Chương 8. CHUỖI

Người không đếm sẽ không biết đếm.

Anatole France

TÓM TẮT

Liệu tổng của vô hạn các số khác không có thể là một số hữu hạn? Khái niệm có vẻ ngược đời này đóng một vai trò quan trọng trong toán học và có nhiều ứng dụng quan trọng. Mục đích của chương này là khảo sát lý thuyết và các ứng dụng của tổng vô hạn, cái mà sẽ được nhắc đến với cái tên chuỗi. Các chuỗi cấp số nhân, được giới thiệu trong mục 8.2, là một trong các chuỗi đơn giản nhất mà ta gặp và, theo cách nào đó, quan trọng nhất. Trong mục 8.3-8.6, ta sẽ phát triển các tiêu chuẩn hội tụ, cái mà cung cấp các cách thức để xác định nhanh một chuỗi có tổng hữu hạn hay không. Kế tiếp, ta sẽ chuyển hướng sự quan tâm của mình đến các chuỗi trong đó mỗi hạng tử là các hàm thay vì các số. Ta sẽ đặc biệt quan tâm đến các tính chất của các chuỗi lũy thừa, các chuỗi mà có thể được xem như các đa thức bậc vô cùng, dù một vài đặc điểm của chúng hơi khác với các đa thức như vậy. Ta sẽ thấy rằng nhiều hàm phổ biến, chẳng hạn e^x, $\ln(x+1)$, $\sin x$, $\cos x$ và $\tan^{-1} x$ có thể được biểu diễn bởi chuỗi lũy thừa, và chúng ta sẽ thảo luận một vài khía cạnh quan trọng thuộc lí thuyết và tính toán của loại biểu diễn này.

PERSPECTIVE

Chuỗi, hay tổng, nảy sinh theo rất nhiều cách. Ví dụ, giả sử rằng một chất gây ô nhiễm được xả vào khí quyển hằng tuần và nó bị phân hủy với tốc độ 2% mỗi tuần. Nếu m gam chất ô nhiễm được xả ra mỗi tuần thì tại thời điểm bắt đầu tuần đầu tiên, có $S_1 = m$ gam chất đó trong không khí, và tại thời điểm bắt đầu tuần thứ hai, sẽ có $0,98m$ gam chất ô nhiễm "cũ" còn lại cộng với m gam chất ô nhiễm "mới" vừa được xả ra. Tổng cộng lúc này ta có $S_2 = m + 0,98m$ gam chất ô nhiễm. Tiếp tục như vậy, tại thời điểm bắt đầu của tuần thứ n, sẽ có $S_n = m + 0,98m + (0,98)^2 m + ... + (0,98)^{n-1} m$ gam chất đó. Một cách tự nhiên, ta tự hỏi lượng chất ô nhiễm sẽ tích tụ lại trong thời gian dài (khi $n \to \infty$) là bao nhiêu? Điều này làm nảy sinh một tổng vô hạn. Nhưng một cách chính xác, một tổng như vậy nói lên điều gì, và nếu tổng là một con số hữu hạn, làm thế nào để tính giá trị của nó? Ta sẽ thu được câu trả lời cho những câu hỏi này trong chương này.

8.1 DÃY SỐ VÀ GIỚI HẠN CỦA CHÚNG

TRONG MỤC NÀY: dãy số; giới hạn của dãy số; dãy bị chặn, đơn điệu

Hầu hết các hiện tượng ta đã khảo sát xảy ra một cách liên tục, nhưng thực tế, trong mỗi lĩnh vực khảo sát, có những tình huống mà có thể được mô tả bởi việc danh mục hóa các đối tượng riêng biệt theo một danh sách các số. Trong chương này, ta định nghĩa một công cụ toán học, được gọi là dãy số, để thực hiện việc danh mục hóa này, và sau đó định nghĩa giới hạn của dãy số.

Sản xuất một bộ phim là một quá trình phức tạp, và việc biên tập tất cả các khung hình vào trong cùng 1 bộ phim yêu cầu rằng tất cả các khung hình của một hành động được dán nhãn theo một thứ tự thời gian. Ví dụ R21-435 có thể có nghĩa là cảnh thứ 435 của cuộn phim thứ 21. Một nhà toán học có thể đề cập đến quá trình dán nhãn cho các khung hình của một nhà biên tập phim bởi việc nói rằng các khung hình được sắp xếp vào một dãy.

Dãy số

Một dãy số là một dãy liên tiếp các số được sắp xếp theo một quy tắc cho trước. Đặc biệt, nếu n là một số nguyên dương, dãy số có phần tử thứ n là số a_n có thể được viết dưới dạng

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

hay đơn giản hơn,

$$\{a_n\}.$$

Số a_n được gọi là số hạng tổng quát của dãy. Ta sẽ chỉ làm việc với dãy số vô hạn, vì vậy mỗi số hạng a_n có một số liền sau a_{n+1} và một số liền trước a_{n-1} với $n > 1$. Ví dụ, bởi việc gắn mỗi số nguyên dương n với nghịch đảo $\frac{1}{n}$ của nó, ta được một dãy kí hiệu bởi $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, đại diện cho dãy liên tiếp các số $1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...$. Số hạng tổng quát được kí hiệu bởi $a_n = \frac{1}{n}$. Ví dụ sau minh họa kí hiệu và thuật ngữ được dùng với dãy số.

Ví dụ 1. Cho trước số hạng tổng quát, tìm các số hạng cụ thể của một dãy số

Tìm số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ 15 của dãy số $\{a_n\}$, trong đó số hạng tổng quát là $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Giải Nếu $n=1$ thì $a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$. Tương tự,

$$a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}=\frac{1}{2}.$$

$$a_{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^{15-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{14}=2^{-14}.$$

Câu hỏi ngược lại, tìm số hạng tổng quát khi biết trước vài số hạng của một dãy, là một nhiệm vụ khó hơn, và thậm chí nếu chúng ta tìm thấy một số hạng tổng quát, ta không có gì đảm bảo rằng số hạng tổng quát là duy nhất. Ví dụ, xét dãy số

$$2,4,6,8,...$$

Dãy này dường như có số hạng tổng quát $a_n=2n$. Tuy nhiên, số hạng tổng quát

$$a_n=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+2n$$

có 4 số hạng đầu tiên giống như vậy, nhưng $a_5=34$ (không phải 10, như chúng ta mong muốn từ dãy $2,4,6,8$).

Đôi khi, thật hữu ích để bắt đầu một dãy số với a_0 thay vì a_1; có nghĩa là, để có một dãy số có dạng

$$a_0,a_1,a_2,... \ .$$

Nảy giờ ta đã thảo luận khái niệm dãy số một cách không chính thức, không có định nghĩa. Ta đã thấy rằng một dãy $\{a_n\}$ gắn một số a_n với một số nguyên dương (hay có thể là, không âm) n. Do đó, một dãy số thật sự là một hàm số có miền xác định là một tập các số nguyên dương (hay không âm).

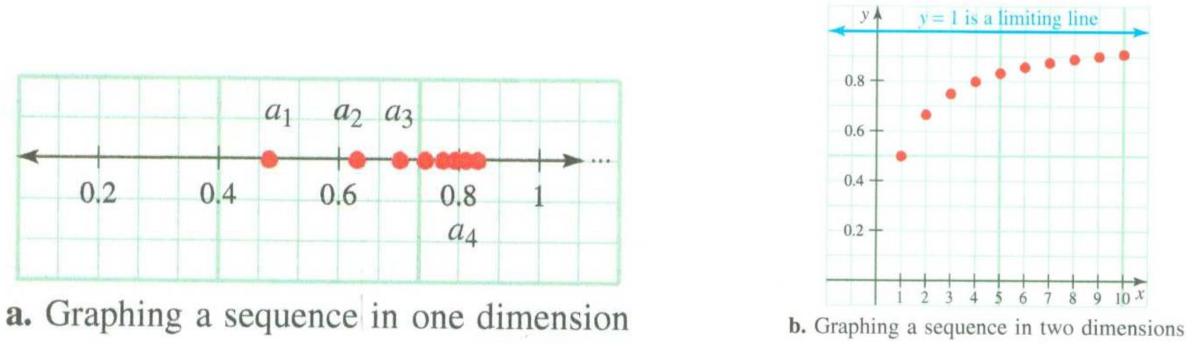
DÃY SỐ Một **dãy số** $\{a_n\}$ là một hàm số mà miền xác định là một tập hợp các số nguyên không âm và miền giá trị là một tập con của tập hợp số thực. Các giá trị của hàm số $a_1,a_2,a_3,...$ được gọi là các **số hạng** của dãy số, và a_n được gọi **là số hạng thứ** n**,** hoặc **số hạng tổng quát** của dãy số.

Giới hạn của dãy số

Người ta thường muốn xem xét sự biến đổi của một dãy $\{a_n\}$ cho trước khi n đủ lớn. Ví dụ, xét dãy

$$a_n=\frac{n}{n+1}.$$

Vì $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, \ldots$, chúng ta có thể vẽ các số hạng của dãy này trên một trục số, như trong hình 8.1a, hoặc dãy có thể được vẽ theo hai chiều, như trong hình 8.1b.



Hình 8.1. Đồ thị dãy $a_n = \frac{n}{n+1}$

Nhìn vào đồ thị ở hình 8.1a hay 8.1b, ta thấy rằng các hạng tử của dãy $\{a_n\}$ ngày càng gần I. Nhìn chung, nếu các hạng tử của dãy ngày càng gần số L khi n tăng vô hạn, ta nói rằng dãy hội tụ về giới hạn L và viết

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Bởi việc nhìn vào hình 8.1, ta đoán trước

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ta có định nghĩa giới hạn chính thức như sau

DÃY HỘI TỤ Dãy số $\{a_n\}$ **hội tụ** về số L, và ta viết

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

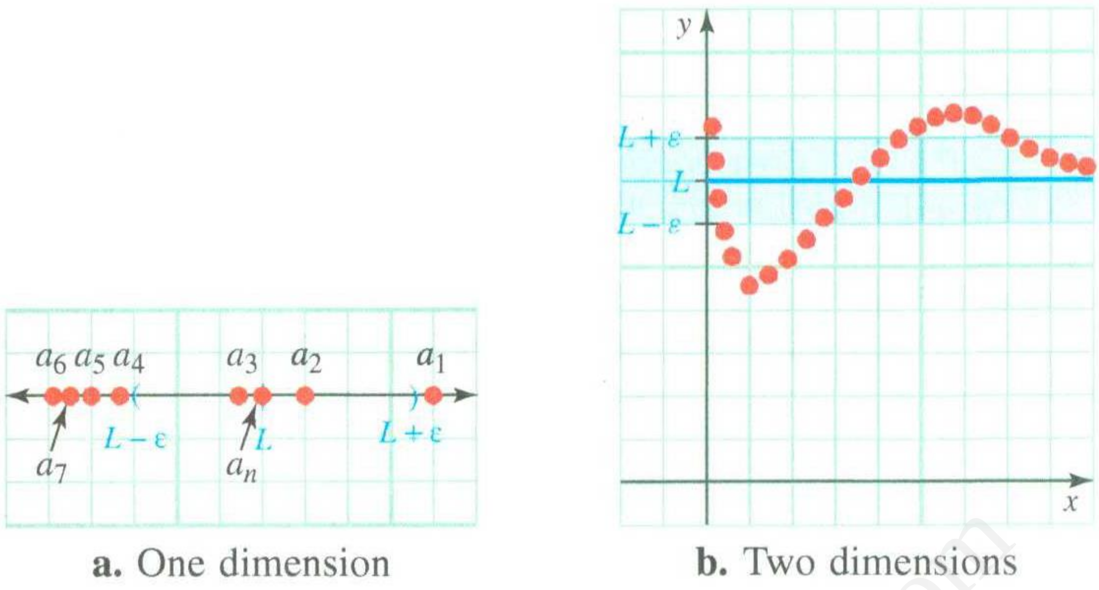
nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số nguyên N sao cho

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{với mọi } n > N .$$

Nếu không, dãy số **phân kì.**

- *Điều này nói lên gì?* Kí hiệu $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ có nghĩa là các hạng tử của dãy $\{a_n\}$ có thể được làm cho gần L tùy ý bởi việc lấy n đủ lớn.

Một minh họa hình học cho định nghĩa ngày được biểu diễn trong hình 8.2



Hình 8.2. Minh họa hình học của một dãy hội tụ

Chú ý rằng các số a_n có thể ở bất kì đâu khi n nhỏ, nhưng, khi n đủ lớn chúng phải chụm lại gần giá trị giới hạn L.

Định lí về giới hạn của các hàm số cũng thực hiện được đối với các dãy. Ta có các kết quả hữu ích sau.

Định lí 8.1 Định lí giới hạn của dãy số

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ thì

Luật tuyến tính $\lim\limits_{n\to\infty}(ra_n + sb_n) = rL + sM$.

Luật tổng $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$.

Luật thương $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$ nếu $M \neq 0$.

Luật căn $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{L}$ nếu $\sqrt[m]{a_n}$ xác định với mọi n và $\sqrt[m]{L}$ tồn tại.

Chứng minh: Chứng minh của những luật này tương tự với chứng minh của các luật giới hạn được phát biểu trong phần 4.4.

Ví dụ 2 Dãy số hội tụ

Tìm giới hạn của mỗi dãy số hội tụ sau

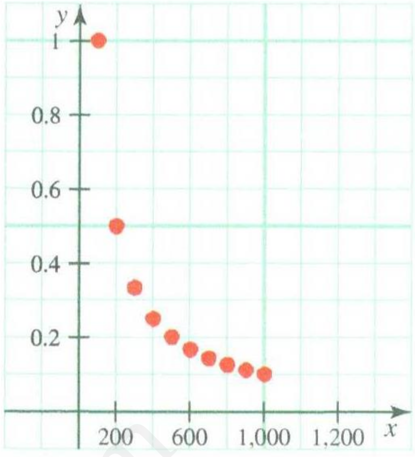
a. $\left\{\dfrac{100}{n}\right\}$ b. $\left\{\dfrac{2n^2+5n-7}{n^3}\right\}$ c. $\left\{\dfrac{3n^4+n-1}{5n^4+2n^2+1}\right\}$

Giải

a. Khi n ngày càng lớn, $\frac{100}{n}$ sẽ ngày càng nhỏ. Vì vậy,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n}=0.$$

Đồ thị minh họa được biểu diễn trong hình 8.3.



