Bài giảng Toán 2

Chương 6. Một số ứng dụng của tích phân

NỘI DUNG

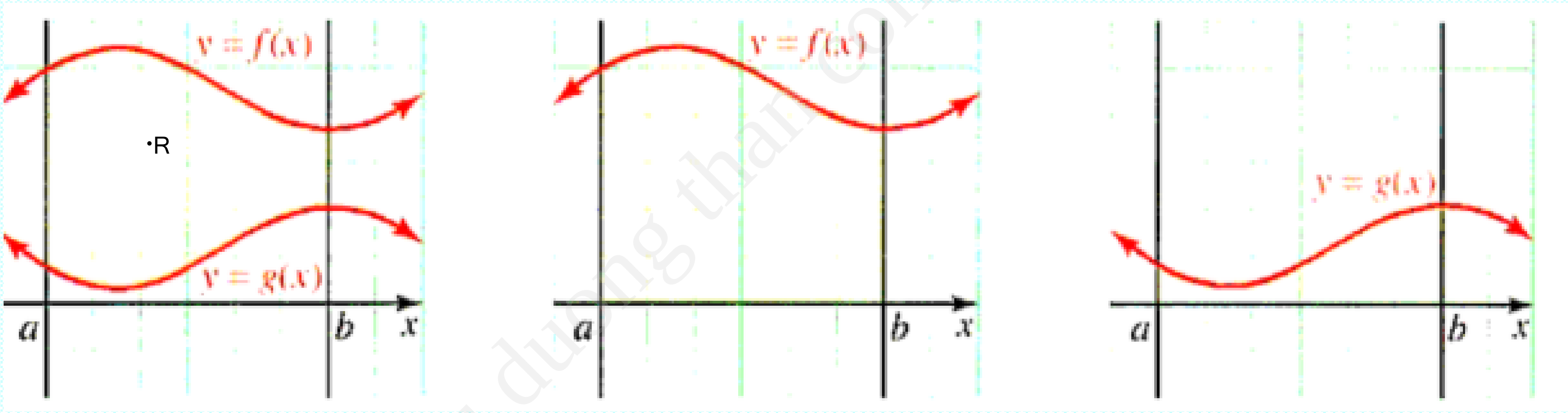
6.1. Diện tích giữa hai đường cong
6.2. Thể tích

6.3. Dạng cực và diện tích
6.4. Độ dài cung và diện tích mặt

6.5. Một số ứng dụng vật lý: Công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.1 Diện tích giữa các đường



Diện tích giữa y = f(x) và y = g(x) = [Diện tích dưới đường y = f(x)] - [diện tích dưới đường y = g(x)]

6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.1 Diện tích giữa các đường

- Phân hoạch [a, b].
- Dải đứng đặc trưng
- Diện tích dải đứng
- Tổng các diện tích
- Giới hạn tổng

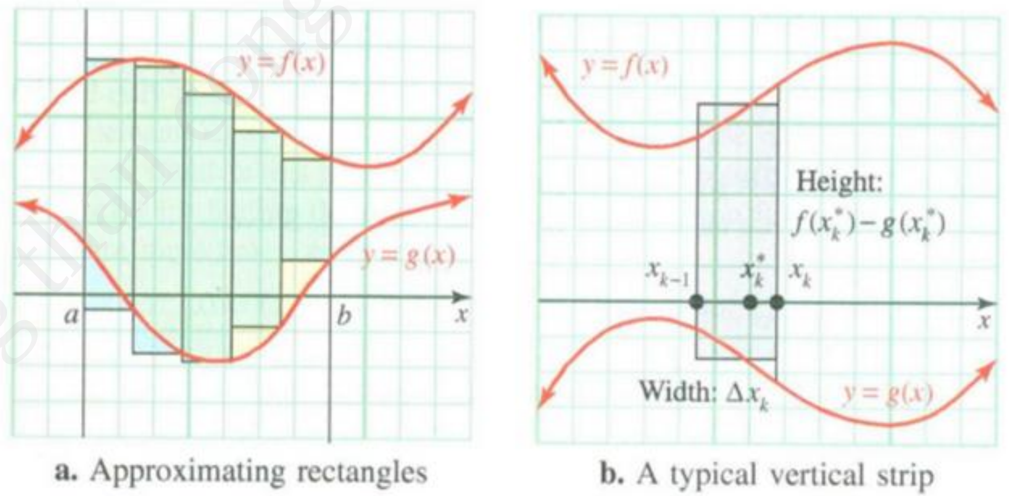


Figure 6.2 Using Riemann sums to find the area between two curves

6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.1 Diện tích giữa các đường

Diện tích giữa hai đường cong. Nếu f, g $\in$ C[a, b] và f $\geq$ g thì diện tích giữa hai đường cong y = f(x) và y = g(x) cho bởi:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Chú ý. Ta không yêu cầu các đường cong nằm trên trục hoành.

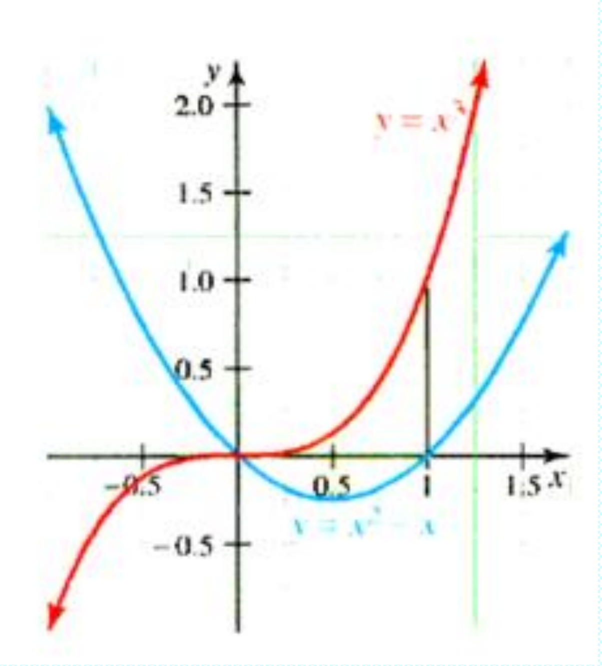
6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.1 Diện tích giữa các đường

Ví dụ. Tìm diện tích của miền nằm giữa các đường cong $y = x^3$ và $y = x^2 - x$ trên [0, 1]

Giải.

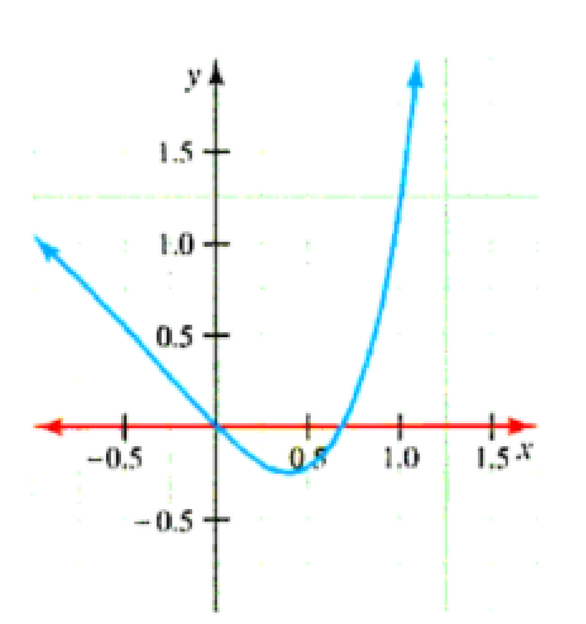
$$A = \int_0^1 \left[x^3 - \left(x^2 - x \right) \right] dx = \frac{5}{12}$$



6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.1 Diện tích giữa các đường

Ví dụ. Tìm diện tích của miền tạo bởi đường cong $y = e^{2x} - 3e^{x} + 2$ và trục Ox

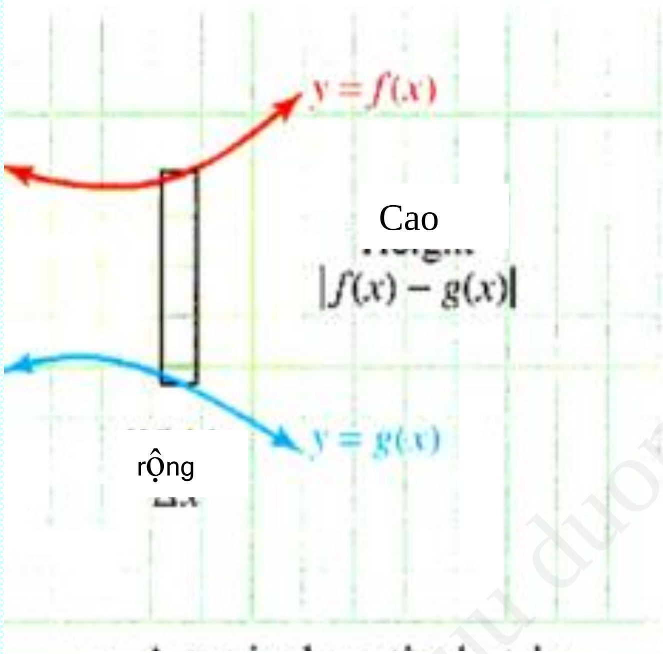


Giải.

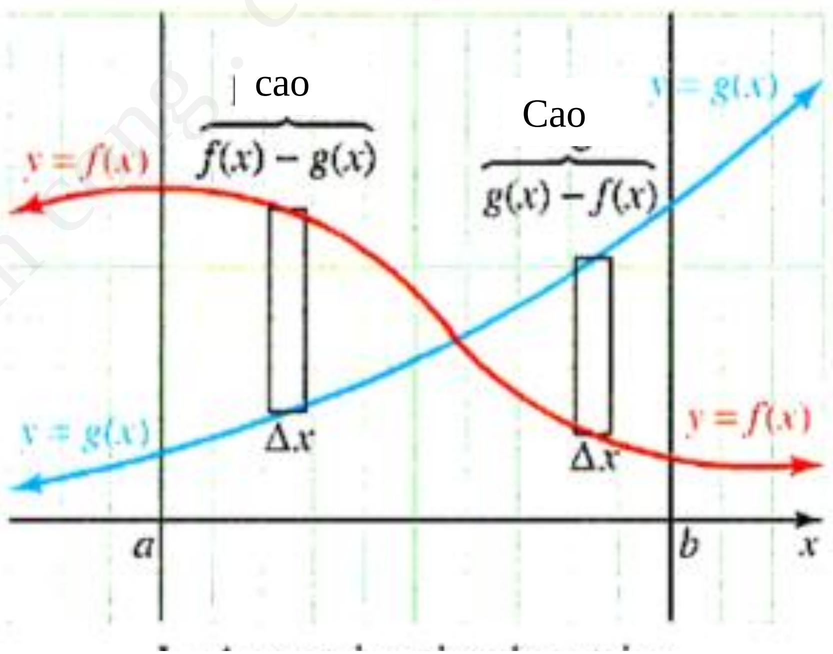
$$A = \int_0^{\ln 2} \left(e^{2x} - 3e^{x} + 2\right) dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.2 Tính diện tích bằng các dải thẳng đứng



a. Một dải đứng đặc trưng



b. Xấp xỉ bằng các dải đứng

Tính diện tích bằng các dải đứng

6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.2 Tính diện tích bằng các dải thẳng đứng

Các kích thước của dải đứng đặc trưng là: $\left| f(x_i^*) - g(x_i^*) \right|, \Delta x_i$

