Mục lục

Chương 6
MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

***Cách duy nhất để học toán là làm toán*.**

Paul Halmos,

Hilbert Space Problem Book

6.1. Diện tích giữa hai đường

6.1.1. Diện tích giữa các đường

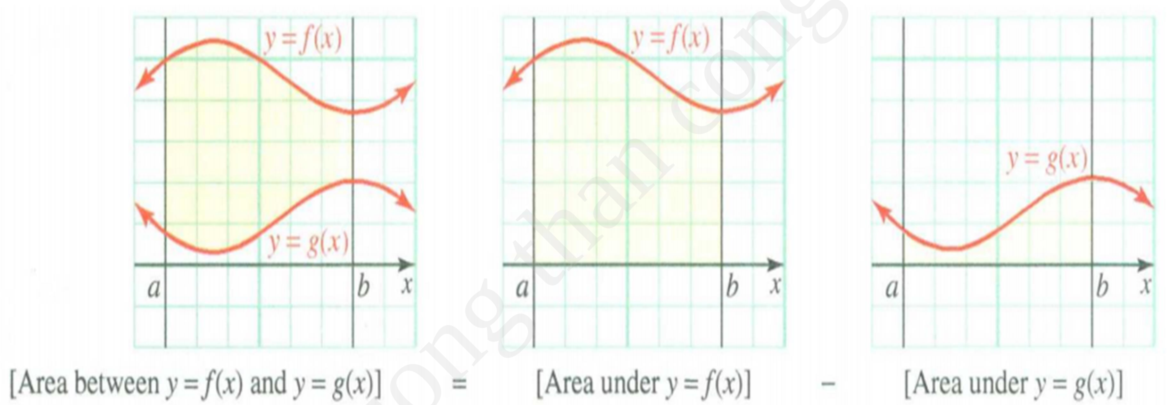
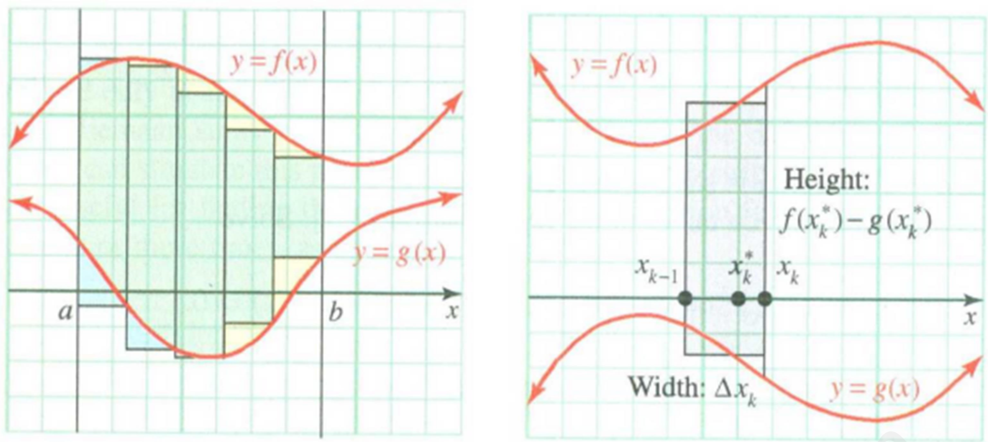


Figure 6.1 Area between two curves

Ta cần tìm diện tích của miền R nằm giữa hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tính từ đường thẳng $x = a$ đến đường thẳng $x = b$. Chọn phân hoạch $\{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ trên khoảng $[a, b]$ và lấy một đại diện x_k^* từ mỗi khoảng con $[x_{k-1}, x_k]$. Tiếp theo, với mỗi k, $k = 1,2, \dots, n$, ta xây dựng một hình chữ nhật có chiều rộng $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ và chiều cao $f(x_k^*) - g(x_k^*)$. Chiều cao này bằng với khoảng cách đứng giữa hai đường tại $x = x_k^*$. Ta gọi hình chữ nhật xấp xỉ này là một dải thẳng đứng.



a. Approximating rectangles

b. A typical vertical strip

Figure 6.2 Using Riemann sums to find the area between two curves

Hình chữ nhật đại diện có diện tích

$$\Delta A_k = [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k$$

Khi đó, tổng diện tích giữa hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có thể được ước lượng bởi tổng

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k$$

Khi phân hoạch P càng bị chia nhỏ sao cho $||P||$ dần về 0 thì việc ước lượng diện tích càng chính xác. Do đó diện tích giữa hai đường cong được viết là

$$A = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k$$

Đây chính là tích phân của hàm số $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

Diện tích giữa hai đường cong Nếu f và g liên tục và thỏa mãn $f(x) \geq g(x)$ trên khoảng đóng $[a, b]$ thì diện tích giữa hai đường cong $y = f(x)$ and $y = g(x)$ được cho bởi

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Nói cách khác, để tìm diện tích giữa hai đường trên khoảng đóng $[a, b]$ ta có thể dùng công thức sau

$$A = \int_a^b [\text{ĐƯỜNG PHÍA TRÊN} - \text{ĐƯỜNG PHÍA DƯỚI}]dx$$

Chú ý: Ta không cần phải yêu cầu cả 2 đường cong nằm trên trục hoành nữa. Thật ra, sau này ta sẽ thấy rằng các đường cong này thậm chí có thể cắt nhau trong miền tính diện tích và trong một phần thì đường này sẽ nằm trên và trong phần khác nó sẽ nằm dưới.

Ví dụ 1 (Diện tích giữa hai đường cong)

Tìm diện tích của miền nằm giữa các đường cong $y = x^3$ và $y = x^2 - x$ trên khoảng $[0,1]$.

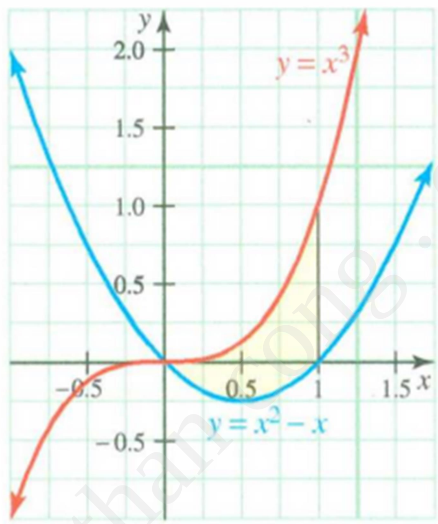


Figure 6.3 Area between curves

Giải. Miền cần tính diện tích được minh họa như Hình 6.3

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 = x^2 - x \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $A = \int_0^1 \underbrace{[x^3 - (x^2 - x)]} dx = \frac{5}{12}$ (đvdt).

(đường nằm trên $y = x^3$, đường nằm dưới $y = x^2 - x$)

Ví dụ 2 (Diện tích cho bởi hàm số có đồ thị nằm bên dưới trục Ox)

Tìm diện tích của miền tạo bởi đường cong $y = e^{2x} - 3e^x + 2$ và trục Ox.

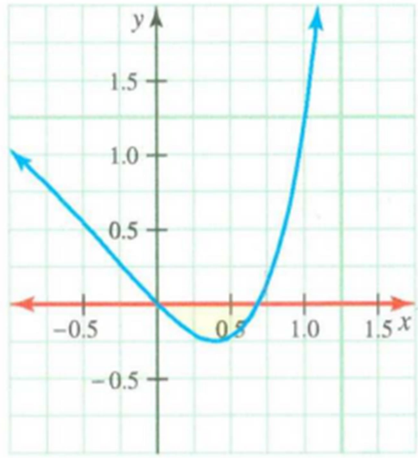


Figure 6.4 Graph of f with area shaded

Giải. Đồ thị của hàm số $y = f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ được chỉ ra như trong Hình 6.4

Ta tìm giao điểm của đường cong với trục hoành, bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm:

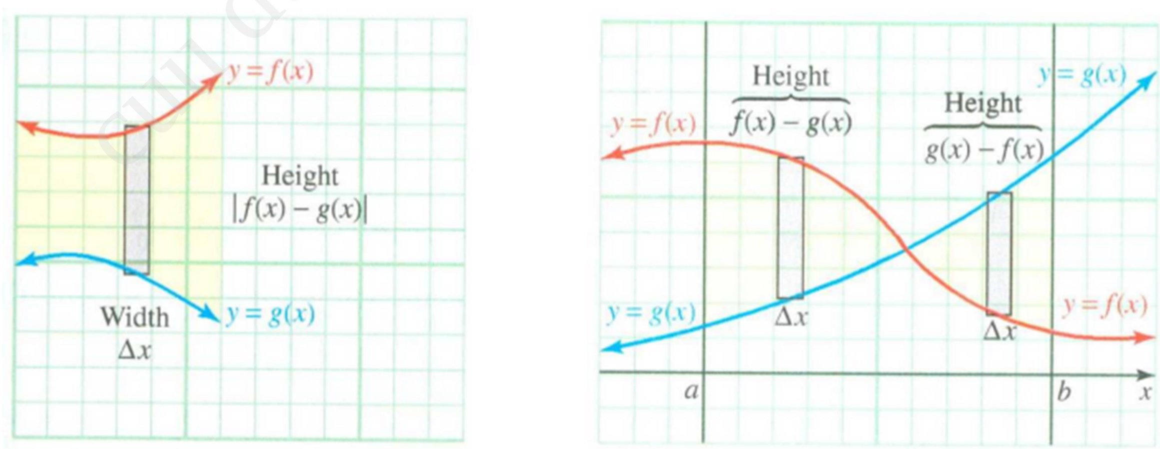
$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = ln2$.

Dễ thấy rằng, với $x \in [0; ln2]$ thì $f(x) \leqslant 0$. Do đó, diện tích miền cần tìm là:

$A = \int_0^{ln2} \underbrace{[0 - (e^{2x} - 3e^x + 2)]} dx = \frac{3}{2} - 2ln2$ (đvdt).

(đường nằm trên $y = 0$, đường nằm dưới $y = e^{2x} - 3e^x + 2$)

6.1.2 Tính diện tích bằng các dải thẳng đứng



a. A typical vertical strip

b. Approximation by strips

Figure 6.5 Area by vertical strips

Phương pháp toán học đúng đắn duy nhất để thiết lập một công thức tích phân là tính tổng Riemann và lấy giới hạn. Tuy nhiên, ta có thể mô phỏng quá trình này bằng cách dùng các dải xấp xỉ. Việc này đặc biệt hữu ích khi tìm diện tích của các miền phức tạp được tạo bởi hai đường cắt nhau nhiều lần. Trong trường hợp này, chiều cao các dải thẳng đứng có thể được đại diện bởi $|f(x)-g(x)|$ và diện tích của dải này là

$$\Delta A = |f(x)-g(x)|\Delta x = |f(x)-g(x)|dx$$

và ta có công thức tích phân mới cho diện tích là

$$A = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

Lưu ý: Ta không thể sử dụng công thức $A = \int [f-g]\ dx$ trực tiếp ở đây vì giải thiết $f \geq g$ không thỏa mãn. Để sử dụng công thức $A = \int |f-g|\ dx$, ta phải nhớ rằng $|f-g|$ có thể là $f-g$ trên phần này của miền và $g-f$ trên phần khác của miền tùy theo đường nào nằm phía trên.

Ví dụ 3 (Diện tích sử dụng các dải thẳng đứng)

Tìm diện tích của miền bao bởi đường thẳng $y = 3x$ và đường cong $y = x^3 + 2x^2$.

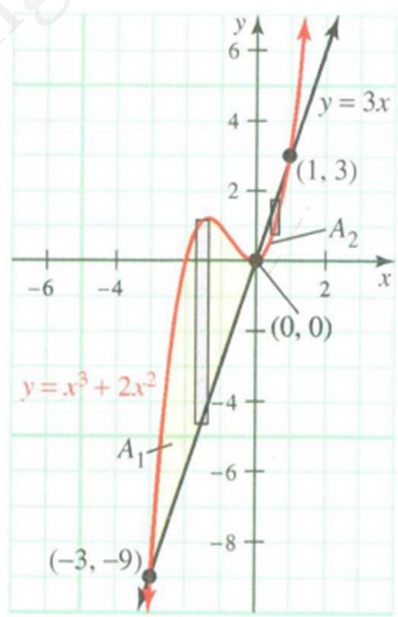


Figure 6.6 Interactive Area between curves

Giải. Miền cần tính diện tích được minh họa như Hình 6.6

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 2x^2 = 3x \Leftrightarrow x \in \{-3; 0; 1\}$. Dựa vào Hình 6.6, ta thấy rằng trên đoạn $[-3; 0]$ đường cong $y = x^3 + 2x^2$ nằm trên đường thẳng $y = 3x$, còn trên đoạn $[0; 1]$ đường thẳng $y = 3x$ nằm trên đường cong $y = x^3 + 2x^2$. Do đó diện tích của miền cần tìm là

$A = \int_{-3}^{0} [(x^3 + 2x^2) - (3x)]dx + \int_{0}^{1} [3x - (x^3 + 2x^2)]dx = \frac{71}{6}$ (đvdt).

Ví dụ 4(Diện tích sử dụng tính đối xứng)

Tìm diện tích của miền được bao bởi đường cong $y = \sin x$ và trục Ox giữa hai đường $x = -\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

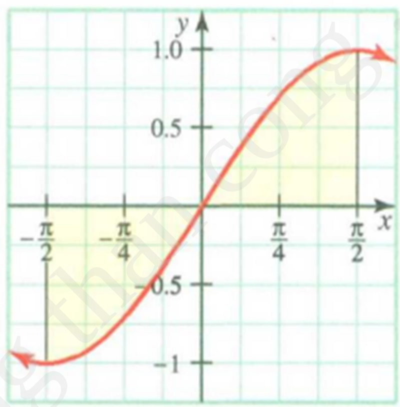


Figure 6.7 Area of a symmetric region

Giải. Miền cần tính diện tích được minh họa như Hình 6.7

Diện tích của miền cần tìm là $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (0 - sinx)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sinx - 0)dx = 2$ (đvdt).

(Hoặc: $A = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sinx - 0)dx = 2$ (đvdt).)

