CHUỖI VÔ HẠN

Nguyễn Lê Thi

Ngày 12 tháng 4 năm 2020

1. Dãy số và giới hạn của dãy
2. Chuỗi vô hạn; Chuỗi cấp số nhân
3. Tiêu chuẩn tích phân; p-chuỗi
4. Tiêu chuẩn so sánh
5. Tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn số
6. Chuỗi đan dấu; Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

8.1 DÃY SỐ VÀ GIỚI HẠN CỦA DÃY

Dãy số

DÃY SỐ

- Một dãy số là một dãy liên tiếp các số hạng được sắp xếp theo một quy tắc cho trước.
- Nếu n là một số nguyên dương, dãy số vô hạn có phần tử thứ n là số a_n, có thể được viết dưới dạng

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

hay đơn giản hơn $\{a_n\}$.

Định nghĩa 1 (SEQUENCES - DÃY SỐ)

Một dãy số $\{a_n\}$ là một hàm số mà miền xác định là một tập hợp các số nguyên không âm và miền giá trị là một tập con của tập hợp số thực.

Các giá trị $a_1, a_2, a_3, \ldots$ được gọi là **số hạng** *của dãy, và a_n là* **số hạng thứ** *n, hay còn được gọi là* **số hạng tổng quát** *của dãy số.*

Một số ví dụ về dãy

- $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$
- $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{3^n}\right\} = -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, -\dfrac{3}{27}, \dfrac{4}{81}, \cdots$
- $\left\{\sqrt{n-1}\right\}_{n\geq 1} = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$
- $\{2n\}_{n\geq 0} = 0, 2, 4, 6, \cdots$

Một số ví dụ về dãy

- $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$
- $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{3^n}\right\} = -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, -\dfrac{3}{27}, \dfrac{4}{81}, \cdots$
- $\{\sqrt{n-1}\}_{n\geq 1} = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$
- $\{2n\}_{n\geq 0} = 0, 2, 4, 6, \cdots$

Lưu ý: Đôi khi, dãy số có thể bắt đầu với số hạng a_0 thay vì a_1, nghĩa là: $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Ví dụ 1 (**Cho số hạng tổng quát, tìm số hạng cụ thể của dãy**)

Tìm số hạng đầu tiên, thứ 2 và thứ 15 của dãy $\{a_n\}$, *với số hạng tổng quát là*

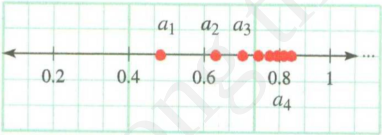
$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Hướng dẫn

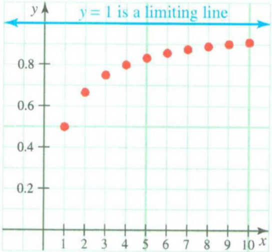
- Số hạng thứ 1: $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 1$
- Số hạng thứ 2: $a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}$
- Số hạng thứ 15: $a_{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 2^{-14}$