Công thức tính diện tích: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$

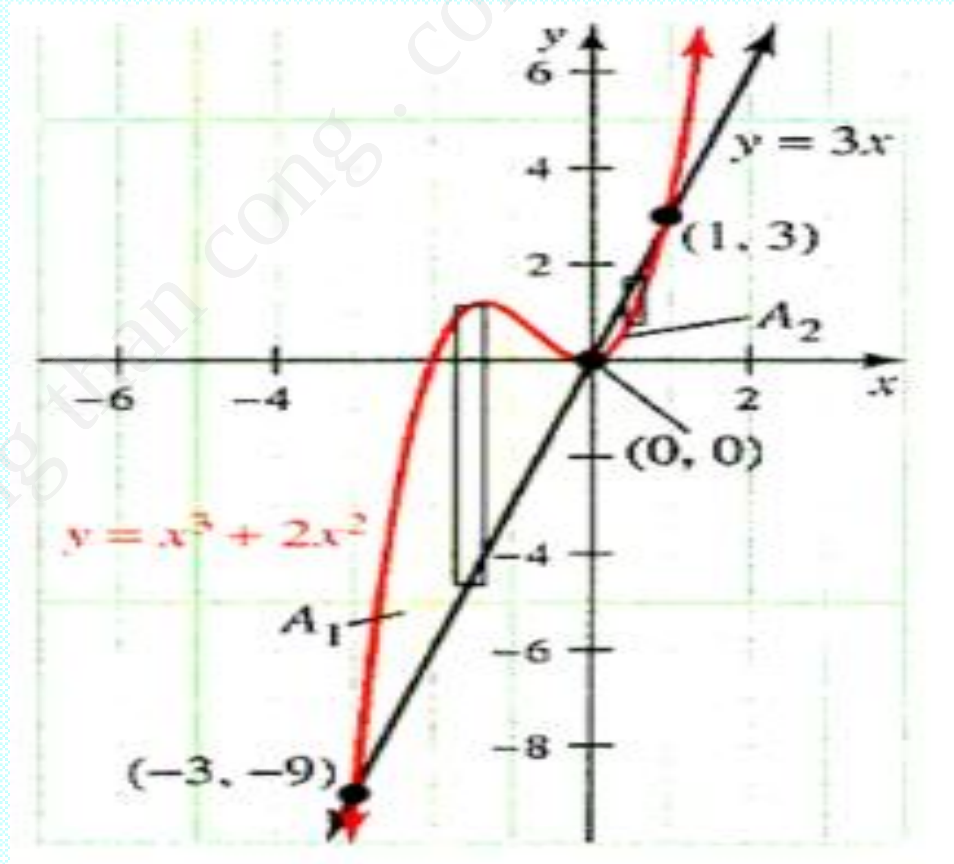
Giả sử các đường cong y = f(x) và y = g(x) cắt nhau tại x = c như hình vẽ thì công thức tính diện tích là:

$$A = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.2 Tính diện tích bằng các dải thẳng đứng

Ví dụ. Tìm diện tích của miền bao bởi đường thẳng y = 3x và đường cong y = $x^3 + 2x^2$



$$A = \int_{-3}^{0} [(x^3 + 2x^2) - (3x)]dx + \int_{0}^{1} [3x - (x^3 + 2x^2)]dx = \frac{71}{6} \text{ (đvdt).}$$

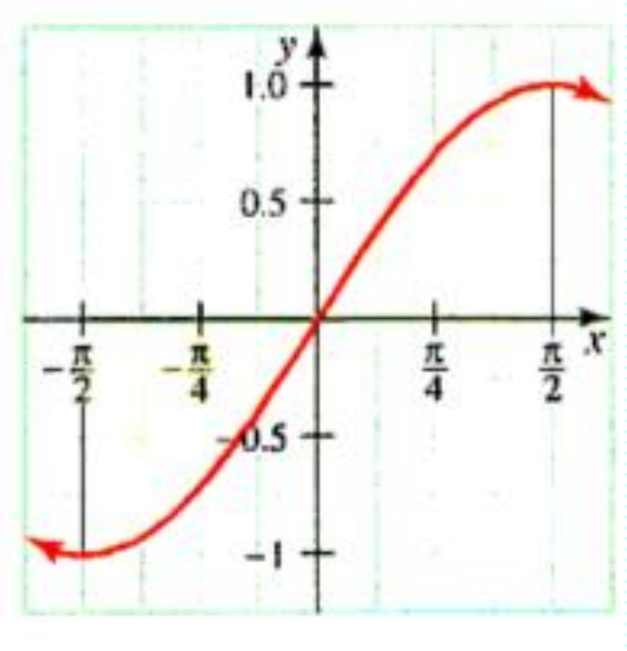
6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.2 Tính diện tích bằng các dải thẳng đứng

Ví dụ. Tìm diện tích của miền được bao bởi đường cong y = sinx và trục Ox giữa hai đường thẳng: $x = \pm \frac{\pi}{2}$

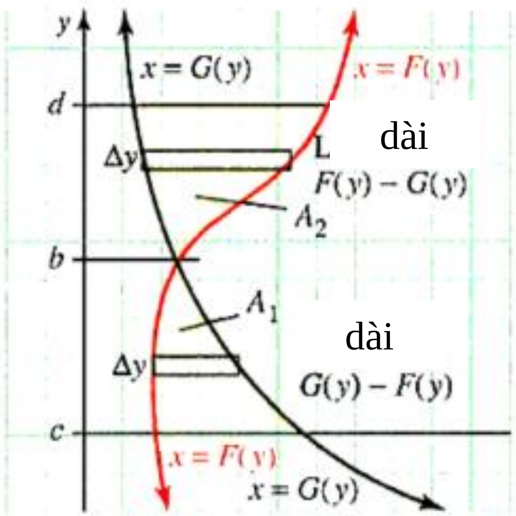
Giải

$$A = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} (0 - sinx)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sinx - 0)dx = 2 \text{ (đvdt)}.$$

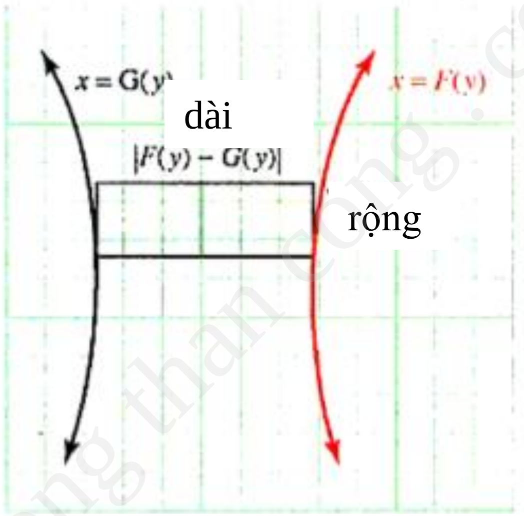


6.1 Diện tích giữa hai đường cong

6.1.3 Tính diện tích bằng dải ngang



a. Xấp xỉ bằng các dải ngang



b. Một dải ngang đặc trưng

Xấp xỉ diện tích bằng các dải nằm ngang

Công thức:

$$A = \int_c^b \underbrace{[G(y) - F(y)]}_{G \text{ leading } F} dy + \int_b^d \underbrace{[F(y) - G(y)]}_{F \text{ leading } G} dy$$

6.1 Diện tích giữa hai đường cong

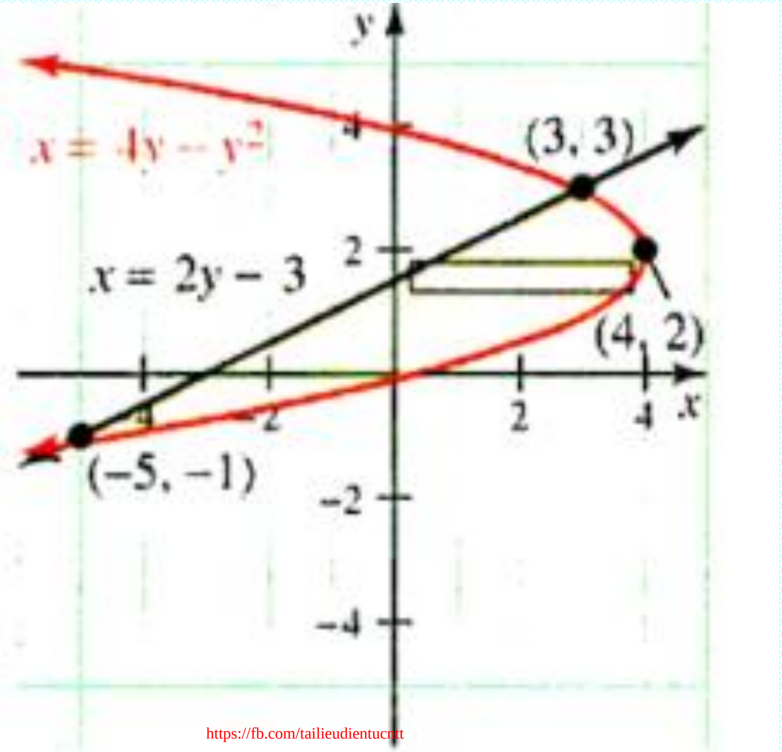
6.1.3 Diện tích bằng các giải nằm ngang

Ví dụ. Tính diện tích của miền R nằm giữa parabol $x = 4y - y^2$ và đường thẳng $x = 2y - 3$.

Giải: $4y - y^2 = 2y - 3$

$\Rightarrow y = -1; y = 3$

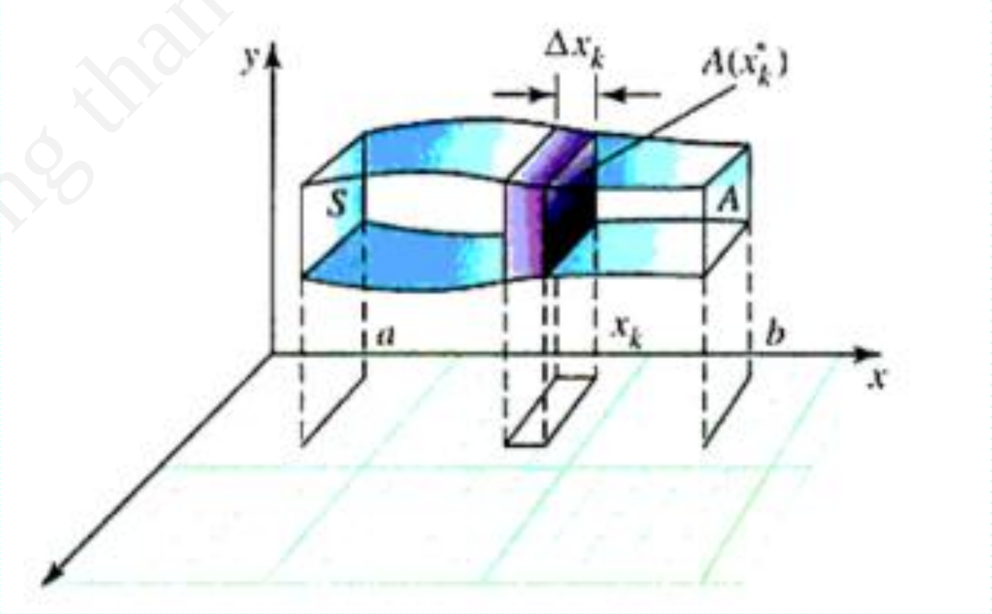
$$A = \int_{-1}^{3} \left[(4y - y^2) - (2y - 3) \right] dy = \frac{32}{3} \text{ (đvdt).}$$



6.2 Thể tích

6.2.1 Phương pháp lát cắt. Cho S là một khối đặc và giả sử a ≤ x ≤ b thì lát cắt của S vuông góc với trục ox tại x có diện tích A(x). Khi đó thể tích V của S cho bởi:

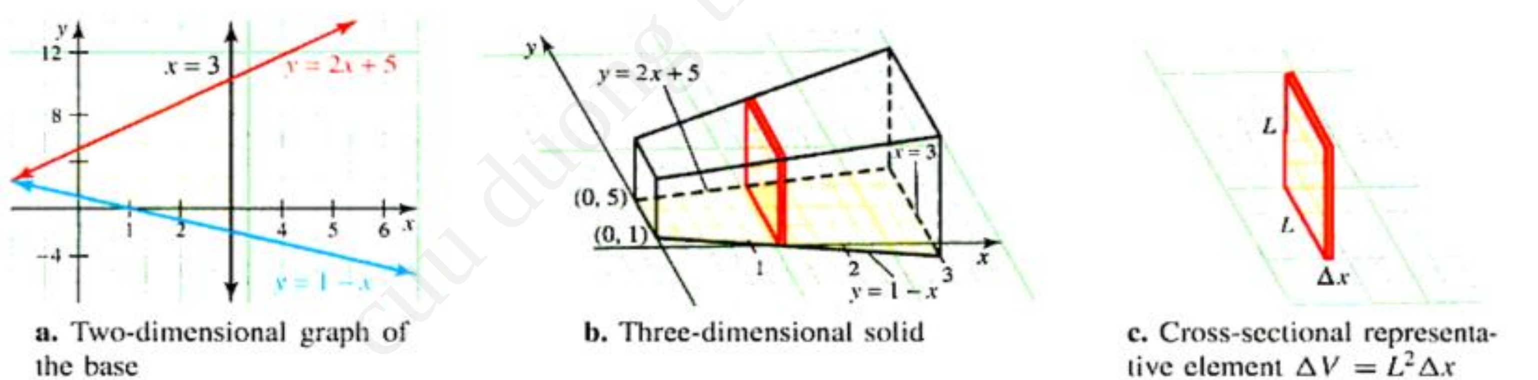
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$