6. 1.3 Tính diện tích bằng các dải ngang

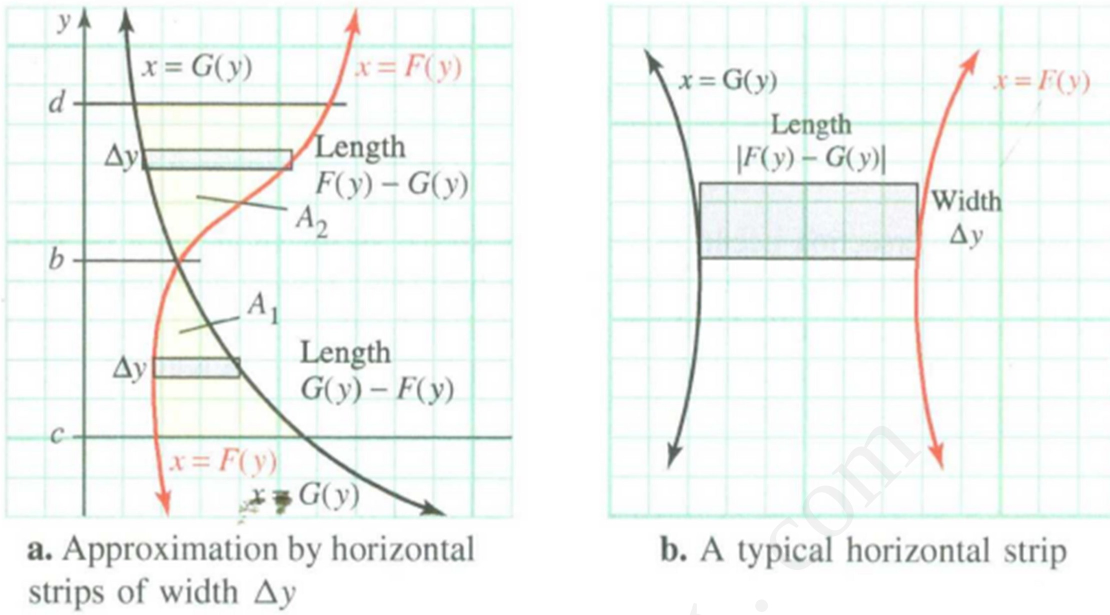


Figure 6.8 Area by horizontal strips

Đối với một số miền, việc xấp xỉ bằng các dải ngang sẽ dễ dàng hơn các dải đứng. Ta kí hiệu chiều rộng của các dải nằm ngang này là Δy. Chẳng hạn hai đường cong cắt nhau tại $y = b$ với b nằm trong khoảng $[c, d]$, khi đó diện tích được tính nhờ vào công thức sau

$$A = \int_c^d |G(y) - F(x)| \; dy$$

Lưu ý. Công thức trên có thể được viết lại thành

$$A = \int_c^b \underbrace{[G(y) - F(x)]}_{G \text{ nằm trước } F} dy + \int_b^d \underbrace{[F(y) - G(x)]}_{F \text{ nằm trước } G} dy$$

Ví dụ 5(Tính diện tính bằng các dải nằm ngang)

Tìm diện tích của miền R nằm giữa đường parabol $x = 4y - y^2$ và đường thẳng $x = 2y - 3$.

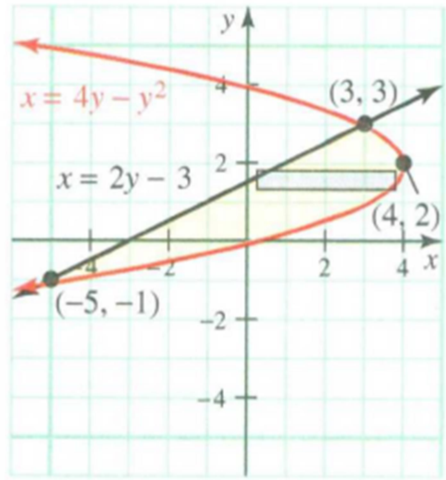


Figure 6.9 Interactive Area of R using horizontal strips

Giải. Miền cần tính diện tích được minh họa như Hình 6.9

Phương trình tung độ giao điểm: $4y - y^2 = 2y - 3 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = 3$. Dựa vào Hình 6.9, ta thấy diện tích của miền cần tìm là

$$A = \int_{-1}^{3} [(4y - y^2) - (2y - 3)]dy = \frac{32}{3} \text{ (đvdt).}$$

6.2 Thể tích

Phương pháp sử dụng trong mục 6.1 để tính diện tích bằng tích phân có thể được điều chỉnh để tính thể tích của một miền đặc. Chúng ta sẽ bắt đầu với trường hợp miền đặc có một mặt cắt đã biết.

6.2.1 Phương pháp lát cắt

Cho S là một khối đặc và giả sử với $a \le x \le b$ thì lát cắt của S vuông góc với trục Ox tại x có diện tích là $A(x)$.

Để tìm thể tích của S, trước hết ta chia đoạn $[a, b]$ thành $x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ và chọn một đại diện x_k^* trong mỗi khoảng con $[x_{k-1}, x_k]$. Ta cắt khối S tại $x = x_k^*$ và lấy ra một lát mỏng có diện tích bề mặt là $A(x_k^*)$ và bề dày là Δx_k như hình bên dưới

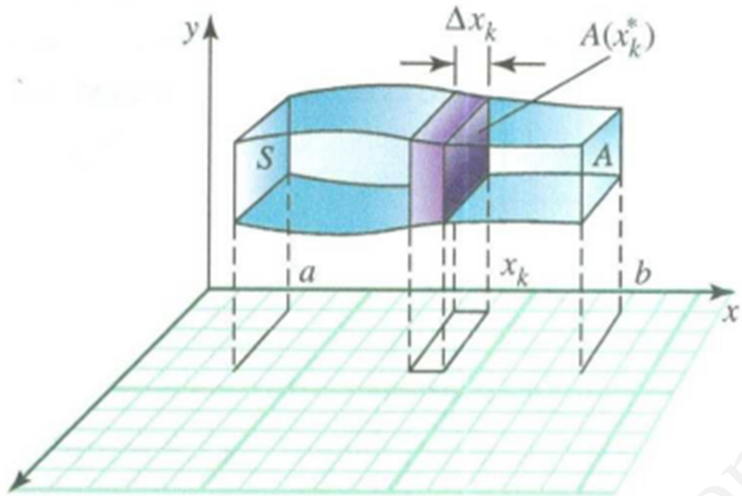


Figure 6.11 Volume of solids with known cross sections

Ta thấy

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

và thể tích lát cắt này là

$$\Delta V_k = A(x_k^*)\Delta x_k.$$

Gộp thể tích tất cả các lát cắt lại, ta được xấp xỉ thể tích của khối S là

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$

Khi bề rộng của phân hoạch $||P||$ càng tiến về 0, thể tích của S càng được xấp xỉ chính xác, nghĩa là

$$V = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$

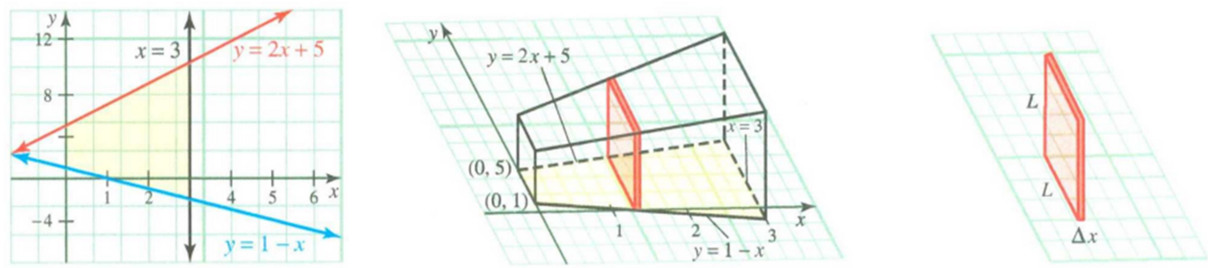
và đây chính là tích phân xác định $\int_a^b A(x)dx$. Tóm lại,

Thể tích của khối đặc có diện tích mặt cắt đã biết Một khối S với mặt cắt có diện tích là $A(x)$ vuông góc với trục Ox tại mỗi điểm trên khoảng đóng $[a, b]$ có thể tích là

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Ví dụ 1 (Thể tích của khối đặc sử dụng các lát cắt hình vuông)

Đáy của một khối đặc là miền nằm trên mặt phẳng Oxy được tạo bởi: trục Oy và các đường thẳng $y = 1 - x$, $y = 2x + 5$ và $x = 3$. Các lát cắt vuông góc với trục Ox đều là hình vuông. Tìm thể tích của khối đặc trên.



a. Two-dimensional graph of the base **b.** Three-dimensional solid **c.** Cross-sectional representative element $\Delta V = L^2 \Delta x$

Giải. Khối đặc cần tính thể tích được minh họa như Hình 6.12. Dựa vào hình vẽ trên, tại mỗi $x \in [0; 3]$ bất kỳ, diện tích của lát cắt hình vuông mà vuông góc với trục Ox là $A(x) = (3x + 4)^2$. Vậy thể tích của khối đặc cần tìm là

$$V = \int_0^3 (3x + 4)^2 dx = 237 \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 2(BTVN). Một khối chóp đều với đáy hình vuông có cạnh L và đỉnh nằm ở độ cao H đơn vị tính từ tâm của đáy (như hình vẽ). Chứng tỏ rằng, $V = \frac{1}{3} H L^2$.

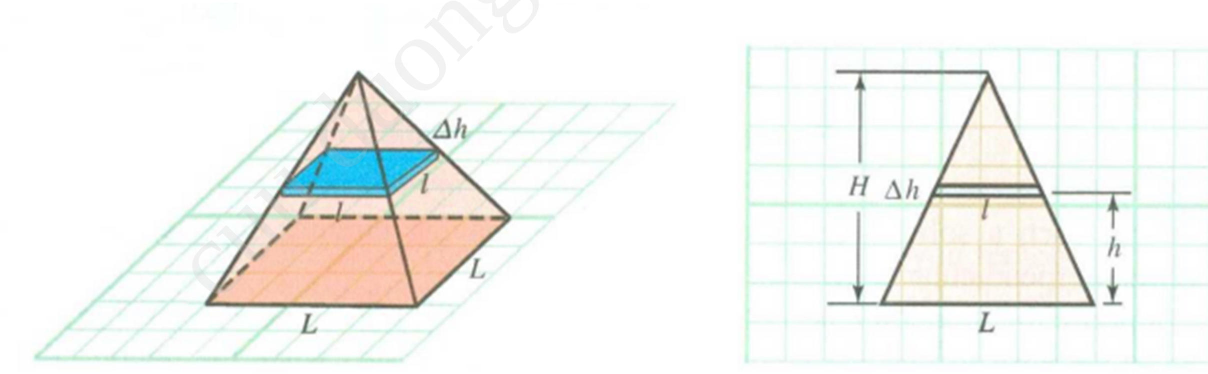


Figure 6.13 The volume of a pyramid

6.2.2 Phương pháp vòng đệm (vật thể tròn xoay)

Một **khối tròn xoay** là một khối đặc S có được bằng cách xoay miền D trên mặt phẳng Oxy xung quanh đường thẳng L (còn gọi là trục xoay) nằm ngoài miền D hoặc nằm trên biên của D. Một số ví dụ về khối tròn xoay

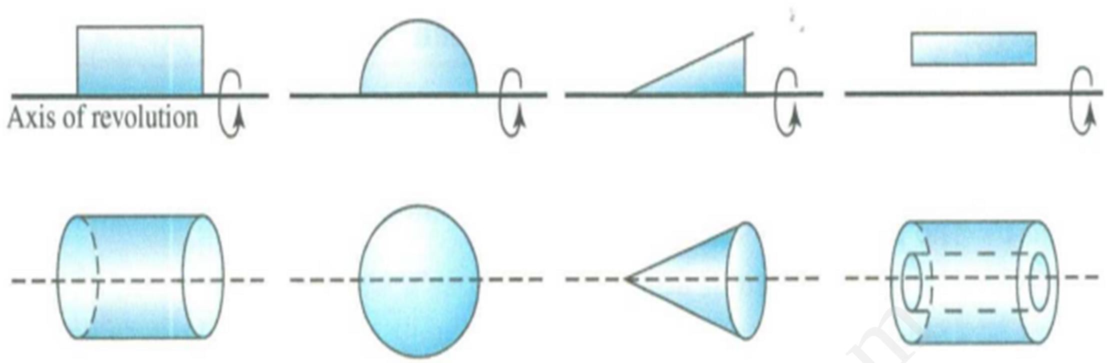


Figure 6.14 Solids of revolution

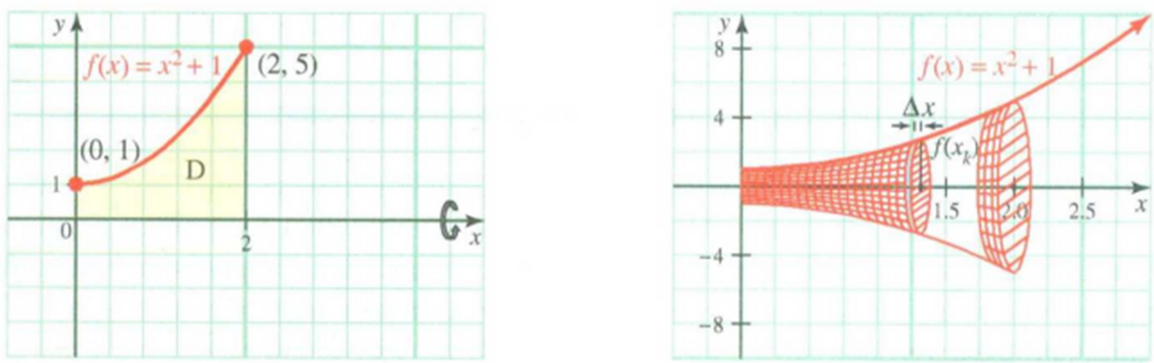
Phương pháp đĩa Phương pháp đĩa được sử dụng để tìm thể tích của khối sinh ra khi một miền D quanh trục L vuông góc với một dải xấp xỉ đặc trưng trong D. Giả sử D là miền bao bởi đường $y = f(x)$, trục $0x$, và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi đó nếu D được xoay tròn quanh trục Ox sẽ tạo thành một khối có thể tích là

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

Chú ý. Sơ đồ dưới đây có thể giúp bạn nhớ các ý tưởng chính của phương pháp đĩa.

Công thức đã biết	Phần tử đại diện	Công thức tích phân
Thể tích của đĩa $V = Bh = \pi r^2 h$	$\Delta V = \pi y^2 \Delta x$	$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx$

Ví dụ 3 (Thể tích tạo bởi đĩa) Tìm thể tích của khối S tạo thành khi xoay miền D nằm dưới đường $y = x^2 + 1$ trên khoảng $[0,2]$ quanh trục $0x$.



a. The region, *D*   **b.** The solid of revolution, *S*

Figure 6.16 Interactive Volume of a solid of revolution: The disk method

Giải. Miền cần tính thể tích được minh họa như Hình 6.16. Áp dụng phương pháp đĩa, thể tích cần tìm là

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx = \frac{206}{15}\pi \text{ (đvtt).}$$

Điều chỉnh một chút phương pháp đĩa là ta có thể tìm thể tích của một hình đặc sinh ra bằng cách quay quanh trục Ox một miền nằm giữa hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ với $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với $a \leq x \leq b$.

