8.4 CÁC TIÊU CHUẨN SO SÁNH

TIÊU CHUẨN SO SÁNH

Định lý 10 (**Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp**)

Giả sử $0 \le a_k \le c_k$ *với mọi* k.

$$\text{Nếu } \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ hội tụ thì } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ cũng hội tụ.}$$

Giả sử $0 \le d_k \le a_k$ *với mọi* k.

$$\text{Nếu } \sum_{k=1}^{\infty} d_k \text{ phân kỳ thì } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ cũng phân kỳ.}$$

Ví dụ 18 (Sử dụng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp)

Khảo sát chuỗi số

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 1} \text{ hội tụ hay phân kỳ?}$$

Hướng dẫn giải

- Với $k \geq 0$, $3^k + 1 > 3^k > 0$, suy ra

$$0 < \frac{1}{3^k + 1} < \frac{1}{3^k}$$

- Mặt khác, chuỗi cấp số nhân

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \text{ hội tụ vì } |r| = \frac{1}{3} < 1.$$

- Vậy chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^k + 1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh trực tiếp.

Ví dụ 19 (**Sử dụng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp**)

Khảo sát chuỗi số

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}-1} \text{ hội tụ hay phân kỳ?}$$

Hướng dẫn

- Với $k \geq 2$, ta có

$$0 < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}-1}$$

- p- chuỗi

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\text{phân kỳ vì } p = \frac{1}{2} < 1 \right).$$

- Vậy chuỗi đã cho phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh trực tiếp.

Định lý 11 (Tiêu chuẩn so sánh giới hạn)

Giả sử $a_k > 0$ và $b_k > 0$ với mọi k đủ lớn và

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$

trong đó L hữu hạn và dương $(0 < L < \infty)$.
Khi đó $\sum a_k$ và $\sum b_k$ cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

Ví dụ 20 (Sử dụng tiêu chuẩn so sánh giới hạn)

Khảo sát sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k - 2}$$

Hướng dẫn

- Chuỗi cấp số nhân

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \textit{ hội tụ } (|r| < 1.)$$

- Xét giới hạn

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{3^k - 2}}{\dfrac{1}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^k - 2} = 1.$$

- Giới hạn là số hữu hạn dương nên chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 21 (Sử dụng tiêu chuẩn so sánh giới hạn)

Khảo sát sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{\sqrt{k}(3k-5)}$$

Hướng dẫn

- Xét các số hạng tổng quát của hai chuỗi số là

$$a_k = \frac{3k+2}{\sqrt{k}(3k-5)} \text{ và } b_k = \frac{3k}{3k\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- Ta có p-chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ phân kỳ vì } p = \frac{1}{2} < 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{3k+2}{3k-5} = 1$$

- Giới hạn là số hữu hạn dương nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Định lý 12 (**Tiêu chuẩn so sánh giới hạn** $0, \infty$)

Giả sử $a_k > 0$ *và* $b_k > 0$ *với mọi số k đủ lớn*

- *Nếu* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$ *và* $\sum b_k$ *hội tụ, thì chuỗi* $\sum a_k$ *hội tụ.*
- *Nếu* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \infty$ *và* $\sum b_k$ *phân kỳ, thì chuỗi* $\sum a_k$ *phân kỳ.*

Ví dụ 22 (Sự hội tụ của chuỗi q-log)

Chứng minh chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^q}$$

*hội tụ nếu $q > 1$ và phân kỳ nếu $q \leq 1$. Ta gọi đây là chuỗi q-***log**.

Hướng dẫn

- Trường hợp $q > 1$: Cho p là số thỏa $1 < p < q$ và đặt
$$a_k = \frac{\ln k}{k^q}; \qquad b_k = \frac{1}{k^p}$$
Khi đó
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k^{q-p}}$$
$$= 0 \qquad (\text{ quy tắc L'Hopital})$$
$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ hội tụ (là một p-chuỗi với $p > 1$) nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn giới hạn $0, \infty$.

- Trường hợp $q < 1$:
  Với p thỏa $q < p < 1$, a_k và b_k được định nghĩa như trường hợp I, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k^{q-p}} = \infty$$

  Vì $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ phân kỳ (là một p-chuỗi với $p < 1$) nên chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn giới hạn $0, \infty$.