6.2 Thể tích

6.2.1 Phương pháp lát cắt.

Ví dụ. Đáy của khối đặc là miền nằm trên mặt phẳng Oxy được tạo bởi trục Oy và các đường thẳng y = 1 - x, y = 2x + 5 và x = 3. Các lát cắt vuông góc với trục Ox đều là hình vuông. Tìm thể tích khối đặc trên



a. Two-dimensional graph of the base

b. Three-dimensional solid

c. Cross-sectional representative element $\Delta V = L^2 \Delta x$

Figure 6.12 A solid with a square cross section

Giải:

$$A(x) = (3x+4)^2.$$

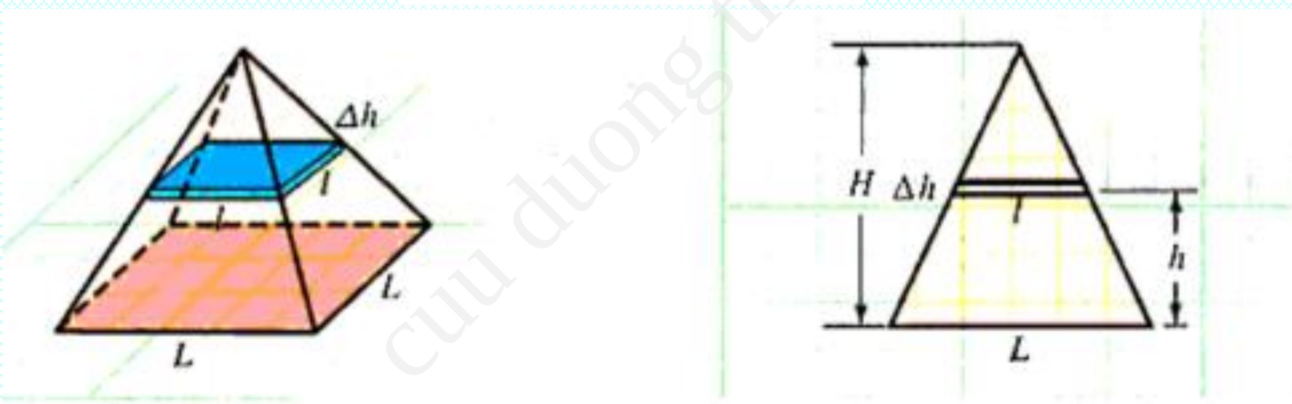
$$V = \int_0^3 (3x+4)^2 dx = 237 \text{ (đvtt)}.$$

6.2 Thể tích

6.2.1 Phương pháp lát cắt

Ví dụ. Một khối chóp đều với đáy là hình vuông có cạnh L và đỉnh ở độ cao H đơn vị tính từ tâm của đáy. Chứng tỏ:

$$V = \frac{1}{3}HL^2.$$



Thể tích hình chóp tứ giác đều

6.2 Thể tích

$$\frac{\ell}{L} = \frac{H-h}{H} \qquad \text{so that} \qquad \ell = \left(1 - \frac{h}{H}\right) L$$

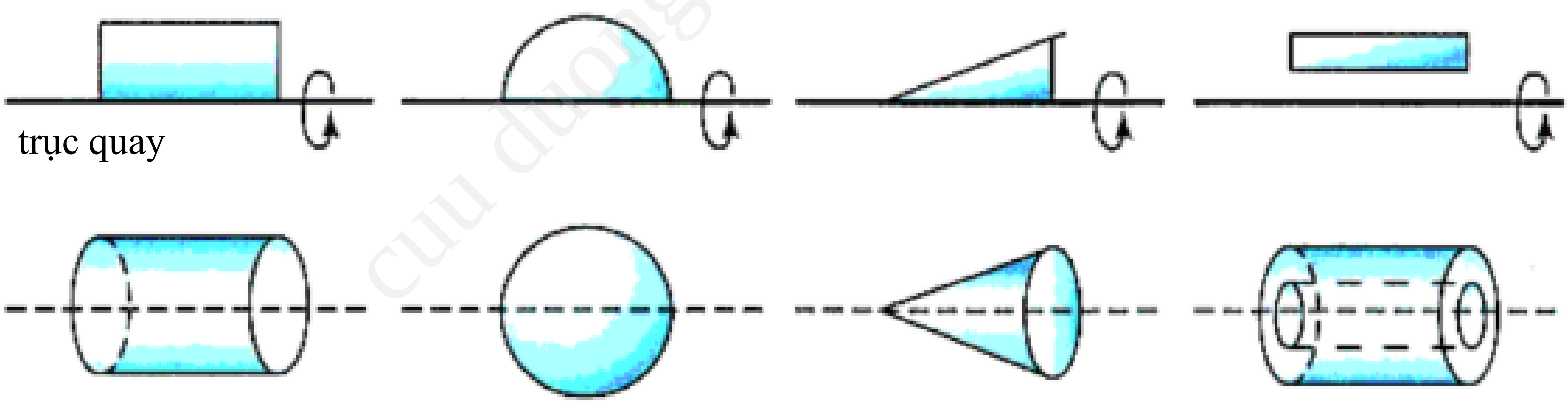
$$\begin{aligned} \Delta V &= \ell^2 \Delta h \\ &= \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 L^2 \Delta h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^H \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 L^2 dh \\ &= L^2 \int_0^H \left(1 - \frac{2}{H}h + \frac{1}{H^2}h^2\right) dh \\ &= L^2 \left[h - \frac{h^2}{H} + \frac{h^3}{3H^2}\right]_0^H \\ &= L^2 \left(H - \frac{H^2}{H} + \frac{H^3}{3H^2}\right) \\ &= \frac{1}{3} HL^2 \end{aligned}$$

6.2 Thể tích

6.2.2 Phương pháp đĩa và vòng đệm (vật thể tròn xoay)

Một khối đặc tròn xoay là khối S có được bằng cách xoay miền D thuộc mặt phẳng xy quanh một trục nằm ngoài D hoặc trên biên của D



các khối đặc tròn xoay

6.2 Thể tích

6.2.2 Phương pháp đĩa và vòng đệm (vật thể tròn xoay)

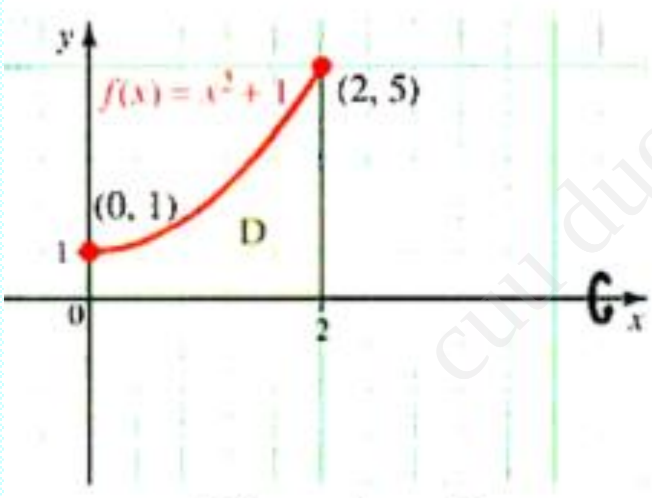
Giả sử D là miền bao bởi đường y = f(x), trục Ox, các đường thẳng x = a, x = b. Khi đó nếu D được xoay tròn quanh trục Ox sẽ tạo thành khối đặc tròn xoay có thể tích là:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

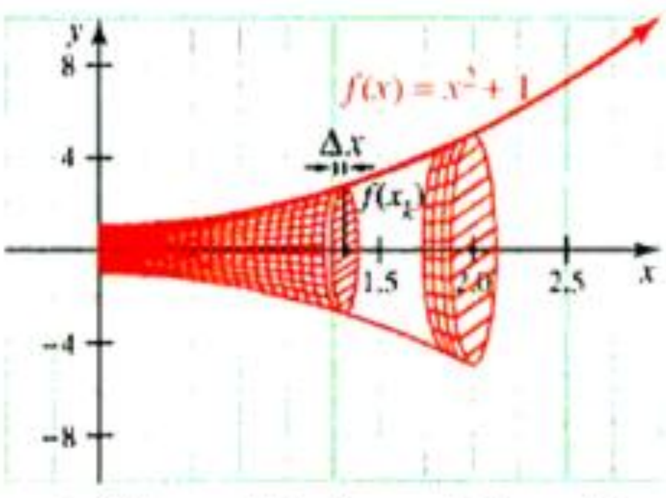
6.2 Thể tích

6.2.2 Phương pháp đĩa và vòng đệm (vật thể tròn xoay)

Ví dụ. Tìm thể tích khối đặc S tạo thành khi xoay D bao bởi $y = x^2 + 1$ quanh trục Ox, với $0 \le x \le 2$



a. Miền D



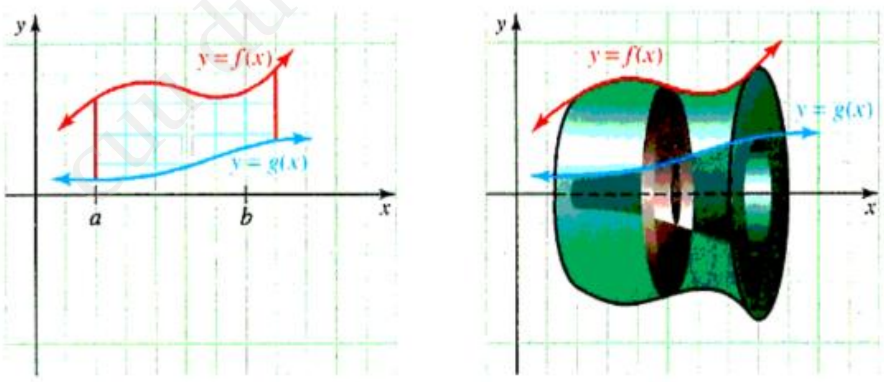
b. Khối đặc S khi quay D quanh trục x

6.2 Thể tích

6.2.2 Phương pháp đĩa và vòng đệm (vật thể tròn xoay)

Giải. Miền cần tính thể tích được minh họa như Hình 6.16. Áp dụng phương pháp đĩa, thể tích cần tìm là $V = \pi \int_0^2 (x^2+1)^2 dx = \frac{206}{15}\pi$ (đvtt).

Điều chỉnh một chút phương pháp đĩa là ta có thể tìm thể tích của một hình đặc sinh ra bằng cách quay quanh trục Ox một miền nằm giữa hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ với $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với $a \leq x \leq b$.



Phương pháp vòng đệm

6.2 Thể tích

6.2.2 Phương pháp đĩa và vòng đệm (vật thể tròn xoay)

Phương pháp vòng đệm Phương pháp vòng đệm được sử dụng để tìm thể tích của khối sinh ra khi quay một miền nằm giữa hai đường cong quanh một trục vuông góc với dải xấp xỉ. Cụ thể, giả sử f và g là các hàm liên tục trên $[a, b]$ với $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Nếu R là đường ngoài $y = f(x)$ và r là đường trong $y = g(x)$, khi đó xoay miền tạo thành bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox, thì thể tích khối được tạo thành là

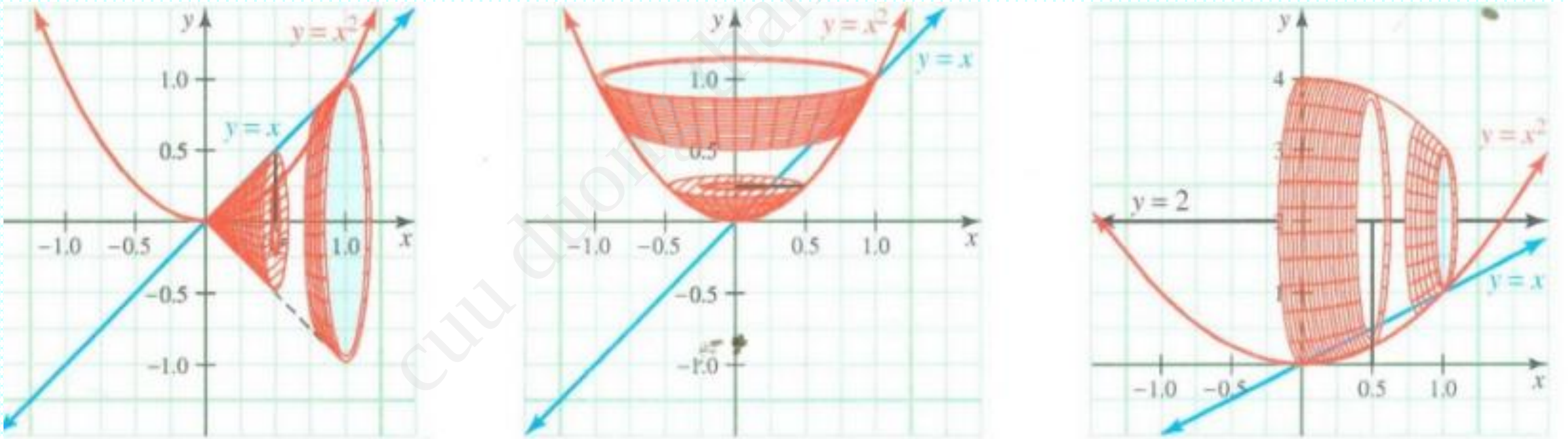
$$V = \int_a^b \pi\left([\underbrace{f(x)}_{\text{bán kính ngoài}}]^2 - [\underbrace{g(x)}_{\text{bán kính trong}}]^2\right) dx$$

6.2 Thể tích

6.2.2 Phương pháp đĩa và vòng đệm (vật thể tròn xoay)

Ví dụ 4 (Thể tích tạo bởi vòng đệm) Cho D là một miền kín bao bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$. Tìm thể tích của khối sinh ra khi xoay D quanh:

a.) trục Ox b.) trục Oy c.) đường thẳng: $y = 2$



a. x-axis b. y-axis c. line $y = 2$

Tính thể tích bằng phương pháp vòng đệm

6.2 Thể tích

6.2.2 Phương pháp đĩa và vòng đệm (vật thể tròn xoay)

Giải. Miền cần tính thể tích được minh họa như Hình 6.18.

a.) $V = \pi \int\limits_0^1 [(x^2) - (x^2)^2]dx = \dfrac{2\pi}{15}$ (đvtt).

b.) $V = \pi \int\limits_0^1 [(\sqrt{y})^2 - y^2]dy = \dfrac{\pi}{6}$ (đvtt).

c.) $V = \pi \int\limits_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2)]dx = \dfrac{8\pi}{15}$ (đvtt).