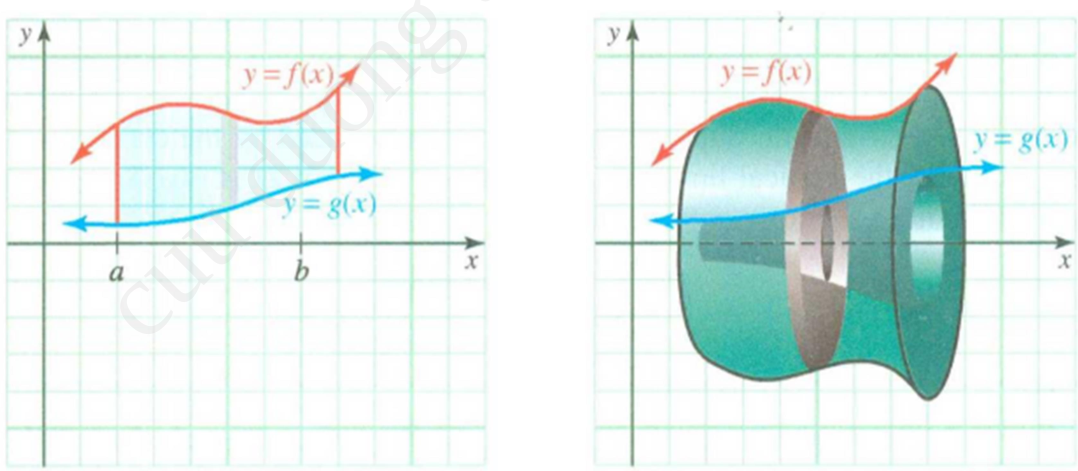


Figure 6.17 The washer method

Phương pháp vòng đệm Phương pháp vòng đệm được sử dụng để tìm thể tích của khối sinh ra khi quay một miền nằm giữa hai đường cong quanh một trục vuông góc với dải xấp xỉ. Cụ thể, giả sử f và g là các hàm liên tục trên $[a,b]$ với $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Nếu R là đường ngoài $y = f(x)$ và r là đường trong $y = g(x)$, khi đó xoay miền tạo thành bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox, thì thể tích khối được tạo thành là

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx.$$

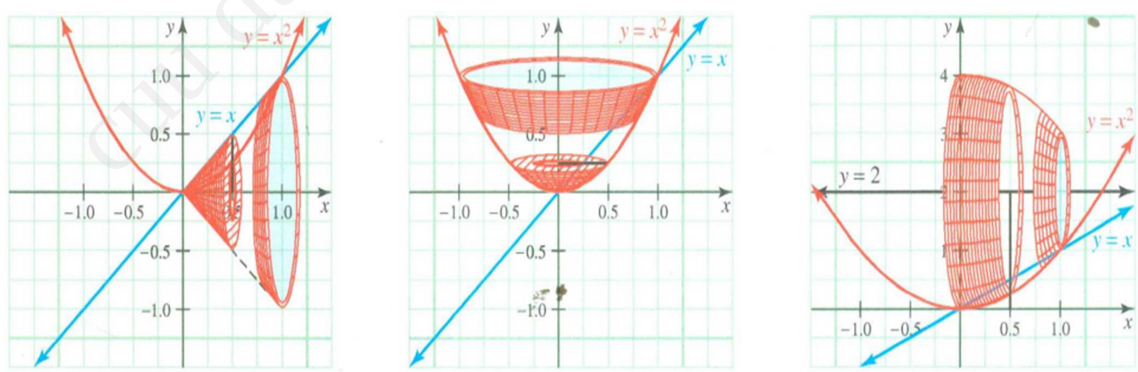
với $f(x)$ là bán kính ngoài, $g(x)$ là bán kính trong.

Lưu ý. Trong thực hành, điều này có nghĩa là lấy khối ngoài trừ đi khối trong, giống như là lấy ruột của một quả táo.

Phương pháp đĩa và phương pháp vòng đệm cũng áp dụng khi trục xoay không phải là trục Ox.

Ví dụ 4 (Thể tích tạo bởi vòng đệm) Cho D là một miền kín bao bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$. Tìm thể tích của khối sinh ra khi xoay D quanh:

a.) trục Ox b.) trục Oy c.) đường thẳng: $y = 2$



a. x-axis **b.** y-axis **c.** line $y = 2$

Figure 6.18 Interactive Volume by washers

Giải. Miền cần tính thể tích được minh họa như Hình 6.18.

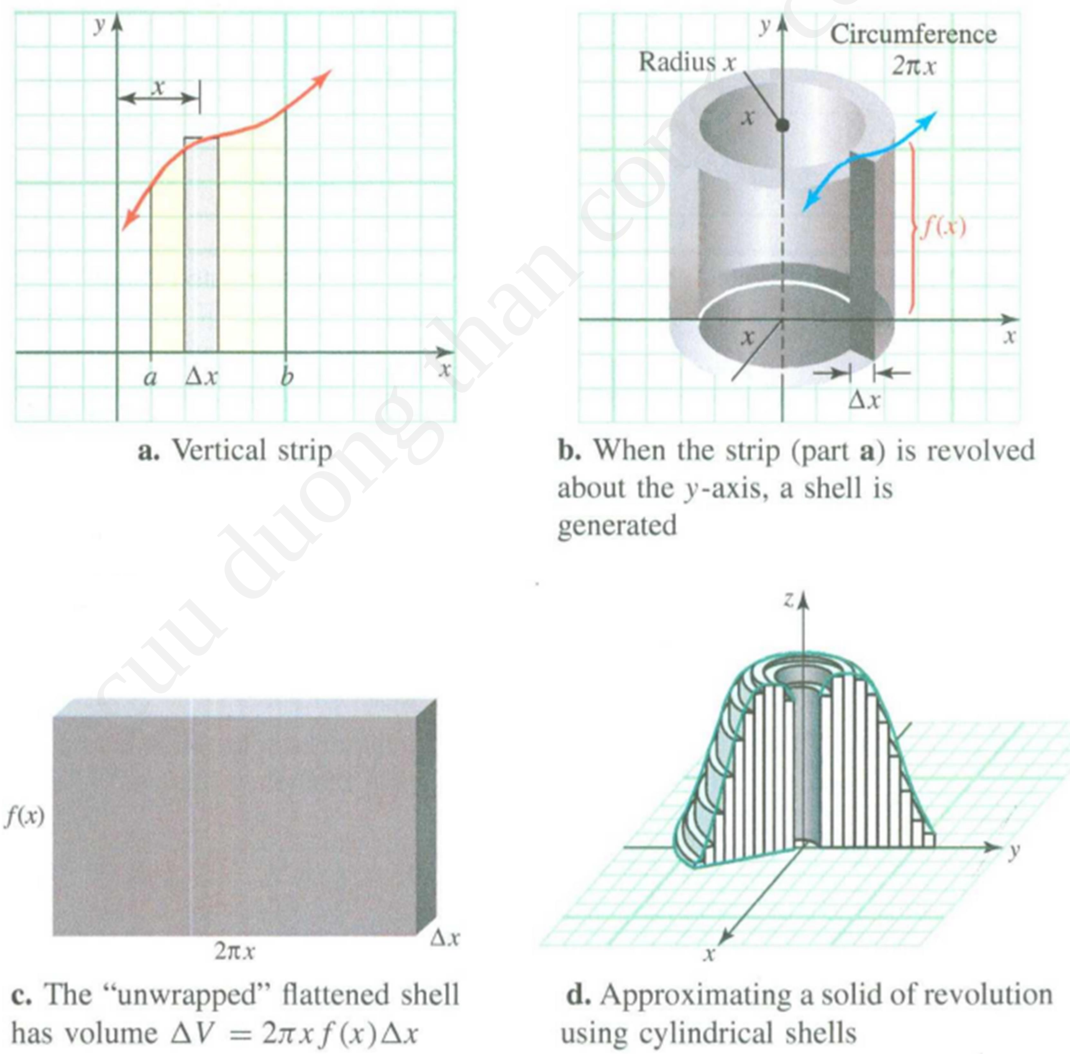
a.) $V = \pi \int_0^1 [(x^2) - (x^2)^2]dx = \frac{2\pi}{15}$ (đvtt).

b.) $V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{y})^2 - y^2]dy = \frac{\pi}{6}$ (đvtt).

c.) $V = \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2)]dx = \frac{8\pi}{15}$ (đvtt).

6. 2.3 Phương pháp ống trụ

Đôi khi việc tính thể tích bằng các dải xấp xỉ song song với trục quay thì dễ hơn (thậm chí là cần thiết) việc tính thể tích bằng các dải vuông góc với trục quay. Hình dưới cho thấy một miền D dưới đường cong $y = f(x) \geq 0$, trên đoạn $[a, b]$, cùng với một dải đứng đại diện.



a. Vertical strip

b. When the strip (part **a**) is revolved about the y-axis, a shell is generated

c. The "unwrapped" flattened shell has volume $\Delta V = 2\pi x f(x) \Delta x$

d. Approximating a solid of revolution using cylindrical shells

Figure 6.20 Method of cylindrical shells

Phương pháp ống trụ Phương pháp ống trụ được sử dụng để tìm thể tích của khối sinh ra khi xoay miền D quanh một trục L song song với một dải xấp xỉ đặc trưng trong D.

Cụ thể, nếu D là miền như hình 6.21, bao bởi đường $y = f(x) \geq 0$, trục Ox, và đường thẳng $x = a$, $x = b$ với $0 \leq a \leq b$, thì khối sinh ra khi xoay D quanh trục $0y$ có thể tích là

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

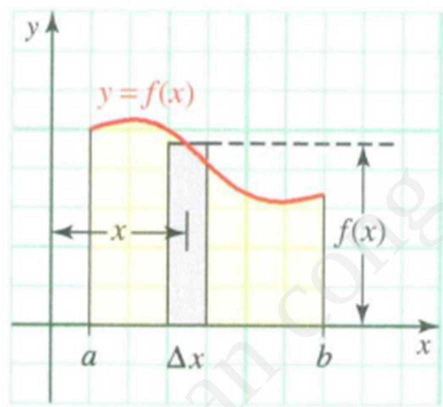


Figure 6.21 Shell method

Ví dụ 5 (Thể tích tạo bởi ống trụ) Tìm thể tích của khối đặc tạo thành khi xoay miền bao bởi trục Ox và các đồ thị $y = x^3 + x^2 + 1$, $x = 1$, và $x = 3$ quanh trục Oy.

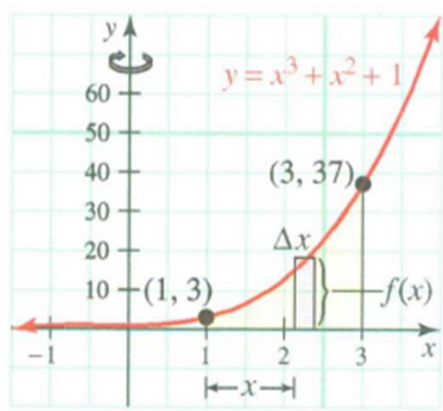


Figure 6.22 Shell method about y-axis

Giải. Miền phẳng được minh họa như Hình 6.22. Thể tích cần tìm:

$$V = 2\pi \int_1^3 x(x^3 + x^2 + 1)dx = \frac{724}{5}\pi \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 6 (Thể tích có được khi xoay theo trục thẳng đứng hoặc trục nằm ngang) Tìm thể tích của khối đặc tạo thành khi xoay miền bao bởi đường $y = x^{-2}$và trục $0x$ với $1 \leq x \leq 2$ quanh đường $x = -1$.

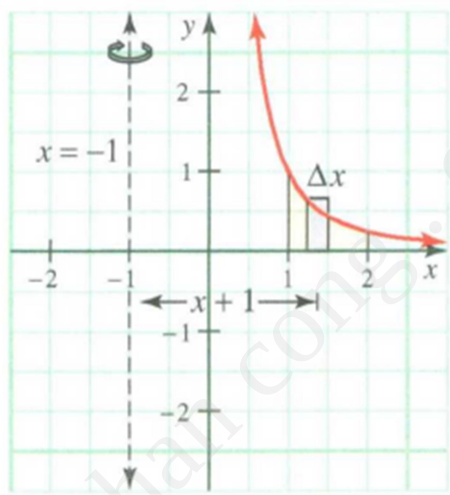
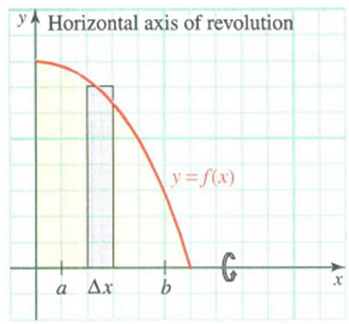
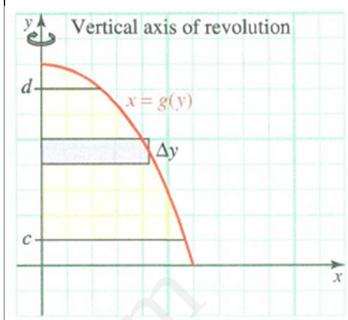
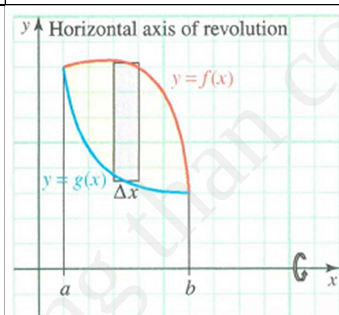
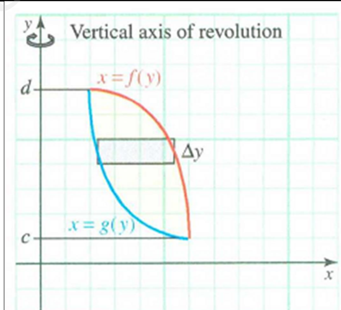
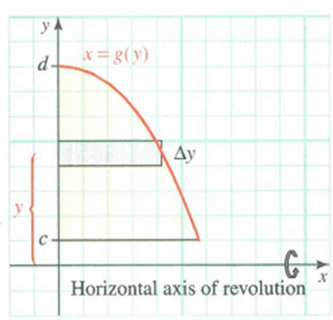
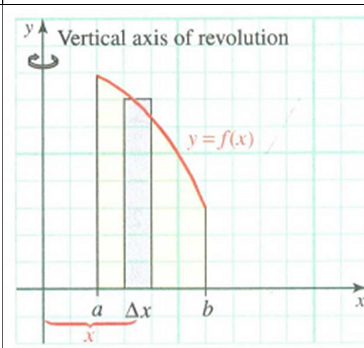


Figure 6.23 Shell method about $x = -1$

Giải. Miền D được minh họa như Hình 6.23. Thể tích cần tìm:

$$V = 2\pi \int_1^2 (x+1)\frac{1}{x^2}dx = 2\pi ln2 + \pi \text{ (đvtt).}$$

Bảng 6.1 Thể tích của vật tròn xoay khi trục quay là trục x hoặc trục y.

	Trục quay nằm ngang	Trục quay thẳng đứng
Phương pháp lát cắt Hình chữ nhật đại diện vuông góc với trục quay. Trục quay là biên của miền	 $V=\pi\int_a^b [\overbrace{f(x)}^{\text{Length (height) of rectangle}}]^2 \underbrace{dx}_{\text{Width of rectangle is } \Delta x.}$	 $V=\pi\int_c^d [\overbrace{g(y)}^{\text{Length of rectangle}}]^2 \underbrace{dy}_{\text{Width of rectangle is } \Delta y.}$
Phương pháp vòng đệm Hình chữ nhật đại diện vuông góc với trục quay. Trục quay không thuộc biên của miền	 $V=\pi\int_a^b \underbrace{\left([\overbrace{f(x)}^{\text{Top curve}}]^2-[\overbrace{g(x)}^{\text{Bottom curve}}]^2\right)}_{\text{Length of rectangle}} \underbrace{dx}_{\text{Width}}$	 $V=\pi\int_c^d \underbrace{\left([\overbrace{f(y)}^{\text{Right curve}}]^2-[\overbrace{g(y)}^{\text{Left curve}}]^2\right)}_{\text{Length of rectangle}} \underbrace{dy}_{\text{Width}}$
Phương pháp ống trụ Hình chữ nhật đại diện song song với trục quay	 $V=2\pi\int_c^d \underbrace{y}_{\text{Distance to axis}} [\overbrace{g(y)}^{\text{Length of rectangle}}] \underbrace{dy}_{\text{Width}}$	 $V=2\pi\int_a^b \underbrace{x}_{\text{Distance to axis}} [\overbrace{f(x)}^{\text{Length (height)}}] \underbrace{dx}_{\text{Width}}$

6. 3 Dạng cực và diện tích

6.3.1 Hệ tọa độ cực

Trong hệ tọa độ cực, các điểm được xác định so với một điểm cố định O, được gọi là gốc hay **cực** và một tia cố định đi từ gốc được gọi là **trục cực**. Mỗi điểm P trên mặt phẳng khi đó được gắn với một cặp xếp thứ tự $P(r,\theta)$, với r là khoảng cách từ O tới P và θ là góc đo từ trục cực tới tia OP. Số r được gọi là **bán kính** của P, và θ là **góc cực**. Góc cực được xem là dương nếu đo theo ngược chiều kim đồng hồ từ trục cực, và âm nếu đo theo chiều kim đồng hồ. Gốc O có bán kính là 0 và góc cực θ bất kì.