8.1.2 Giới hạn của dãy số

- Xét dãy số $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$



a. Graphing a sequence in one dimension

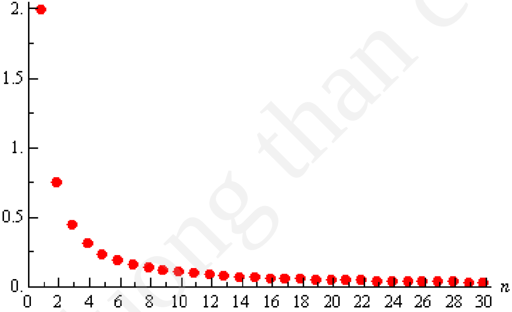


b. Graphing a sequence in two dimensions

- $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

8.1.2 Giới hạn của dãy số

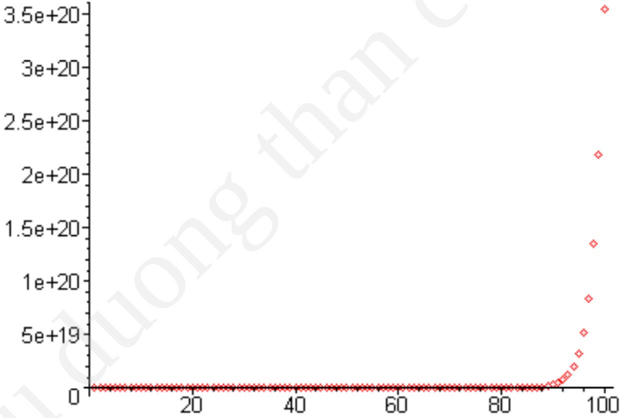
- Xét dãy số $\left\{\dfrac{n+1}{n^2}\right\}$



- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2} = 0.$

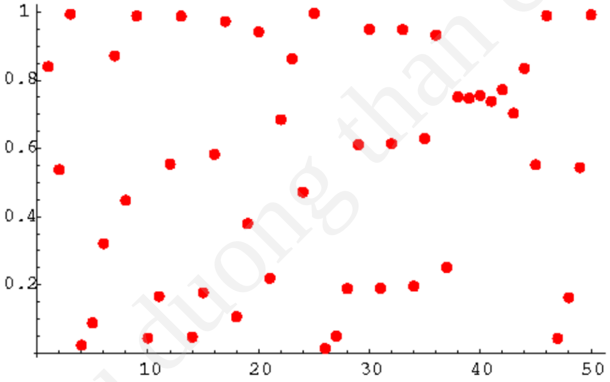
8.1.2 Giới hạn của dãy số

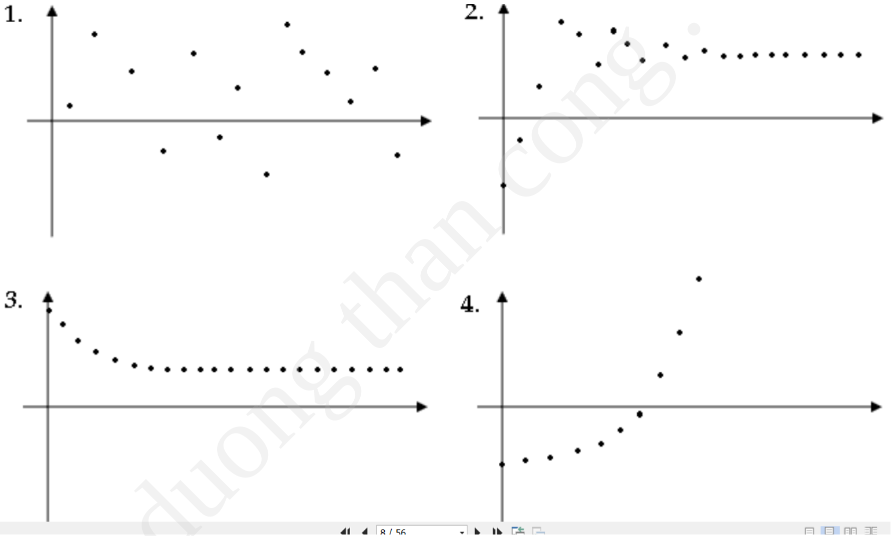
- Xét dãy số Fibonacci
  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_{n-1} + a_n.$



8.1.2 Giới hạn của dãy số

Vì dãy số là một tập hợp của các số, nên có thể chọn ngẫu nhiên.