Hình 8.3. Đồ thị biểu diễn dãy $a_n=\frac{100}{n}$

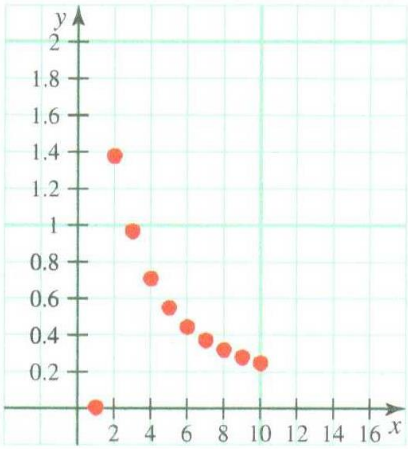
b. Ta không thể dùng luật thương của Định lí 8.1 bởi vì cả hai giới hạn trên tử và dưới mẫu đều không tồn tại. Tuy nhiên

$$\frac{2n^2+5n-7}{n^3}=\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{7}{n^3}$$

và bởi việc dùng luật tuyến tính, ta thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n-7}{n^3}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-7\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=2.0+5.0-7.0=0.$$

Đồ thị minh họa được biểu diễn trong hình 8.4.



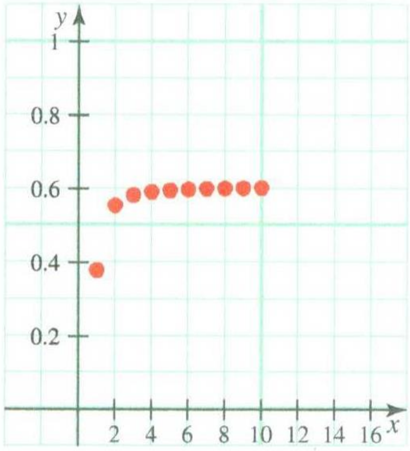
Hình 8.4. Đồ thị của $a_n=\frac{2n^2+5n-7}{n^3}$

c. Chia tử số và mẫu số cho n^4, lũy thừa cao nhất của n có mặt trong biểu thức, để được

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+n-1}{5n^4+2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{5+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}=\frac{3}{5}.$$

Chú ý rằng tiến trình này rất tương tự với cái đã dùng trong phần 4.4 khi ta tính giới hạn của hàm khi x dần đến vô cùng.

Đồ thị minh họa được biểu diễn trong hình 8.5.



Hình 8.5. Đồ thị của

$$a_n=\frac{3n^4+n-1}{5n^4+2n^2+1}$$

Ví dụ 3 Dãy phân kì

Chứng minh rằng các dãy số sau phân kì

a. $\left\{(-1)^n\right\}$ b. $\left\{\dfrac{n^5+n^3+2}{7n^4+n^2+3}\right\}$

Giải

a. Dãy được xác định bởi $\left\{(-1)^n\right\}$ là $-1,1,-1,1,\ldots$ và dãy này phân kì bởi các phần tử của nó cứ dao động giữa -1 và 1. Vì vậy, a_n không thể ngày càng gần một con số L cụ thể nào khi n ngày càng lớn.

b. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+n^3+2}{7n^4+n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^5}}{\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n^5}}$$

Tử số có xu hướng tiến về 1 khi $n\to\infty$, và mẫu số ngày càng gần 0. Do đó thương sẽ tăng không bị chặn, và sãy phải phân kì.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ không tồn tại vì các số a_n ngày càng lớn không bị chặn khi $n\to\infty$, ta viết $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. Ta tóm tắt điều này một cách chính xác hơn trong định nghĩa sau

KÍ HIỆU GIỚI HẠN

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ có nghĩa là với mọi số thực A bất kì, ta có $a_n>A$ với mọi n đủ lớn.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ có nghĩa là với mọi số thực B bất kì, ta có $b_n < B$ với mọi n đủ lớn.

Viết lại câu trả lời cho ví dụ 3b theo kí hiệu này, ta có

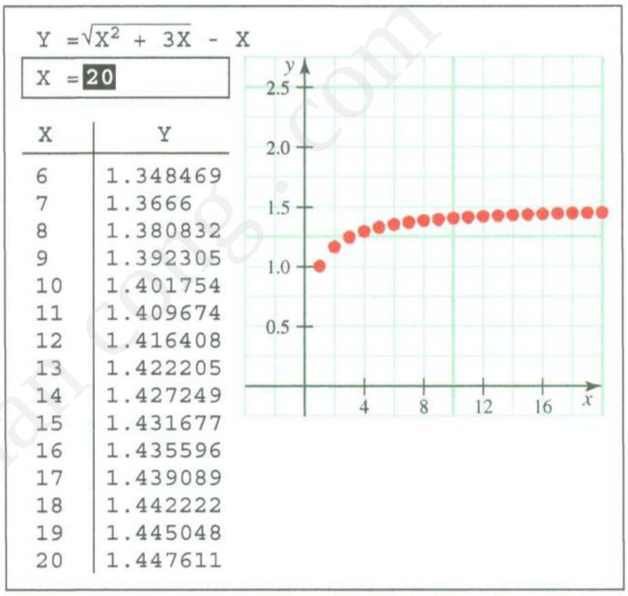
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + n^3 + 2}{7n^4 + n^2 + 3} = \infty .$$

Ví dụ 4 Xác định sự hội tụ hay phân kì của một dãy

Xác định sự hội tụ hay phân kì của dãy số $\left\{\sqrt{n^2 + 3n} - n\right\}$.

Giải

Sẽ không đúng để áp dụng luật tuyến tính cho các dãy số ở đây (bởi vì cả $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2 + 3n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} n$ đều không tồn tại). Cũng không đúng để dùng điều này như một lí do để nói rằng giới hạn của dãy số không tồn tại vì vô cùng trừ vô cùng là dạng vô định. Bạn có thể thử một vài giá trị của n (như trong bảng số liệu 8.6) để đoán rằng có một giới hạn nào đó.



Bảng 8.6. Đây là đồ thị của một dãy hội tụ hay phân kì?

Tuy nhiên, để tìm giới hạn, ta sẽ dùng biến đổi đại số để viết lại số hạng tổng quát như sau:

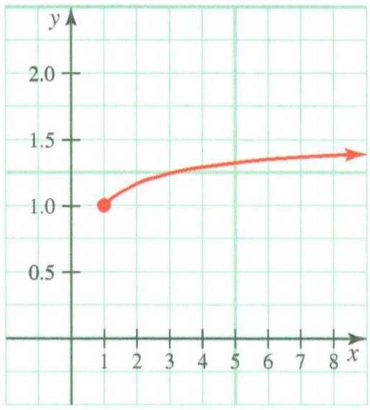
$$\sqrt{n^2 + 3n} - n = \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)\frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} .$$

Do đó, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \dfrac{3}{2}$.

Chú ý đồ thị của dãy trong ví dụ 4 trong bảng số liệu 8.6. Đồ thị của một dãy là sự nối tiếp của các điểm riêng biệt. Đồ thị này có thể được so sánh với đồ thị của

$$y=\sqrt{x^2+3x}-x, x\geq 1,$$

một đường cong liên tục (xem hình 8.7)



Hình 8.7. Đồ thị của hàm $y=\sqrt{x^2+3x}-x, x\geq 1$.

Sự khác biệt duy nhất giữa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ là n phải là một số nguyên. Điều đó được phát biểu trong giả thiết của định lí sau.

Định lí 8.2 Giới hạn của một dãy số từ giới hạn của một hàm liên tục

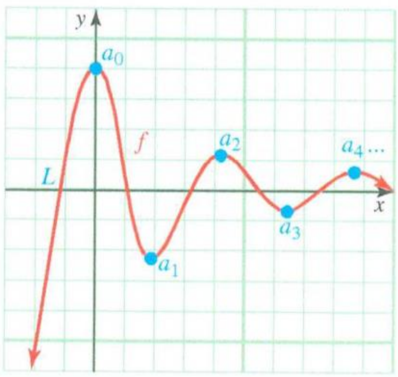
Cho trước dãy số $\{a_n\}$, gọi f là một hàm số liên tục thỏa mãn $a_n = f(n)$ với $n=1,2,...$ Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ thì dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Chứng minh: Lấy $\varepsilon>0$. Vì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ nên tồn tại một số $N>0$ sao cho

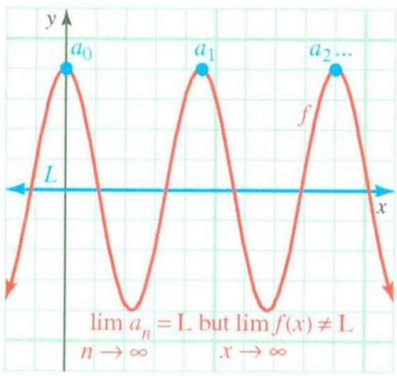
$$|f(x)-L|<\varepsilon \text{ với mọi } x>N.$$

Đặc biệt, nếu $n>N$ thì nó kéo theo rằng $|f(n)-L|=|a_n-L|<\varepsilon$.

Hãy chắc rằng bạn hiểu định lí này một cách chính xác. Đặc biệt, chú ý rằng nó không nói nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ thì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ (xem hình 8.8b).



a. If $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$, then $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$



b. If $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, then $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ does NOT necessarily equal L

Hình 8.8. So sánh đồ thị của $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ trong đó $f(n)=a_n$ với $n=1,2,...$

Ví dụ 5 Dùng quy tắc L'Hopital để tính giới hạn

Biết dãy số $\left\{\dfrac{n^2}{1-e^n}\right\}$ hội tụ, tính $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1-e^n}$.

Giải Đặt $L=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, trong đó $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^x}$. Vì $f(n)=a_n$ với $n=1,2,\ldots$ Định lí 8.2 nói rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1-e^n}$ bằng với $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, miễn là giới hạn phía sau tồn tại. Vì hàm số f liên tục với mọi $x\neq 0$, ta dùng quy tắc L'Hospital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{-e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{-e^x}=0.$$

Do đó, theo định lí 8.2, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1-e^n}=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L=0$.

Quy tắc kẹp (mục 2.2.) có thể được viết lại theo ngôn ngữ của dãy.

Định lí 8.3 Định lí kẹp cho dãy

Nếu $a_n\leq b_n\leq c_n$ với mọi $n>N$, và $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$ thì

$$\lim_{n\to\infty}b_n=L.$$

Chứng minh. Chứng minh của định lí này theo các bước giống như chứng minh quy tắc kẹp được cho trong Phụ lục A.

Ví dụ 6 Dùng quy tắc L'Hospital và định lí kẹp

Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ, và tìm giới hạn của chúng.

a. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}$ b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

Giải

a. Đặt $L=\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n}$, khi đó ta đặt $f(x)=x^{1/x}$. Hàm số f liên tục với mọi $x>0$ nên ta có thể áp dụng quy tắc L'Hospital.

$$\ln L=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Do đó, $L=e^0=1$.

Ta không thể dùng quy tắc L'Hospital vì $x!$ không được định nghĩa như một hàm số sơ cấp khi x không phải là số nguyên. Thay vào đó, ta dùng định lí kẹp cho dãy. Theo đó, chú ý rằng nếu lấy $a_n = 0$ và $c_n = \frac{1}{n}$, với mọi n, ta có

$$\overset{a_n}{0} \le \overset{b_n}{\frac{n!}{n^n}} \le \overset{c_n}{\frac{1}{n}}.$$

Bất đẳng thức bên phải đúng bởi vì

$$\begin{aligned}\frac{n!}{n^n} &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n.n.n\ldots n} = \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\right)\\ &< (1)\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)\ldots\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ nên theo định lí kẹp ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Dãy bị chặn, đơn điệu

Ta giới thiệu, cùng với một ví dụ đơn giản, vài thuật ngữ gắn với dãy số $\{a_n\}$

Tên	Điều kiện	Ví dụ
tăng ngặt	$a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k < \ldots$	1,2,3,4,5,…
tăng	$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{k-1} \le a_k \le \ldots$	1,1,2,2,3,3,…
tiảm ngặt	$a_1 > a_2 > \ldots > a_{k-1} > a_k > \ldots$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
giảm	$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_{k-1} \ge a_k \ge \ldots$	$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$
bị chặn trên bởi M	$a_n \le M$ với $1,2,3,\ldots$	$M = 1$ với $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Chú ý $M = 2, M = 3$ là các sự chọn lựa khác.
bị chặn dưới bởi m	$m \le a_n$ với $1,2,3,\ldots$	$m = 1$ với $1,2,3,\ldots$ Chú ý $m = 0, m = -1$ là các lựa chọn khác.
bị chặn	vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $m = 0, M = 1$. Vậy dãy số bị chặn.

Ta cũng nói rằng một dãy là **đơn điệu** nếu nó tăng hoặc giảm hoặc **đơn điệu ngặt** nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt.

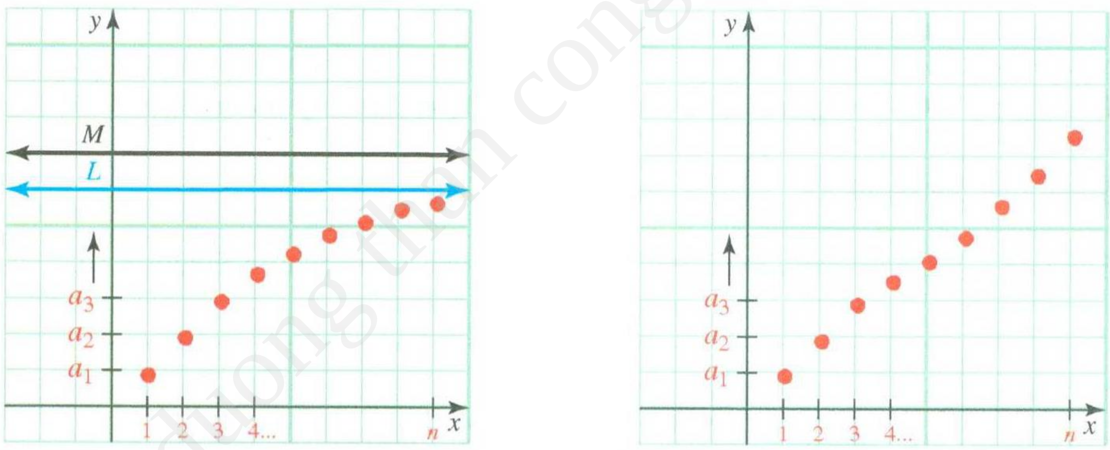
Nhìn chung, khó để nói rằng một chuỗi số cho trước là hội tụ hay phân kì, nhưng nhờ định lí sau đây, ta sẽ dễ dàng xác định một dãy số là hội tụ hay phân kì nếu ta biết nó đơn điệu.