Chú ý

• Mỗi điểm trong hệ tọa độ cực có vố sô cách biểu diễn. Ví dụ như $(5,\frac{3\pi}{2})$, $(-5,\frac{\pi}{2})$ và $(5,-\frac{\pi}{2})$ đại diện cho cùng 1 điểm trong hệ tọa độ cực.

• Tọa độ cực không nhất thiết phải có thành phần đầu là số dương. Chẳng hạn $(1,\frac{3\pi}{2})$ và $(-1,\frac{\pi}{2})$ biểu diễn cùng một điểm.

Có một mối liên hệ hình học đơn giản giữa tọa hệ độ cực và hệ tọa độ vuông góc. Nếu ta giả sử rằng gốc của hệ tọa độ vuông góc chính là cưc và trục x dương chính là trục cực thì tọa độ vuông góc (x,y) của một điểm và tọa độ cực (r,θ) của nó có mối liên hệ như sau

Đổi tọa độ Qui trình để chuyển từ một hệ tọa độ sang một hệ tọa độ khác.

Bước 1 Để chuyển từ dạng cực sang dạng vuông góc ta dùng công thức

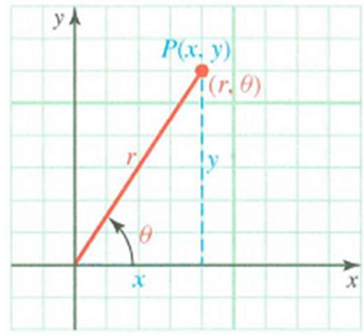
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Bước 2 Để chuyển từ dạng vuông góc sang dạng cực ta dùng công thức

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

nếu $x \neq 0$.

Chú ý Để tìm θ thì ngoài công thức $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ta còn phải chú ý đặt nó trong đúng góc phần tư bằng cách chú ý dấu của x và y.



Ví dụ 1 (Chuyển từ tọa độ cực sang tọa độ vuông góc)

Chuyển tọa độ cực $\left(-3, \frac{5\pi}{4}\right)$ sang tọa độ vuông góc.

Đáp số: $\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$.

Ví dụ 2 (Chuyển từ tọa độ vuông góc sang tọa độ cực)

Viết dạng tọa độ cực cho điểm có tọa độ vuông góc là $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Đáp số: $\left(-5, \frac{5\pi}{6}\right)$.

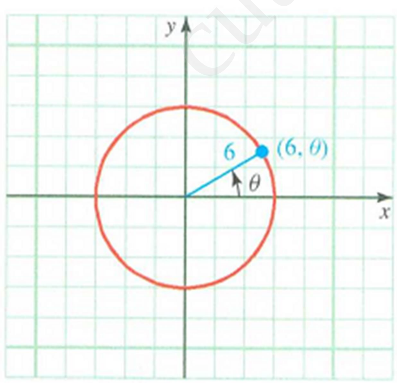
6. 3.2 Đồ thị cực

Đồ thị của một phương trình trong hệ tọa độ cực là tập hợp tất cả các điểm P mà tọa độ cực (r, θ) của nó thỏa mãn phương trình đã cho.

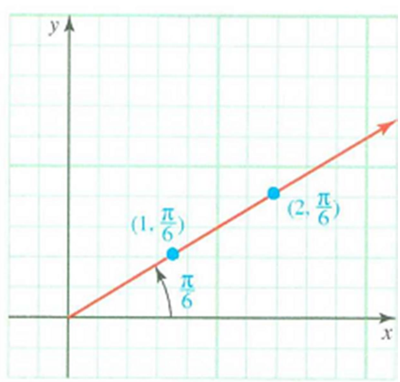
Ví dụ 3 (Vẽ đường tròn, đường thẳng và tia)

Vẽ: a. $r = 6$ b. $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Đáp số



a. The circle $r = 6$

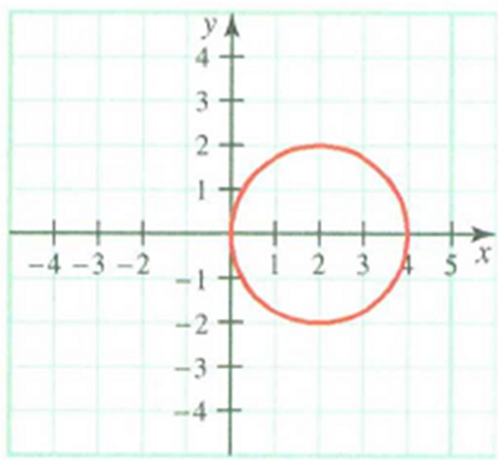


b. The line $\theta = \frac{\pi}{6}$

Ví dụ 4 (Vẽ bằng cách chuyển qua hệ tọa độ vuông góc)

Vẽ đồ thị của phương trình $r = 4\cos\theta$ bằng cách chuyển nó từ dạng cực về dạng vuông góc trước.

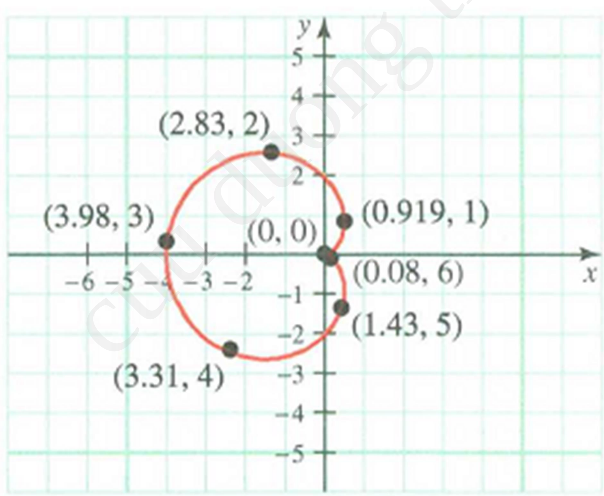
Đáp số



Ví dụ 5 (Vẽ hình cardioid)

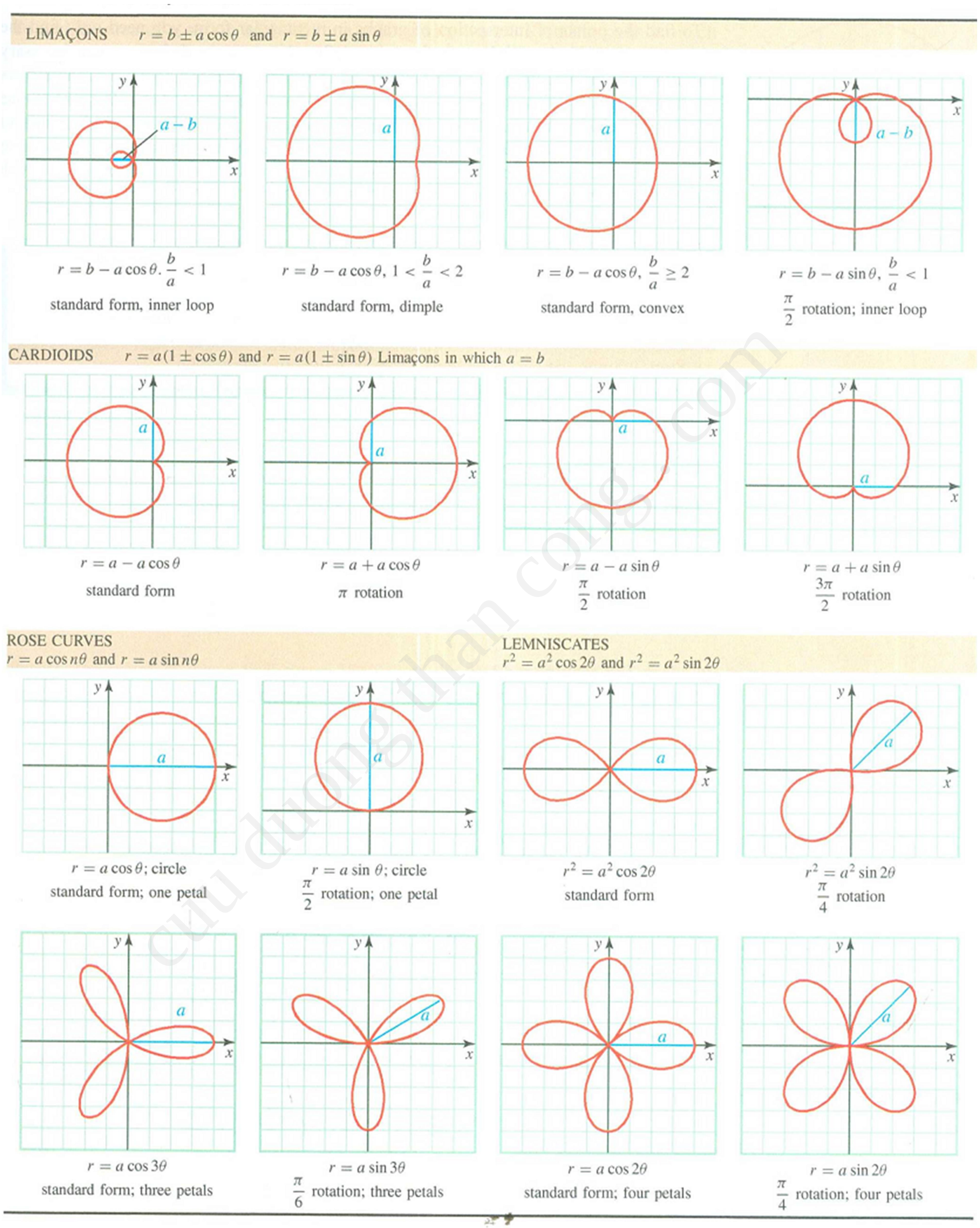
Vẽ $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Đáp số



6.3.3 Tóm tắt các đường cong dạng cực

Bảng 6.2 Danh mục các đường cong cực



LIMAÇONS $r = b \pm a\cos\theta$ and $r = b \pm a\sin\theta$

$r = b - a\cos\theta$. $\frac{b}{a} < 1$ standard form, inner loop

$r = b - a\cos\theta$, $1 < \frac{b}{a} < 2$ standard form, dimple

$r = b - a\cos\theta$, $\frac{b}{a} \geq 2$ standard form, convex

$r = b - a\sin\theta$, $\frac{b}{a} < 1$ $\frac{\pi}{2}$ rotation; inner loop

CARDIOIDS $r = a(1 \pm \cos\theta)$ and $r = a(1 \pm \sin\theta)$ Limaçons in which $a = b$

$r = a - a\cos\theta$ standard form

$r = a + a\cos\theta$ π rotation

$r = a - a\sin\theta$ $\frac{\pi}{2}$ rotation

$r = a + a\sin\theta$ $\frac{3\pi}{2}$ rotation

ROSE CURVES $r = a\cos n\theta$ and $r = a\sin n\theta$

LEMNISCATES $r^2 = a^2\cos 2\theta$ and $r^2 = a^2\sin 2\theta$

$r = a\cos\theta$; circle standard form; one petal

$r = a\sin\theta$; circle $\frac{\pi}{2}$ rotation; one petal

$r^2 = a^2\cos 2\theta$ standard form

$r^2 = a^2\sin 2\theta$ $\frac{\pi}{4}$ rotation

$r = a\cos 3\theta$ standard form; three petals

$r = a\sin 3\theta$ $\frac{\pi}{6}$ rotation; three petals

$r = a\cos 2\theta$ standard form; four petals

$r = a\sin 2\theta$ $\frac{\pi}{4}$ rotation; four petals

6. 3.4 Giao của các đường cong dạng cực

Trong hệ tọa độ cực, tương quan 1-1 giữa một cặp tọa độ thỏa mãn một phương trình và một điểm không còn nữa. Do đó, khi tìm giao điểm của hai đường cong trong hệ tọa độ cực, ta cần thiết phải vẽ hình để không bỏ sót giao điểm.

Tìm giao điểm của các đường cong cực

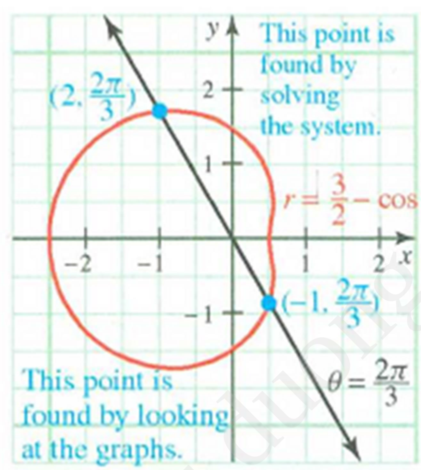
Bước 1 Tìm tất cả các nghiệm chung của các phương trình được cho.

Bước 2 Xác định xem điểm cực $r = 0$ có nằm trên hai đồ thị hay không.

Bước 3 Vẽ các đường cong để tìm các giao điểm khác.

Ví dụ 6 (Giao điểm của các đường cong cực)

Tìm các giao điểm của hai đường cong $r = \frac{3}{2} - \cos\theta$ và $\theta = \frac{2\pi}{3}$.



Đáp số: $(2, \frac{2\pi}{3})$, $(-1, \frac{2\pi}{3})$.

6.3.5 Diện tích trong tọa độ cực

Để tìm diện tích của một miền được bao bởi một đường cong cực, ta sử dụng tổng Riemann giống như khi ta xây dựng công thức tích phân cho diện tích một miền được mô tả bởi đường cong trong hệ tọa độ vuông góc. Tuy nhiên, thay vì sử dụng các hình chữ nhật cơ sở thì trong dạng cực, ta sử dụng diện tích của hình quạt tròn.

Diện tích của một hình quạt Diện tích của một hình quạt bán kính r được cho bởi

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

với θ là góc ở tâm của hình quạt đo bằng radian.