1.
2.
3.
4.
8 / 56

8.1.2 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 2 (DÃY HỘI TỤ)

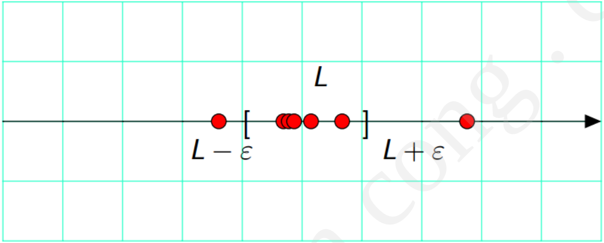
Dãy $\{a_n\}$ **hội tụ** *về một số L, kí hiệu*

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

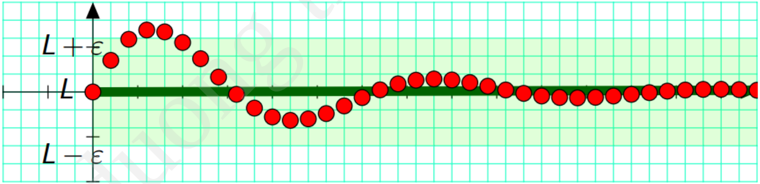
nếu với mọi $\epsilon > 0$, *tồn tại một số nguyên N sao cho*

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{với} \quad n > N.$$

Nếu không, dãy **phân kỳ**.



Hình: One dimension



Hình: Two dimension

Dãy hội tụ - phân kỳ

DÃY HỘI TỤ - PHÂN KỲ

- Nếu $\lim_{n\to+\infty} a_n$ tồn tại (hữu hạn) thì dãy a_n hội tụ.
- Nếu dãy không hội tụ, ta nói rằng dãy phân kỳ. (dãy có giá trị tiến về vô cùng hoặc không tiến về giá trị nào).

Định lý 1

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *và* $\lim_{n\to\infty} b_n = M$*,* $r, s \in \mathbb{R}$*, thì*

- **Luật tuyến tính**
$$\lim_{n\to\infty}(ra_n + sb_n) = rL + sM.$$
- **Luật nhân**
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM.$$
- **Luật chia**
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M} \quad \text{với } M \neq 0.$$
- **Luật căn**
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{L}$$
nếu $\sqrt[m]{a_n}$ *xác định với mọi n và* $\sqrt[m]{L}$ *tồn tại.*

Ví dụ 2

Tìm giới hạn của các dãy hội tụ sau.

a. $\left\{\dfrac{100}{n}\right\}$

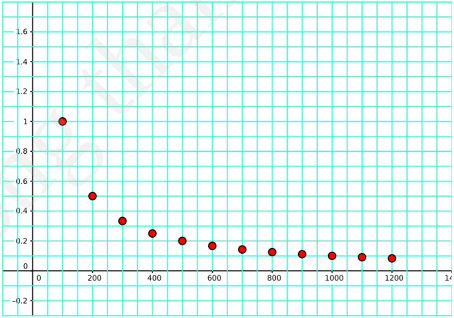
b. $\left\{\dfrac{2n^2+5n-7}{n^3}\right\}$

c. $\left\{\dfrac{3n^4+n-1}{5n^4+2n^2+1}\right\}$

a. Khi n trở thành một số lớn bất kỳ, $\frac{100}{n}$ trở nên càng nhỏ hơn. Khi đó,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100}{n} = 0$$

- Biểu diễn hình học được trình bày ở hình bên dưới.



Hình: $a_n = \frac{100}{n}$

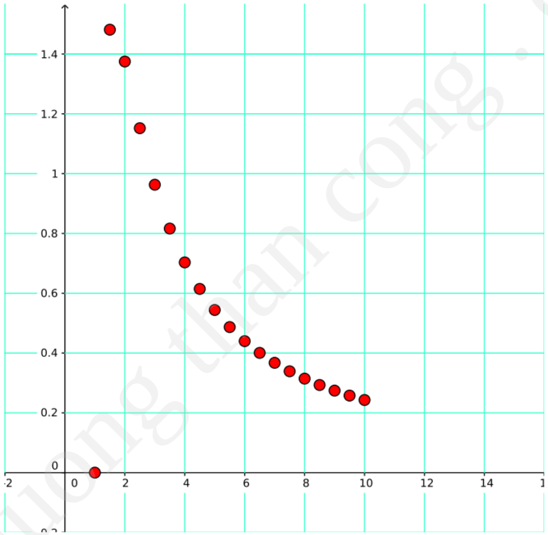
- Ta có

$$\frac{2n^2+5n-7}{n^3} = \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{7}{n^3}$$

và sử dụng luật tuyến tính

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n-7}{n^3} &= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} - 7\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\\ &= 0\end{aligned}$$

