến vào có giá trị là 5, 6 hàm ra có giá trị là tùy định; hàm ra có giá trị bằng 0 ở những ô còn lại ứng với tổ hợp các biến vào có giá trị là 0, 1, 2.

<u>Dạng chính tắc 2: Tích các tổng số.</u>

Phương trình trên cũng tương đương với cách cho hàm như sau:

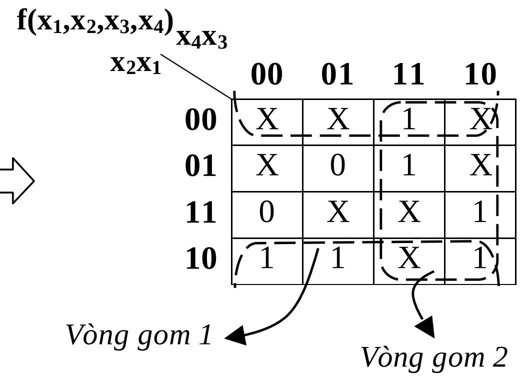
$$f(x_1,x_2,x_3) = \Pi(0, 1, 2) + d(5, 6)$$

Ví dụ 2.17: Tối thiểu hóa hàm 4 biến cho dưới dạng biểu thức sau:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Sigma(2,6,10,11,12,13) + d(0,1,4,7,8,9,14,15)$$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$

x_2x_1 \ x_4x_3	**00**	**01**	**11**	**10**
00	X	X	1	X
01	X	0	1	X
11	0	X	X	1
10	1	1	X	1



Thực hiện tối thiểu hóa theo dạng chính tắc 1: từ bản đồ Karnaugh ta có 2 vòng gom, *vòng gom 1* gồm 8 ô kế cận và *vòng gom 2* gồm 8 ô kế cận. Kết quả tối thiểu hóa như sau:

Vòng gom 1: $\overline{x}_1$

Vòng gom 2: x_4

Vậy: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1 + x_4$