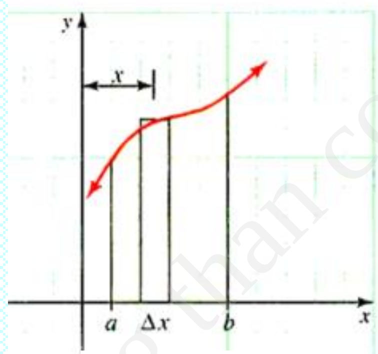
6.2 Thể tích

6.2.3 Phương pháp ống trụ

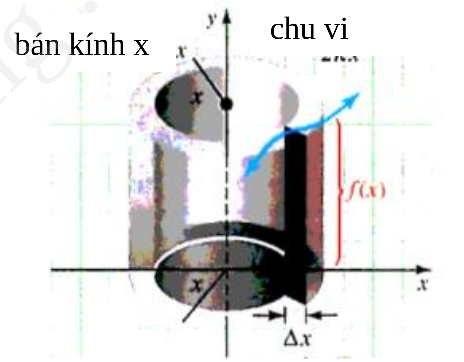
Đôi khi việc tính thể tích bằng các dải xấp xỉ song song song với trục quay thì dễ hơn (thậm chí là cần thiết) việc tính thể tích bằng các dải vuông góc với trục quay. Hình ở slide kế tiếp cho thấy một miền D dưới đường cong $y = f(x) \geq 0$ trên đoạn $[a, b]$ cùng với dải đứng đại diện.

6.2 Thể tích

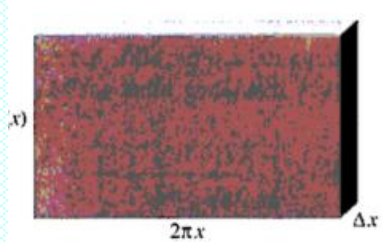
6.2.3 Phương pháp ống trụ



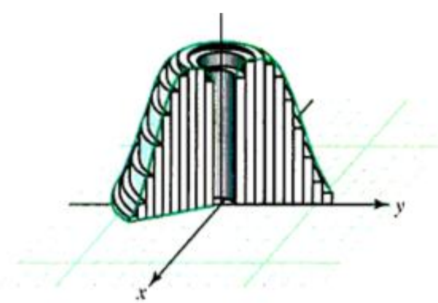
a. Dải đứng



b. Khi 1 dải đứng quay quanh trục y, một vỏ được sinh ra



. The "unwrapped" flattened shell



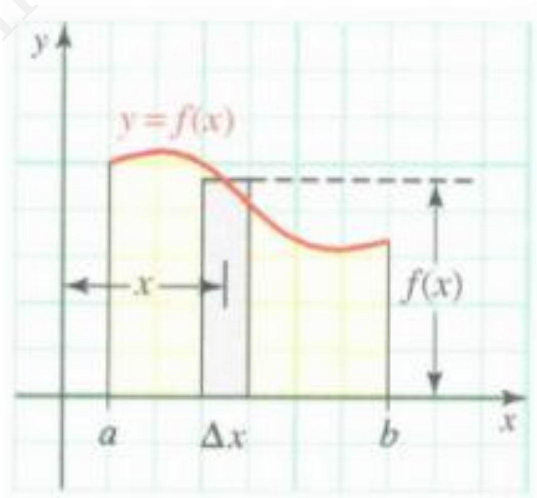
d. Approximating a solid of revolution using cylindrical shells

Metho

6.2 Thể tích

6.2.3 Phương pháp ống trụ. Cho D bao bởi đường $y = f(x) \geq 0$, trục Ox, các đường thẳng $x = a$, $x = b$ với $a \leq b$, khi đó khối sinh ra khi xoay D quanh Oy có thể tích:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$



Phương pháp ống trụ

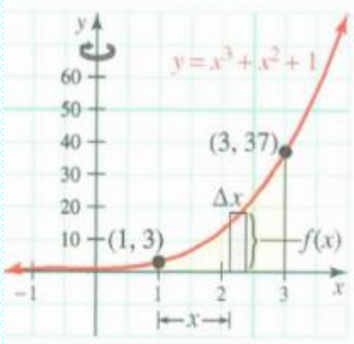
6.2 Thể tích

6.2.3 Phương pháp ống trụ

Ví dụ 5 (Thể tích tạo bởi ống trụ) Tìm thể tích của khối đặc tạo thành khi xoay miền bao bởi trục Ox và các đồ thị $y = x^3 + x^2 + 1$, $x = 1$, và $x = 3$ quanh trục Oy.

Giải. Miền phẳng được minh họa như Hình 6.22. Thể tích cần tìm:

$$V = 2\pi \int_1^3 x(x^3 + x^2 + 1)dx = \frac{724}{5}\pi$$



Hình 6.22

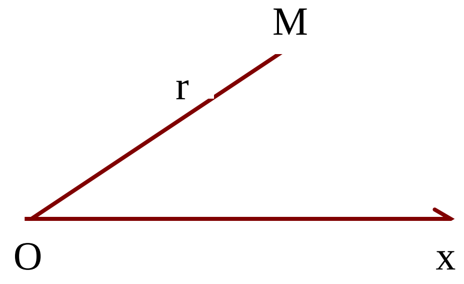
6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.1 Hệ tọa độ cực

- Định nghĩa hệ tọa độ cực: trục cực, cực
- Tọa độ cực của một điểm M(r, θ). Tọa độ của gốc cực
- Mối liên hệ giữa M với (r, θ). Dựng M khi r < 0
- Đổi từ tọa độ cực sang tọa độ Descart và ngược lại:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



(g mặt phẳng

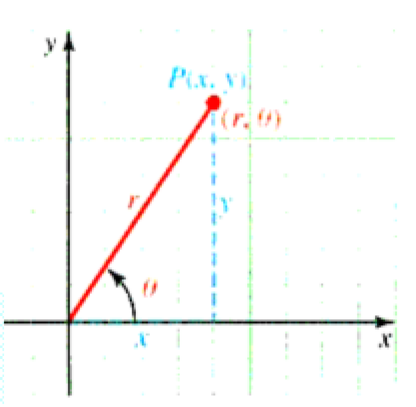
6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.1 Hệ tọa độ cực

Ví dụ 1 **(Chuyển từ tọa độ cực sang tọa độ vuông góc)**

Chuyển tọa độ cực $(-3, \frac{5\pi}{4})$ sang tọa độ vuông góc.

Đáp số: $(\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$.



<u>Giải.</u>

$$x = -3\cos\frac{5\pi}{4} = -3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -3\sin\frac{5\pi}{4} = -3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.1 Hệ tọa độ cực

Ví dụ 2 **(Chuyển từ tọa độ vuông góc sang tọa độ cực)**

Viết dạng tọa độ cực cho điểm có tọa độ vuông góc là $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Giải:

$$r = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4} + \frac{25}{4}} = 5$$

Đáp số $\left(5, \frac{11\pi}{6}\right)$ *or* $\left(5, -\frac{\pi}{6}\right)$ *or* $\left(-5, \frac{5\pi}{6}\right)$

6.3 Dạng cực và diện tích

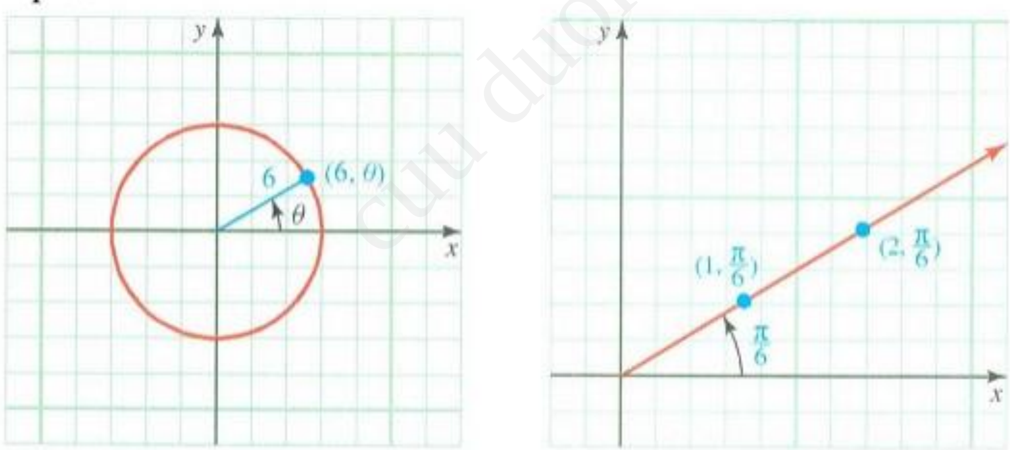
6.3.2 Đồ thị cực

Nguyên tắc: Khảo sát và vẽ đồ thị r = f(θ) như hàm một biến trong tọa độ Descart. Xét một số trường hợp đặc biệt

Ví dụ 3 **(Vẽ đường tròn, đường thẳng và tia)**

Vẽ: a. $r = 6$ b. $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Đáp số



a. The circle $r = 6$ **b.** The line $\theta = \frac{\pi}{6}$

6.3 Dạng cực và diện tích

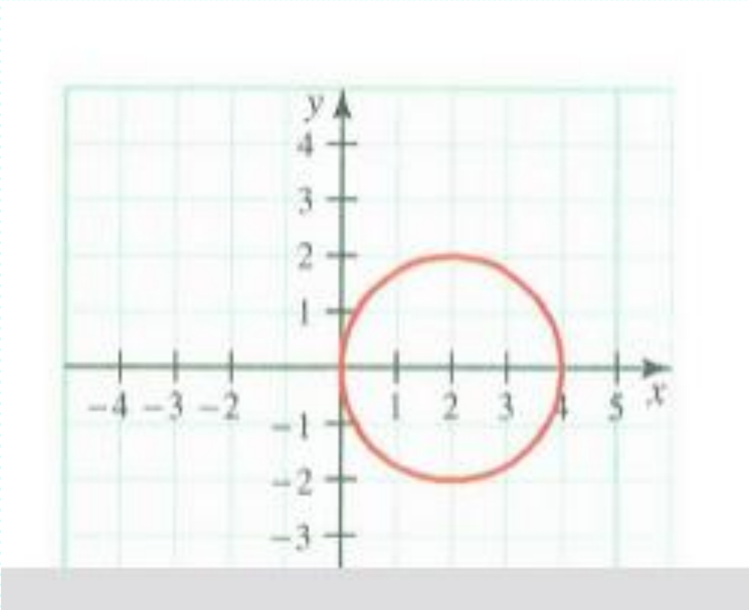
6.3.2 Đồ thị cực

Ví dụ 4 **(Vẽ bằng cách chuyển qua hệ tọa độ vuông góc)**

Vẽ đồ thị của phương trình $r = 4\cos\theta$ bằng cách chuyển nó từ dạng cực về dạng vuông góc trước.