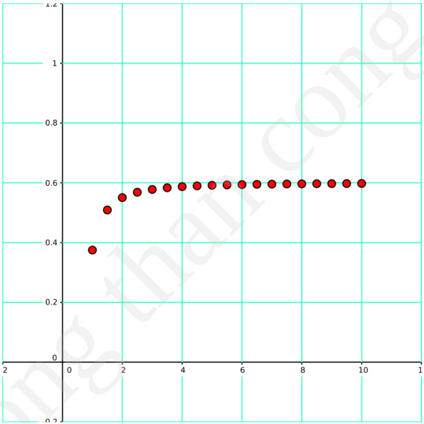
Đồ thị được biểu thị bên dưới.



Hình: $a_n = \frac{2n^2+5n-7}{n^3}$

- Chia tử và mẫu cho n^4, ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + n - 1}{5n^4 + 2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{5 + 2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{3}{5}$$



Hình: $a_n = \frac{3n^4+n-1}{5n^4+2n^2+1}$

Ví dụ 3

Chứng minh các dãy sau phân kỳ:

a. $\{(-1)^n\}$

b. $\left\{\dfrac{n^5+n^3+2}{7n^4+n^2+3}\right\}$

Hướng dẫn

a. Dãy số xác định bởi $\{(-1)^n\}$ là $-1, 1-1, 1, \ldots$

- Dãy này phân kỳ theo dao động bởi vì số hạng thứ n luôn là 1 hoặc là -1 (a_n không thể đạt đến một số cụ thể L khi n lớn).

Hướng dẫn

a. Dãy số xác định bởi $\{(-1)^n\}$ là $-1, 1 - 1, 1, \ldots$

- Dãy này phân kỳ theo dao động bởi vì số hạng thứ n luôn là 1 hoặc là -1 (a_n không thể đạt đến một số cụ thể L khi n lớn).

b. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^5 + n^3 + 2}{7n^4 + n^2 + 3} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^5}}{7\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + 3\frac{1}{n^5}} = +\infty.$

- Tử số tiến về 1 và mẫu tiến về 0 khi $n \to \infty$. Do đó, biểu thức tăng không bị chặn nên **dãy phân kỳ**.

Định nghĩa 3 (GIỚI HẠN VÔ CÙNG)

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *nghĩa là với mọi số thực A, ta có* $a_n > A$ *với n đủ lớn.*
- $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ *nghĩa là với mọi số thực B, ta có* $B_n < B$ *với n đủ lớn.*

Định lý 2 (**Giới hạn dãy số từ giới hạn của hàm liên tục**)

Xét dãy số $\{a_n\}$ *và* f *là hàm liên tục thỏa* $a_n = f(n)$ *với* $n = 1, 2, \ldots$
Nếu $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *tồn tại và* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *thì dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ và*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Một số quy tắc cần nhớ

CÁC QUY TẮC GIỚI HẠN

- $$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)$$
- $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$, nếu $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.
- $$\lim_{n\to+\infty}(a_n)^p = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)^p$$
  nếu $p > 0$ và $a_n > 0$.

Một số quy tắc cần nhớ

QUY TẮC L'HOPITAL

Giả sử f và g là các hàm khả vi theo x thỏa $g'(x) \neq 0$ với x gần a, và đồng thời ta có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Khi đó

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ví dụ 4 (Tính giới hạn sử dụng quy tắc L' Hospital)

Cho dãy $\left\{\dfrac{n^2}{1-e^n}\right\}$ *hội tụ, tính giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{1-e^n}$

Hướng dẫn

- Đặt
$$f(x) = \frac{x^2}{1 - e^x}$$
- Sử dụng quy tắc L' Hopital
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1 - e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{-e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{-e^x} = 0$$
- Khi đó, theo **định lý 2**
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1 - e^n} = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Một số định lý khác