Định lí 8.4 BMCT: định lí bị chặn, đơn điệu, hội tụ

Một dãy số đơn điệu $\{a_n\}$ hội tụ nếu nó bị chặn và phân kì nếu ngược lại.

Chứng minh

Một chứng minh hoàn chỉnh cho BMCT được phác họa trong các bài toán 55, 56. Dưới đây, ta đưa ra một lập luận nôm na. Giả định rằng $\{a_n\}$ là một dãy tăng. Trường hợp dãy giảm, ta lập luận tương tự. Vì các hạng tử của dãy thỏa mãn $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{k-1} \le a_k \le \ldots$, ta biết rằng dãy bị chặn dưới bởi a_1 và đồ thị của các điểm tương ứng (n, a_n) sẽ đi lên trong mặt phẳng. Hai trường hợp có thể xảy ra được biểu diễn trong hình 8.9.



a. If $a_n < M$ for $n = 1, 2, \cdots$, the graph of the points (n, a_n) will approach a horizontal "barrier" line $y = L$

b. If $\{a_n\}$ is not bounded from above, the graph rises indefinitely

Figure 8.9 Graphical possibilities for the BMCT

Giả sử dãy $\{a_n\}$ được chặn trên bởi một số M, cho nên $a_1 \le a_n < M$ với $n = 1, 2, \ldots$. Do đó đồ thị của các điểm (n, a_n) phải đi lên liên tục (bởi vì dãy là đơn điệu), nhưng nó phải nằm dưới đường thẳng $y = M$ (trong đó $L \le M$). Cách duy nhất để điều này có thể xảy ra đó là đồ thị ngày càng gần một đường thẳng "chắn" $y = L$ (trong đó $L \le M$), và ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, như biểu diễn trong hình 8.9a. Tuy nhiên, nếu dãy không bị chặn trên, đồ thị sẽ tăng không xác định (hình 8.9b), và các phần tử của dãy $\{a_n\}$ không thể ngày càng gần bất kì số hữu hạn L nào.

Ví dụ 7 Sự hội tụ dùng BMCT

Chứng minh rằng dãy $\left\{\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\right\}$.

Giải Các hạng tử đầu tiên của dãy này là

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1.3}{2.4} = \frac{3}{8} \qquad a_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6} = \frac{5}{16}$$

Vì $\frac{1}{2} > \frac{3}{8} > \frac{5}{16}$, ta nhận thấy dãy này tăng (có nghĩa là, nó đơn điệu). Ta có thể chứng minh điều này bởi việc chỉ ra rằng $a_{n+1} < a_n$ với mọi $n > 0$, hay một cách tương đương, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. (Chú ý rằng $a_n \neq 0$ với mọi n).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1.3.5...\left[2(n+1)-1\right]}{2.4.6...\left[2(n+1)\right]}}{\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}} = \frac{1.3.5...\left[2(n+1)-1\right]}{2.4.6...\left[2(n+1)\right]}.\frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

với mọi $n > 0$. Do đó, $a_{n+1} < a_n$ với mọi n, và $\{a_n\}$ là một dãy giảm. Vì $a_n > 0$ với mọi n nên $\{a_n\}$ bị chặn dưới bởi 0. Áp dụng định lí BMCT, ta thấy rằng $\{a_n\}$ hội tụ, nhưng BMCT không nói cho ta biết điều gì về giới hạn của dãy.

BMCT cũng đúng đối với các dãy có phần sau đơn điệu. Có nghĩa là, dãy $\{a_n\}$ hội tụ nếu nó bị chặn và tồn tại một số nguyên N sao cho $\{a_n\}$ đơn điệu với mọi $n > N$. Dạng chỉnh sửa của BMCT được minh họa trong ví dụ sau.

Ví dụ 8 Sự hội tụ của một dãy có phần sau đơn điệu

Chứng minh rằng dãy $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$ hội tụ.

Giải Ta sẽ áp dụng BMCT. Một vài giá trị được nêu ra trong bảng 8.10. Dãy nối tiếp các số gợi ý rằng dãy đầu tiên tăng và sau đó giảm dần. Để kiểm tra đặc điểm này, ta lấy

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

và thấy rằng

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}{x} = \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x}\ln x}{2x^2}$$

Tìm giá trị tới hạn:

$$\frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x}\ln x}{2x^2} = 0$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\ln x = 2$$

$$x = e^2$$

Y = (ln X/√X)

X = 10000000000

X	Y
20	0.6698661
30	0.6209708
40	0.5832631
50	0.5532436
60	0.5285776
70	0.5077923
80	0.4899255
90	0.4743216
100	0.460517
1000	0.2184424
10000	0.0921034
100000	0.0364071
1000000	0.0138155
10000000	0.005097
10000000000	0.0002303

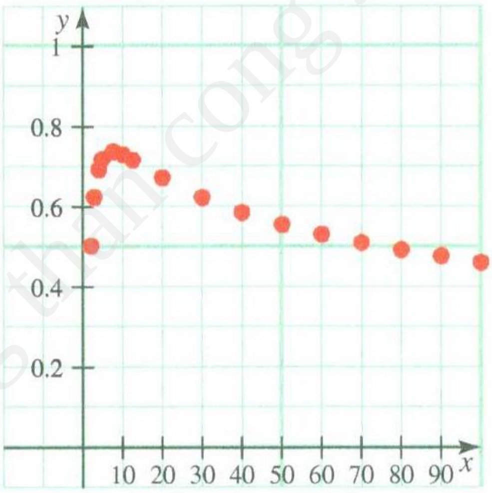


Figure 8.10 Interactive Sequence $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Vì vậy, $x = e^2$ là giá trị tới hạn duy nhất, và bạn có thể chứng minh rằng $f'(x) < 0$ với $x > e^2$ do $2 - \ln x < 0$ với $x > e^2$. Điều này có nghĩa là f là một hàm giảm với $x > e^2$. Do đó, dãy $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$ phải giảm với $n > 8$ (bởi vì e^2 nằm giữa 7 và 8). Ta thấy rằng dãy $\left\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right\}$ bị chặn dưới vì

$$0 < \left\{ \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \right\} \text{ với mọi } n \geq 2 .$$

Do đó, dãy đã cho bị chặn dưới và có phần sau giảm, cho nên nó phải hội tụ.

BMCT là một công cụ lí thuyết cực kì có giá trị. Ví dụ, trong mục 2.4, ta định nghĩa số e bởi giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Nhưng để làm như vậy, ta đã giả sử rằng giới hạn này tồn tại. Bây giờ, ta có thể chứng minh rằng giả sử này được đảm bảo là đúng, bởi vì dãy $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ tăng và bị chặn trên bởi 3 (xem bài toán 57-59). Do đó, BMCT đảm bảo cho chúng ta dãy số hội tụ, và điều này đảm bảo sự tồn tại của giới hạn. Chúng ta kết thúc chương này với một kết quả mà sẽ hữu ích trong công việc tiếp theo của chúng ta. Chứng minh tận dụng phát biểu chính thức của BMCT.

Định lí 8.5 Sự hội tụ của một dãy lũy thừa

Nếu r là một số cố định sao cho $|r| < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Chứng minh: Trường hợp khi $r = 0$ là tầm thường. Ta sẽ chứng minh định lí trong trường hợp $0 < r < 1$ và để trường hợp $-1 < r < 0$ lại như một bài tập (bài toán 60).

$0 \leq r^{n+1} = r^n r < r^n$.

Dãy $\{r^n\}$ đơn điệu và bị chặn nên có giới hạn. Hoặc $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ hoặc $\lim_{n\to\infty} r^n = L > 0$. Giả sử

$$\lim_{n\to\infty} r^n = L$$

$$r\lim_{n\to\infty} r^n = nL$$

$$\lim_{n\to\infty} rr^n = rL$$

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = rL < L$$

Nhưng $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \lim_{n\to\infty} r^n = L$ theo định nghĩa giới hạn. Do đó $L = rL < L$ là điều không thể, vì vậy $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

8.2 GIỚI THIỆU VỀ CHUỖI; CHUỖI CẤP SỐ NHÂN

TRONG MỤC NÀY: định nghĩa chuỗi vô hạn, các tính chất tổng quát của chuỗi, chuỗi cấp số nhân và các ứng dụng của chuỗi cấp số nhân

Ta định nghĩa một chuỗi như một giới hạn của một loại dãy đặc biệt. Sau đó ta nghiên cứu vài đặc điểm cơ bản của chuỗi và khảo sát chuỗi cấp số nhân, một loại chuỗi đặc thù với rất nhiều ứng dụng

Định nghĩa chuỗi

Một cách để cộng một danh sách các số là tính các tổng thành phần cho đến khi nào số cuối cùng của danh sách được được chạm đến. Một cách tương tự, để đưa ra nghĩa của một tổng vô hạn

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Một cách tự nhiên, ta khảo sát các tổng thành phần

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots$$

Nếu tổng vô hạn có giá trị, ta dự đoán rằng các tổng thành phần $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ sẽ ngày càng gần giá trị đó khi n tăng không bị chặn. Các ý tưởng này dẫn ta đến định nghĩa sau.

CHUỖI Một **chuỗi** là một tổng hình thức có dạng

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

và **tổng riêng thứ n** của chuỗi là

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Chuỗi được gọi là **hội tụ với tổng** S nếu *dãy* các tổng riêng $\{S_n\}$ hội tụ về S. Trong trường hợp này, ta viết

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Nếu dãy $\{S_n\}$ không hội tụ, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **phân kì** và không có tổng.

Điều này nói lên gì? Một chuỗi hội tụ nếu dãy các tổng riêng của nó hội tụ và phân kì nếu ngược lại. Nếu nó hội tụ, tổng của nó được định nghĩa là giới hạn của dãy tổng riêng.

Ta sẽ dùng kí hiệu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ để kí hiệu chuỗi $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ bất kể chuỗi này hội tụ hay phân kì. Nếu dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ hội tụ thì

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

và kí hiệu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ được dùng để biểu diễn cả cho chuỗi và cho tổng của nó. Ta cũng sẽ xem xét các chuỗi mà điểm khởi đầu không phải là 1; ví dụ, chuỗi

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$ có thể được kí hiệu bởi $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}$ hoặc $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1}$.

Ví dụ 1 Chuỗi hội tụ

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ hội tụ.

Giải Chuỗi này có những tổng riêng sau

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

...

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$$

Dãy các tổng riêng là $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128}, ...$ và nói chung (theo quy nạp toán học)

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Vì $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$ nên ta kết luận rằng chuỗi hội tụ và có tổng là $S = 1$.

Ví dụ 2 Chuỗi phân kì

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ phân kì.

Giải Chuỗi có thể được khai triển (viết rõ ra) như sau

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = -1+1-1+1-1+\ldots$$

và ta thấy rằng tổng riêng thứ n của chuỗi là

$$S_n = \begin{cases} -1, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

Vì dãy $\{S_n\}$ không có giới hạn, chuỗi đã cho phải phân kì.

Một chuỗi được gọi là **chuỗi rút gọn được** (**telescoping series** hay **collapsing series**) nếu các tổng riêng có thể rút gọn được, như minh họa bởi ví dụ sau đây.

Ví dụ 3 Một chuỗi suy biến

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$ hội tụ và tìm tổng của nó.

Giải Dùng kĩ thuật phân tích phân thức thành tổng các phân thức đơn giản, ta thấy rằng

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}.$$

Do đó, tổng riêng thứ n của chuỗi đã cho có thể biểu diễn như sau

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}.$$

Giới hạn của dãy tổng riêng là

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = 1$$

nên chuỗi hội tụ, với tổng $S = 1$.

Các tính chất tổng quát của chuỗi

Tiếp theo, ta sẽ khảo sát hai tính chất tổng quát của các chuỗi. Ở đây và những nơi khác, *khi điểm bắt đầu của một dãy không quan trọng, ta sẽ kí hiệu chuỗi bởi*

$$\sum a_k \text{ thay vì } \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Định lí 8.6 Tính chất tuyến tính của chuỗi

Nếu $\sum a_k$ và $\sum b_k$ là các chuỗi hội tụ thì chuỗi $\sum (ca_k + db_k)$, với c, d là hằng số cũng hội tụ và

$$\sum (ca_k + db_k) = c\sum a_k + d\sum b_k .$$

Chứng minh: So sánh tính chất này với tính chất tuyến tính trong Định lí 5.4 ở chương 5, các tính chất giới hạn là cho các tổng hữu hạn, và định lí này là cho các tổng vô hạn. Chứng minh của định lí này tương tự chứng minh của Định lí 5.4, nhưng trong trường hợp này, nó được suy ra từ luật tuyến tính của dãy (Định lí 8.1). Chi tiết được để lại như một bài toán.

Ví dụ 4 Tính tuyến tính được dùng để chỉ ra sự hội tụ

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{k^2+k}-\frac{6}{2^k}\right]$ hội tụ, và tìm tổng của nó.

Giải Vì từ Ví dụ 1 và 3 ta biết rằng $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$ và $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ đều hội tụ với tổng 1, tính chất tuyến tính cho ta viết chuỗi đã cho như sau

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}-6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}.$$

Bây giờ ta có thể kết luận rằng chuỗi hội tụ và rằng tổng của nó là

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}-6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=4(1)-6(1)=-2.$$

Tính chất tuyến tính cũng cung cấp thông tin hữu ích về một chuỗi có dạng $\sum (ca_k + db_k)$ khi chỉ một trong hai chuỗi $\sum a_k$ hoặc $\sum b_k$ phân kì; có nghĩa là, một hội tụ và cái còn lại phân kì.

Định lí 8.7 Sự phân kì của tổng của một chuỗi hội tụ và một chuỗi phân kì

Nếu chuỗi $\sum a_k$ hoặc $\sum b_k$ phân kì và chuỗi còn lại hội tụ thì chuỗi $\sum (a_k + b_k)$ phải phân kì.

Chứng minh: Giả sử $\sum a_k$ phân kì và $\sum b_k$ hội tụ. Khi đó, nếu chuỗi $\sum(a_k+b_k)$ cũng hội tụ, theo tính chất tuyến tính thấy rằng chuỗi

$$\sum\left[(a_k+b_k)-b_k\right]=\sum a_k$$

phải hội tụ, mâu thuẫn với giả thiết.

Điều đó kéo theo rằng chuỗi $\sum(a_k+b_k)$ phân kì.

Ví dụ, định lí này cho ta biết rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2+k}+(-1)^k\right]$$

phải phân kì vì mặc dù $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$ hội tụ (Ví dụ 3), chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ phân kì (Ví dụ 2).