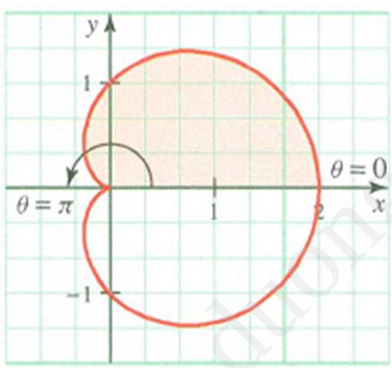
Định lý 6.1 Diện tích trong tọa độ cực

Cho $r = f(\theta)$ xác định một đường cong cực, với f liên tục và $f(\theta) \geq 0$ trên khoảng đóng $\alpha \leq \theta \leq \beta$, với $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Khi đó miền được tạo bởi đường cong $r = f(\theta)$ và các tia $\theta = \alpha$ và $\theta = \beta$ có diện tích

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2 d\theta$$

Ví dụ 7 (Tìm diện tích một phần của cardioid)

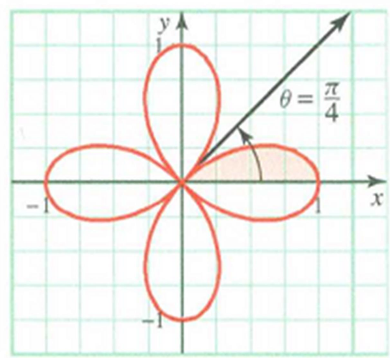
Tìm diện tích của nửa trên ($0 \leq \theta \leq \pi$) của cardioid $r = 1 + \cos\theta$.



Giải. Đường cardioid được minh họa như Hình 6.39.

Diện tích cần tìm: $A = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{4}$ (đvdt).

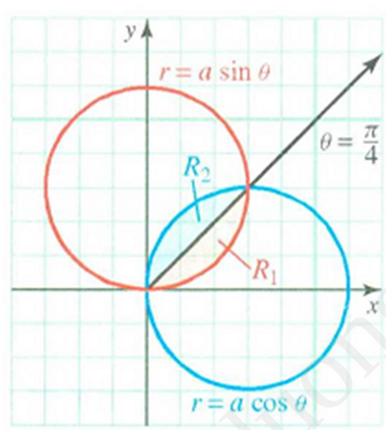
Ví dụ 8 (Tìm diện tích bao phủ bởi một hình hoa bốn cánh)Tìm diện tích bao phủ bởi hình hoa bốn cánh $r = \cos 2\theta$.



Giải. Đường hoa hồng bốn cánh được minh họa như Hình 6.40.

Diện tích cần tìm: $A = 8[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 2\theta d\theta] = \frac{\pi}{2}$ (đvdt).

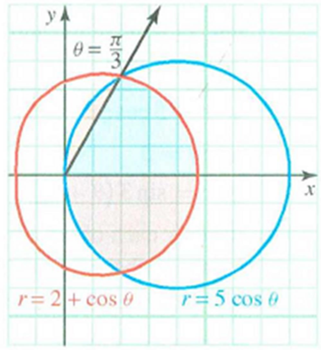
Ví dụ 9 (Tìm diện tích của vùng nằm giữa hai đường cong cực) Tìm diện tích của miền chung giữa hai đường cong $r = a\cos\theta$ and $r = a\sin\theta$.



Giải. Phần tính diện tích được minh họa như Hình 6.41.

Diện tích cần tìm: $A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 cos^2\theta d\theta = \frac{1}{8}a^2(\pi - 2)$ (đvdt).

Ví dụ 10 (Tìm diện tích giữa một đường tròn và một limacon) Tìm diện tích giữa đường tròn $r = 5\cos\theta$ và limacon $r = 2 + \cos\theta$. Làm tròn kết quả theo đơn vị diện tích đến hàng phần trăm.



Đáp số: $\frac{43\pi}{12} - \sqrt{3}$.

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

6.4.1 Độ dài cung của một đường cong

Nếu một hàm số f có đạo hàm liên tục trên một khoảng thì f được gọi là **khả vi liên tục** trên khoảng đó. Một phần của đồ thị của một hàm khả vi liên tục f nằm giữa $x = a$ và $x = b$ được gọi là **cung** của đồ thị trên đoạn $[a, b]$.

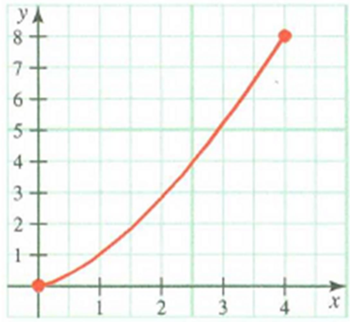
Độ dài cung Cho f là một hàm có đạo hàm f' liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Khi đó **độ dài cung**, s, của đồ thị của $y = f(x)$ giữa $x = a$ và $x = b$ được cho bởi tích phân

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Tương tự, với đồ thị của $x = g(y)$, với g' liên tục trên đoạn $[c, d]$, độ dài cung từ $y = c$ đến $y = d$ là

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\ dy$$

Ví dụ 1 (Độ dài cung của một đường cong)Tìm độ dài cung (làm tròn đến hàng phần trăm) của đường cong $y = x^{3/2}$ trên đoạn $[0,4]$.



Giải. Đồ thị của đường cong được minh họa như Hình 6.45.

Độ dài cung cần tìm: $s = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}dx = \frac{8}{27}[10^{3/2} - 1] \approx 9.0734$ (đvđd).

Ví dụ 2 (Độ dài cung của đường cong $x = g(y)$)

Tìm độ dài cung của đường cong

$$x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^{-1}$$

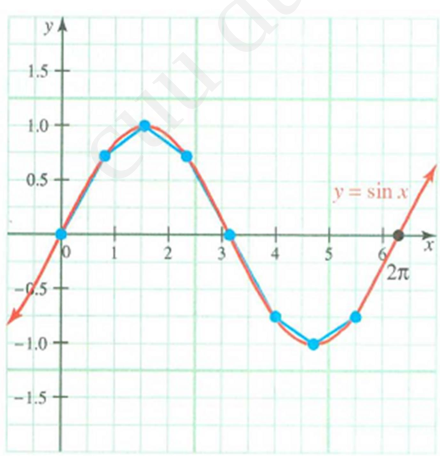
từ $y = 1$ đến $y = 3$.

Giải. Ta có $x = g(y)) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^{-1}$ suy ra $g'(y) = \frac{4y^4-1}{4y^2}$

Độ dài cung cần tìm: $s = \int_1^3 \sqrt{1 + (\frac{4y^4-1}{4y^2})^2}dy = \frac{53}{6}$ (đvđd).

Ví dụ 3 (Ước lượng độ dài cung sử dụng tích phân số)

Tìm độ dài cung xác định bởi $y = \sin x$ trên $[0,2\pi]$.

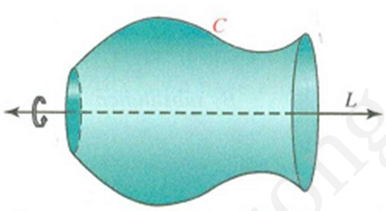


Đáp số:

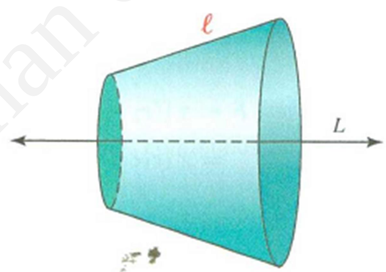
Phương pháp ($n = 4$)	Xấp xỉ
Hình chữ nhật	
Đầu mút trái	7.584476
Đầu mút phải	7.584476
Trung điểm	7.695299
Phương pháp hình thang	7.584476
Phương pháp Simpson	7.150712

6.4.2 Diện tích của một mặt tròn xoay

Khi cung của một đường cong được xoay quanh một đường thẳng L nó tạo ra một mặt được gọi là **mặt tròn xoay**. Đặc biệt, nếu cung được xoay là 1 đoạn thẳng thì hình được tạo ra là hình nón cụt.



a. The surface generated by revolving the curve C about a line L



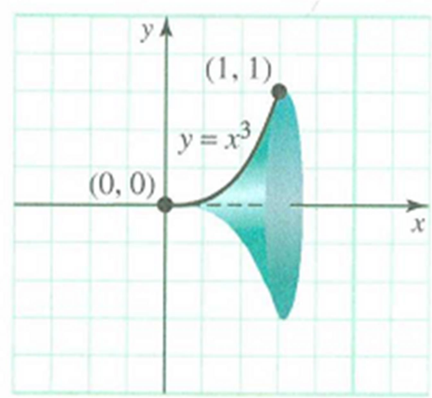
b. The line segment of length ℓ generates the frustum of a cone

Diện tích mặt Giả sử f' liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó mặt tạo ra khi xoay quanh trục Ox cung của đường cong $y = f(x)$ trên $[a, b]$ có **diện tích mặt**

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Ví dụ 4 (Diện tích của một mặt tròn xoay)

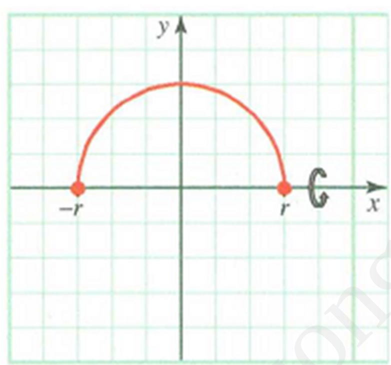
Tìm diện tích của mặt được tạo ra khi xoay quanh trục Ox cung của đường cong $y = x^3$ trên $[0,1]$.



Giải. Đồ thị của đường cong được minh họa như Hình 6.51. Ta có $f(x) = x^3$ suy ra $f'(x) = 3x^2$. Diện tích của mặt cần tìm là

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1 + (3x^2)^2}dx = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1) \text{ (đvdt).}$$

Ví dụ 5. (BTVN) Tìm công thức tính diện tích mặt cầu bán kính r.



Đáp số: $4\pi r^2$.

6.4.3 Độ dài cung và diện tích mặt trong dạng cực

Độ dài cung trong tọa độ cực Độ dài của một cung cực $r = f(\theta)$ với $\alpha \leq \theta \leq \beta$ được cho bởi tích phân

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \; d\theta$$

Ví dụ 6 (Tính độ dài cung cực)Tìm độ dài của đường tròn $r = 2\sin\theta$.

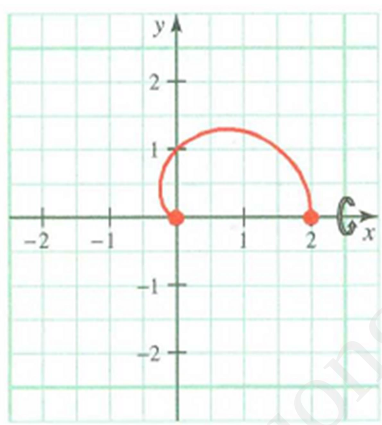
Giải. Đồ thị của đường cong được minh họa như Hình 6.55. Độ dài của đường tròn:

$$s = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = 2\pi \text{ (đvđd).}$$

Diện tích mặt tròn xoay trong tọa độ cực Nếu một đường cong cực $r = f(\theta)$ với $\alpha \leq \theta \leq \beta$ được xoay quanh trục x thì nó tạo ra một mặt có diện tích là

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta (r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \; d\theta$$

Ví dụ 7 (Tính diện tích mặt trong tọa độ cực) Tìm diện tích của mặt được tạo ra khi xoay quanh trục x nửa trên của cardioid $r = 1 + \cos\theta$.



Giải. Đường cong cardioid được minh họa như Hình 6.56. Diện tích của mặt cần tìm là

$$S = 2\pi \int_0^\pi r sin\theta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = \frac{32\pi}{5} \text{ (đvdt).}$$

6.5 Các ứng dụng vật lý: công, lực chất lỏng và trọng tâm

Trong phần này: Công, mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng, mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng, định lý về thể tích của Pappus.

Tích phân đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của vật lý. **Cơ học** là một lĩnh vực vật lý về tác dụng của các lực lên các vật thể. Trong phần này, ta sẽ trình bày cách làm thế nào sử dụng tích phân để tính công và lực do chất lỏng gây ra.

6.5.1 Công

Trong vật lý, "lực" là một tác động có xu hướng làm cho vật chuyển động.

Công thực hiện bởi môt lực không đổi Nếu một vật thể di chuyển một khoảng cách d theo hướng của một lực tác dụng F thì **công** W thực hiện là

$$W = Fd$$

Ví dụ như, công thực hiện khi nâng một bao xi măng nặng 90 lb lên 3 ft là $W = Fd = (90\ \text{lb})(3\ \text{ft}) = 270\ \text{ft} - \text{lb}$. Ta chú ý rằng nếu không có chuyển động thì không có công.

Bảng 6.3: Các đơn vị thường dùng cho công và lực

Khối lượng	Khoảng cách	Lực	Công
kg	m	Newton (N)	Joule
g	cm	dyne (dyn)	erg
slug	ft	pound	ft-lb

Để tìm công thực hiện bởi một vật chuyển động dưới tác dụng của một lực thay đổi thì phải cần đến tích phân.

Công thực hiện bởi môt lực biến thiên Công thực hiện bởi một lực biến thiên $F(x)$ khi di chuyển một vật dọc theo trục x từ $x = a$ đến $x = b$ được tính bằng

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

Ví dụ 1 (Công sinh bởi một lực biến thiên)

Một vật đặt tại x ft tính từ một điểm cố định được cho di chuyển dọc theo một đường thẳng bằng một lực $F(x) = (3x^2 + 5)$ lb. Công thực hiện bởi lực để di chuyển vật là bao nhiêu trong các trường hợp sau

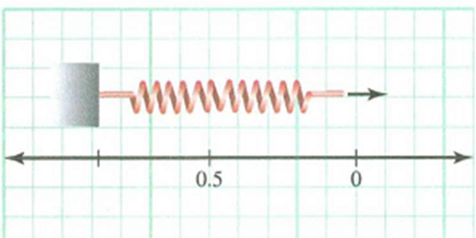
a. qua 4 ft đầu tiên? b. từ 1 ft đến 4 ft.

Đáp số

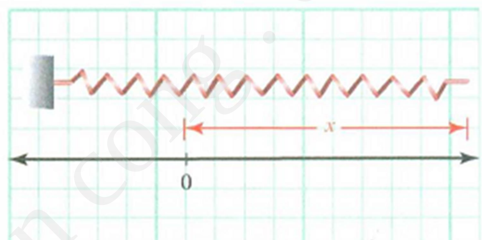
a. $W = \int_0^4 (3x^2 + 5)dx = 84 \quad \text{ft} - \text{lb}.$

b. $W = \int_1^4 (3x^2 + 5)dx = 78 \quad \text{ft} - \text{lb}.$

Định luật Hooke Khi một lò xo bị kéo khỏi vị trí cân bằng x đơn vị thì có một lực đàn hồi $F(x) = kx$ kéo lò xo trở lại vị trí cân bằng. Hằng số k trong công thức này được gọi là **độ cứng của lò xo**.



A spring at rest (equilibrium position)



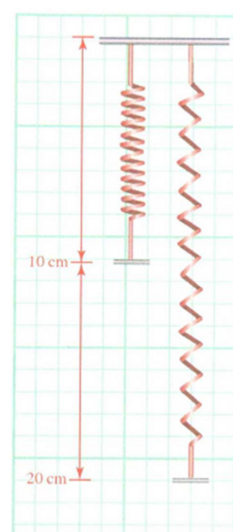
A spring stretched x units past equilibrium

Ví dụ 2 (Mô hình công sử dụng định luật Hooke)

Độ dài tự nhiên của một lò xo là 10 cm. Nếu cần một công là 2 ergs để kéo lò xo ra thành 18 cm, thì bao nhiêu công sẽ được thực hiện để kéo dãn lò xo đến độ dài là 20 cm?