Định lý 3 (Định lý Squeeze cho dãy số)

Nếu $a_n \le b_n \le c_n$ *với mọi* $n > N$ *và* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *thì*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Ví dụ 5 (Sử dụng quy tắc L' Hospital và định lý Squeeze)

Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

a. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

Hướng dẫn

a. Đặt $f(x) = x^{1/x}$ và $L = \lim_{n\to\infty} x^{1/x}$.
Hàm f liên tục với mọi $x > 0$, ta áp dụng quy tắc L'Hospital

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

- Khi đó $\lim_{n\to\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$.
- Vậy theo kết luận của định lý 2, $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Hướng dẫn

b. Ta có

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n.n.n\ldots n}$$
$$= \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$< (1)\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)\ldots\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

- Khi đó

$$\overbrace{0}^{a_n} \leq \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{b_n} \leq \overbrace{\frac{1}{n}}^{c_n}$$

- Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

8.1.3 Dãy đơn điệu và bị chặn

Dãy	**Điều kiện**	**Ví dụ**
tăng ngặt	$a_1 < \ldots < a_k < \ldots$	$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
tăng	$a_1 \leq \ldots \leq a_k \leq \ldots$	$1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots$
giảm ngặt	$a_1 > \cdots > a_k > \ldots$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
giảm	$a_1 \geq \ldots \geq a_k \geq \ldots$	$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots$

8.1.3 Dãy đơn điệu và bị chặn

Dãy	Điều kiện	Ví dụ
bị chặn trên bởi M	$a_n \leq M$	Dãy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ với $M = 1$. **Chú ý:** $M = 2, M = 3$. là các lựa chọn khác.
bị chặn dưới bởi m	$m \leq a_n$	Dãy $1, 2, 3, \ldots$ với $m = 1$. **Chú ý:** $m = 0, m = -1$. là các lựa chọn khác.
bị chặn	Bị chặn trên và bị chặn dưới	Dãy $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ **Chú ý:** $m = 0, M = -1$ là chặn dưới, chặn trên.

Định lý 8.4: Định lý về dãy đơn điệu, hội tụ và bị chặn

Một dãy đơn điệu $\{a_n\}$ hội tụ nếu bị chặn và phân kỳ nếu ngược lại.

Định lý 8.5: Sự hội tụ của dãy lũy thừa

Nếu r là một số cố định sao cho $|r| < 1$, thì $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

8.2 CHUỖI VÔ HẠN, CHUỖI CẤP SỐ NHÂN

8.2 GIỚI THIỆU CHUỖI VÔ HẠN, CHUỖI CẤP SỐ NHÂN

CHUỖI VÔ HẠN

Một **chuỗi vô hạn** là một biểu diễn có dạng

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

và **tổng riêng phần thứ** n của chuỗi là

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Sự hội tụ - phân kỳ của chuỗi

SỰ HỘI TỤ - PHÂN KỲ

- Chuỗi vô hạn được gọi là hội tụ nếu tổng chuỗi S hữu hạn, ngược lại ta nói chuỗi phân kỳ.
- Để xác định sự hội tụ, phân kỳ của một chuỗi vô hạn, ta sử dụng khái niệm tổng riêng phần S_N.

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

- Tổng riêng phần thứ N là tổng hữu hạn của N số hạng đầu tiên của dãy số.
- Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ về tổng S nếu dãy tổng riêng phần $\{S_N\}$ **hội tụ** về S, và ta viết

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} S_N = S.$$

- Ngược lại, nếu $\{S_N\}$ phân kỳ, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ được gọi là **phân kỳ** và không có tổng.