- Trường hợp $q = 1$:
- Chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$$

phân kỳ theo tiêu chuẩn tích phân (đặt $u = \ln x; du = \frac{1}{x}dx$)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\bigg|_{1}^{b} = \infty$$

Bài tập 3

Sử dụng tiêu chuẩn thích hợp, khảo sát sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau.

1. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k3^k}}$$

2. $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2}{k^4 - k}$$

3. $$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 4}}$$

Bài tập 4

Khảo sát sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số:

1. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{k+1}$$

2. $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-4}{k \ln k}$$

3. $$\sum_{k=1}^{+\infty} (k+4)e^{-k^2}$$

8.5 TIÊU CHUẨN TỶ SỐ VÀ TIÊU CHUẨN CĂN SỐ

Định lý 13 (**Tiêu chuẩn tỷ số**)

Cho chuỗi $\sum a_k$ *với* $a_k > 0$, *giả sử rằng*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$$

Khi đó

- *Nếu* $L < 1$ *thì* $\sum a_k$ *hội tụ.*
- *Nếu* $L > 1$ *hoặc* L *vô hạn thì* $\sum a_k$ *phân kỳ.*
- *Nếu* $L = 1$ *thì tiêu chuẩn chưa kết luận được.*

Ví dụ 23 (**Sử dụng tiêu chuẩn tỷ số**)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

Hướng dẫn

- Đặt $a_k = \frac{2^k}{k!}$

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k!2^{k+1}}{(k+1)!2^k}$$
$$= 0$$

- Vì $L < 1$ nên theo tiêu chuẩn tỉ số chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 24

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}.$$

Hướng dẫn

- Đặt $a_k = \frac{k^k}{k!}$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k!(k+1)^{k+1}}{(k+1)!k^k} \\ &= e \end{aligned}$$

- Vì $L > 1$ nên theo tiêu chuẩn tỉ số chuỗi đã cho phân kỳ.

Bài tập 5

Các chuỗi số sau hội tụ hay phân kỳ? Vì sao?

1.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}$$

2.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

3.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{k!}{100^k}$$

Định lý 14 (**Tiêu chuẩn căn số**)

Cho chuỗi $\sum a_k$ *với* $a_k > 0$, *giả sử rằng*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$$

Khi đó

- *Nếu* $L < 1$ *thì* $\sum a_k$ *hội tụ.*
- *Nếu* $L > 1$ *hoặc* L *vô hạn thì* $\sum a_k$ *phân kỳ.*
- *Nếu* $L = 1$ *thì tiêu chuẩn chưa kết luận được.*

Ví dụ 25 (Sử dụng tiêu chuẩn căn số)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}.$$

Hướng dẫn

- Cho $a_k = \frac{1}{(\ln k)^k}$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\ln k)^{-k}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $L < 1$ và theo tiêu chuẩn căn số, chuỗi hội tụ.

Ví dụ 26 (Sử dụng tiêu chuẩn căn số)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}.$$

Hướng dẫn

- Cho $a_k = \frac{k^k}{k!}$

$$L = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right]^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = e$$

- Vì $L > 1$ nên theo tiêu chuẩn căn số, chuỗi phân kỳ.

Bài tập 6

Khảo sát sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số.

1. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k}{2k+3} \right)^k$$

2. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k + 6^k}{5^k}$$

3. $$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k(k+1)}$$

8.6 CHUỖI ĐAN DẤU
HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI VÀ HỘI TỤ CÓ ĐIỀU KIỆN

Định nghĩa 7

Chuỗi đan dấu *là chuỗi có các số hạng liên tiếp đổi dấu. Có hai dạng chuỗi đan dấu, với cả hai trường hợp,* $a_k > 0$*, là:*

- *Số hạng có chỉ số lẻ âm:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

- *Số hạng có chỉ số chẵn âm:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$$

Định lý 15 (**Tiêu chuẩn Leibniz**)

Chuỗi đan dấu *dạng* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *hoặc dạng* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ **hội tụ** *nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:*

1. $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$;
2. $\{a_k\}$ *là dãy giảm, nghĩa là,* $a_{k+1} \le a_k$ *với mọi* k.