Giải.

Giả sử rằng vị trí cân bằng đặt tại vị trí 0 trên trục số, và x là vị trí của đầu tự do của lò xo. Vì lực kéo giãn lò xo là $F(x) = kx$ nên công thực hiện khi kéo lò xo b cm khỏi vị trí cân bằng là



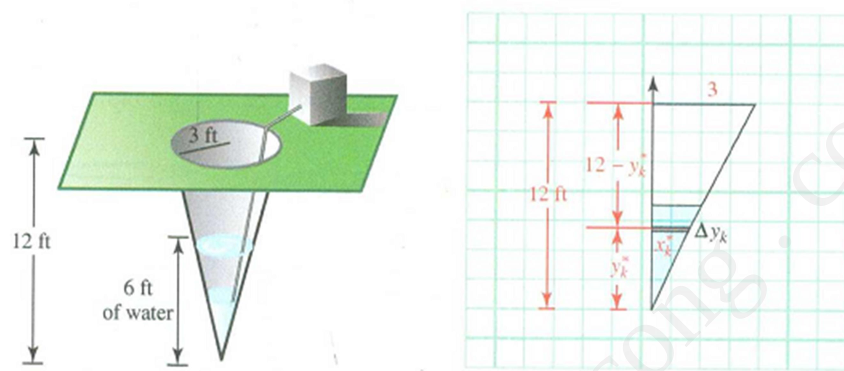
$$W = \int_0^b F(x)dx = \int_0^b kx \ dx = \frac{1}{2}kb^2$$

Với giả thiết $W = 2$ khi $b = 8$ ta suy ra $k = \frac{1}{16}$. Khi chiều dài của lò xo là 20 cm, nó được kéo dãn $b = 10 \ cm$, và công thực hiện là

$$W = \frac{1}{32}(10)^2 = 3.125 \ ergs$$

Ví dụ 3 (Mô hình công thực hiện khi bơm nước ra khỏi một bồn chứa)

Một bồn nước có hình nón tròn đứng có chiều cao là 12 ft và bán kính là 3 ft được chôn xuống mặt đất với đỉnh hướng xuống và đáy ngang với mặt đất. Nếu bồn chứa nước (mật độ khối lượng $\rho g = 62.4 \quad lb/ft^3$) đến độ cao 6 ft thì bao nhiêu công sẽ được thực hiện để bơm tất cả nước trong bồn lên mặt đất? Điều gì thay đổi nếu như nước được bơm đến độ cao 3 ft so với mặt đất?



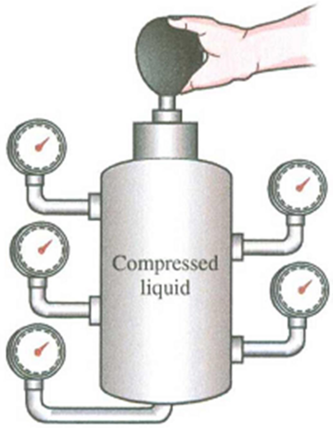
a. A conical water tank

b. A disk of water is $12 - y_k^*$ units from the top

Đáp số: $2106\pi \approx 6616 \quad \mathrm{ft-lb}$. Nếu bơm đến 3 ft so với mặt đất thì kết quả là $9263 \quad \mathrm{ft-lb}$

6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

Nếu ai đã từng lặn xuống nước hẳn đã thấy rằng áp suất (tức là độ lớn của lực trên một đơn vị diện tích) do khối lượng của nước tăng lên theo độ sâu. Quan sát kĩ hơn ta sẽ thấy rằng áp suất nước tại một điểm tỷ lệ thuận với độ sâu tại điểm đó. Nguyên tắc này cũng áp dụng cho các chất lỏng khác.



Trong vật lý, **nguyên lý Pascal** phát biểu rằng áp suất chất lỏng bằng nhau theo mọi hướng (xem hình 6.62). Điều này có nghĩa là áp suất phải như nhau tại mọi điểm trên một mặt phẳng được nhúng nằm ngang. Và khi đó, lực chất lỏng được cho bởi công thức sau.

Lực chất lỏng Nếu một mặt phẳng có diện tích A được nhúng ngang xuống một độ sâu h trong một chất lỏng thì trọng lượng của vật tạo ra một lực là

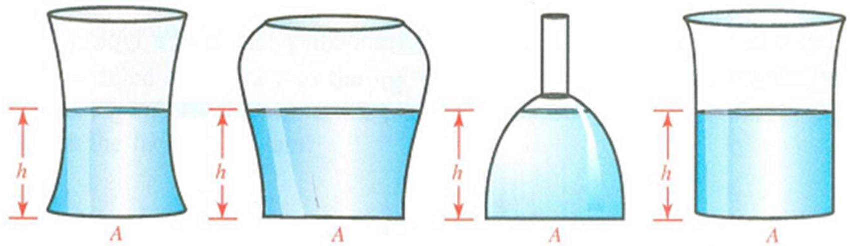
$$F = (\text{ápsuất})(\text{diệntích}) = \delta hA = \rho ghA$$

trên mặt phẳng đó, với δ là trọng lượng riêng, ρ là khối lượng riêng, và g là gia tốc trọng trường. Đây gọi là **lực chất lỏng** hay lực **thủy tĩnh**.

Bảng 6.4: Trọng lượng riêng, $\delta = \rho g$ (lb/ft ^{3}).

Chất lỏng	Trọng lượng riêng
nước	62.4
nước biển	64.0
xăng	42.0
dầu lửa	51.2
Dầu SAE 20	57.0
sữa	64.5
thủy ngân	849.0

Lưu ý. Lực chất lỏng không phụ thuộc hình dạng hoặc kích thước của bình chứa. Ví dụ như, mỗi bình chứa trong hình sau có cùng áp suất lên đáy vì chất lỏng có cùng độ cao h và đáy có cùng diện tích A.



Tuy nhiên khi mặt phẳng được nhúng thẳng đứng hoặc theo một góc nghiêng thì công thức đơn giản này không còn áp dụng được. Trong trường hợp này ta sẽ dùng tích phân để tính lực chất lỏng.

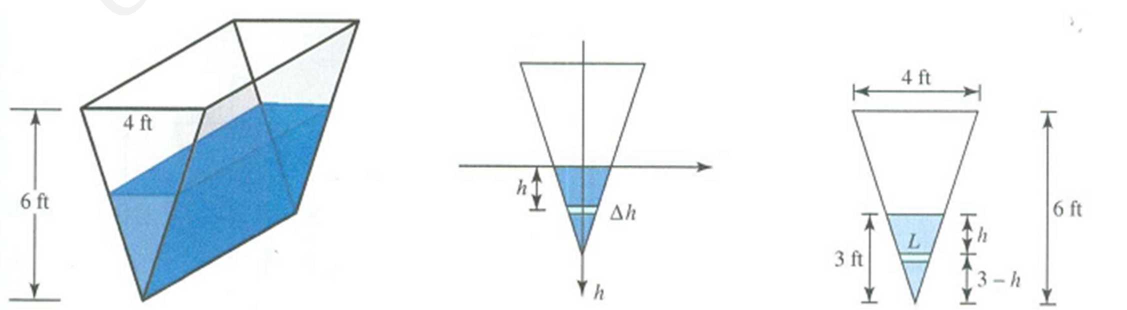
Lực chất lỏng (thủy tĩnh) Giả sử một mặt phẳng (một đĩa) được nhúng đứng vào một chất lỏng có trọng lượng riêng $\delta = \rho g \quad lb \;\; ft^3$ và phần ngập của đĩa là từ $h = a$ tới $h = b$ trên trục tung. Khi đó lực toàn phần F tạo ra bởi chất lỏng được cho bởi

$$F = \int_a^b \rho h L(h) dh$$

với h là độ sâu và $L(h)$ là chiều dài tương ứng của một dải xấp xỉ ngang.

Ví dụ 4 (Lực chất lỏng trên một mặt phẳng đứng)

Mặt cắt ngang của một máng là một tam giác cân lật ngược có chiều cao là 6 ft và đáy là 4 ft. Giả sử máng chứa nước đến độ sâu 3 ft. Tìm tổng lực chất lỏng lên một đỉnh.



a. A trough with half-filled triangular cross sections

b. Side view of trough

c. Use similar triangles to find $\frac{L}{4} = \frac{3-h}{6}$

Giải.

Trước hết, ta dựng một hệ trục tọa độ mà trục hoành nằm ở mặt chất lỏng và trục tung dương (trục h) hướng xuống. Sau đó ta tìm biểu thức cho chiều dài và chiều sâu của một dải mỏng ngang theo các biến. Giải sử là dải có độ dày là Δh và chiều dài L. Dùng tam giác đồng dạng ta có

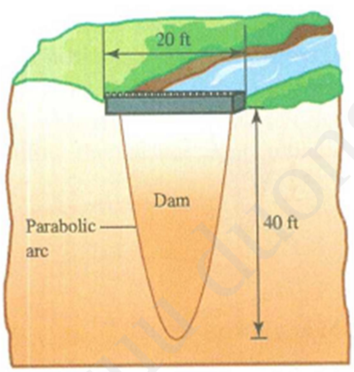
$$\frac{L}{4} = \frac{3-h}{6} \qquad nên \qquad L = \frac{2}{3}(3-h)$$

Ta thấy rằng dải xấp xỉ có diện tích là $\Delta A = \frac{2}{3}(3-h)\Delta h$. Cuối cùng, ta nhân tích này với trọng lượng riêng của chất lỏng tại một độ sâu cho trước ρh và lấy tích phân trên khoảng độ sâu của đĩa đứng.

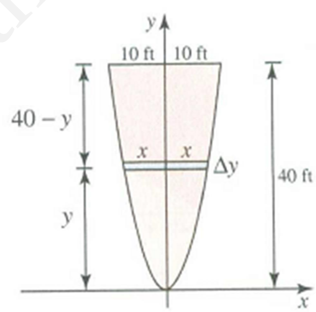
$$F = \int_0^3 \frac{2}{3}\delta h(3-h)\ dh = 187.2\ lb$$

Ví dụ 5 (Mô hình lực tác động lên một mặt đê)

Một bồn chứa nước đến đỉnh của một đập. Nếu đập có hình dạng của một parabol cao 40 ft và rộng 20 ft ở đỉnh thì tổng lực chất lỏng tác dụng lên mặt của đê là bao nhiêu?



a. Cross section of a dam



b. A typical horizontal strip is $40 - y$ ft below the water

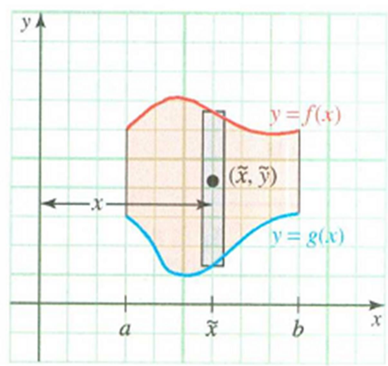
Đáp số: 532.480 lb

6.5.3 Mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng

Trong cơ học, đôi khi ta cần xác định điểm cân bằng của một đĩa có hình dạng phức tạp. **Moment lực** đo xu hướng quay của một vật và phụ thuộc vào lực và điểm tác động của lực vào vật đó. Từ thời của Archimedes, người ta đã biết rằng điểm cân bằng của một vật xảy ra tại nơi mà các moment triệt tiêu nhau.

Khối lượng của một vật là một độ đo của **quán tính** của vật đó; nghĩa là, xu hướng của vật duy trì trạng thái nghỉ hoặc chuyển động đều. Một đĩa mỏng có vật chất phân bố đều, sao cho khối lượng riêng ρ của nó (khối lượng trên một đơn vị diện tích) là hằng số, được gọi là **phân bố đều**. Điểm cân bằng của một vật phân bố đều như vậy được gọi là **trọng tâm** của nó. Ta sẽ thấy rằng trọng tâm có thể tính được bằng tích phân như thế nào.

Xét một vật thể phân bố đều bao phủ một miền R tạo bởi các đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên đoạn $[a, b]$, và xét một dải đứng mỏng xấp xỉ ở trong R.



Ta có các kết quả sau

Cho f và g là các hàm liên tục và thỏa mãn $f(x) \geq g(x)$ trên đoạn $[a, b]$, và xét một đĩa mỏng phân bố đều có khối lượng riêng là hằng số ρ bao phủ một miền R nằm giữa đồ thị của $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Khi đó

Khối lượng của R là: $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$

Trọng tâm của R là điểm $(\bar{x}, \bar{y})$ thỏa mãn

$$\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]\ dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx}$$

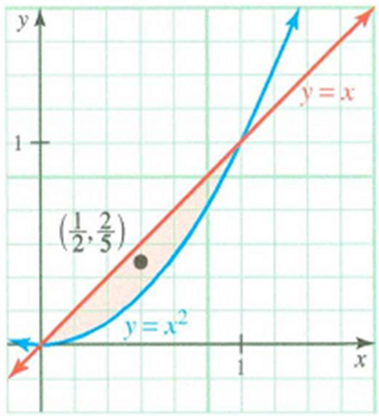
và

$$\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\ dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx}$$

trong đó M_x và M_y lần lượt là moment của vật theo trục x và y.

Ví dụ 6 (Trọng tâm của một đĩa mỏng)

Một đĩa phân bố đều R có khối lượng riêng $\rho = 1$ và được tạo bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$. Tìm khối lượng và trọng tâm R.



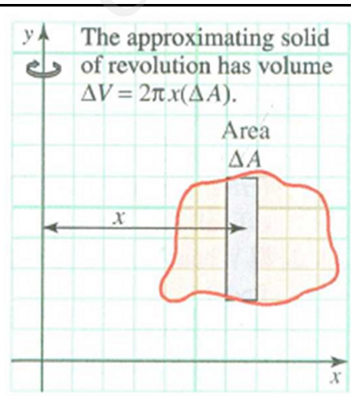
Đáp số: $m = \frac{1}{6}$; $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

6.5.4 Định lý thể tích của Pappus

Định lý sau đây của Pappus of Alexandria, nhà hình học vĩ đại cuối cùng của Hi Lạp, cho ta sự liên hệ giữa trọng tâm và thể tích của vật tròn xoay.

Định lý 6.2: Định lý thể tích của Pappus

Vật rắn tạo ra bằng cách xoay một miền R quanh một đường thẳng nằm ngoài biên của nó (nhưng trong cùng mặt phẳng) có thể tích $V = As$, với A là diện tích của R và s là quãng đường đi của trọng tâm của R.



Ví dụ 7 (Thể tích của một vòng xuyến sử dụng định lý thể tích của Pappus)

Khi một hình tròn bán kính r được xoay quanh một đường thẳng trên mặt phẳng chứa đường tròn đặt cách tâm của nó R đơn vị ($R > r$) thì vật rắn tạo ra được gọi là một vòng xuyến. Hãy chứng minh rằng vòng xuyến này có thể tích là $V = 2\pi^2 r^2 R$.