Chuỗi cấp số nhân

Chúng ta vẫn còn có rất ít các kĩ thuật để xác định rằng một chuỗi cho trước là hội tụ hay phân kì. Thật sự, mục đích của phần lớn chương này là để phát triển đủ các kĩ thuật để xác định điều này. Ta bắt đầu cuộc tìm kiếm này bởi việc xem xét một loại chuỗi đặc biệt quan trọng.

CHUỖI CẤP SỐ NHÂN Một **chuỗi cấp số nhân** là một chuỗi trong đó tỉ số giữa các số hạng liên tiếp nhau trong chuỗi là một hằng số. Nếu hằng số này là r thì chuỗi có dạng

$$\sum_{k=0}^{\infty}ar^k=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^n+\ldots \qquad a\neq 0.$$

Ví dụ, $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$ là một chuỗi cấp số nhân vì mỗi số hạng bằng một nửa số hạng đứng kề trước. Tỉ số của một chuỗi cấp số nhân có thể dương hoặc âm. Ví dụ,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(-3)^k}=2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\ldots$$

là một chuỗi cấp số nhân với $r=-\frac{1}{3}$. Định lí sau đây cho ta biết làm thế nào để xác định một chuỗi cấp số nhân hội tụ hay phân kì và nếu nó hội tụ, tổng của nó là bao nhiêu.

Định lí 8.8 Định lí chuỗi cấp số nhân

Chuỗi cấp số nhân $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ với $a \neq 0$ phân kì nếu $|r| \geq 1$ và hội tụ nếu $|r| < 1$ với tổng

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}.$$

Chứng minh: Chú ý rằng tổng riêng thứ n của chuỗi cấp số nhân là

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$$

$$rS_n - S_n = \left(ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n\right) - \left(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}\right)$$

$$(r-1)S_n = ar^n - a$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} \text{ khi } r \neq 1.$$

Nếu $|r| > 1$ thì dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ không có giới hạn vì r^n không bị chặn trong trường hợp này, vì vậy chuỗi cấp số nhân phải phân kì. Tuy nhiên, nếu $|r| < 1$, Định lí 8.5 cho ta thấy rằng $r^n \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó ta có

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right) = \frac{a(0-1)}{r-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Để hoàn tất chứng minh, ta cần chỉ ra rằng chuỗi cấp số nhân phân kì khi $|r| = 1$, và ta để bước cuối cùng này lại như một bài toán.

Ví dụ 5 Xét sự hội tụ của một chuỗi cấp số nhân

Xét xem mỗi chuỗi cấp số nhân sau hội tụ hay phân kì. Nếu chuỗi hội tụ, tìm tổng của nó.

a. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{3}{2}\right)^k$ b. $\sum_{k=2}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{5}\right)^k$

Giải

a. Vì $r = \frac{3}{2}$ thỏa mãn $|r| \geq 1$ nên chuỗi phân kì.

b. Ta có $r = -\frac{1}{5}$ nên $|r| < 1$, và chuỗi cấp số nhân hội tụ. Giá trị đầu tiên của k là

2 (không phải 0), nên giá trị a (giá trị đầu tiên) là

$$a = 3\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3}{25}, \text{ và } \qquad \sum_{k=2}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{25}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{10}.$$

Ứng dụng của chuỗi cấp số nhân

Chuỗi cấp số nhân có thể được sử dụng theo rất nhiều cách. Ba ví dụ tiếp theo của chúng ta sẽ minh họa một vài ứng dụng bao gồm chuỗi cấp số nhân.

Nhắc lại rằng một số hữu tỉ r là một số có thể viết dưới dạng $r = p/q$ với p là số nguyên và q là số nguyên khác 0. Người ta có thể chứng minh rằng bất kì số nào như thế đều có biểu diễn số thập phân tuần hoàn. Ví dụ,

$$\frac{5}{10} = 0,5 = 0,5\overline{0} \qquad \frac{5}{11} = 0,454545... = 0,\overline{45}$$

Trong đó thanh ngang chỉ rằng các số dưới thanh ngang lặp lại vô hạn lần. Ví dụ 6 cho thấy chuỗi cấp số nhân có thể được dùng như thế nào để đảo ngược quá trình này bởi việc viết một số thập phân tuần hoàn cho trước dưới dạng một phân số.

Ví dụ 6 Biểu diễn một số thập phân tuần hoàn dưới dạng một số hữu tỉ

Viết $15,4\overline{23}$ dưới dạng một số hữu tỉ $\frac{p}{q}$.

Giải Thanh ngang phía trên 23 chỉ rằng khối các số này được lặp lại, có nghĩa là, $15,4\overline{23} = 15,4232323...$. Phần lặp lại của số thập phân có thể được viết dưới dạng một chuỗi hình học như sau

$$15,4\overline{23} = 14 + \frac{4}{10} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \frac{23}{10^7} + ...$$

$$= 15 + \frac{4}{10} + \frac{23}{10^3}\left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + ...\right]$$

$$= 15 + \frac{4}{10} + \frac{23}{10^3}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right] = 15 + \frac{4}{10} + \frac{23}{10^3}\left[\frac{100}{99}\right]$$

$$= 15 + \frac{4}{10} + \frac{23}{990} = \frac{15269}{990}.$$

Việc giảm trừ thuế, tức việc trả lại một khoản tiền nào đó cho người nộp thuế có thể dẫn đến việc khoản tiền này được dùng rất nhiều lần. Hiện tượng này được biết đến trong kinh tế như là ***tác động nhân***. Nó xảy ra bởi vì phần tiền giảm trừ được xài bởi một cá nhân lại trở thành thu nhập của một hoặc nhiều người khác, những người mà đến lượt mình lại xài một phần của khoản tiền đó, tạo ra thu nhập cho các nhân khác để tiêu xài. Nếu tỉ lệ thu nhập được tiết kiệm lại là một hằng số khi quá trình này tiếp tục một cách vô hạn, tổng số tiền được xài như là hệ quả của sự giảm trừ thuế chính là tổng của một chuỗi cấp số nhân.

Ví dụ 7 Bài toán mô hình: Tác động nhân trong kinh tế

Giả sử rằng trên toàn quốc xấp xỉ 90% của tất cả các thu nhập được dùng và 10% được tiết kiệm. Mức tiêu dùng tổng cộng được phát sinh bởi 40 tỉ tiền giảm trừ thuế sẽ là bao nhiêu nếu thói quen tiết kiệm tiền không thay đổi?

Giải Số tiền (tỉ) được xài bởi những người nhận trực tiếp tiền giảm trừ là 36. Khoản tiền này trở thành khoản thu nhập mới, mà 90% trong đó hay 0,9 (36) được dùng. Đến lượt mình, khoản tiền này lại sinh ra khoản tiêu xài là 0,9 [0,9 (36)], và cứ thế. Tổng số tiền được tiêu xài nếu quá trình này tiếp diễn vô hạn là

$$36+0,9(36)+0,9^2(36)+0,9^3(36)+\ldots=36\left[1+0,9+0,9^2+\ldots\right]$$

$$=36\sum_{k=0}^{\infty}0,9^k=36\left(\frac{1}{1-0,9}\right)=360.$$

Tổng số tiền tiêu xài được phát sinh bởi 40 tỉ đô la giảm trừ thuế là 360 tỉ đô la.

Ví dụ 8 Bài toán mô hình: Tích lũy thuốc trong cơ thể

Một bệnh nhân được tiêm 10 đơn vị thuốc mỗi 24 giờ. Thuốc được bài tiết theo số mũ nên lượng thuốc còn lại trong cơ thể bệnh nhân sau t ngày là $f(t)=e^{-t/5}$. Nếu việc điều trị vẫn được tiếp tục mãi, khoảng bao nhiêu đơn vị thuốc sẽ được tích lũy trong cơ thể bệnh nhân ngay trước lúc tiêm?

Giải Chỉ $10e^{-1/5}$ đơn vị thuốc của liều đầu tiên còn lại trong cơ thể bệnh nhân sau ngày đầu tiên (ngay trước lần tiêm thứ hai). Có nghĩa là,

$$S_1=10e^{-1/5}$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau 2 ngày bao gồm lượng còn lại từ 2 lần tiêm đầu tiên. Chỉ $10e^{-2/5}$ đơn vị của liều tiêm đầu tiên còn lại (vì 2 ngày đã trôi qua), và của liều tiêm thứ hai còn lại $10e^{-1/5}$ đơn vị thuốc:

$$S_2 = 10e^{-1/5} + 10e^{-2/5}.$$

Tương tự, sau n ngày,

$$S_n == 10e^{-1/5} + 10e^{-2/5} + \ldots + 10e^{-n/5} = \sum_{k=1}^{n} 10e^{-k/5}$$

Lượng thuốc S tích tụ trong người bệnh nhân trong thời gian dài là giới hạn của S_n khi $n \to \infty$. Đó là,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 10e^{-k/5} = \frac{10e^{-1/5}}{1-e^{-1/5}} \approx 45{,}166566.$$

Ta thấy rằng khoảng 45 đơn vị thuốc còn tích lũy trong cơ thể bệnh nhân.

Chú ý

Như một chú ý cuối cùng, hãy nhớ rằng một dãy là sự nối tiếp của các số hạng, trong khi một chuỗi là tổng của các số hạng như vậy. Đừng lẫn lộn giữa hai khái niệm vì chúng có những tính chất rất khác nhau. Ví dụ, một dãy các số hạng có thể hội tụ, nhưng chuỗi các số hạng đó có thể phân kì:

$\left\{1+\dfrac{1}{2^n}\right\}$ là một dãy $\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{9}{8}, \dfrac{17}{16}, \ldots$, dãy này hội tụ đến 1.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ là chuỗi $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{8}+\ldots$, chuỗi này phân kì.

8.3 TIÊU CHUẨN TÍCH PHÂN ; P-CHUỖI

TRONG MỤC NÀY: *tiêu chuẩn phân kì, chuỗi các số không âm ; tiêu chuẩn tích phân, p-chuỗi*

Bây giờ ta chuyển sang phát triển một vài tiêu chuẩn để xét sự hội tụ của một chuỗi cho trước. Các tiêu chuẩn này tiện lợi ở chỗ chúng không yêu cầu biết công thức cụ thể (như cái mà ta đã tìm với chuỗi cấp số nhân) cho tổng riêng thứ n S_n và bất tiện ở chỗ chúng thường không thể dùng để tìm tổng thực sự của một chuỗi hội tụ được.

Sự hội tụ hay phân kì của một chuỗi được xác định bởi sự biến đổi của các S_n, tổng riêng thứ n của chúng khi $n \to \infty$. Trong Mục 8.2, ta đã thấy các phương pháp đại số có thể thỉnh thoảng được dùng để tìm công thức cho tổng riêng thứ n của một chuỗi như thế nào. Thật không may, thường khó hoặc không thể tìm một công thức có thể sử dụng được cho tổng riêng thứ n S_n của một chuỗi, và các kĩ thuật khác phải được dùng để xét sự hội tụ hay phân kì.

Tiêu chuẩn phân kì

Khi khảo sát chuỗi $\sum a_k$, rất dễ nhầm lẫn dãy các số hạng tổng quát $\{a_k\}$ với dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ trong đó

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Vì dãy $\{a_k\}$ thường dễ tiếp cận hơn $\{S_n\}$, sẽ thuận tiện nếu sự hội tụ của dãy $\{S_n\}$ có thể được giải quyết bởi việc xét

$$\lim_{k\to\infty} a_k .$$

Mặc dù ta không có một tiêu chuẩn đơn giản, dứt khoát cho sự hội tụ, định lí sau đây cho ta biết rằng nếu những điều kiện nào đó được thỏa, chuỗi phải phân kì.

Định lí 8.9 Tiêu chuẩn phân kì

Nếu $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ thì chuỗi $\sum a_k$ phải phân kì.

Cái này nói lên điều gì ? Tiêu chuẩn phân kì chỉ có thể cho ta biết rằng chuỗi $\sum a_k$ phân kì nếu , nhưng nó **không thể được dùng để chứng minh sự hội tụ của một chuỗi**. Trong ví dụ 2 ta sẽ chỉ ra rằng chuỗi $\sum \frac{1}{k}$ phân kì mặc dù $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Chứng minh : Giả sử dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ hội tụ với tổng L, cho nên $\lim_{n\to\infty} S_n = L$. Khi đó ta cũng có

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L .$$

Vì $S_k - S_{k-1} = a_k$ nên

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(S_k - S_{k-1}\right) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = L - L = 0 .$$

Nếu chuỗi $\sum a_k$ hội tụ thì $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Vậy nếu $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ thì chuỗi $\sum a_k$ phải phân kì.

Ví dụ 1 Dùng tiêu chuẩn phân kì để chỉ ra sự phân kì

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-300}{4k+750}$ phân kì.

Giải Lấy giới hạn của số hạng thứ k khi $k \to \infty$, ta thấy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k-300}{4k+750} = \frac{1}{4}.$$

Vì giới hạn khác 0, theo tiêu chuẩn phân kì ta có chuỗi phải phân kì.

Chuỗi các số không âm; Tiêu chuẩn tích phân

Chuỗi mà các số hạng đều là các số không âm đóng một vai trò quan trọng trong lí thuyết chuỗi tổng quát và trong các ứng dụng. Mục đích tiếp theo của chúng ta là phát triển các phương pháp để xét sự hội tụ của các chuỗi các số không âm, và ta bắt đầu bởi việc thiết lập quy tắc tổng quát sau.

Định lí 8.10 Tiêu chuẩn hội tụ cho chuỗi các số không âm

Một chuỗi $\sum a_k$ trong đó $a_k \geq 0$ với mọi k hội tụ nếu dãy các tổng riêng của nó bị chặn trên và phân kì nếu ngược lại.

Chứng minh

Giả sử $\sum a_k$ là một chuỗi các số không âm, và kí hiệu tổng riêng thứ n của chuỗi là S_n; ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Vì $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ và vì $a_k \geq 0$ với mọi k nên

$$S_{n+1} \geq S_n$$

Với mọi n, cho nên $\{S_n\}$ là một dãy tăng. Theo BMCT, dãy tăng $\{S_n\}$ hội tụ nếu nó bị chặn trên và phân kì nếu ngược lại. Do đó, vì chuỗi $\sum a_k$ đại diện cho giới hạn của dãy $\{S_n\}$, chuỗi $\sum a_k$ hội tụ nếu dãy $\{S_n\}$ bị chặn trên và phân kì nếu nó không bị chặn.