Ví dụ 6 (Chuỗi hội tụ)

Chứng minh chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ *hội tụ.*

Hướng dẫn

Chuỗi này có các tổng riêng phần sau

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\left(1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}\right)$$

Ta suy ra

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

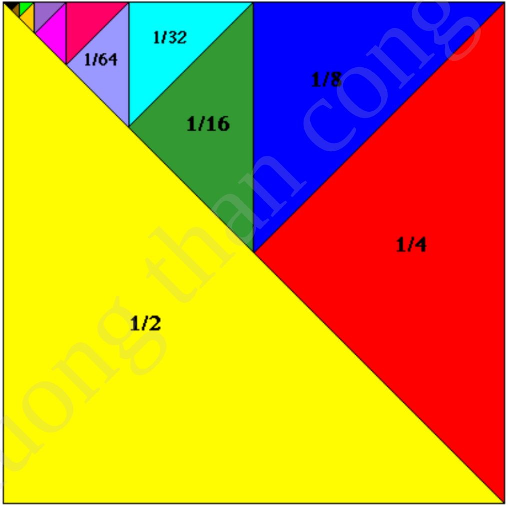
Khi đó

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Nhận xét: Chuỗi đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$

Biểu diễn hình học:



Ví dụ 7 (Chuỗi phân kỳ)

Chứng minh chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ *phân kỳ.*

Hướng dẫn

Chuỗi đã cho có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 + \dots$$

Do đó, tổng riêng phần thứ n sẽ là

$$S_n = \begin{cases} -1 & \text{nếu n} = 2\text{k} + 1 \\ 0 & \text{nếu n} = 2\text{k} \end{cases}$$

Vì $\{S_n\}$ không tồn tại giới hạn, nên chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ phân kỳ.

Ví dụ 8 (**Chuỗi rút gọn được - Chuỗi telescoping**)

Chứng minh chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k}$ *hội tụ và tính tổng chuỗi.*

Hướng dẫn

Ta có
$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}$$

Khi đó, tổng riêng phần thứ n sẽ là

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và tổng chuỗi $S = 1$.

Các luật về chuỗi

Định lý 4 (Luật tuyến tính của chuỗi vô hạn)

Nếu $\sum a_k$ *và* $\sum b_k$ *là các chuỗi hội tụ, c là hằng số, thì các chuỗi sau cũng hội tụ, và*

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_k \pm b_k] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c.a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Chú ý: Không áp dụng cho luật nhân, chia hoặc mũ.

Ví dụ 9

Chứng minh chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{k^2+k}-\frac{6}{2^k}\right]$$

hội tụ và tính tổng.

Hướng dẫn

Từ các ví dụ trước, ta có:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1 \text{ và } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Áp dụng **định lý về luật tuyến tính**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{k^2+k} - \frac{6}{2^k}\right] = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k} - 6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$
$$= 4 - 6 = -2$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng -2.

Định lý 5 (**Sự phân kỳ của tổng của một chuỗi hội tụ và một chuỗi phân kỳ**)

Nếu chuỗi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

hoặc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

phân kỳ và chuỗi còn lại hội tụ, thì chuỗi $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + b_k)$ *phải phân kỳ.*

Định nghĩa 4 (CHUỖI CẤP SỐ NHÂN)

Một chuỗi cấp số nhân là một chuỗi vô hạn, trong đó tỉ số của các phần tử liên tiếp trong chuỗi là hằng số. Nếu hằng số này là r, thì chuỗi có dạng

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots, (a \neq 0).$$

Ví dụ 10

- $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots$ *là chuỗi cấp số nhân với* $r = \frac{1}{2}$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(-3)^k} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{-2}{27} + \cdots$ *là một chuỗi cấp số nhân với* $r = -\frac{1}{3}$

Định lý 6 (**Định lý chuỗi cấp số nhân**)

Chuỗi cấp số nhân $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$*, với* $a \neq 0$ *phân kỳ nếu* $|r| \geq 1$ *và hội tụ nếu* $|r| < 1$ *với tổng chuỗi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Ví dụ 11

Xác định các chuỗi cấp số nhân sau hội tụ hay phân kỳ, nếu hội tụ, tìm tổng của chúng.

a.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

b.