6.6 Ứng dụng vào thương mại, kinh tế và khoa học đời sống

6.6.1 Giá trị tương lai và giá trị hiện tại của một dòng thu nhập

Nhớ lại ở Chương 2 rằng khi P_0 đô-la được đầu tư với lãi suất liên tục hằng năm là r thì sau đó t năm, tài khoản có trị giá $A = P_0 e^{rt}$ đô-la. Lượng A được gọi là giá trị tương lai của giá trị đầu P_0 đô-la, nhưng giá trị tương lại sẽ là bao nhiêu nếu như tiền không phải được đầu tư một lần với tổng giá trị là P_0 mà được đầu tư liên tục trong cả quá trình? Khó khăn nằm ở chỗ là tại một thời điểm bất kì, tiền cũ được đầu tư trước thì đã có lãi nhiều hơn là tiền mới được đầu tư sau. Chúng ta sẽ giải quyết bài toán này trong Ví dụ 1.

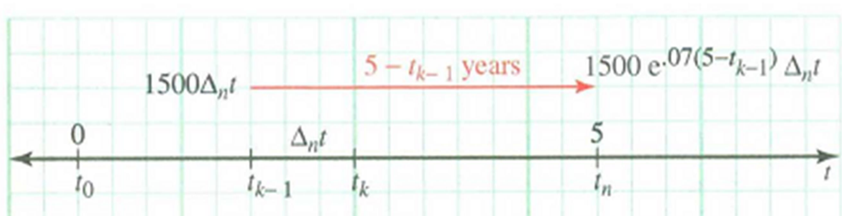
Ví dụ 1 (Tính giá trị tương lai của một dòng thu nhập liên tục)

Tiền được chuyển vào môt tài khoản liên tục với tốc độ là 1500 đô-la/năm. Nếu tài khoản có lãi suất liên tục là 7 % thì giá trị tương lai của tài khoản sau 5 năm là bao nhiêu?

Giải.

Chia khoảng thời gian 5 năm thành n đoạn, mỗi đoạn có độ dài là $\Delta_n t = (5 - 0)/n$, và với $k = 1,2,\cdots,n$, đặt t_{k-1} là điểm đầu của đoạn con thứ k, $[t_{k-1}, t_k]$. Khoản tiền đầu tư trong khoảng thứ k là $1500\Delta_n t$. Để xấp xỉ, ta giả sử rằng tất cả tiền này được đầu tư tại thời điểm t_{k-1}. Khi đó vì còn $5 - t_{k-1}$ năm nên số tiền này sẽ tăng lên $(1500\Delta_n t)e^{0.07(5-t_{k-1})}$ đô-la; nghĩa là

$$\text{Giá trị tương lai của tiền đầu tư trong đoạn thứ } k = 1500e^{0.07(5-t_{k-1})}\Delta_n t$$



Giá trị tương lai của toàn bộ dòng thu nhập có thể được xấp xỉ bằng tổng của giá trị tương lai của tiền đầu tư trong cả n đoạn con. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}\text{Giá trị tương lai của tiền đầu tư} &\approx \sum_{k=1}^{n} 1500e^{0.07(5-t_{k-1})}\Delta_n t \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1500e^{0.07(5-t_{k-1})}\Delta_n t \\ &= \int_0^5 1500e^{0.07(5-t)}\ dt \\ &= 8980.02\end{aligned}$$

Nhớ lại trong Chương 2 rằng giá trị hiện tại, PV, của A đô-la được đầu tư với lãi suất tích lũy liên tục hàng năm r trong khoảng thời gian T năm là lượng tiền $PV = Ae^{-rt}$ mà phải được đầu tư hôm nay với lãi suất như trên để có được A đô-la vào lúc đáo hạn. Cũng như vậy, giá trị hiện tại của một dòng thu nhập $f(t)$ được tạo ra liên tục với một tốc độ cố định trong khoảng thời gian định trước là lượng tiền mà đã phải được đầu tư vào đầu thời kì với lãi suất như trên để tạo ra dòng thu nhập trong cả thời kì.

Giá trị tương lai và giá trị hiện tại Cho $f(t)$ là lượng tiền đầu tư tại thời điểm t trong khoảng thời gian $[0, T]$ trong một tài khoản có lãi suất hàng năm là r được tích lũy liên tục. Thế thì **giá trị tương lai** của dòng thu nhập trong khoảng thời gian trên được tính bằng

$$FV = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\ dt$$

và **giá trị hiện tại** của dòng thu nhập đó trong khoảng thời gian trên là

$$PV = \int_0^T f(t)e^{-rt}\ dt$$

6.6.2 Thay đổi tích lũy và lợi nhuận ròng

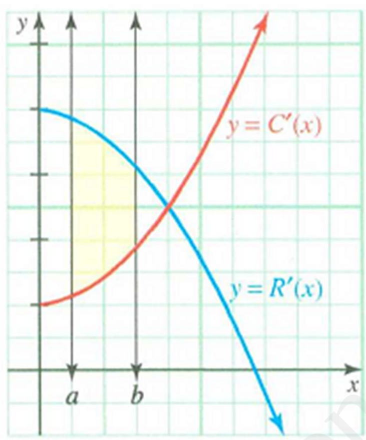
Trong một số ứng dụng, ta được cho tốc độ biến thiên $Q'(x)$ của một đại lượng $Q(x)$ và được yêu cầu tìm thay đổi thực $Q(b) - Q(a)$. Định lý cơ bản của giải tích cho ta biết rằng lượng thay đổi thực này được xác định bởi tích phân

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(x)\ dx$$

Tích phân này cũng có thể được coi như **thay đổi tích lũy**. Một ứng dụng trong thương mại là **lợi nhuận ròng** của một quá trình sản xuất. Giả sử rằng $C(x)$ biểu diễn tổng chi phí sản xuất x đơn vị hàng hóa và $R(x)$ biểu diễn lợi nhuận tạo ra khi bán những hàng hóa này. Khi đó $E(x) = R(x) - C(x)$ biểu diễn lợi nhuận, và lợi nhuận ròng cho số sản phẩm $a \le x \le b$ được cho bởi tích phân

$$E(b) - E(a) = \int_a^b E'(x)\ dx = \int_a^b [R'(x) - C'(x)]\ dx$$

Lợi nhuận ròng có thể được biểu diễn hình học thành diện tích giữa các đường cong chi phí biên và lợi nhuận biên.



Ví dụ 2 (Tính lợi nhuận ròng)

Trong một quá trình sản xuất, chi phí biên và lợi nhuận biên (tính bằng ngàn đô-la) khi sản xuất x đơn vị sản phẩm lần lượt là

$$C'(x) = 0.1x^2 + 4x + 10 \quad \text{và} \quad R'(x) = 70 - x$$

Tính lợi nhuận ròng của quá trình khi x đi từ $x = 0$ đến $x = x_m$, với x_m là mức sản xuất mà tại đó chi phí biên bằng lợi nhuận biên.

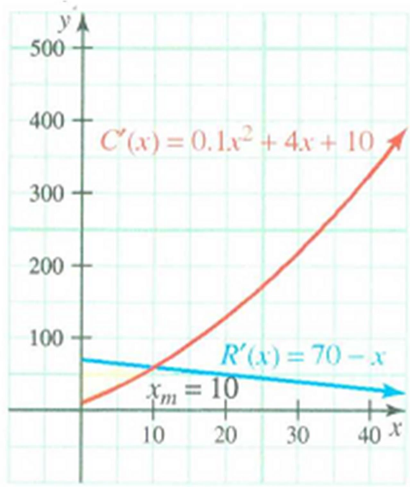
Giải.

Trước hết, chú ý rằng chi phí biên bằng lợi nhuận biên khi

$$0.1x^2 + 4x + 10 = 70 - x$$

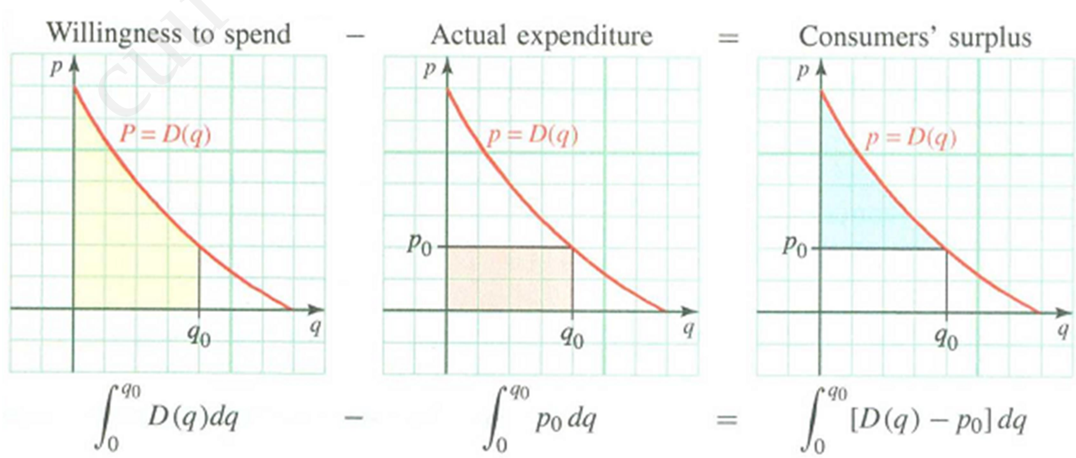
Giải ra ta được hai giá trị $x = -60{,}10$. Loại đi giá trị âm thì $x_m = 10$, do đó lợi nhuận ròng khi x đi từ 0 đến 10 là

$$E(10) - E(0) = \int_0^{10} [R'(x) - C'(x)]\ dx = \int_0^{10} [70 - x - (0.1x^2 + 4x + 10)]\ dx$$
$$= \frac{950}{3}$$



6.6.3 Thặng dư của khách hàng và nhà sản xuất

Trong một nền kinh tế cạnh tranh, tổng số tiền mà khách hàng phải trả cho một mặt hàng thường ít hơn tổng số tiền mà họ sẵn sàng bỏ ra để mua mặt hàng đó. Hiệu giữa hai số tiền này có thể được xem như một khoản tiết kiệm cho khách hàng và trong kinh tế học được gọi là **thặng dư của khách hàng**.



Thặng dư của khách hàng Nếu q_0 đơn vị của một mặt hàng được bán với giá là p_0 đô-la một đơn vị, và nếu $p = D(q)$ là hàm cầu của khách hàng cho mặt hàng đó thì

Thặng dư của khách hàng = [số tiền khách hàng muốn trả cho q_0 đơn vị] −[số tiền thực sự khách hàng trả cho q_0 đơn vị]

$$CS = \int_0^{q_0} D(q)dq - p_0q_0$$

Thặng dư của nhà sản xuất chính là mặt còn lại của đồng xu mà mặt kia là thặng dư của khách hàng. Đặc biệt, một hàm cung $p = S(q)$ cho ta giá của một đơn vị mà nhà sản xuất sẵn sàng chấp nhận để cung cấp q đơn vị ra thị trường. Tuy nhiên, bất cứ nhà sản xuất nào sẵn sàng chấp nhận ít hơn $p_0 = S(q_0)$ đô-la cho q_0 đơn vị thì được lợi khi giá thực sự là p_0. **Thặng dư của nhà sản xuất** chính là hiệu giữa giá nhà sản xuất sẵn sàng chấp nhận khi bán q đơn vị và giá thực sự.

Thặng dư của nhà sản xuất Nếu q_0 đơn vị của một mặt hàng được bán với giá p_0 đô-la một đơn vị, và nếu $p = S(q)$ là hàm cung của nhà sản xuất cho mặt hàng đó thì

Thặng dư của nhà sản xuất = [số tiền khách hàng thực sự trả cho q_0 đơn vị] −[số tiền nhà sản xuất sẵn sàng chấp nhận khi bán q_0 đơn vị]

$$PS = p_0q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\ dq$$

Ví dụ 3 (Tính thặng dư của khách hàng và nhà sản xuất)

Một nhà sản xuất lốp xe ước tính rằng q (ngàn) lốp tròn sẽ được mua bởi đại lý khi giá là

$$p = D(q) = -0.1q^2 + 90$$

đô-la/lốp, và cùng số lượng lốp như vậy sẽ được cung cấp khi giá là

$$p = S(q) = 0.2q^2 + q + 50$$

đô-la/lốp.

a. Tìm giá cân bằng (tức là, khi cung bằng cầu) và số lượng cung và cầu tại giá đó.

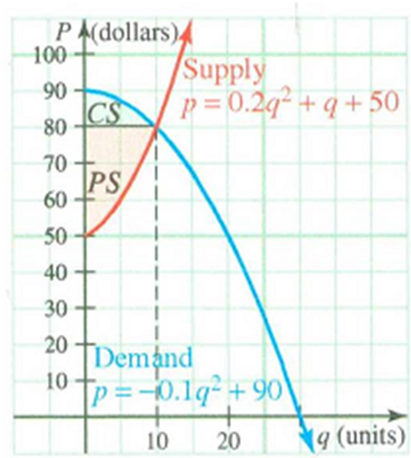
b. Xác định thặng dư của khách hàng và của nhà sản xuất tại giá cân bằng.

Giải.

a. Cung bằng cầu khi

$$0.2q^2 + q + 50 = -0.1q^2 + 90$$

Giải ra ta được một giá trị dương là $q = 10$, và $p = S(10) = D(10) = 80$. Do đó, giá cân bằng là 80 đô-la/lốp, khi cung và cầu là 10000 lốp.



b. Sử dụng $p_0 = 80$ và $q_0 = 10$, ta tìm được thặng dư của khách hàng là $\frac{200}{3}$ và thặng dư của nhà sản xuất là $\frac{550}{3}$. Thặng dư của khách hàng và nhà sản xuất lần lượt là các miền được đánh dấu CS và PS trên hình.

6.6.4 Sống sót và đổi mới

Có một loại bài toán quan trọng trong đó hàm sống sót cho ta tỷ lệ cá thể trong môt nhóm dân số được dự đoán còn ở lại trong nhóm và hàm đổi mới cho ta tỷ lệ mà các các thể mới được dự đoán là sẽ tham gia vào nhóm. Các bài toán **sống sót và đổi mới** như vậy xuất hiện trong nhiều lĩnh vực. Trong tài chính, "dân số" là số tiền trong một tài khoản đầu tư và "sống sót và đổi mới" được dùng để nói đến kết quả của việc đầu tư.

Ví dụ 4 (Mô hình hóa sự đăng kí khám bệnh sử dụng sống sót và đổi mới)

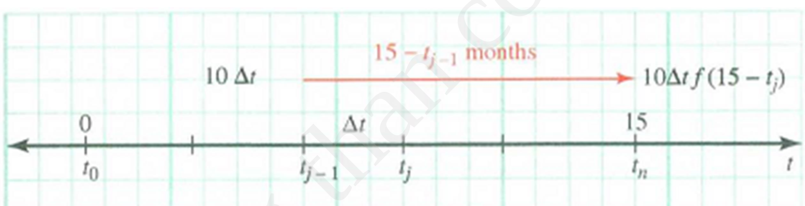
Một phòng khám vừa mở cửa. Thống kê từ những phòng khám tương tự cho biết rằng tỷ lệ bệnh nhân mà vẫn còn điều trị tại phòng khám t tháng kể từ lần khám đầu tiên được cho bởi hàm số $f(t) = e^{-t/20}$. Phòng khám ban đầu nhận 300 người đến khám và dự định sẽ nhận bệnh nhân mới với tốc độ 10 người/tháng. Khoảng bao nhiêu người sẽ vẫn còn điều trị tại phòng khám sau 15 tháng nữa?

Giải.