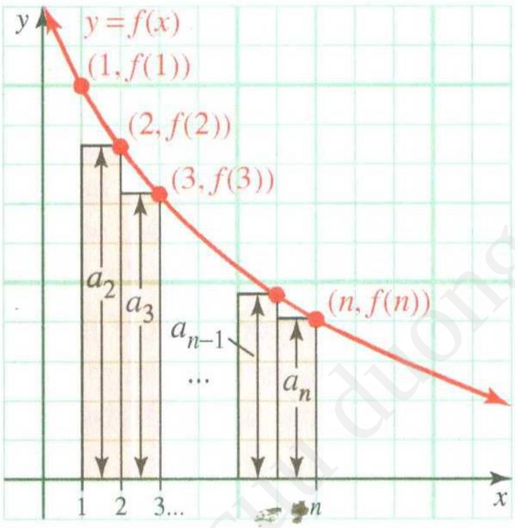
Tiêu chuẩn hội tụ này thường khó để áp dụng vì không dễ để xác định xem dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ có bị chặn trên hay không. Mục tiêu tiếp theo là khảo sát nhiều tiêu chuẩn hội tụ. Đây là các tiến trình cho phép chúng ta xác định một cách gián tiếp một chuỗi cho trước hội tụ hay phân kì mà không phải tính giới hạn của dãy tổng riêng. Ta bắt đầu với một tiêu chuẩn hội tụ mà liên kết sự hội tụ của một chuỗi với sự hội tụ của một tích phân suy rộng.

Định lí 8.11 **Tiêu chuẩn tích phân**

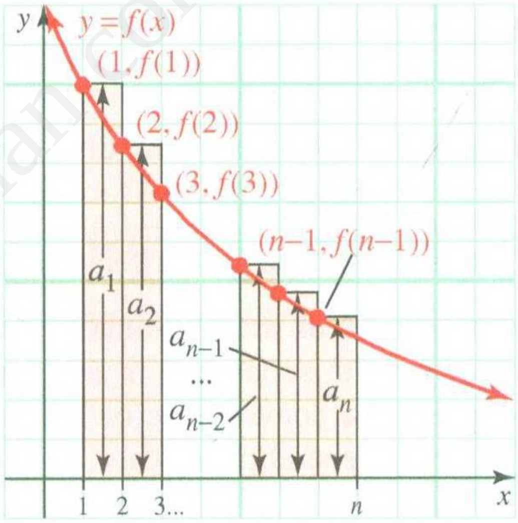
Nếu $a_k = f(k)$ với $k = 1, 2, \ldots$, trong đó f là một hàm theo biến x, dương, liên tục và giảm với $x \geq 1$, khi đó

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ và } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.}$$

Chứng minh: Ta sẽ dùng lập luận hình học để chỉ ra rằng dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bị chặn trên nếu tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ và nó không bị chặn nếu tích phân phân kì. Theo đó, Hình 8.14 a và Hình 8.14b biểu diễn đồ thị của một hàm giảm liên tục f thỏa mãn $f(k) = a_k$ với $k = 1, 2, 3, \ldots$. Các hình chữ nhật được xây dựng tại các khoảng đơn vị trong cả hai hình, nhưng trong Hình 8.14a, hình chữ nhật thứ k có chiều cao $f(k+1) = a_{k+1}$ trong khi trong Hình 8.14b, hình chữ nhật tương ứng có chiều cao $f(k) = a_k$.



a. The kth rectangle has height $f(k+1) = a_{k+1}$



b. The kth rectangle has height $f(k) = a_k$

Figure 8.14 Interactive Integral test

Chú ý rằng trong Hình 8.14a, các hình chữ nhật vẽ bên dưới đường cong sao cho

Diện tích của (n-1) hình chữ nhật đầu tiên < diện tích bên dưới $y = f(x)$ trên $[1, n]$.

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \int_1^n f(x)dx.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx.$$

Tương tự, trong Hình 8.14b, các hình chữ nhật được giới hạn sao cho

Diện tích bên dưới $y=f(x)$ trên $[1,n+1]$ < diện tích của n hình chữ nhật đầu tiên.

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Đặt $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ là tổng riêng thứ n của chuỗi, ta có

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < S_n < a_1 + \int_1^{n} f(x)dx.$$

Bây giờ, giả sử tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ và có giá trị I; có nghĩa là,

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = I.$$

Khi đó,

$$S_n < a_1 + \int_1^{n} f(x)dx < a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx = a_1 + I.$$

Nó kéo theo rằng dãy các tổng riêng bị chặn trên (bởi $a_1 + I$), và tiêu chuẩn hội tụ cho chuỗi các số không âm cho ta biết rằng chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ phải hội tụ.

Mặt khác, nếu tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ phân kì thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty.$$

Điều này kéo theo rằng $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ vì

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < S_n.$$

Điều này có nghĩa là chuỗi phải phân kì. Do đó, chuỗi và tích phân suy rộng cùng hội tụ hoặc cùng phân kì, như đã phát biểu.

Một chuỗi nảy sinh liên quan đến âm điều hòa sinh ra bởi một sợi dây đang dao động là

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Chuỗi này được gọi là **chuỗi điều hòa**, và trong ví dụ tiếp theo, ta sẽ dùng tiêu chuẩn tích phân để chứng minh rằng chuỗi này phân kì. Một chứng minh khác không dùng tiêu chuẩn tích phân có thể được tìm thấy trong các bài toán bổ sung ở cuối chương.

Ví dụ 2 Chuỗi điều hòa phân kì

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Giải Vì $f(x) = \frac{1}{x}$ dương, liên tục và giảm với $x \geq 1$, các điều kiện của tiêu chuẩn tích phân được thỏa.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} [\ln b - \ln 1] = \infty .$$

Tích phân phân kì nên chuỗi điều hòa phân kì.

Ví dụ 3 Tiêu chuẩn tích phân cho sự hội tụ

Xét sự hội tụ của $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k/5}}$.

Giải Hàm $f(x) = \frac{x}{e^{x/5}} = xe^{-x/5}$ dương, liên tục với mọi $x > 0$.

Ta thấy rằng

$$f'(x) = x\left(-\frac{1}{5}e^{-x/5}\right) + e^{-x/5} = \left(1 - \frac{x}{5}\right)e^{-x/5}.$$

Số tới hạn được tìm thấy khi $f'(x) = 0$, nên ta giải phương trình

$$\left(1 - \frac{x}{5}\right)e^{-x/5} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{5} = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Ta thấy rằng $f'(x) < 0$ với $x > 5$, nên nó kéo theo rằng f tăng với $x > 5$. Do đó, điều kiện cho tiêu chuẩn tích phân được thỏa, và chuỗi đã cho và tích phân suy rộng cùng hội tụ hoặc cùng phân kì. Tính tích phân suy rộng, ta thấy

$$\int_5^{\infty} xe^{-x/5} dx = \lim_{b \to \infty} \int_5^{b} xe^{-x/5} dx = \lim_{b \to \infty} \left[-5xe^{-x/5} \Big|_5^b - \int_5^b \left(-5e^{-x/5}\right) dx \right]$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-5xe^{-x/5} - 25e^{-x/5} \right]_5^b = \lim_{b \to \infty} \left[-5be^{-b/5} - 25e^{-b/5} + 50e^{-1} \right]$$

$$= 50e^{-1}.$$

Vì vậy, tích phân suy rộng hội tụ, cái mà đến lượt mình đảm bảo sự hội tụ của chuỗi đã cho.

p-chuỗi

Chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{k}$ là một trường hợp đặc biệt của một dạng chuỗi tổng quát hơn gọi là p-chuỗi.

p-CHUỖI Một chuỗi có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

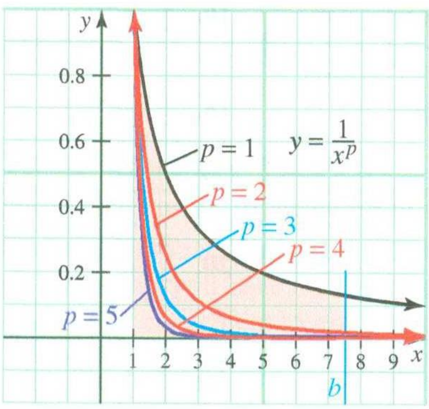
trong đó p là một hằng số dương được gọi là một p-chuỗi. Chuỗi điều hòa (Ví dụ 2) là trường hợp khi $p = 1$.

Định lí sau đây cho thấy sự hội tụ của một p-chuỗi phụ thuộc như thế nào vào giá trị của p.

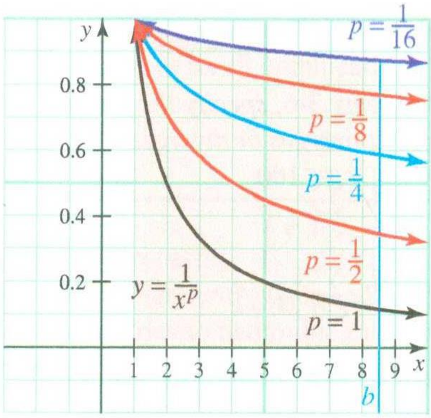
Định lí 8.12 Tiêu chuẩn p-chuỗi

p-chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ hội tụ nếu $p > 1$ và phân kì nếu $p \leq 1$.

Điều này nói lên gì? Rõ ràng tất cả các hàm dạng $y = \frac{1}{x^p}$ với $p > 0$ giảm, nhưng vì sao các chuỗi $\sum_{1} \frac{1}{k^p}$ chỉ hội tụ khi $p > 1$? Câu trả lời nằm trong tốc độ giảm của $y = \frac{1}{x^p}$. Nếu $p > 1$, đường cong $y = \frac{1}{x^p}$ giảm đủ nhanh để đảm bảo rằng diện tích phái dưới đường cong khi $p > 1$ hữu hạn (xem Hình 8.15a, trong khi nếu $p \leq 1$, đương cong $y = \frac{1}{x^p}$ giảm chậm hơn, và diện tích bên dưới đường cong là vô hạn (Hình 8.15b).



a. Areas are bounded



b. Areas are not bounded

Figure 8.15 Graphs for the p-series test

Chứng minh: Ta để lại cho độc giả việc kiểm tra rằng $f(x)=\frac{1}{x^p}$ liên tục, dương và giảm khi $x\ge 1$ và $p>0$. Ta biết chuỗi điều hòa (p=1) phân kì. Với $p>0$, $p\ne 1$, ta có

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1} & neu\ \ p>1\\ \infty & neu\ \ 0<p<1\end{cases}.$$

Có nghĩa là, tích phân suy rộng này hội tụ nếu $p>1$ và phân kì nếu $0<p<1$. Với $p=0$, chuỗi trở thành

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^0}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\ldots$$

Và nếu $p<0$, ta có $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^p}=\infty$, cho nên chuỗi phân kì theo tiêu chuẩn phân kì (Định lí 8.9). Do đó, một p-chuỗi hội tụ chỉ khi $p>1$.

Ví dụ 4 Tiêu chuẩn $p-$ chuỗi

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3}}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

Giải

a. Ta có $\sqrt{k^3}=k^{3/2}$, nên $p=\frac{3}{2}>1$, và chuỗi hội tụ.

b. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$: Ta chú ý rằng $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^k}$ hội tụ, vì nó là chuỗi cấp số nhân với $|r|=\frac{1}{e}<1$ và $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ phân kì vì nó là một p-chuỗi với $p=\frac{1}{2}<1$. Vì một chuỗi hội tụ còn chuỗi còn lại phân kì nên chuỗi đã cho phân kì (Định lí 8.7).

8.4. CÁC TIÊU CHUẨN SO SÁNH

TRONG MỤC NÀY : *Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp, tiêu chuẩn so sánh giới hạn*

Thường một chuỗi cho trước có cùng dạng tổng quát với các chuỗi khác mà tính hội tụ đã được biết. Trong trường hợp như vậy, thật là thuận tiện để dùng các tính chất của các chuỗi đã biết để xác định các tính chất của các chuỗi được cho. Mục tiêu của mục này là khảo sát ba tiêu chuẩn so sánh để thực hiện việc xác định này.

Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Cái đầu tiên trong các tiêu chuẩn so sánh được gọi là tiêu chuẩn so sánh trực tiếp.

Định lí 8.13 Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Giả sử $0 \le a_k \le c_k$ với mọi k. Nếu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ hội tụ thì $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ cũng hội tụ.

Giả sử $0 \le d_k \le a_k$ với mọi k. Nếu $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ phân kì thì $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ cũng phân kì.

Cái này nói lên điều gì? Cho $\sum a_k$, $\sum c_k$ và $\sum d_k$ là các chuỗi các số dương. Chuỗi $\sum a_k$ hội tụ nếu nó "nhỏ hơn" (bị trội hơn bởi) một chuỗi hội tụ $\sum c_k$ đã biết và phân kì nếu nó "lớn hơn" (trội hơn) một chuỗi phân kì $\sum d_k$ đã biết. Có nghĩa là, "nhỏ hơn hội tụ là hội tụ", và " lớn hơn phân kì là phân kì".

Chứng minh: Giả sử $\sum a_k$ là một chuỗi không âm cho trước bị trội hơn bởi chuỗi hội tụ $\sum c_k$ với, tức là $0 \le a_k \le c_k$ với mọi k. Khi đó, vì chuỗi $\sum c_k$ hội tụ, dãy các tổng riêng của nó bị chặn trên (bởi M), và ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{n} c_k \le M \text{ với mọi } n.$$

Do đó, dãy các tổng riêng của chuỗi nhỏ hơn $\sum a_k$ cũng bị chặn trên bởi M, và nó cũng hội tụ.

Mặt khác, giả sử chuỗi đã cho $\sum a_k$ trội hơn một chuỗi phân kì $\sum d_k$, tức là $0 \le d_k \le a_k$. Khi đó vì dãy các tổng riêng của $\sum d_k$ không bị chặn nên dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum a_k$ cũng không bị chặn, và chuỗi $\sum a_k$ cũng phải phân kì.

Chú ý

Định lí phía trên cũng đúng nếu bất đẳng thức chỉ đúng với tất cả $k \ge N$, trong đó N là một số dương nào đó bởi vì một chuỗi hội tụ hay phân kì chỉ phụ thuộc vào điều gì xảy ra khi k rất lớn. Có nghĩa là, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ hội tụ với mọi số nguyên N.

Ví dụ 1 Dùng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp xét sự hội tụ

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1}$.

Giải Với $k \ge 0$, ta có $3^k + 1 > 3^k > 0$, và $0 < \dfrac{1}{3^k + 1} < \dfrac{1}{3^k}$. Do đó, chuỗi đã cho bị trội hơn bởi chuỗi cấp số nhân hội tụ $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^k}$ (hội tụ vì $r = \dfrac{1}{3}$). Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp cho ta biết chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2 Dùng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp để chỉ ra sự phân kì

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k} - 1}$.