$$\sum_{k=2}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

Hướng dẫn

a. Vì $r = \frac{3}{2}$ thỏa $|r| \geq 1$, chuỗi phân kỳ.

b. Vì $r = -\frac{1}{5}$ nên $|r| < 1$ và chuỗi hội tụ. Giá trị đầu tiên của k là 2 (không phải 0), nên giá trị của a (giá trị đầu tiên) là

$$a = 3\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3}{25}$$

và

$$\sum_{k=2}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{10}$$

Bài tập 1

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau

1. $$\sum_{k=1}^{+\infty} (3)^{-n}$$
2. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$$
3. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n}$$

Ứng dụng của chuỗi cấp số nhân

Ví dụ 12 (Biểu diễn một số thập phân tuần hoàn dưới dạng một số hữu tỉ)

Viết số thập phân $2.3\overline{17} = 2.3171717\cdots$ *dưới dạng một số hữu tỉ.*

Hướng dẫn

- Số thập phân có thể được viết lại dưới dạng $2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$
- Trừ số hạng đầu tiên là 2.3, ta có một chuỗi cấp số nhân với $a = \frac{17}{10^3}$ và $r = \frac{1}{10^2}$
- Khi đó

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}}$$
$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$

Ví dụ 13 (**Bài toán mô hình: Tác động nhân trong kinh tế**)

Giả sử trên toàn quốc 90% *của tất cả các thu nhập được dùng và* 10% *được tiết kiệm. Mức tiêu dùng tổng cộng được phát sinh bởi* 40 *tỉ đô la tiền giảm trừ thuế sẽ là bao nhiêu nếu thói quen tiết kiệm tiền là không đổi?*

Hướng dẫn

- Số tiền được tiêu xài trực tiếp từ người được miễn trừ thuế là 36.
- Khoản tiền này trở thành khoản thu nhập mới, mà 90% trong đó được dùng, nghĩa là: 0.9(36)
- Đến lượt mình, số tiền này lại sinh ra khoản tiêu xài là 0.9[0.9(36)] và vân vân.

- Tổng số tiền được tiêu xài nếu quá trình này tiếp diễn vô hạn là
$36 + 0.9(36) + 0.9^2 36 + 0.9^3 36 + \cdots$

$$= 36[1 + 0.9 + 0.9^2 + 0.9^3 + \cdots]$$
$$= 36 \sum_{k=0}^{n} 0.9^k = 36\left(\frac{1}{1-0.9}\right) = 360.$$

Ví dụ 14 (Bài toán mô hình: Tích lũy thuốc trong cơ thể)

Một bệnh nhân được tiêm 10 *đơn vị thuốc mỗi* 24 *giờ. Thuốc được bài tiết theo số mũ nên lượng thuốc còn lại trong cơ thể bệnh nhân sau t ngày là $f(t) = e^{-t/15}$. Nếu việc điều trị vẫn được tiếp tục mãi, khoảng bao nhiêu đơn vị thuốc sẽ được tích lũy trong cơ thể bệnh nhân ngay trước lúc tiêm?*

Hướng dẫn

- Sau ngày tiêm đầu tiên, lượng thuốc còn lại trong cơ thể bệnh nhân là $10e^{-1/15}$, nghĩa là

$$S_1 = 10e^{-1/15}$$

- Sau 2 ngày, lượng thuốc còn lại trong cơ thể bệnh nhân gồm lượng thuốc còn lại từ 2 lần tiêm đầu tiên

$$S_2 = \underbrace{10e^{-1/15}}_{\text{lượng còn sau lần tiêm 2}} + \underbrace{10e^{-2/15}}_{\text{lượng còn sau lần tiêm 1}}$$

- Tương tự, sau n ngày, lượng thuốc còn lại là

$$S_n = 10e^{-1/15} + 10e^{-2/15} + \cdots + e^{-n/15} \sum_{k=1}^{n} 10e^{-k/15}$$

- Lượng thuốc S tích tụ trong người bệnh nhân trong thời gian dài là giới hạn của S_n khi $n \to +\infty$. Đó là

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 10e^{-k/15} = \frac{10e^{-1/5}}{1 - e^{-1/5}} \approx 45.16656$$

- Ta thấy rằng, khoảng 45 đơn vị thuốc còn tích lũy trong cơ thể bệnh nhân.