Giải.

$$\begin{aligned} r &= 4\cos\theta \\ r^2 &= 4r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 4x \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 2^2 \end{aligned}$$



6.3 Dạng cực và diện tích

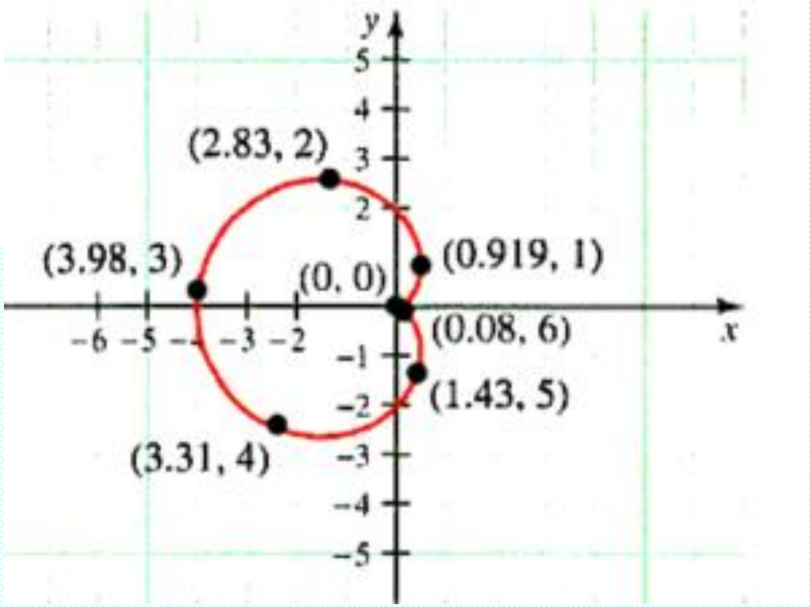
6.3.2 Đồ thị cực

Ví dụ 5. (Vẽ đường Cardioid)

$r = 2(1 - \cos\theta)$

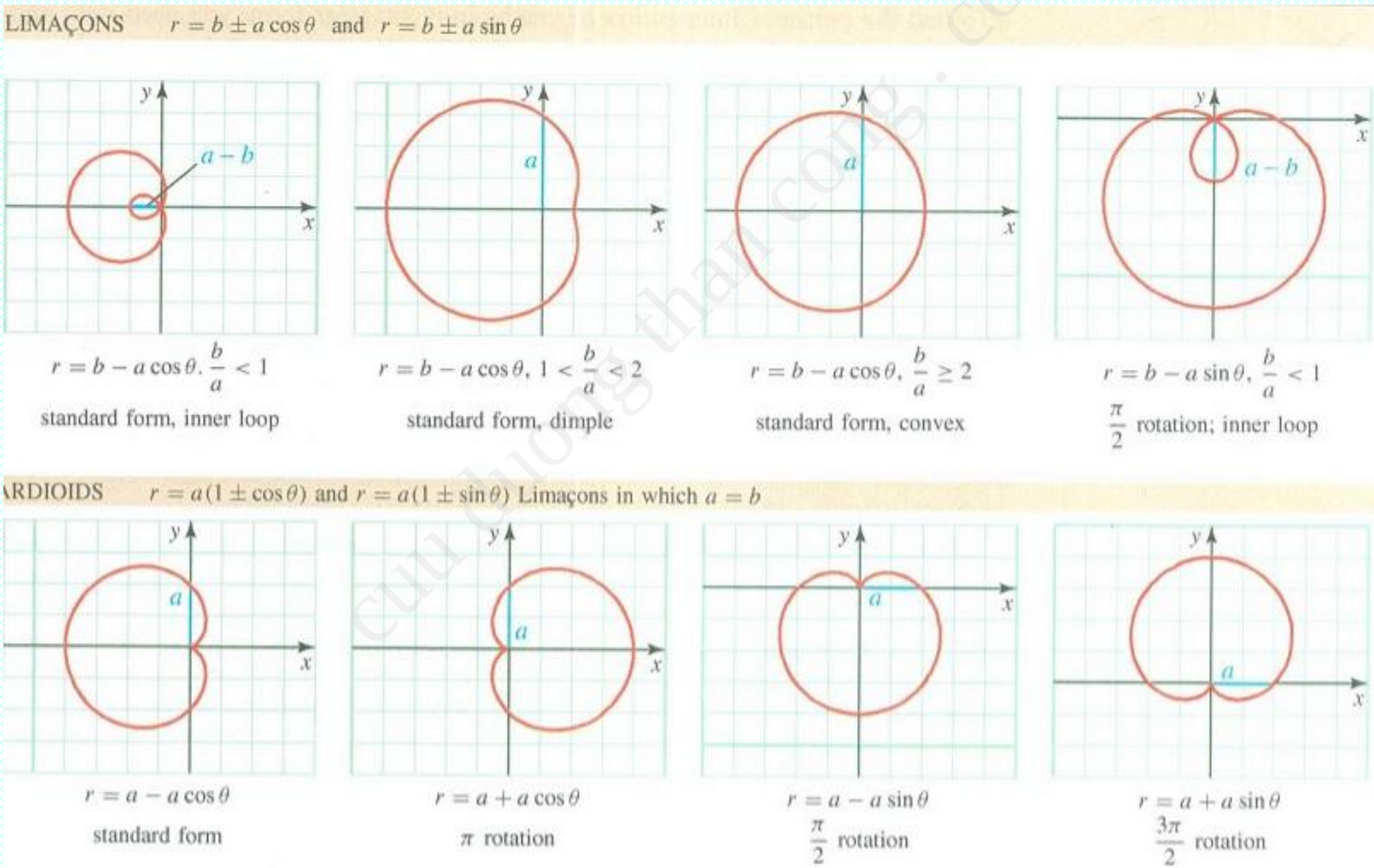
Giải: Lập bảng, vẽ các điểm đặc biệt nối lại

θ	r
0	0
1	0.9193954
2	2.832294
3	3.979985
4	3.307287
5	1.432676
6	0.079659



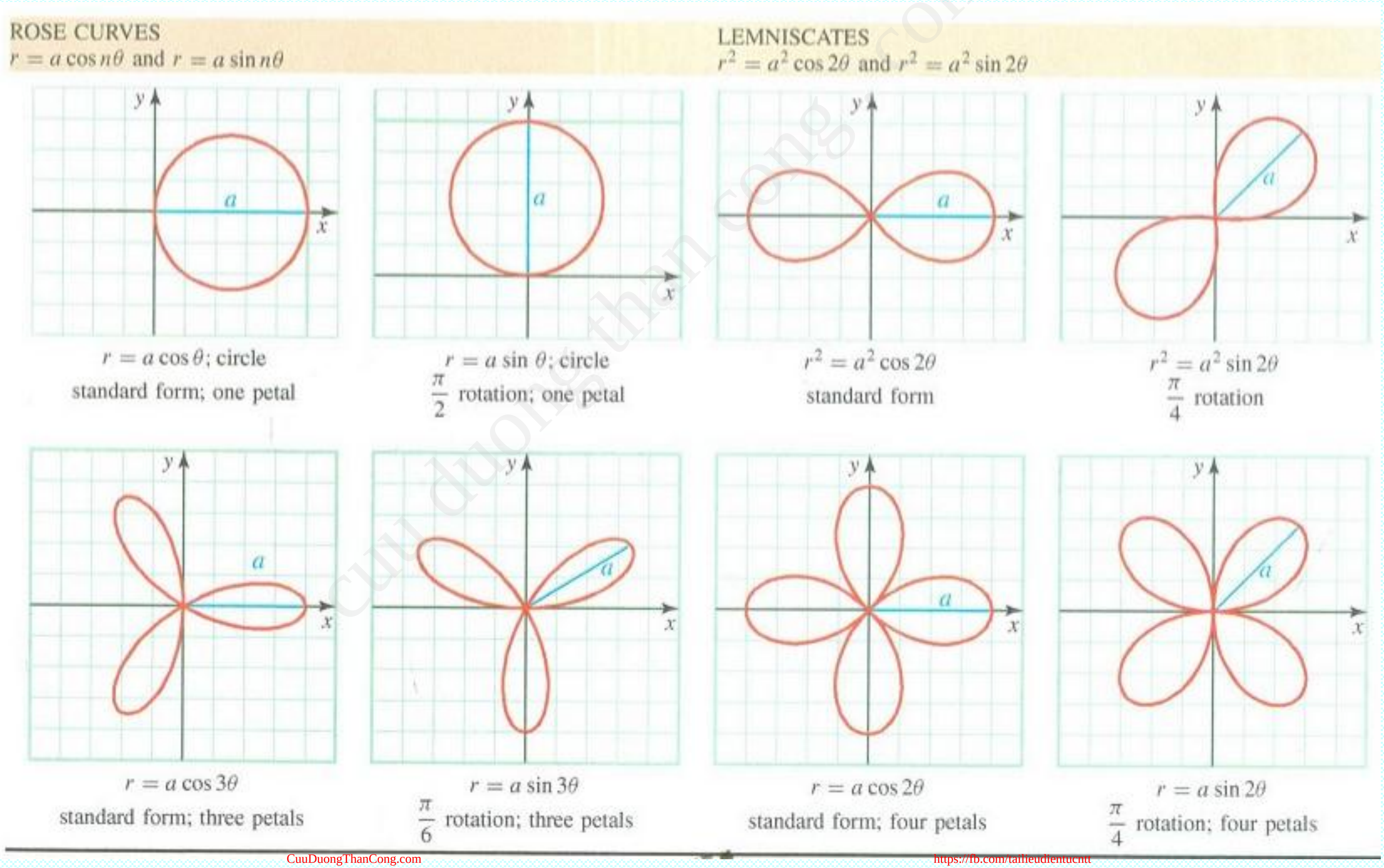
6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.3 Tóm tắt đường cong cực



6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.3 Tóm tắt đường cong cực



6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.4 Giao của các đường cong cực

Bước 1 Tìm tất cả các nghiệm chung của các phương trình được giao
Bước 2 Xác định xem điểm cực r = 0 có nằm trên hai đồ thị không.
Bước 3 Vẽ các đường cong để tìm các giao điểm khác

Ví dụ. Tìm giao điểm của hai đường cong

$$r = \frac{3}{2} - \cos\theta \text{ và } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Step 1 Solve the system by substitution:

$$r = \frac{3}{2} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

The solution is $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Step 2 If $r = 0$, the first equation has no solution because

$$0 = \frac{3}{2} - \cos\theta \quad \text{or} \quad \cos\theta = \frac{3}{2}$$

and a cosine cannot be larger than 1.

Step 3 Now look at the graphs, as shown in Figure 6.36.

We see that $\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right)$ may also be a point of intersection. It satisfies the equation $\theta = \frac{2\pi}{3}$, but what about $r = \frac{3}{2} - \cos\theta$?

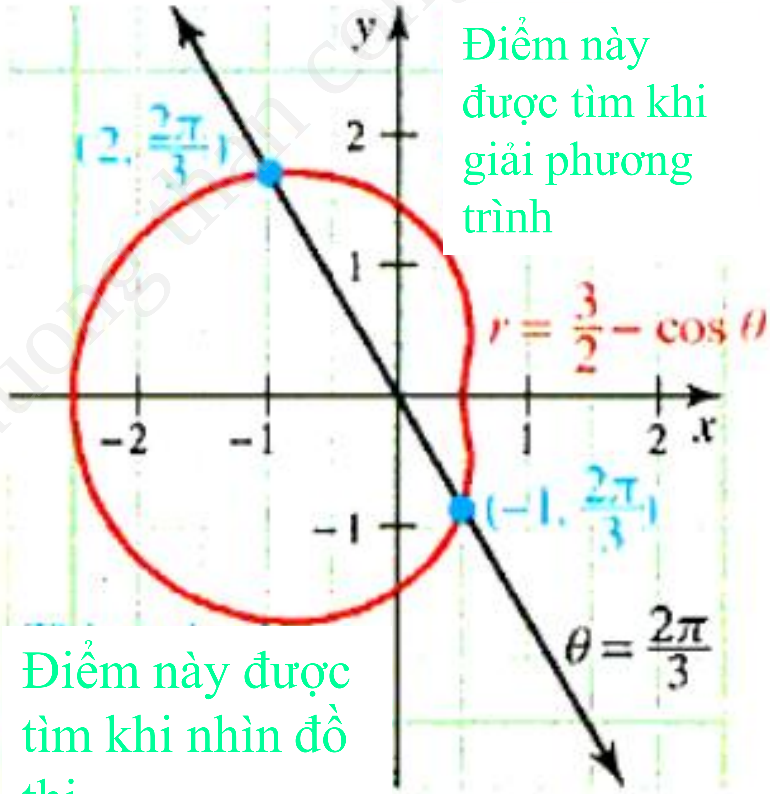
$$\text{Check } \left(-1, \frac{2\pi}{3}\right) \qquad -1 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2} - \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2 \qquad \text{Not satisfied}$$

However, if you check an alternative representation of $\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right)$, we find:

$$\text{Check } \left(1, \frac{5\pi}{3}\right) \quad 1 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2} - \cos\frac{5\pi}{3}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= 1 \quad \text{Satisfied}$$



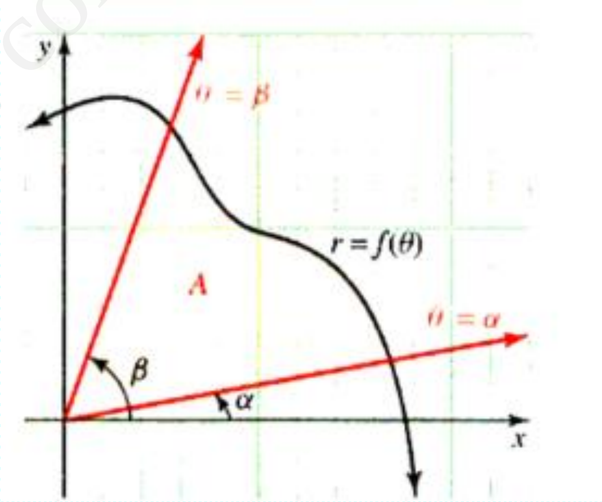
Điểm này được tìm khi giải phương trình

Điểm này được tìm khi nhìn đồ thị

6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.5 Diện tích trong tọa cực

Định lý. Cho r = f(θ) xác định một đường cong cực, với $f \in C[\alpha, \beta]$, với $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$. Khi đó miền được tạo bởi đường cong r = f(θ) và các tia θ = α và θ = β có diện tích



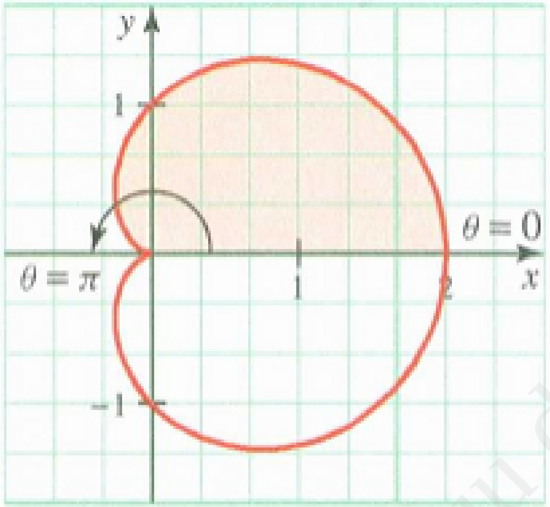
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.5 Diện tích trong tọa cực

Ví dụ 7 **(Tìm diện tích một phần của cardioid)**

Tìm diện tích của nửa trên ($0 \le \theta \le \pi$) của cardioid $r = 1 + \cos\theta$.