Vì $f(15)$ là tỷ lệ bệnh nhân có thời gian điều trị tiếp tục ít nhất thêm 15 tháng nữa, ta suy ra rằng với số lượng hiện tại là 300 bệnh nhân, chỉ có $300f(15)$ sẽ còn tiếp tục điều trị sau 15 tháng nữa.

Để xấp xỉ số bệnh nhân mới mà vẫn còn được điều trị sau 15 tháng nữa, ta chia khoảng thời gian 15 tháng ra thành n khoảng con có độ dài là Δt tháng và đặt t_{j-1} là điểm đầu của khoảng con thứ j. Ta suy ra rằng số lượng bệnh nhân mới mà vẫn còn điều trị sau 15 tháng kể từ bây giờ có thể được xấp xỉ bởi tổng

$$\sum_{j=1}^{n} 10f(15 - t_{j-1})\Delta t$$



Cộng thêm với số lượng bệnh nhân đang có mà vẫn tiếp tục điều trị sau 15 tháng nữa ta được tổng

$$P = 300f(15) + \lim_{n\to\infty} 10f(15 - t_{j-1})\Delta t$$

$$= 300f(15) + \int_0^{15} 10f(15 - t)\; dt$$

$$= 300e^{-3/4} + 10e^{-3/4}\int_0^{15} e^{t/20}\; dt$$

$$\approx 247.24$$

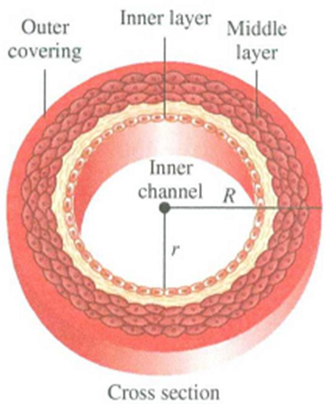
Nghĩa là, sau 15 tháng nữa, phòng khám sẽ còn điều trị cho khoảng 247 bệnh nhân.

6.6.5 Dòng máu đi qua động mạch

Ví dụ 5 (Mô hình hóa dòng máu)

Tìm một biểu thức cho lưu lượng theo thể tích (theo cm ^{3}/s) mà máu chảy qua một động mạch có bán kính R nếu tốc độ của máu tại khoảng cách r cm từ trục chính giữa động mạch là $S(r) = k(R^2 - r^2)$, với k là hằng số.

Giải.



Chia đoạn $0 \leq r \leq R$ thành n đoạn bằng nhau có chiều dày là Δr cm và gọi r_j là điểm bắt đầu của đoạn thứ j. Những đoạn con này tạo nên n vòng đồng tâm. Nếu Δr nhỏ thì diện tích của vòng thứ j xấp xỉ diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng là chu vi của biên (trong) của vòng và có chiều dày là Δr. Tức là,

$$\text{Diện tích của vòng thứ } j \approx 2\pi r_j \Delta r$$

Nhân diện tích của vòng thứ j (cm ^{2}) với tốc độ (cm/s) của máu chảy qua vòng này, ta được

$$\begin{aligned}
&\text{Lưu lượng theo thể tích của dòng chảy qua vòng } j \\
&\quad = (\text{diện tích của vòng } j)(\text{tốc độ máu qua vòng } j) \\
&\quad = (2\pi r_j \Delta r) S(r_j) \\
&\quad = (2\pi r_j \Delta r)[k(R^2 - r_j^2)] \\
&\quad = 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r
\end{aligned}$$

Lưu lượng theo thể tích qua cả mặt cắt là tổng của n số hạng như vậy, nghĩa là

$$\begin{aligned}
\text{Lưu lượng theo thể tích} &\approx \sum_{j=1}^{n} 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r
\end{aligned}$$

$$= \int_0^R 2\pi k(R^2 r - r^3)\ dr$$

$$= \frac{\pi k R^4}{2}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài 6.1. Phác họa miền bị giới hạn bởi các đường cong được cho sau đây và tìm diện tích của nó:

$y = x^2,\ y = x,\ x = -1,\ x = 1$

$y = 6x^2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 5.$

$y = 4x^3,\ y = 0, x = 1,\ x = 4.$

$y = x^3,\ y = x,\ x = -1,\ x = 1$

$y = x^2,\ y = x^3$

$y = x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$

$y = x^2 - 1,\ x = -1,\ x = 2,\ y = 0$

$y = x^4 - 3x^2,\ y = 6x^2$

$x = 8 - y^2,\ x = y^2$

$x = 2 - y^2,\ x = y$

$y = x^2 + 3x - 5,\ y = -x^2 + x + 7$

$y = 2x^3 + x^2 - x - 1,\ y = x^3 + 2x^2 + 5x - 1$

$y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$

$y = \sin x,\ y = \sin 2x,\ x = 0,\ x = \pi$

$y = |x|,\ y = x^2 - 6$

$y = |4x - 1|,\ y = x^2 - 5,\ x = 0,\ x = 4$

Bài 6.2. Chứng minh rằng, miền phẳng được xác định bởi các bất đẳng thức sau: $x^2 + y^2 \le 8,\ x \ge y,\ y \ge 0$ có diện tích bằng π (đvdt).

Bài 6.3. Tìm diện tích của miền được giới hạn bởi đường cong: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ và các trục tọa độ.

Bài 6.4. Một công ty S đã tìm ra hàm chi phí để sản xuất ra sản phẩm thứ x được cho bởi công thức: $C(x) = \dfrac{100}{\sqrt{x+25}} + 50$.

Hỏi tổng chi phí để sản xuất ra 2000 sản phẩm là bao nhiêu?

Bài 6.5. Doanh thu biên và chi phí biên theo ngày (đơn vị: $) được xác định theo tháng thứ t bởi công thức: $R'(t) = 500e^{0,01t}$ và $C(t) = 50 - 0,1t$. Hãy tính tổng lợi nhuận trong năm đầu tiên.

Bài 6.6. Tính thể tích của vật thể được tạo ra khi quay miền bị giới hạn bởi các đường cong sau quanh trục Ox:

1. $y = \sqrt{x}$, với $0 \le x \le 1$
2. $y = \sqrt[3]{x}$, với $0 \le x \le 8$
3. $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$
4. $x = 0,\ x = 1,\ y = x + 1,\ y = x + 2$
5. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$
6. $y = e^{x},\ y = e^{-x},\ 0 \le x \le 2$.

Bài 6.7 Tính thể tích của vật thể được tạo ra khi quay miền bị giới hạn bởi các đường cong sau quanh trục Oy:

1. $y = 2x,\ y = 1$ và trục Oy
2. $y = \sqrt{x},\ y = 1$ và trục Oy
3. $y = 1 - x^2$ trục Oy và tia Ox
4. $y = x^2,\ y = 1 - x^2$ trục Oy, $x \ge 0$
5. $y = e^{-x^2},\ y = \dfrac{1}{2}$ và trục Oy.

Bài 6.8. Tính thể tích của vật thể được tạo ra khi quay miền bị giới hạn bởi các đường cong sau quanh một đường thẳng tương ứng:

1. $y = 2 - \dfrac{1}{2}x, y = 0, x = 1, x = 2$ quanh Ox.
2. $y = \sqrt{x - 1}, y = 0, x = 5$ quanh Ox.
3. $x = 2\sqrt{y}, x = 0, y = 9$ quanh Oy.
4. $x = y - y^2, x = 0$ quanh Oy.
5. $y = \dfrac{1}{4}x^2, y = 5 - x^2,\ x \ge 0$ quanh Ox.

6, $y = x^2, x = y^2$ quanh đường thẳng: $y = 1$.

7. $y = x^2, y = 4$ quanh đường thẳng: $y = 4$.

8. $y = 1 + \sec x, y = 3$ quanh đường thẳng: $y = 1$.

9. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ quanh đường thẳng: $y = -1$.

10. $y = x^2, x = y^2$ quanh đường thẳng: $x = -1$.

11. $x = y^2, x = 1 - y^2$ quanh đường thẳng: $x = 3$.

12. $y = x, y = 0, x = 2, x = 4$ quanh đường thẳng: $x = 1$.

Bài 6.9. Vẽ đồ thị của các đường cong sau trong tọa độ cực:

1. $r = 3, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$
2. $\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 3$
3. $r = 2\theta, \ \theta \ge 0$
4. $r = \theta + 1, \ 0 \le \theta \le \pi$
5. $r = 2\cos\theta$
6. $r = 5\sin 3\theta$
7. $r^2 = 16\cos 2\theta$
8. $r = 3\cos 3\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$
9. $r = 5\cos 3\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
10. $r = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$
11. $r = 2 + \cos\theta$
12. $r^2 = 16\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$
13. $r = 1 + \sin\theta$
14. $r\cos\theta = 2$
15. $r = 1 + 3\cos\theta$
16. $r = -2\sin\theta$

Bài 6.10. Tìm tất cả các điểm giao nhau của các đường cong cực được cho bởi:

1. $\begin{cases} r = 4\cos\theta \\ r = 4\sin\theta \end{cases}$
2. $\begin{cases} r = 4\sin\theta \\ r = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} r^2 = 9\cos 2\theta \\ r = 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} r = 3\theta \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

5. $\begin{cases} r = 2(1+\sin\theta) \\ r = 2(1-\sin\theta) \end{cases}$

6. $\begin{cases} r^2 = \sin 2\theta \\ r = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$

7. $\begin{cases} r = 2(1-\cos\theta) \\ r = 4\sin\theta \end{cases}$

8. $\begin{cases} r = \dfrac{4}{1-\cos\theta} \\ r = 2\cos\theta \end{cases}$

<u>Bài 6.11</u>. Tìm diện tích của miền phẳng được giới hạn bởi các đường cong cực: $f(\theta),\ \theta = a,\ \theta = b,$ với $a \le \theta \le b$, biết:

1. $f(\theta) = \sin\theta,\quad 0 \le \theta \le \pi/6$
2. $f(\theta) = \cos\theta,\quad 0 \le \theta \le \pi/6$
3. $f(\theta) = \sec\theta,\quad -\pi/4 \le \theta \le \pi/4$
4. $f(\theta) = \sqrt{\sin\theta},\quad \pi/6 \le \theta \le \pi/2$
5. $f(\theta) = e^{\theta/2},\quad 0 \le \theta \le 2\pi$
6. $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta,\quad 0 \le \theta \le \pi/4$
7. $f(\theta) = \dfrac{\theta}{\pi},\quad 0 \le \theta \le 2\pi$
8. $f(\theta) = \dfrac{\theta^2}{\pi},\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

<u>Bài 6.12</u>. Tìm diện tích tạo bởi của một thòng lọng của đường hoa hồng bốn cánh: $r = 2\sin 2\theta$

<u>Bài 6.13</u>. Tìm diện tích của miền được giới hạn bởi đường hoa hồng ba cánh: $r = a\sin 3\theta$.

<u>Bài 6.14.</u> Tìm diện tích của miền nằm bên trong đường tròn: $r = 4\cos\theta$ và nằm bên ngoài đường tròn: $r = 2$.

<u>Bài 6.15</u>. Tìm diện tích của miền nằm bên trong đường tròn: $r = a$ và nằm bên ngoài đường cardioid: $r = a(1-\cos\theta)$.

<u>Bài 6.16</u>. Tìm diện tích của miền nằm bên trong đường tròn: $r = 6\cos\theta$ và nằm bên ngoài đường cardioid: $r = 2(1+\cos\theta)$.

Bài 6.17. Vẽ đồ thị của đường cong cực: $r = 4 + 2\sin\dfrac{5\theta}{2}$ và tìm diện tích của miền được giới hạn bởi đường cong này.

Bài 6.18. Tìm độ dài cung của các đường cong $y = f(x)$ trên đoạn được chỉ ra như sau:

1. $f(x) = 3x + 2$ trên $[-1;2]$
2. $f(x) = 5 - 4x$ trên $[-2;0]$
3. $f(x) = 1 - 2x$ trên $[1;3]$
4. $f(x) = 1 - 3x$ trên $[0;1]$
5. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 1$ trên $[0;4]$
6. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{3/2} + 2$ trên $[1;4]$
7. $f(x) = \dfrac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2}$ trên $[0;3]$
8. $f(x) = \dfrac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2}$ trên $[1;4]$
9. $f(x) = \dfrac{1}{12}x^5 + \dfrac{1}{5}x^{-3}$ trên $[1;2]$
10. $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 - \ln x$ trên $[1;2]$
11. $f(x) = x^{3/2} - \dfrac{1}{3}x^{1/2}$ trên $[4;16]$
12. $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{12}x^{-1}$ trên $[1;2]$
13. $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} - \sec^{-1}(e^x)$ trên $[0;\ln 2]$

Bài 6.19. Tìm độ dài cung của đường cong: $9x^2 = 4y^3$ giữa các điểm $(0;0)$ và $(2\sqrt{3};3)$.

Bài 6.20. Tìm độ dài cung của đường cong: $(y+1)^2 = 4x^3$ giữa các điểm (0;-1) và (1;1).

Bài 6.21. Tìm độ dài cung của đường cong xác định bởi $\int_1^x \sqrt{t^2-1}dt$ trên đoạn [1;2].

Bài 6.22. Tìm độ dài cung của đường cong xác định bởi $\int_1^x \sqrt{t^2+1}dt$ trên đoạn [0;1].

Bài 6.23. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi quay các đường cong sau quanh trục Ox:

1. $f(x)=2x+1$ trên $[0;2]$
2. $f(x)=2x-1$ trên $[1;2]$
3. $f(x)=\sqrt{x}$ trên $[2;6]$
4. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^{-1}$ trên $[1;2]$

Bài 6.24. Tìm độ dài cung của các đường cong cực sau:

1. $r=\cos\theta$
2. $r=\sin\theta+\cos\theta$
3. $r=e^{3\theta}, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
4. $r=e^{1-\theta},\ 0\le\theta\le 1$
5. $r=\theta^2,\ 0\le\theta\le 1$
6. $r=\cos^2\frac{\theta}{2}$
7. $r=\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Bài 6.25. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi quay các đường cong cực sau quanh trục Ox:

1. $r=5,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$
2. $r=1-\cos\theta,\ \ 0\le\theta\le\pi$
3. $r=\csc\theta,\ \ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$
4. $r=\cos^2\frac{\theta}{2},\ 0\le\theta\le\pi$

Bài 6.26. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi ta quay cung của đường cong: $y=\frac{1}{3}x^3+\left(4x\right)^{-1}$, với $1\le x\le 3$ quanh trục:

a.) Ox

b.) Oy

<u>Bài 6.27.</u> Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi ta quay đường cong: $x=\frac{3}{5}y^{5/3}-\frac{3}{4}y^{1/3}$, với $0\le y\le 1$ quanh:

a.) trục Oy b.) trục Ox c.) đường thẳng y=-1.

<u>Bài 6.28</u>. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi quay các cung của các đường cong sau quanh trục Oy:

1. $f(x)=\frac{1}{3}(12-x)$ trên [0;3]
2. $f(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}$ trên [0;3]
3. $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ trên [1;3]
4. $f(x)=2\sqrt{4-x}$ trên [1;3]

<u>Bài 6.29</u>. Chứng minh rằng, diện tích của mặt tròn xoay khi ta quay phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$, với $a\le x\le b$ quanh trục Oy là $S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left[f^{/}(x)\right]^2}dx$.