Giải Với $k \ge 2$, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{k} - 1} > \frac{1}{\sqrt{k}} > 0$$

Nên chuỗi đã cho trội hơn p-chuỗi phân kì $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k^{1/2}}$ (phân kì vì $p = \dfrac{1}{2} < 1$). Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp cho ta biết chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ 3 Áp dụng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$.

Giải Ta sẽ so sánh chuỗi đã cho với một chuỗi cấp số nhân. Đặc biệt, chú ý rằng nếu $k \ge 2$ thì $1/k! > 0$ và

$$k! = k(k-1)(k-2)...3.2.1 \ge \underbrace{2.2.2......2.2}_{k-1 lan}.1 = 2^{k-1}.$$

Do đó, ta có $0 < \dfrac{1}{k!} \le \dfrac{1}{2^{k-1}}$, và vì chuỗi đã cho bị trội hơn bởi chuỗi cấp số nhân hội tụ $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k-1}}$ (với $r = \dfrac{1}{2}$), nó cũng phải hội tụ.

Tiêu chuẩn so sánh giới hạn

Không phải luôn dễ hoặc thậm chí không thể so sánh trực tiếp hai chuỗi tương tự. Ví dụ, ta mong muốn chuỗi $\sum \dfrac{1}{2^k - 5}$ hội tụ vì nó rất giống chuỗi cấp số nhân hội tụ $\sum \dfrac{1}{2^k}$. Để so sánh các chuỗi, ta trước hết phải chú ý rằng $\dfrac{1}{2^k - 5}$ âm với $k = 1$ và $k = 2$ và dương với $k \ge 3$. Do đó, nếu $k \ge 3$,

$$0 \le \frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2^k - 5}.$$

Có nghĩa là, $\sum \frac{1}{2^k - 5}$ trội hơn chuỗi hội tụ $\sum \frac{1}{2^k}$, cái mà cho thấy tiêu chuẩn so sánh trực tiếp không thể được dùng để xác định sự hội tụ của chuỗi $\sum \frac{1}{2^k - 5}$ bằng việc so sánh với $\sum \frac{1}{2^k}$. Trong những tình huống như thế này, tiêu chuẩn sau thường hữu ích.

Định lí 8.14 Tiêu chuẩn so sánh giới hạn

Giả sử $a_k > 0$ và $b_k > 0$ với mọi k đủ lớn và rằng

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$

trong đó L hữu hạn và dương ($0 < L < \infty$). Khi đó $\sum a_k$ và $\sum b_k$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Cái này nói lên điều gì? Ta có tiến trình sau để xét sự hội tụ của $\sum a_k$.

Bước 1. Tìm chuỗi $\sum b_k$ đã biết tính hội tụ và có các số hạng tổng quát b_k cơ bản là giống với a_k.

Bước 2. Kiểm tra rằng $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$ tồn tại và dương.

Bước 3. Xác định $\sum b_k$ hội tụ hay phân kì. Sau đó tiêu chuẩn so sánh giới hạn cho ta biết rằng $\sum a_k$ cũng như vậy.

Chứng minh: Tiêu chuẩn so sánh giới hạn được chứng minh bởi việc sử dụng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp. Chi tiết của chứng minh được đưa ra trong Phụ lục B.

Ví dụ 4 Dùng tiêu chuẩn so sánh giới hạn để chứng minh sự hội tụ

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 5}$.

Giải Vì chuỗi đã cho có cùng dạng tổng quát với chuỗi cấp số nhân hội tụ $\sum \frac{1}{2^k}$, tính giới hạn

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^k-5}}{\dfrac{1}{2^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{2^k-5}=1.$$

Giới hạn này hữu hạn và dương, do đó tiêu chuẩn so sánh giới hạn cho ta biết rằng chuỗi có cùng tính chất hội tụ với $\sum\frac{1}{2^k}$. Vì vậy, chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 5 **Dùng tiêu chuẩn so sánh giới hạn chỉ ra sự phân kì của chuỗi**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k+2}{\sqrt{k}\,(3k-5)}.$$

Giải Với các giá trị k lớn, số hạng tổng quát của chuỗi đã cho

$$a_k=\frac{3k+2}{\sqrt{k}\,(3k-5)}$$

Có vẻ tương tự với

$$b_k=\frac{3k}{\sqrt{k}\,(3k)}=\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Để áp dụng tiêu chuẩn so sánh giới hạn, ta phải tính giới hạn

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{3k+2}{\sqrt{k}\,(3k-5)}}{\dfrac{1}{\sqrt{k}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k+2}{3k-5}=1.$$

Vì giới hạn này hữu hạn và dương, nó kéo theo rằng chuỗi đã cho có cùng tính chất với chuỗi $\sum 1/\sqrt{k}$, một p-chuỗi phân kì ($p=\frac{1}{2}$). Ta kết luận rằng chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ 6 **Áp dụng tiêu chuẩn so sánh giới hạn**

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7k+100}{e^{k/5}-70}$.

Giải Với k lớn,

$$a_k=\frac{7k+100}{e^{k/5}-70}$$

Có vẻ có dạng giống với

$b_k = \dfrac{k}{e^{k/5}}$ và thật sự, ta thấy rằng

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{7k+100}{e^{k/5}-70}}{\dfrac{k}{e^{k/5}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k/5}\left(7k+100\right)}{k\left(e^{k/5}-70\right)} = 7.$$

Trong Ví dụ 3, Phần 8.3, ta đã chứng minh rằng chuỗi $\sum \dfrac{k}{e^{k/5}}$ hội tụ, và vì vậy tiêu chuẩn so sánh giới hạn cho ta biết biết chuỗi đã cho cũng hội tụ.

Thỉnh thoảng, hai chuỗi $\sum a_k$ và $\sum b_k$ có vẻ có tính chất hội tụ tương tự nhau, nhưng hóa ra

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

bằng 0 hoặc ∞, và tiêu chuẩn so sánh giới hạn vì vậy không áp dụng được. Trong những trường hợp này, tiêu chuẩn tổng quát sau của tiêu chuẩn so sánh giới hạn thường hữu ích.

Định lí 8.15 Tiêu chuẩn so sánh giới hạn zero-vô cùng

Giả sử $a_k > 0$ và $b_k > 0$ với mọi k đủ lớn.

Nếu $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 0$ và $\sum b_k$ hội tụ thì $\sum a_k$ hội tụ.

Nếu $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = \infty$ và $\sum b_k$ phân kì thì $\sum a_k$ phân kì.

Chứng minh: Phần đầu của chứng minh được phác họa trong Bài toán 59; phần thứ 2 được làm một cách tương tự.

Ví dụ 7 Sự hội tụ của chuỗi $q-\log$

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ln k}{k^q}$ hội tụ nếu $q > 1$ và phân kì nếu $q \le 1$. Ta gọi đây là chuỗi $q-\log$.

Giải Ta sẽ tiến hành chứng minh này trong 3 phần.

Trường hợp 1: $(q > 1)$

Gọi p là một số thỏa $1 < p < q$, và đặt

$$a_k = \frac{\ln k}{k^q} \text{ và } b_k = \frac{1}{k^p}.$$

Khi đó

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\ln k}{k^q}}{\frac{1}{k^p}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k^{q-p}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}}{(q-p)k^{q-p-1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(q-p)k^{q-p}} = 0.$$

Vì $\sum 1/k^p$ hôi tụ (p-chuỗi với p>1), chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn zero- vô cùng.

Trường hợp 2: (q<1)

Bây giờ, lấy p thỏa mãn $q < p < 1$, Khi đó với a_k và b_k được xác định như trong trường hợp 1, ta có

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k^{q-p}} = \lim_{k\to\infty}\left[(\ln k)k^{p-1}\right] = \infty.$$

Vì $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ phân kì (ta biết $p < 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh zero- vô cùng,

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^q}$ phân kì khi $q < 1$.

Trường hợp 3: ($q = 1$)

Ở đây, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$ phân kì theo tiêu chuẩn tích phân vì khi đặt $u = \ln x; du = \frac{1}{x}dx$, ta có

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \lim_{x\to\infty}\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^b = \infty.$$

8.5 TIÊU CHUẨN TỈ SỐ VÀ TIÊU CHUẨN CĂN

TRONG MỤC NÀY: *tiêu chuẩn tỉ số, tiêu chuẩn căn*

Trong mục này, ta phát triển thêm hai tiêu chuẩn, tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn

Tiêu chuẩn tỉ số

Một cách trực quan, một chuỗi các số dương $\sum a_k$ hội tụ khi và chỉ khi dãy $\{a_k\}$

giảm đủ nhanh về 0. Một cách để đo tốc độ mà dãy $\{a_k\}$ giảm đó là xét tỉ số a_{k+1}/a_k khi k lớn dần. Cách tiếp cận này dẫn đến kết quả sau:

Định lí 8.16 Tiêu chuẩn tỉ số

Cho chuỗi $\sum a_k$ với $a_k > 0$, giả sử rằng

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = L.$$

Tiêu chuẩn tỉ số phát biểu như sau:

Nếu $L < 1$ thì $\sum a_k$ hội tụ.

Nếu $L > 1$ hoặc L vô hạn thì $\sum a_k$ phân kì.

Nếu $L = 1$ thì tiêu chuẩn chưa kết luận được.

Chứng minh: Theo một cách hiểu nào đó, tiêu chuẩn tỉ số chính là tiêu chuẩn so sánh giới hạn trong đó $\sum a_k$ được so sánh với chính nó. Ta sẽ dùng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp để chứng minh rằng $\sum a_k$ hội tụ nếu $L < 1$. Cho R sao cho $0 < L < R < 1$. Khi đó tồn tại số $N > 0$ nào đó sao cho

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < R \text{ với mọi } k \ge N.$$

Do đó,

$$a_{N+1} < a_N R$$

$$a_{N+2} < a_{N+1}R < a_n R^2$$

$$a_{N+3} < a_{N+2}R < a_{N+1}R^2 < a_N R^3.$$

Chuỗi cấp số nhân

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_N R^k = a_N R + a_N R^2 + \ldots + a_N R^n + \ldots$$

hội tụ vì $0 < R < 1$, có nghĩa là chuỗi bị trội hơn bởi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+n} + \ldots$$

cũng hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh trực tiếp. Do đó, $\sum a_k$ hội tụ, vì ta có thể bỏ bớt một số hữu hạn các số hạn ($k \le N$).

Chứng minh của phần thứ hai tương tự, ngoại trừ bây giờ ta chọn R sao cho

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{K+1}}{a_k}=L>R>1$$

và chỉ ra rằng tồn tại $M>0$ nào đó để $a_{M+k}>a_M R^k$.

Để chứng minh rằng tiêu chuẩn tỉ số không có kết luận nếu $L=1$, chỉ cần chú ý rằng chuỗi điều hòa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \text{ phân kì với } \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}=1$$

trong khi p-chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \text{ hội tụ với } \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}}=1.$$

Ví dụ 1 Dùng tiêu chuẩn tỉ số để chứng minh sự hội tụ

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$.

Giải Đặt $a_k=\frac{2^k}{k!}$ và chú ý rằng

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2^{k=1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!2^{k+1}}{(k+1)!2^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k+1}=0.$$

Do đó, $L<1$, và theo tiêu chuẩn tỉ số, chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2 Dùng tiêu chuẩn tỉ số chứng minh sự phân kì

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}$.

Giải Đặt $a_k=\frac{k^k}{k!}$ và chú ý rằng

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{k^k}{k!}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k!(k+1)^{k+1}}{k^k(k+1)!}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e>1.$$

Vì $L>1$ nên chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn tỉ số.

Ví dụ 3 Tiêu chuẩn tỉ số không áp dụng được

Xét sự hội tụ của $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k-3}$.

Giải Đặt $a_k=\frac{1}{2k-3}$ và tìm

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2(k+1)-3}}{\dfrac{1}{2k-3}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k-3}{2k-1}=1.$$

Tiêu chuẩn tỉ số không đưa ra kết luận gì. Ta có thể dùng tiêu chuẩn tích phân hay tiêu chuẩn so sánh giới hạn để xét sự hội tụ. Chú ý rằng

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k-3}\text{ tương tự với chuỗi phân kì đã biết }\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k},$$

Vì vậy ta kết luận chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ 4 Sự hội tụ của chuỗi các hàm lũy thừa

Tìm tất cả các số $x>0$ mà tại đó chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^3x^k=x+2^3x^2+3^3x^3+\ldots$$

hội tụ. Chuỗi này gọi là chuỗi lũy thừa, và sẽ được thảo luận chi tiết hơn trong Mục 8.7 và 8.8.

Giải Xem như x cố định (có nghĩa là, như một hằng số), ta áp dụng tiêu chuẩn tỉ số:.

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^3x^{k+1}}{k^3x^k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^3x=x.$$

Do đó, chuỗi hội tụ nếu $L=x<1$ và phân kì nếu $L=x>1$. Khi $x=1$, chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^{\infty}k^3$, phân kì theo tiêu chuẩn phân kì.

Tiêu chuẩn căn

Trong tất cả các tiêu chuẩn chúng ta đã phát triển, có lẽ tiêu chuẩn phân kì dễ áp dụng nhất vì nó đơn giản chỉ bao gồm việc tính $\lim_{k\to\infty} a_k$ và quan sát giới hạn đó có bằng 0 không. Nhưng không may, hầu hết các chuỗi "thú vị" có $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, cho nên tiêu chuẩn phân kì không thể được dùng để xác định xem chúng hội tụ hay phân kì. Tuy nhiên, kết quả sau đây cho thấy rằng có thể phát biểu nhiều hơn về sự hội tụ của $\sum a_k$ bởi việc xem xét điều gì xảy ra cho $\sqrt[k]{a_k}$ khi $k \to \infty$. Tiêu chuẩn này sẽ đặc biệt hữu ích với một chuỗi bao gồm một lũy thừa cấp k.

Định lí 8.17 Tiêu chuẩn căn

Cho chuỗi $\sum a_k$ với $a_k > 0$, giả sử rằng

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L.$$

Tiêu chuẩn căn phát biểu như sau

Nếu $L < 1$ thì $\sum a_k$ hội tụ.

Nếu $L > 1$ hoặc L vô hạn thì $\sum a_k$ phân kì.

Nếu $L = 1$ thì tiêu chuẩn chưa kết luận được.

Chứng minh: Chứng minh của định lí này tương tự với chứng minh của tiêu chuẩn tỉ số và được phác họa trong Bài toán 59.

Ví dụ 5 Sự hội tụ với tiêu chuẩn căn

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$.

Giải Đặt $a_k = \frac{1}{(\ln k)^k}$ và chú ý rằng

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\ln k)^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0.$$

Vì $L < 1$ nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn căn.