Lưu ý:

- Khi khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, nên khéo léo tính $\lim_{k\to+\infty} a_k$.
- Nếu $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$, chuỗi phân kỳ theo **tiêu chuẩn phân kỳ**.

Ví dụ 27 (Chuỗi điều hòa đan dấu)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi điều hòa đan dấu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

.

Hướng dẫn

- Chuỗi đã cho có dạng $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$, với $a_k = \dfrac{1}{k}$.
- Ta có
$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$$
và $a_{k+1} = \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k} = a_k, \forall k > 0$, dãy $\{a_k\}$ giảm.
- Vậy chuỗi đan dấu
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$
hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Ví dụ 28 (Quy tắc L'Hopital với tiêu chuẩn Leibniz)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\ln k}{k}$.

Hướng dẫn

- Chuỗi đã cho có dạng $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, với $a_k = \dfrac{\ln k}{k}$.
- Ta có

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln k}{k} = 0$$

vì

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

(quy tắc L'Hopital).

- Mặt khác, ta chứng minh được $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, với mọi $x > e$.
- Khi đó dãy $\{a_k\}$ giảm, với mọi $k > 3 > e$.
- Vậy chuỗi đan dấu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln k}{k}$$

hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Ví dụ 29 (Chuỗi đan dấu phân kỳ)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{1/k}$.

Hướng dẫn

Vì
$$\lim_{k\to+\infty} e^{1/k} = 1 \neq 0$$
nên chuỗi đan dấu phân kỳ theo tiêu chuẩn phân kỳ.

Định nghĩa 8 (**p-chuỗi đan dấu**)

Chuỗi số $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$ *được gọi là* **p-chuỗi đan dấu**.

Ví dụ 30 (Sự hội tụ của p-chuỗi đan dấu)

Chứng minh p-chuỗi đan dấu $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$ *hội tụ với* $p > 0$.

Hướng dẫn

- Ta có
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^p} = 0, p > 0$$
.
- Mặt khác $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{\dfrac{1}{(k+1)^p}}{\dfrac{1}{k^p}} < 1$, do đó $\left\{\dfrac{1}{k^p}\right\}$ giảm.
- Vậy p-chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Định lý 16 (**Ước lượng sai số cho chuỗi đan dấu**)

Giả sử chuỗi đan dấu dạng

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a_k \qquad \textit{hoặc dạng} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} a_k$$

thỏa điều kiện của tiêu chuẩn Leibniz, nghĩa là $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ *và dãy* $\{a_k\}$ *giảm* $(a_{k+1} \leq a_k)$*.*
Nếu chuỗi có tổng là S *thì*

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}$$

trong đó S_n *là tổng riêng phần thứ n của chuỗi.*

Ý nghĩa: Nếu chuỗi đan dấu thỏa tiêu chuẩn Leibniz thì ta có thể xấp xỉ tổng của chuỗi bằng tổng riêng phần thứ n của nó với sai số không vượt quá số hạng a_{n+1}.

Ví dụ 31

Xét chuỗi đan dấu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$ *hội tụ*

a. *Ước lượng tổng chuỗi trên bằng cách tính tổng 4 số hạng đầu tiên. Đánh giá độ chính xác của ước lượng này?*

b. *Có bao nhiêu số hạng cần thiết để ước lượng tổng chuỗi với độ chính xác ba chữ số thập phân? Khi đó ước lượng tổng của chuỗi là bao nhiêu?*

Hướng dẫn

a. Đặt $a_k = \dfrac{1}{k^4}$ và S là tổng chuỗi.