8.3 TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN; p - CHUỖI

Định lý 7 (Tiêu chuẩn phân kỳ)

Nếu

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$$

thì chuỗi $\sum a_k$ *phân kỳ.*

Ví dụ 15

Chứng minh chuỗi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-300}{4k+750}$$

phân kỳ.

Hướng dẫn

Ta có

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{k-300}{4k+750} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Vậy theo tiêu chuẩn phân kỳ, chuỗi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-300}{4k+750}$$

phân kỳ.

Chuỗi số không âm - tiêu chuẩn tích phân

Định lý 8 (Tiêu chuẩn tích phân)

Nếu $a_k = f(k)$ *với* $k = 1, 2, \ldots$ *và* f *là một hàm số dương, liên tục và giảm, theo biến* x *với* $x \geq 1$ *thì*

$$\text{chuỗi số} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{và tích phân suy rộng} \quad \int_1^{\infty} f(x)dx$$

cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

Ví dụ 16

Khảo sát sự hội tụ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k/5}}$$

- Hàm $f(x) = \dfrac{x}{e^{x/5}} = xe^{-x/5} > 0$ là hàm liên tục $\forall x > 0$.

$$f'(x) = x\left(-\frac{1}{5}e^{-x/5}\right) + e^{-x/5} = \left(1 - \frac{x}{5}\right)e^{-x/5}$$

- Số tới hạn được tìm bởi $f'(x) = 0$, vì thế

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{x}{5}\right)e^{-x/5} &= 0\\ 1 - \frac{x}{5} &= 0\\ x &= 5\end{aligned}$$

- Ta thấy rằng $f'(x) \leq 0$ với $x \geq 5$, vì thế dẫn đến f giảm với $x \geq 5$.

- Tích phân suy rộng tương ứng

$$\int_5^{+\infty} xe^{-x/5}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_5^b xe^{-x/5}dx$$

- Đặt $u = x; dv = e^{-x/5}dx \Rightarrow du = dx; v = -5e^{-x/5}$.
- Khi đó

$$\lim_{b\to+\infty}\int_5^b xe^{-x/5}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-5xe^{-x/5}\Big|_5^b - \int_5^b (-5e^{-x}\right.$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-5\frac{b+5}{e^{b/5}} + 50e^{-1}\right)$$

$$= 50e^{-1}(\ Quy\ tắc\ L'Hopital)$$

8.3.3 $p-$ chuỗi

Định nghĩa 5 (p-CHUỖI)

Một chuỗi số có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

*với p là hằng số dương được gọi là p-**chuỗi**.*

Định lý 9 (**Tiêu chuẩn p-chuỗi**)

Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ *hội tụ nếu* $p > 1$ *và phân kỳ nếu* $p \leq 1$.

Ví dụ 17

Kiểm định sự hội tụ của các chuỗi sau.

$$\textbf{a.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} \qquad \textbf{b.} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

Hướng dẫn

a. $\sqrt{k^3} = k^{3/2}$, chuỗi đã cho có dạng $p-$ chuỗi với $p = \dfrac{3}{2} > 1$, do đó chuỗi hội tụ.

b. Ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k} \text{ hội tụ vì là chuỗi cấp số nhân với } |r| = \frac{1}{e} < 1.$$

và

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ phân kỳ vì là p - chuỗi với } p = \frac{1}{2} < 1$$

- Vậy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ phân kỳ.}$$

Bài tập 2 (Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi^n}{3^{n+1}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5n^2+4}$.
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

Chuỗi điều hòa

Định nghĩa 6 (Chuỗi điều hòa)

Chuỗi số có dạng

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

là chuỗi điều hòa.
Chuỗi điều hòa phân kỳ.