Ví dụ 6 Sự phân kì với tiêu chuẩn căn

Xét sự hội tụ của $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

Giải $L=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right]^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=e>1.$

Vì $L>1$ nên chuỗi phân kì theo tiêu chuẩn căn.

Ta thấy rằng tiêu chuẩn tỉ số đặc biệt hữu ích với chuỗi $\sum a_k$ mà số hạng tổng quát a_k chứa các giai thừa hay lũy thừa, và tiêu chuẩn căn áp dụng một cách tự nhiên nếu a_k chứa một lũy thừa cấp k. Tuy nhiên, cả tiêu chuẩn tỉ số và tiêu chuẩn căn không thể áp dụng được với một vài chuỗi rất đơn giản chẳng hạn p-chuỗi $\sum\frac{1}{k^p}$ vì

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(k+1)^p}}{\frac{1}{k^p}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^p=1^p=1.$$

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^p}}=\left[\lim_{k\to\infty}k^{1/k}\right]^{-p}=1^{-p}=1.$$

Ví dụ 7 Xét sự hội tụ

Xét sự hội tụ của chuỗi sau

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{1.4.7...(3k+1)}=1+\frac{1!}{1.4}+\frac{2!}{1.4.7}+\frac{3!}{1.4.7.10}+....$$

Giải Đặt $a_k=\frac{k!}{1.4.7...(3k+1)}$. Vì a_k bao gồm $k!$, ta thử tiêu chuẩn tỉ số.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\frac{(k+1)!}{1.4.7...[3(k+1)+1]}}{\frac{k!}{1.4.7...(3k+1)}}=\frac{(k+1)![1.4.7...(3k+1)]}{k![1.4.7...(3k+4)]}=\frac{k+1}{3k+4}.$$

Vì vậy,

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{3k+4}=\frac{1}{3}.$$

Vì $L<1$ nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn tỉ số.

Ví dụ 8 Xét sự hội tụ

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$.

Giải Số hạng tổng quát $a_k = \dfrac{k!}{k^k}$ bao gồm một lũy thừa cấp k, cái mà gợi ý dùng tiêu chuẩn căn, nhưng sự có mặt của $k!$ cho thấy việc dùng tiêu chuẩn tỉ số hợp lí hơn.

$$L = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\dfrac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} < 1.$$

Vì $L < 1$ nên chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn tỉ số.

8.6. CHUỖI ĐAN DẤU – HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI VÀ HỘI TỤ CÓ ĐIỀU KIỆN

Có 2 dạng chuỗi đan dấu như sau

+ Số hạng có chỉ số lẻ âm: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots\ldots$

+ Số hạng có chỉ số chẵn âm: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots\ldots$

trong cả 2 dạng thì $a_n > 0$.

8.6.1. Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu

Một cách tổng quát thì điều kiện $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ chưa khẳng định chắc chắn được về tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tuy nhiên với chuỗi đan dấu thì nó sẽ hội tụ nếu trị tuyệt đối các số hạng đơn điệu giảm về 0. Ta có định lý sau

__Định lý 8.18:__ **(Tiêu chuẩn Leibniz)**. Một chuỗi đan dấu dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ hoặc dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ hội tụ nếu 2 điều kiện sau được thỏa mãn

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. a_n là một dãy giảm; nghĩa là $a_{n+1} \le a_n$ với mọi n.

***Chú ý*:** Khi kiểm tra tính hội tụ của chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ người ta sẽ bắt đầu tính $\lim_{n\to\infty} a_n$. Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ thì ngay lập tức kết luận chuỗi phân kỳ (theo tiêu chuẩn phân kỳ). Ngược lại nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi đan dấu sẽ hội tụ bằng cách chỉ ra dãy a_n là dãy giảm.

Ví dụ 8.6.1. Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (đây được gọi là chuỗi điều hòa đan dấu)

Ví dụ 8.6.2. Sử dụng quy tắc L'Hospital, xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Ví dụ 8.6.3. Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{n}}$

Ví dụ 8.6.4. Chứng minh rằng p - chuỗi đan dấu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ hội tụ với mọi p > 0.

8.6.2. Ước lượng sai số của chuỗi đan dấu

Định lý 8.19. Giả sử chuỗi đan dấu dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ hoặc dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ thỏa mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibniz. Nếu chuỗi có tổng là S thì $\left|S - S_n\right| \leq a_{n+1}$, trong đó S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Ý nghĩa: Nếu chuỗi đan dấu thỏa tiêu chuẩn Leibniz thì ta có thể xấp xỉ tổng của chuỗi bằng tổng riêng thứ n của nó với sai số không vượt quá số hạng a_{n+1}

Ví dụ 8.6.5. Xét chuỗi đan dấu hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$

a) Ước lượng tổng của chuỗi trên bằng cách lấy tổng của 4 số hạng đầu tiên. Đánh giá độ chính xác của ước lượng này?
b) Có bao nhiêu số hạng cần thiết để ước lượng tổng của chuỗi với độ chính xác 3 chữ số thập phân. Khi đó ước lượng tổng của chuỗi là bao nhiêu?

8.6.3. Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu ở trên không áp dụng được đối với chuỗi số có dấu bất kỳ. Khi đó, chúng ta sẽ sử dụng kết quả sau

Định lý 8.20. (Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối)

Chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ bất kỳ hội tụ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

Ví dụ 8.6.6. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}-\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\dots..$$

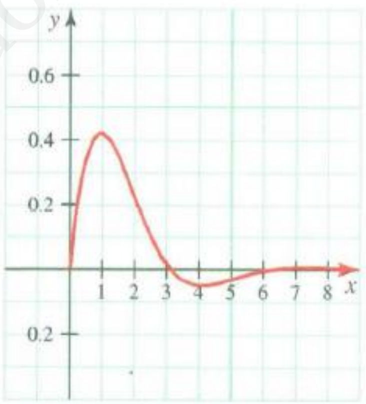
Giải

Ta thấy chuỗi trên không phải chuỗi số dương cũng không phải chuỗi đan dấu nhưng ta thấy chuỗi trị tuyệt đối của nó có dạng $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ và nó hội tụ.

Vậy theo tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối ta suy ra chuỗi ban đầu cũng hội tụ.

Ví dụ 8.6.7. (Sự hội tụ của chuỗi lượng giác)

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{2^n}$



Đồ thị hàm $\frac{\sin x}{2^x}$

Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

+ Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ hội tụ.

+ Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ có điều kiện nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ phân kỳ.

Chú ý: Một chuỗi hội tụ thì hoặc là hội tụ tuyệt đối hoặc là hội tụ có điều kiện nhưng không thể là cả 2 trường hợp.

Ví dụ 8.6.8. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ gọi là hội tụ có điều kiện.

Tiêu chuẩn tỷ số và tiêu chuẩn căn đối với chuỗi số dương có thể được tổng quát hóa đối với một chuỗi bất kỳ như định lý sau

Định lý 8.21. (Tiêu chuẩn tỷ số tổng quát)

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, giả sử $a_n \neq 0$ với $n \geq 1$ và đặt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, trong đó L là một số thực hoặc ∞. Khi đó

+ Nếu L < 1 thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối và do đó nó hội tụ.

+ Nếu L > 1 hoặc L vô hạn thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.

+ Nếu L = 1 thì tiêu chuẩn không kết luận được.

Ví dụ 8.6.9. Tìm tất cả các giá trị của x để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ hội tụ.

8.6.4. Tóm tắt các tiêu chuẩn hội tụ

Các chuỗi mà tính hội tụ đã biết	
Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$	Phân kỳ nếu $\lvert r\rvert \geq 1$ và hội tụ nếu $\lvert r\rvert < 1$ với tổng $S = \dfrac{a}{1-r}$
p–chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$	Hội tụ khi p > 1 và phân kỳ khi p ≤ 1
Chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$	Là trường hợp đặc biệt của p – chuỗi khi p = 1. Do đó nó phân kỳ.
Chuỗi q – log $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^q}$	Hội tụ khi q > 1 và phân kỳ khi q ≤ 1
Tiêu chuẩn phân kỳ	Tính $\lim_{n\to\infty} a_n$ và nếu nó khác 0 thì chuỗi phân kỳ.
Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương	
Tiêu chuẩn so sánh giới hạn	Nếu $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$ với L hữu hạn và dương thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
Tiêu chuẩn tỷ số	Áp dụng khi a_n liên quan đến $n!, n^p, c^n$ và đặt $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ khi L < 1, phân kỳ khi L > 1 và không kết luận được khi L = 1.
Tiêu chuẩn căn	Áp dụng khi tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ một cách dễ dàng. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ khi L < 1,

	phân kỳ khi L > 1 và không kết luận được khi L = 1.
Tiêu chuẩn tích phân	Nếu f là hàm liên tục, dương, giảm dần và $a_n = f(n)$ với mọi n thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ và tích phân $\int_1^{\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Tiêu chuẩn này áp dụng nếu hàm f dễ dàng tính được nguyên hàm hoặc khi a_n liên quan đến hàm logarit, hàm lượng giác hoặc lượng giác ngược.
Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp	+ Nếu $0 \le a_n \le c_n$ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ hội tụ suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. + Nếu $0 \le d_n \le a_n$ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ phân kỳ suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.
Tiêu chuẩn so sánh khi giới hạn bằng 0 hoặc vô cùng	+ Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hội tụ suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ. + Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ phân kỳ suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ phân kỳ.
Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi bất kỳ	

Hội tụ tuyệt đối	Lấy trị tuyệt đối của từng số hạng trong chuỗi và áp dụng các tiêu chuẩn dành cho chuỗi dương để xét tính hội tụ của $\sum_{n=1}^{+\infty} \lvert a_n \rvert$. Khi đó 1. Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} \lvert a_n \rvert$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ 2. Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} \lvert a_n \rvert$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ không hội tụ tuyệt đối nhưng vẫn có thể hội tụ có điều kiện.
Hội tụ của chuỗi đan dấu (hội tụ có điều kiện)	Chuỗi đan dấu dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hoặc dạng $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ hội tụ nếu $a_{n+1} \le a_n$ với mọi n và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

8.6.5. Sắp xếp lại các số hạng trong chuỗi hội tụ tuyệt đối

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối về tổng S thì với bất cứ sự thay đổi nào về vị trí của các số hạng trong chuỗi thì chuỗi mới vẫn sẽ hội tụ tuyệt đối về tổng S. Tuy nhiên điều này không đúng với các chuỗi hội tụ có điều kiện.

8.7. CHUỖI LŨY THỪA

Chuỗi vô hạn có dạng

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \ldots$ gọi là chuỗi luỹ thừa theo $x-c$. Trong đó $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gọi là hệ số của chuỗi lũy thừa.

Nếu $c = 0$ ta có chuỗi luỹ thừa chuẩn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ được xem là một sự mở rộng của đa thức theo x.

8.7.1. Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Với giá trị nào của x thì chuỗi lũy thừa sẽ hội tụ?

Định lý 8.22. Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Một trong các điều sau là đúng

1. Chuỗi hội tụ với mọi x.
2. Chuỗi chỉ hội tụ tại x = 0.
3. Chuỗi hội tụ tuyệt đối với tất cả các giá trị của x nằm trong khoảng $-R, R$ và phân kỳ với $|x| > R$. Và chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ tại 2 đầu mút x = -R và x = R.

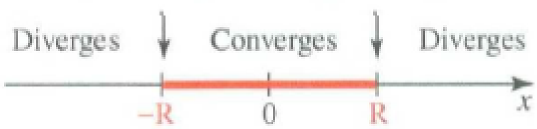
Ví dụ 8.7.1 Chứng minh rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ với mọi x.

Ví dụ 8.7.2 Chứng minh rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ chỉ hội tụ với x = 0.

Ví dụ 8.7.3 Tìm tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Theo định lý 8.22, tập hợp các điểm làm cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ là một khoảng có tâm là x = 0 mà ta gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Nếu khoảng này có độ dài 2R thì R được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.



Nếu chuỗi lũy thừa chỉ hội tụ tại x = 0 thì R = 0, còn nếu nó hội tụ với mọi x thì R = ∞.

Ví dụ 8.7.4. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$

Ví dụ 8.7.5. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

Ví dụ 8.7.6. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$

Trong một số ứng dụng chúng ta có thể gặp chuỗi lũy thừa dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ với c là hằng số. Khi đó khoảng hội tụ của nó có dạng $-R < x - c < R$ bao gồm khả năng có 2 đầu mút là $x = c - R$ và $x = c + R$

Ví dụ 8.7.7. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+1}{3^n}{}^{n}$

8.7.2. Đạo hàm và tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa.

Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có thể được xem như là một hàm trên khoảng hội tụ của nó. Một cách hợp lý nếu chúng ta đặt câu hỏi rằng nếu hàm khả vi và khả tích thì đạo hàm và tích phân của chuỗi lũy thừa đó được tính như thế nào? Điều này rất có lợi vì chúng ta có thể xây dựng các chuỗi mới từ việc lấy đạo hàm hoặc tích phân của những chuỗi đã biết.

Nếu chúng ta xem chuỗi lủy thừa như là một "đa thức vô hạn" thì chúng ta có thể hy vọng là lấy đạo hàm và tích phân của nó theo từng số hạng.

Định lý 8.23. (Lấy đạo hàm và tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa)

Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với bán kính hội tụ R > 0 có thể được lấy đạo hàm hoặc tích phân theo từng số hạng trên khoảng hội tụ $-R < x < R$ của nó. Cụ thể nếu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $|x| < R$ thì với $|x| < R$ ta có

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

và $\displaystyle \int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$

Ví dụ 8.7.8. Cho hàm f xác định bởi chuỗi lũy thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ với mọi x. Chứng minh rằng $f(x) = f'(x)$ với mọi x và từ đó suy ra $f(x) = e^x$.

Một chuỗi lũy thừa có thể lấy đạo hàm theo từng số hạng nhiều lần trong khoảng hội tụ của nó. Và nếu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với R là bán kính hội tụ của chuỗi bên vế phải thì chuỗi đạo hàm $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ cũng có bán kính hội tụ R và hơn nữa định lý 8.23 cũng đúng đối với chuỗi đạo hàm. Nghĩa là

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \text{ với } |x| < R$$

Tương tự ta cũng tính được $f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots$ và các đạo hàm cấp cao hơn của f.

Ví dụ 8.7.9. Ta biết rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ tuyệt đối về hàm $f(x) = \frac{1}{1-x}$ với $|x| < 1$

Đạo hàm từng số hạng của chuỗi ta có

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots \text{ hội tụ về hàm } f'(x) = \frac{1}{\left(1-x\right)^2} \text{ với } |x| < 1$$

Tiếp tục đạo hàm từng số hạng ta có

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \text{ hội tụ về hàm } f''(x) = \frac{2}{\left(1-x\right)^3} \text{ với}$$

$|x| < 1$.