- Ước lượng sai số cho biết $|S - S_4| \leq a_5$, với S_4 là tổng riêng phần thứ 4 của chuỗi.
- Sử dụng máy tính, ta có $S_4 = \dfrac{1}{1^4} - \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} - \dfrac{1}{4^4} \approx 0.9459394$ và $a_5 = \dfrac{1}{5^4} \approx 0.0016$

- Số hạng đầu tiên bị bỏ đi mang dấu dương. Khi đó, nếu ước lượng S bằng $S_4 \approx 0.9459$ thì chịu sai số là 0.0016, nghĩa là

$$\begin{aligned} |S - S_4| &\leq 0.0016 \\ 0.9459394 \leq S &\leq 0.9459394 + 0.0016 \\ 0.9459394 \leq S &\leq 0.9475394 \end{aligned}$$

b. Vì muốn xấp xỉ S với S_n với độ chính xác 3 chữ số thập phân nên sai số không được vượt quá 0.0005, do đó ta cần tìm n sao cho

$$a_{n+1} \leq 0.0005$$

nghĩa là

$$\frac{1}{(n+1)^4} \leq 0.0005$$

$$\frac{1}{0.0005} \leq (n+1)^4$$

$$\sqrt[4]{2000} - 1 \leq n$$

Vì vậy $n \geq 5.687$ hay cần tối thiểu 6 số hạng để đạt độ chính xác theo yêu cầu.

- $S_4 = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} \approx 0.94677$
- Số hạng đầu tiên bị bỏ đi $\frac{1}{7^4} \approx 0.00042$ là số dương nên

$$\begin{aligned} 0.94677 < S < & \quad 0.94677 + 0.00042 \\ 0.94677 < S < & \quad 0.94719 \end{aligned}$$

- Hai biên gần đến 0.947 nên $S \approx 0.947$ với độ chính xác 3 chữ số thập phân.

8.6.3 Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Định lý 17 (Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối)

Chuỗi số thực bất kỳ $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ *hội tụ.*

Ví dụ 32

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số

1. $$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

2. $$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

Hướng dẫn

1. Xét chuỗi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$$

- Chuỗi số trên là một chuỗi cấp số nhân hội tụ, vì $|r| < 1$.
- Vậy chuỗi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

hội tụ tuyệt đối.

2. Xét chuỗi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

- Chuỗi số trên là một p-chuỗi hội tụ, vì $p = 2 > 1$.
- Vậy chuỗi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

hội tụ tuyệt đối.

Định lý 18 (**Hội tụ có điều kiện**)

Chuỗi $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *được gọi là hội tụ có điều kiện nếu chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *hội tụ nhưng* $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ *phân kỳ.*

Định lý 18 (**Hội tụ có điều kiện**)

Chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *được gọi là hội tụ có điều kiện nếu chuỗi* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ *hội tụ nhưng* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ *phân kỳ.*

Chú ý: Một chuỗi hội tụ thì hoặc là hội tụ tuyệt đối, hoặc là hội tụ có điều kiện, không thể là cả hai trường hợp.

Định lý 19 (**Tiêu chuẩn tỷ số tổng quát**)

Xét chuỗi $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, *giả sử* $a_k \neq 0$ *với* $k \geq 1$ *và đặt*

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

với L là một số thực hoặc ∞. *Khi đó*

- *Nếu* $L < 1$ *chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *hội tụ tuyệt đối và do đó hội tụ.*
- *Nếu* $L > 1$ *hoặc L vô hạn thì chuỗi* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *phân kỳ.*

Ví dụ 33

Tìm giá trị của x để chuỗi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$$

hội tụ.

Hướng dẫn

- Đặt $a_k = kx^k$

$$L = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{(k+1)x^{k+1}}{kx^k}\right|$$
$$= \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|x|$$
$$= |x|$$

- Theo tiêu chuẩn tỷ số tổng quát, chuỗi đã cho hội tụ khi $L = |x| < 1$, phân kỳ khi $|x| > 1$.
- Nếu $x = 1$, chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^{+\infty} k$ phân kỳ theo tiêu chuẩn phân kỳ.
- Tương tự, $x = -1$, chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^{+\infty} k(-1)^k$ cũng phân kỳ theo tiêu chuẩn phân kỳ.
- Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi $|x| < 1$, phân kỳ khi $|x| \geq 1$.

8.6.4 Tóm tắt các tiêu chuẩn hội tụ

Xem lại bảng 8.1 trang 58-59 giáo trình toán 2.

8.6.5 Sự sắp xếp lại số hạng trong chuỗi hội tụ tuyệt đối

Tham khảo thêm ở trang 60-61 giáo trình toán 2.