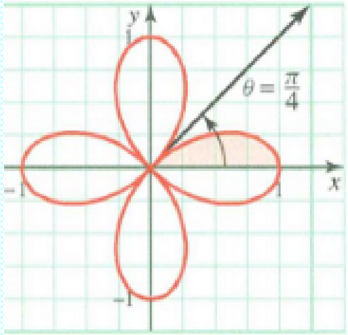
Giải. Đường cardioid được minh họa như Hình 6.39.

Diện tích cần tìm: $A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 + cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{4}$ (đvdt).

6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.5 Diện tích trong tọa cực

Ví dụ 8 **(Tìm diện tích bao phủ bởi một hình hoa bốn cánh)** Tìm diện tích bao phủ bởi nh hoa bốn cánh $r = \cos 2\theta$.



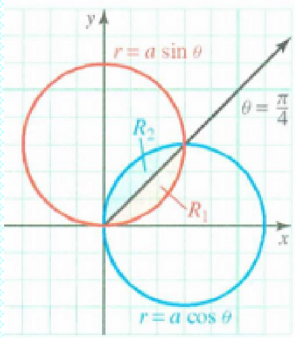
Giải. Đường hoa hồng bốn cánh được minh họa như Hình 6.40.

Diện tích cần tìm: $A = 8[\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 2\theta d\theta] = \frac{\pi}{2}$ (đvdt).

6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.5 Diện tích trong tọa cực

Ví dụ 9 **(Tìm diện tích của vùng nằm giữa hai đường cong cực)** Tìm diện tích của miền chung giữa hai đường cong $r = a\cos\theta$ and $r = a\sin\theta$.



Giải. Phần tính diện tích được minh họa như Hình 6.41.

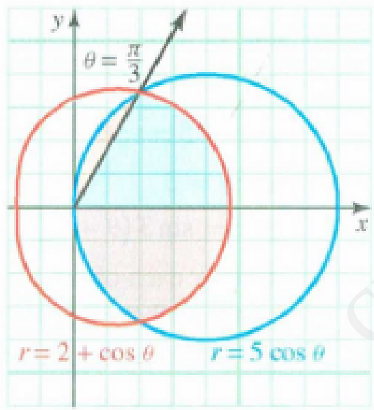
Diện tích cần tìm: $A = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 cos^2\theta d\theta = \frac{1}{8}a^2(\pi - 2)$ (đvdt).

6.3 Dạng cực và diện tích

6.3.5 Diện tích trong tọa cực

0 $\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 10) (Tìm diện tích giữa một đường tròn và một limacon) Tìm diện tích giữa đường tròn $r = 5\cos\theta$ và limacon $r = 2 + \cos\theta$. Làm tròn kết quả theo đơn vị diện tích đến hàng phần trăm.



Đáp số: $\frac{43\pi}{12} - \sqrt{3}$.

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

6.4.1 Độ dài cung của một đường cong

Độ dài cung Cho f là một hàm có đạo hàm f' liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Khi đó **độ dài cung**, s, của đồ thị của $y = f(x)$ giữa $x = a$ và $x = b$ được cho bởi tích phân

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

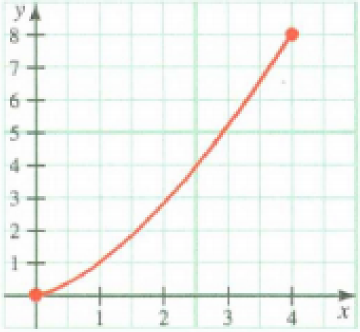
Tương tự, với đồ thị của $x = g(y)$, với g' liên tục trên đoạn $[c, d]$, độ dài cung từ $y = c$ đến $y = d$ là

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

6.4.1 Độ dài cung của một đường cong

Ví dụ 1 (Độ dài cung của một đường cong) Tìm độ dài cung (làm tròn đến hàng phần trăm) của đường cong $y = x^{3/2}$ trên đoạn $[0, 4]$.



Giải. Đồ thị của đường cong được minh họa như Hình 6.45.

Độ dài cung cần tìm: $s = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} dx = \frac{8}{27}[10^{3/2} - 1] \approx 9.0734$ (đvđd).

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

6.4.1 Độ dài cung của một đường cong

Ví dụ. Tìm độ dài cung của đường cong

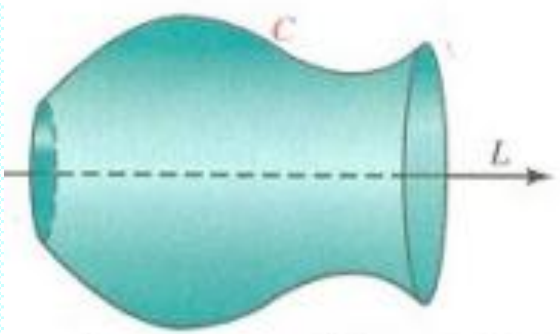
$$x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^{-1} \quad y \in [1, 3]$$

Giải. Ta có $x = g(y)) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^{-1}$ suy ra $g'(y) = \frac{4y^4-1}{4y^2}$

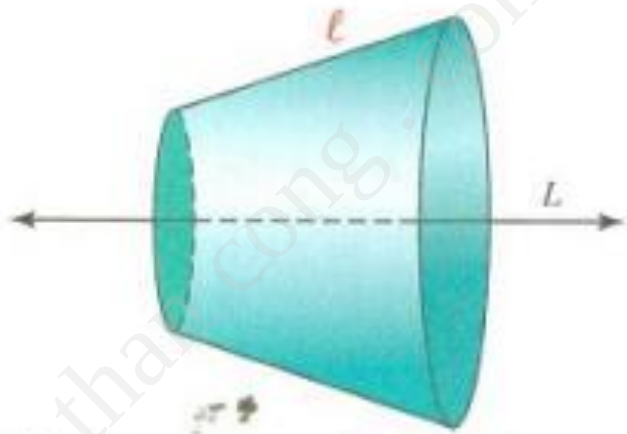
Độ dài cung cần tìm: $s = \int_1^3 \sqrt{1 + (\frac{4y^4-1}{4y^2})^2} dy = \frac{53}{6}$ (đvđd).

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

6.4.2 Diện tích mặt tròn xoay



a. Mặt cong sinh ra khi quay đường cong C quanh đường thẳng L



b. Mặt nón cụt sinh ra khi quay đoạn thẳng l quanh đường thẳng L

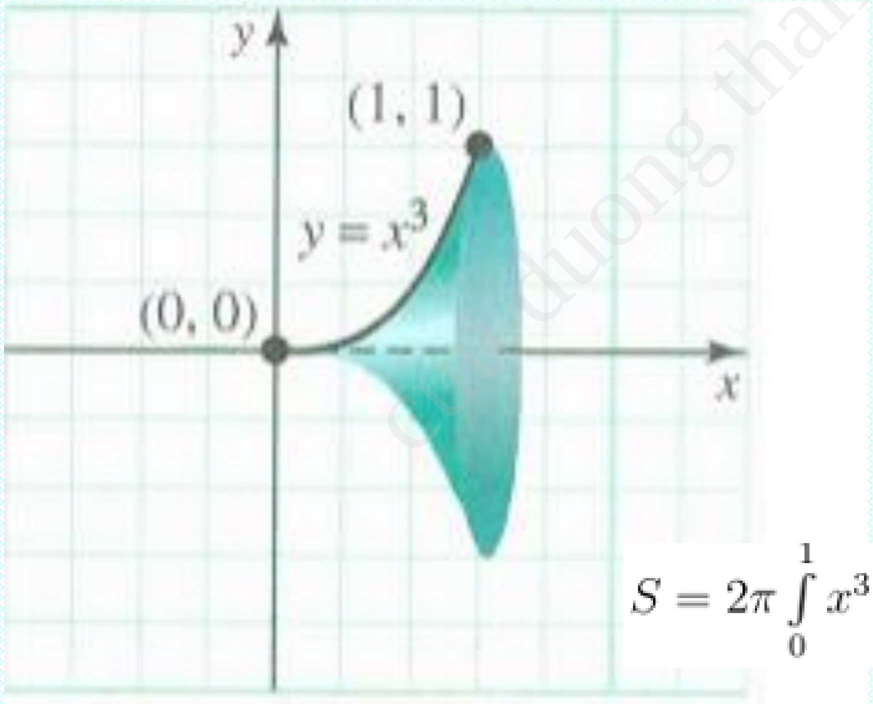
Giả sử $f \in C^1[a, b]$, khi đó mặt tạo ra khi xoay quanh trục Ox cung của đường cong y = f(x) có diện tích

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

6.4.2 Diện tích mặt tròn xoay

Ví dụ. Tìm diện tích của mặt được tạo ra khi xoay quanh trục Ox cung $y = x^3$, $x \in [0, 1]$



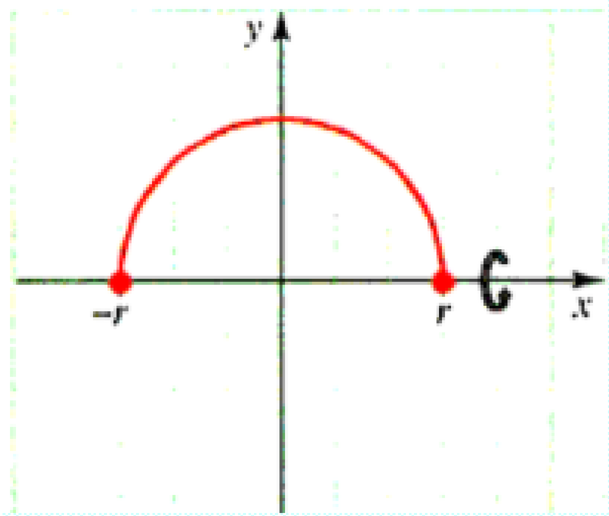
$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1) \text{ (đvdt).}$$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

Ví dụ. Tính diện tích mặt cầu bán kính r

Giải: Ta có phương trình của nửa trên đường tròn bán kính r là:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$



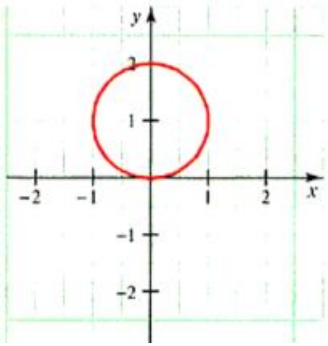
$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{(r^2 - x^2)\left(\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}\right)}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx \\ &= 2\pi r(r + r) \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

6.4.2 Diện tích mặt tròn xoay

Độ dài cung trong tọa độ cực Độ dài của một cung cực $r = f(\theta)$ với $\alpha \leq \theta \leq \beta$ được cho bởi tích phân

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$



Ví dụ 6 (Tính độ dài cung cực) Tìm độ dài của đường tròn $r = 2\sin\theta$.

Giải. Đồ thị của đường cong được minh họa như Hình 6.55. Độ dài của đường tròn: $s = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = 2\pi$ (đvđd).