Ví dụ 8.7.10. Cho hàm f xác định bởi chuỗi lũy thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ với mọi x.

Chứng minh rằng $f''(x) = -f(x)$ với mọi x.

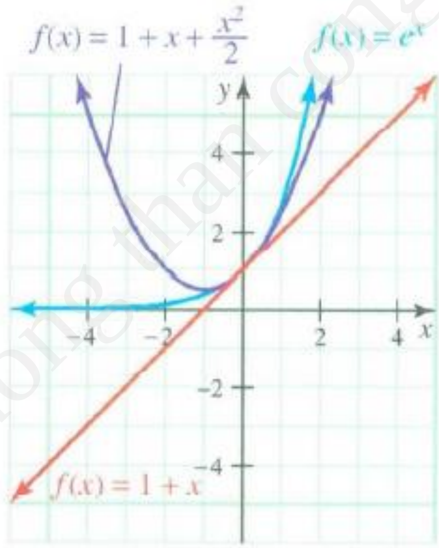
Ví dụ 8.7.11. Bằng cách lấy tích phân từng số hạng của chuỗi cấp số nhân hãy chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)$ với $-1<x<1$

Ví dụ 8.7.12. Tìm chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm $\tan^{-1}(x)$.

8.8. CHUỖI TAYLOR VÀ CHUỖI MACLAURENT

8.8.1. Đa thức Taylor và Maclaurent

Xét hàm f khả vi n lần trên khoảng I. Mục đích của chúng ta là tìm một hàm đa thức có thể xấp xỉ hàm f tại điểm c thuộc miền xác định của nó. Để đơn giản ta xét một trường hợp đặc biệt khi c = 0. Ví dụ sau xem xét hàm $f(x)=e^x$ tại x = 0.



Đồ thị hàm $f(x)=e^x$ và các đa thức xấp xỉ của nó.

Để xấp xỉ hàm f(x) bằng đa thức M(x) tại x = 0 chúng ta bắt đầu từ điều kiện $M(0)=f(0)$. Ta nói đa thức M(x) có tâm tại 0.

Có nhiều đa thức có thể được chọn để xấp xỉ hàm f, chúng ta sẽ xuất phát từ ý tưởng là hệ số góc của f và M tại x = 0 là bằng nhau, nghĩa là $M'(0)=f'(0)$.

Ta có $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \Rightarrow f(0)=f'(0)=1$

Đặt $M_1(x)=a_0+a_1x \Rightarrow M_1'(x)=a_1$. Theo yêu cầu thì $M_1(0)=1, M_1'(0)=1$

Suy ra $M_1(x) = 1 + x$

Từ đồ thị ta thấy $M_1(x) = 1 + x$ là một xấp xỉ tốt với những giá trị x gần 0. Tuy nhiên nếu xét các điểm từ (0,1) trở ra xa thì M_1 không còn là một xấp xỉ tốt nữa. Để cải tiến điều này người ta thêm yêu cầu là giá trị của đạo hàm cấp 2 tại x = 0 của f và M phải bằng nhau

Do đó $M_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \Rightarrow M_2^{'}(x) = a_1 + 2a_2x,\ M_2^{''}(x) = 2a_2$

Vì $f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1 \Rightarrow M_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Tương tự chúng ta có thể tìm được các đa thức bậc cao hơn

$$M_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$M_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$M_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 \ldots..$$

…

$$M_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Đa thức bậc n xấp xỉ hàm f tại x = 0 được gọi là đa thức Maclaurent bậc n của hàm f.

Nếu chúng ta lặp lại các bước như trên với x = c thay cho x = 0 thì ta cũng thu được đa thức xấp xỉ bậc n có dạng

$$T_n(x) = e^c + \frac{x-c}{1!}e^c + \frac{(x-c)^2}{2!}e^c + \ldots + \frac{(x-c)^n}{n!}e^c$$

được gọi là đa thức Taylor bậc n của f tại x = c.

8.8.2. Định lý Taylor

Thay vì dừng lại ở số hạng thứ n, chúng ta bàn đến việc xấp xỉ hàm f(x) bằng một chuỗi vô hạn

Ta nói hàm f được biểu diễn bằng một chuỗi lũy thừa trên khoảng I nếu

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1\left(x-c\right)+a_2\left(x-c\right)^2+\dots$$ với mọi x thuộc I.

Việc biểu diễn hàm f thành chuỗi lũy thừa có rất nhiều lợi ích. Tuy nhiên trước khi bàn đến các lợi ích đó, chúng ta hãy trả lời 2 câu hỏi sau đây

1. Sự tồn tại: Với điều kiện nào thì hàm f sẽ được biểu diễn thành chuỗi lũy thừa?
2. Sự duy nhất: Nếu hàm f được biểu diễn thành chuỗi lũy thừa thì chuỗi đó có duy nhất không? Và nếu có thì nó được tìm như thế nào?

Định lý 8.24. (Định lý về sự biểu diễn duy nhất của chuỗi lũy thừa)

Giả sử hàm $f(x)$ khả vi vô hạn lần và có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1\left(x-c\right)+a_2\left(x-c\right)^2+\dots$$

với $-R<x-c<R$

Khi đó các hệ số thỏa mãn $a_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!},\ n=0,1,2,\dots$

Câu hỏi về sự tồn tại của việc biểu diễn hàm f thành chuỗi lũy thừa sẽ được trả lời khi chúng ta xét đến hàm dư Taylor $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$

Chúng ta thấy rằng hàm f được biểu diễn thành chuỗi Taylor của nó nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Định lý 8.25. Định lý Taylor

Nếu f(x) và tất cả các đạo hàm của nó tồn tại trong khoảng I chứa c thì với mọi x thuộc I ta có

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$

trong đó $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ với z_n phụ thuộc x và nằm giữa c với x.

Công thức của $R_n(x)$ gọi là dạng Lagrange của hàm dư Taylor. Có nhiều dạng hàm dư khác nhau nhưng trong phần này chúng ta chỉ xét dạng Lagrange.

8.8.3. Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurent

Chuỗi Taylor: Giả sử có một khoảng mở I chứa điểm c mà trong đó hàm f(x) và các đạo hàm của nó tồn tại. Khi đó chuỗi lũy thừa

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots.$$

được gọi là chuỗi Taylor của f tại x = c.

Chuỗi Maclaurent: Trường hợp đặc biệt khi c = 0 thì được gọi là chuỗi Maclaurent của f

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Ví dụ 8.8.1. Tìm chuỗi Maclaurent của hàm hàm $f(x) = \cos x$

Giải

Ta thấy $f(x) = \cos x$ khả vi vô hạn lần tại x = 0. Ta có

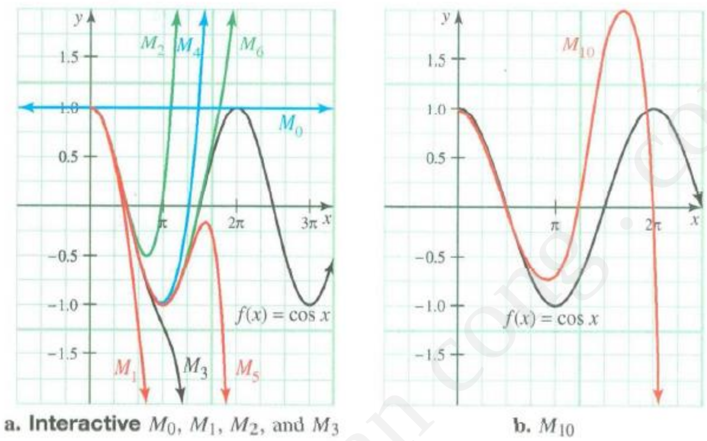
$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$$

....

Ta có chuỗi Maclaurent của f(x) là

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Chúng ta sẽ bàn đến mối quan hệ giữa chuỗi Maclaurent và đa thức Maclaurent. Hình bên dưới mô tả đồ thị hàm $f(x) = \cos x$ với một số đa thức Maclaurent của nó



Hàm $\cos x$ và các đa thức Maclaurent của nó

Để ý rằng các đa thức khá gần với hàm tại những điểm gần x = 0 và rất khác với hàm khi x di chuyển ra xa gốc tọa độ.

Ví dụ 8.8.2. Tìm đa thức Maclaurent bậc 5 $M_5(x)$ cho hàm $f(x) = e^x$ và dùng đa thức đó để xấp xỉ giá trị của số e. Áp dụng định lý Taylor để xác định độ chính xác của xấp xỉ này.

Ví dụ 8.8.3. Tìm chuỗi Taylor của hàm $f(x) = \ln x$ tại c = 1.

Giả sử hàm f khả vi vô hạn tại c. Như vậy chúng ta sẽ có 2 đại lượng toán học là f và chuỗi Taylor của nó với các tính chất sau:

1. Chuỗi Taylor của f có thể hội tụ về f trong khoảng hội tụ của nó $-R < x - c < R$ (nghĩa là $|x - c| < R$)

2. Chuỗi Taylor có thể chỉ hội tụ duy nhất tại x = c và trong trường hợp này nó không thể biểu diễn hàm f trên bất cứ một khoảng nào chứa c.
3. Chuỗi Taylor có thể tồn tại bán kính hội tụ R > 0 (thậm chí R = ∞). Tuy nhiên nó có thể hội tụ về hàm g không bằng hàm f trên khoảng $|x-c|<R$.

Ví dụ 8.8.4. Chứng minh rằng hàm $f(x)=\ln x$ xác định luôn tại những điểm mà chuỗi Taylor tại c = 1 của nó không hội tụ.

Ví dụ 8.8.5. Cho hàm f xác định bởi $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Chứng minh rằng chuỗi Maclaurent của f chỉ biểu diễn được nó tại duy nhất một điểm x = 0.

8.8.4. Các phép toán của chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurent

Theo định lý về sự duy nhất thì chuỗi Taylor của f tại x = c là chuỗi lũy thừa theo (x – c) có dạng $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ với mọi x trong khoảng nào đó chứa c.

Các hệ số trong chuỗi này có thể được tính bằng công thức $a_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}, n=0,1,2,\ldots$ Tuy nhiên đôi khi các hệ số này có thể tìm được bằng cách vận dụng khéo léo các phép toán đại số.

Trong một số ví dụ sau chúng ta sẽ vận dụng phương trình $\dfrac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$ để xây dựng chuỗi Maclaurent cho một số hàm hữu tỷ.

Ví dụ 8.8.6. Tìm chuỗi Maclaurent cho hàm $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Ví dụ 8.8.7. Tìm chuỗi Maclaurent cho hàm $f(x)=\dfrac{5-2x}{3+2x}$ và xác định khoảng hội tụ của nó.

Ví dụ 8.8.8. Tìm chuỗi Maclaurent cho các hàm $f(x) = \cos x^2$ và $g(x) = \cos^2 x$

Ví dụ 8.8.9. Tìm chuỗi Maclaurent cho hàm $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ và sử dụng nó để tính ln2 chính xác đến 5 chữ số thập phân.

Chúng ta cần phải quan tâm đến kết quả sau đây. Nó chính là sự tổng quát hóa cho định lý về nhị thức được phát hiện bởi Issac Newton ngay từ khi ông ta còn là sinh viên tại đại học Cambridge

Định lý 8.26 (Chuỗi nhị thức)

Nếu p là một số thực bất kỳ và $-1 < x < 1$ thì

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n,$$

trong đó $\binom{p}{n} = \frac{p!}{n!(p-n)!}$ với p và n là các số nguyên thỏa $p \geq n \geq 0$.

Chuỗi nhị thức sẽ hội tụ trong khoảng $-1 < x < 1$ nhưng sự hội tụ của nó tại 2 đầu mút $x = -1$ và $x = 1$ phụ thuộc vào số mũ p. Trong trường hợp đặc biệt chúng ta có thể thấy rằng nếu $-1 < p \leq 0$ thì chuỗi sẽ hội tụ tại $x = 1$; nếu $p \geq 0$ chuỗi sẽ hội tụ tại cả 2 đầu $x = -1$ và $x = 1$.

Hơn nữa nếu p là số nguyên không âm thì chuỗi sẽ kết thúc sau một số hữu hạn các số hạng (khi $\binom{p}{n} = 0$ với $p > n$) và sẽ quy về sự khai triển nhị thức thông thường và dĩ nhiên chuỗi sẽ hội với mọi x.

Chuỗi lũy thừa cho một số hàm cơ bản

Tên	Chuỗi	Khoảng hội tụ
Chuỗi hàm mũ	$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots$ $e^x = 1 + e^c (x-c) + e^c \frac{(x-c)^2}{2!} + \ldots + e^c \frac{(x-c)^n}{n!} + \ldots$	$-\infty, +\infty$ $-\infty, +\infty$
Chuỗi Cosin	$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ $\cos x = \cos c - (x-c)\sin c - \frac{(x-c)^2}{2!}\cos c + \frac{(x-c)^3}{3!}\sin c \ldots$	$-\infty, +\infty$ $-\infty, +\infty$
Chuỗi Sin	$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ $\sin x = \sin c + (x-c)\cos c - \frac{(x-c)^2}{2!}\sin c - \frac{(x-c)^3}{3!}\cos c + \ldots$	$-\infty, +\infty$ $-\infty, +\infty$
Chuỗi cấp số nhân	$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^n + \ldots$	$-1, 1$

Chuỗi nghịch đảo	$\frac{1}{1-x} = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots$	$0,2$
Chuỗi Logarithmic	$\ln x = (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots$ $\ln(1+u) = u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+\ldots$ $\ln x = \ln c+\frac{x-c}{c}-\frac{(x-c)^2}{2c^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-c)^n}{nc^n}+\ldots$	$0,2]$ $-1,1]$ $0,2c]$
Chuỗi Tan^{-1}	$\tan^{-1}u = u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots$	$[-1,1]$
Chuỗi Sin^{-1}	$\sin^{-1}u = u+\frac{u^3}{2.3}+\frac{1.3.u^5}{2.4.5}+\ldots+\frac{1.3.5.(2n-3)u^{2n-1}}{2.4.6.(2n-2).(2n-1)}+\ldots$	$[-1,1]$
Chuỗi nhị thức	$(1+u)^p = 1+pu+\frac{p(p-1)}{2!}u^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}u^3\ldots$	

Ví dụ 8.8.10. Tìm chuỗi Maclaurent của hàm $f(x)=\sqrt{9+x}$ và tìm khoảng hội tụ của nó.