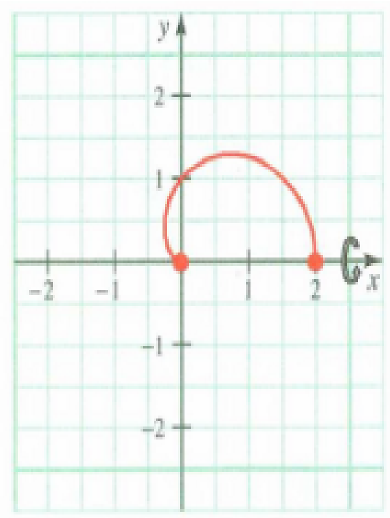
6.4 Độ dài cung và diện tích mặt

***6.4.2 Diện tích mặt tròn xoay*. Nếu một đường cong cực r = f(θ) với α ≤ θ ≤ β được xoay quanh trục x thì nó tạo ra một diện tích là**

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} (r \sin\theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Ví dụ. Tìm diện tích của mặt được tạo ra khi xoay quanh trục x nửa trên của đường cardioid $r = 1 + \cos\theta$

6.4 Độ dài cung và diện tích mặt



Hình 6.56

Giải. Đường cong cardioid được minh họa như Hình 6.56. Diện tích của mặt cần tìm là $S = 2\pi \int\limits_{0}^{\pi} r sin\theta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2} d\theta = \frac{32\pi}{5}$ (đvdt).

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công. **Công thực hiện bởi một lực không đổi**. Nếu một vật thể di chuyển một khoảng cách d theo hướng của một lực tác dụng F thì công W thực hiện là W = F.d

Ví dụ như, công thực hiện khi nâng một bao xi măng nặng 90 lb lên 3 ft là $W = Fd = (90\ \text{lb})(3\ \text{ft}) = 270\ \text{ft} - \text{lb}$. Ta chú ý rằng nếu không có chuyển động thì không có công.

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

Để tìm công thực hiện bởi một vật chuyển động dưới tác dụng của một lực thay đổi thì phải cần đến tích phân.

Công thực hiện bởi một lực biến thiên. Công thực hiện bởi một lực biến thiên F(x) khi di chuyển một vật dọc theo trục x từ x = a đến x = b được tính bằng

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công

Bảng 6.3: Các đơn vị thường dùng cho công và lực

Khối lượng	Khoảng cách	Lực	Công
kg	m	Newton (N)	Joule
g	cm	dyne (dyn)	erg
slug	ft	pound	ft-lb

Ví dụ 1 (Công sinh bởi một lực biến thiên)

Một vật đặt tại x ft tính từ một điểm cố định được cho di chuyển dọc theo một đường thẳng bằng một lực $F(x) = (3x^2 + 5)$ lb. Công thực hiện bởi lực để di chuyển vật là bao nhiêu trong các trường hợp sau

a. qua 4 ft đầu tiên? b. từ 1 ft đến 4 ft.

Đáp số

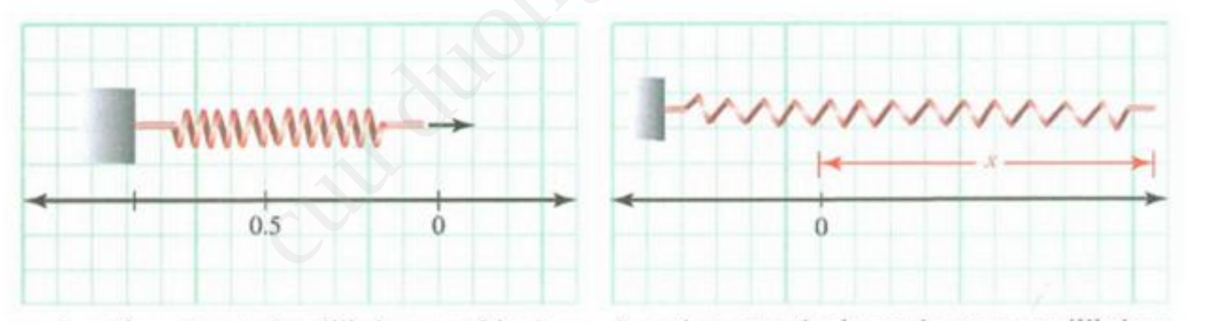
a. $W = \int_0^4 (3x^2 + 5)dx = 84 \quad \mathrm{ft} - \mathrm{lb}.$

b. $W = \int_1^4 (3x^2 + 5)dx = 78 \quad \mathrm{ft} - \mathrm{lb}.$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công.

Định luật Hook. Khi một lò xo bị kéo khỏi vị trí cân bằng x đơn vị thì có một lực đàn hồi F(x) = kx kéo lò xo trở lại vị trí cân bằng. Hệ số k trong công thức này được gọi là **độ cứng** của lò xo.



Lò xo ở vị trí cân bằng — Lò xo bị kéo khỏi vị trí cân bằng x

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công

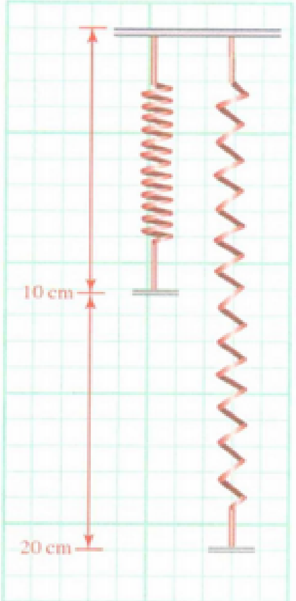
Ví dụ 2 (Mô hình công sử dụng định luật Hooke)

Độ dài tự nhiên của một lò xo là 10 cm. Nếu cần một công là 2 ergs để kéo lò xo ra thành 18 cm, thì bao nhiêu công sẽ được thực hiện để kéo dãn lò xo đến độ dài là 20 cm?

Giải.

Giả sử rằng vị trí cân bằng đặt tại vị trí 0 trên trục số, và x là vị trí của đầu tự do của lò xo. Vì lực kéo giãn lò xo là $F(x) = kx$ nên công thực hiện khi kéo lò xo b cm khỏi vị trí cân bằng là

$$W = \int_0^b F(x)dx = \int_0^b kx\ dx = \frac{1}{2}kb^2$$



Với giả thiết $W = 2$ khi $b = 8$ ta suy ra $k = \frac{1}{16}$. Khi chiều dài của lò xo là 20 cm, nó được kéo dãn $b = 10\ cm$, và công thực hiện là

$$W = \frac{1}{32}(10)^2 = 3.125\ ergs$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công

Bài tập.
Cần tốn một công là bao nhiêu để căng một cái lò xo đàn hồi ra 10cm, nếu lực 1N căng lò xo đó được một đoạn 1cm

Bảng 6.4: Trọng lượng riêng, $\delta = \rho g$ (lb/ft ^{3}).

Chất lỏng	Trọng lượng riêng
nước	62.4
nước biển	64.0
xăng	42.0
dầu lửa	51.2
Dầu SAE 20	57.0
sữa	64.5
thủy ngân	849.0

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công

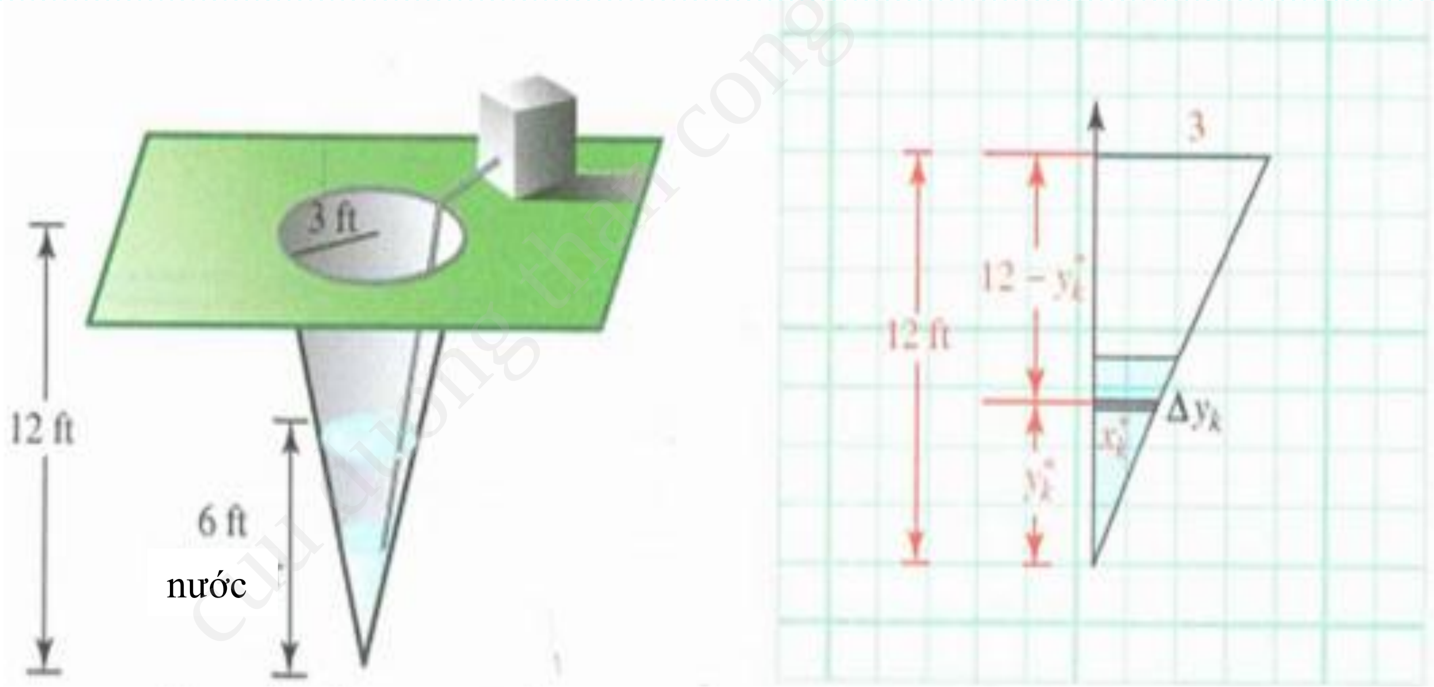
Ví dụ 3 (Mô hình công thực hiện khi bơm nước ra khỏi một bồn chứa)

Một bồn nước có hình nón tròn đứng có chiều cao là 12 ft và bán kính là 3 ft được chôn xuống mặt đất với đỉnh hướng xuống và đáy ngang với mặt đất. Nếu bồn chứa nước (mật độ khối lượng $\rho g = 62.4 \quad lb/ft^3$) đến độ cao 6 ft thì bao nhiêu công sẽ được thực hiện để bơm tất cả nước trong bồn lên mặt đất? Điều gì thay đổi nếu như nước được bơm đến độ cao 3 ft so với mặt đất?

Mật độ khối lượng - Trọng lượng riêng

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công



6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công

Giải. Lập hệ tọa độ với gốc ở đỉnh hình nón và trục y là trục hình nón. Chia [0, 6] (nước chỉ cao 6ft) thành n đoạn con. Chọn điểm y_k^* đại diện trong khoảng con thứ k và xây dựng một đĩa mỏng nước cách gốc tọa độ y_k^*, độ dày Δy_k. Ta sẽ xem lượng nước trong bồn là tập hợp của các phiến nước xếp chồng lên nhau. Chúng ta sẽ tìm ra công được thực hiện để nâng một đĩa nước điển hình và sau đó tính tổng công bằng cách sử dụng tích phân để tính tổng công bơm nước.
Nhận xét rằng lực đòi hỏi để nâng một phiến nước bằng bằng với thể tích của nó nhân với trọng lượng trên một khối nước. Đặt x_k^* là bán kính của phiến nước thứ k. Dùng tam giác đồng dạng ta có:

$$\frac{x_k^*}{y_k^*} = \frac{3}{12} \Rightarrow \quad x_k^* = \frac{y_k^*}{4}$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công

Do đó thể tích của phiến hình trụ là: $\Delta V = \pi \left(x_k^*\right)^2 \Delta y_k = \pi \left(\frac{y_k^*}{4}\right)^2 \Delta y_k$

Do đó trọng lượng của phiến nước là: $62.4\pi \left(\frac{y_k^*}{4}\right)^2 \Delta y_k$

Công để nâng phiến nước lên độ cao $12 - y_k^*$ là: $62.4\pi \left(\frac{y_k^*}{4}\right)^2 \left(12 - y_k^*\right) \Delta y_k$

Công để bơm cả lượng nước ra khỏi bồn:

$$W = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P\| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} 62.4\pi \left(\frac{y_k^*}{4}\right)^2 \left(12 - y_k^*\right) \Delta y_k = \frac{62.4\pi}{16} \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|P\| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \left(y_k^*\right)^2 \left(12 - y_k^*\right) \Delta y_k$$

$$W = \frac{62.4\pi}{16} \int_0^6 y^2 \left(12 - y\right) dx = 2{,}106\pi \approx 6{,}616 \ ft - lb$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.1 Công

Công để bơm cả lượng nước cao hơn miệng bồn 3ft là:

$$W = \frac{62.4\pi}{16}\int_0^6 y^2 (15 - y)^2 dx \approx 9,263 \; ft - lb$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

Nếu ai đã từng lặn xuống nước hẳn đã thấy rằng áp suất (tức là độ lớn của lực trên một đơn vị diện tích) do khối lượng của nước tăng lên theo độ sâu. Quan sát kĩ hơn ta sẽ thấy rằng áp suất nước tại một điểm tỷ lệ thuận với độ sâu tại điểm đó. Nguyên tắc này cũng áp dụng cho các chất lỏng khác.

Trong vật lý, **nguyên lý Pascal** phát biểu rằng áp suất chất lỏng bằng nhau theo mọi hướng (xem hình 6.62). Điều này có nghĩa là áp suất phải như nhau tại mọi điểm trên một mặt phẳng được nhúng nằm ngang. Và khi đó, lực chất lỏng được cho bởi công thức sau.

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

Lực chất lỏng Nếu một mặt phẳng có diện tích A được nhúng ngang xuống một độ sâu h trong một chất lỏng thì trọng lượng của vật tạo ra một lực là

$$F = (\text{ápsuất})(\text{diệntích}) = \delta hA = \rho ghA$$

trên mặt phẳng đó, với δ là trọng lượng riêng, ρ là khối lượng riêng, và g là gia tốc trọng trường. Đây gọi là **lực chất lỏng** hay lực **thủy tĩnh**.

Lực chất lỏng (thủy tĩnh) Giả sử một mặt phẳng (một đĩa) được nhúng đứng vào một chất lỏng có trọng lượng riêng $\delta = \rho g \quad lb \ ft^3$ và phần ngập của đĩa là từ $h = a$ tới $h = b$ trên trục tung. Khi đó lực toàn phần F tạo ra bởi chất lỏng được cho bởi

$$F = \int_a^b \rho hL(h)dh$$

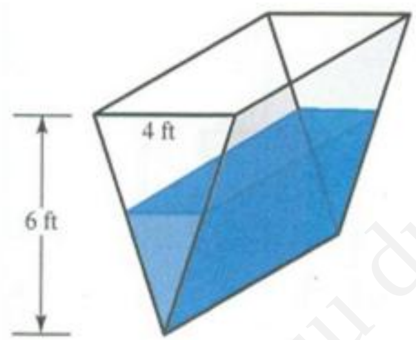
với h là độ sâu và $L(h)$ là chiều dài tương ứng của một dải xấp xỉ ngang.

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

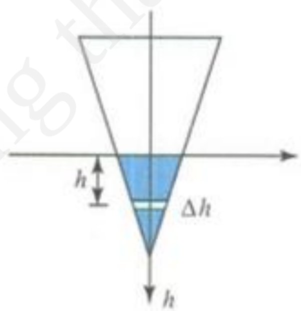
6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

Ví dụ 4 (Lực chất lỏng trên một mặt phẳng đứng)

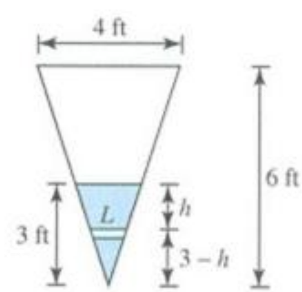
Mặt cắt ngang của một máng là một tam giác cân lật ngược có chiều cao là 6 ft và đáy là 4 ft. Giả sử máng chứa nước đến độ sâu 3 ft. Tìm tổng lực chất lỏng lên một đỉnh.



a. Một cái máng với các mặt cắt hình tam giác đầy một nửa



b. Mặt bên của máng

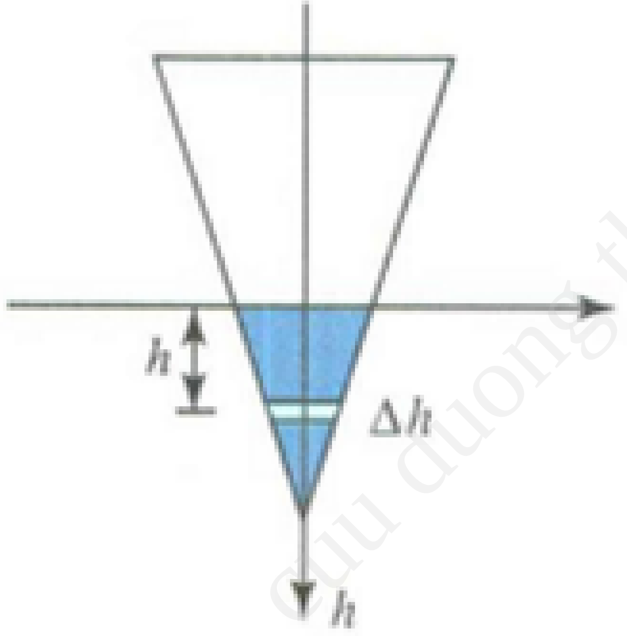


c. Dùng các tam giác đồng dạng để tìm

$$\frac{L}{4} = \frac{3-h}{6}$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

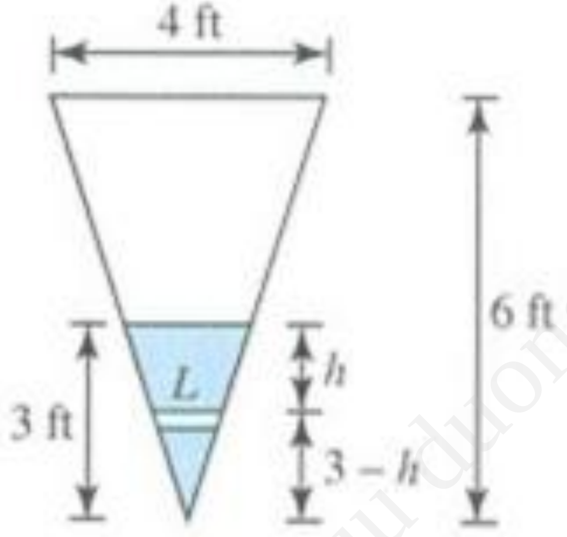
6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng



b. Mặt bên của máng

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng



c. Dùng các tam giác đồng dạng để tìm

$$\frac{L}{4} = \frac{3-h}{6}$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

Giải.

Trước hết, ta dựng một hệ trục tọa độ mà trục hoành nằm ở mặt chất lỏng và trục tung dương (trục h) hướng xuống. Sau đó ta tìm biểu thức cho chiều dài và chiều sâu của một dải mỏng ngang theo các biến. Giải sử là dải có độ dày là Δh và chiều dài L. Dùng tam giác đồng dạng ta có

$$\frac{L}{4} = \frac{3-h}{6} \qquad nên \qquad L = \frac{2}{3}(3-h)$$

Ta thấy rằng dải xấp xỉ có diện tích là $\Delta A = \frac{2}{3}(3-h)\Delta h$. Cuối cùng, ta nhân tích này với trọng lượng riêng của chất lỏng tại một độ sâu cho trước ρh và lấy tích phân trên khoảng độ sâu của đĩa đứng.

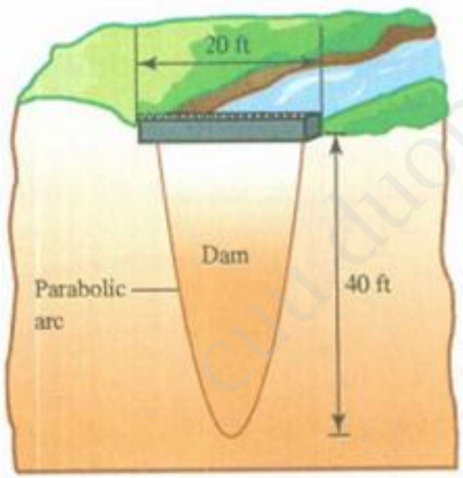
$$F = \int_0^3 \frac{2}{3}\delta h(3-h)\ dh = 187.2\ lb$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

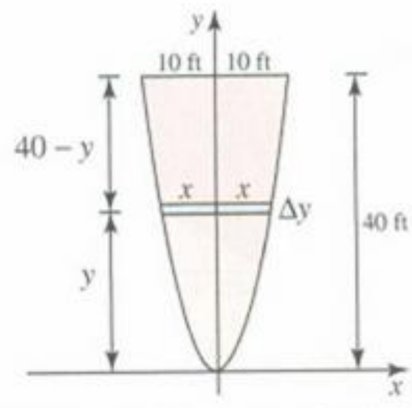
6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

Ví dụ 5 (Mô hình lực tác động lên một mặt đê)

Một bồn chứa nước đến đỉnh của một đập. Nếu đập có hình dạng của một parabol cao 40 ft và rộng 20 ft ở đỉnh thì tổng lực chất lỏng tác dụng lên mặt của đê là bao nhiêu?



a. mặt cắt ngang của đập



b. một dải ngang điển hình ở 40 - y ft dưới mặt nước

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.2 Mô hình hóa áp suất và lực chất lỏng

Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ. Parabol có thể biểu diễn bởi phương trình y = cx². Vì khi y = 40 khi x = 10, suy ra:

$$40 = c(10)^2 \Rightarrow c = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{5}x^2$$

Dải đặc trưng ngang đặt ở độ vị trí y trên trục x, tức là độ sâu 40 -x dưới mặt nước. Dải rộng y và dài L = 2x. Viết L như là hàm của y:

$$y = \frac{2}{5}x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}y} \Rightarrow L(y) = 2x = \sqrt{10y} \Rightarrow \Delta A = \sqrt{10y}.\Delta y$$

và do đó tổng lực tác động lên mặt đê là:

Depth below water : $h = 40 - y$

$$F = \int_0^{40} \delta \; h \; \underbrace{L(y)\,dy}_{\text{Area of strip}}$$

Weight density of water = 62.4

$$= \int_0^{40} 62.4(40-y)\sqrt{10y}\,dy$$

$$= 62.4\sqrt{10}\int_0^{40}(40y^{1/2} - y^{3/2})\,dy$$

$$= 62.4\sqrt{10}\left[\frac{80}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^{40}$$

$$= 62.4\sqrt{10}\,y^{3/2}\left(\frac{80}{3} - \frac{2}{5}y\right)\Bigg|_0^{40}$$

$$= 532{,}480 \text{ lb}$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.3 Mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng

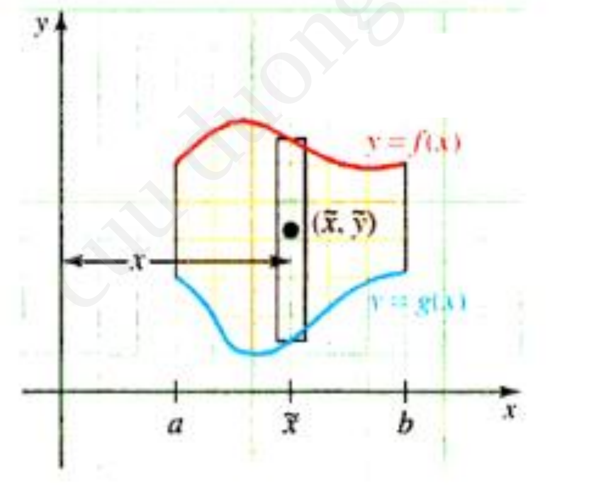
Trong cơ học, đôi khi ta cần xác định điểm cân bằng của đĩa có hình dạng phức tạp. Mô men lực đo xu hướng quay của một vật và phụ thuộc vào lực và điểm tác động của lực vào vật đó. Từ thời Archimedes, người ta đã biết rằng điểm cân bằng của một vật xảy ra tại nơi mà các moment triệt tiêu nhau.

Khối lượng của một vật là một độ đo quán tính của vật đó, nghĩa là, xu hướng của vật duy trì trạng thái nghỉ hay chuyển động đều. Một đĩa mỏng có vật chất phân bố đều, sao cho khối lượng riêng ρ của nó (khối lượng trên một đơn vị diện tích) là hằng số được gọi là phân bố đều. Điểm cân bằng của một đĩa phân bố đều như vậy được gọi là trọng tâm của nó. Ta sẽ thấy trọng tâm có thể được tính bằng tích phân thế nào?

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.3 Mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng

Cho f và g là các hàm liên tục và thỏa mãn $f(x) \geq g(x)$ trên đoạn $[a, b]$, và xét một đĩa mỏng phân bố đều có khối lượng riêng là hằng số ρ bao phủ một miền R nằm giữa đồ thị của $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Khi đó



6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.3 Mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng

Gọi M_x và M_y lần lượt là moment của vật theo trục x và y

Chúng ta có các kết quả sau:

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

và

$${}_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.3 Mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng

Khối lượng của R là: $= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

Trọng tâm của R là điểm $(\bar{x}, \bar{y})$ Thỏa mãn:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

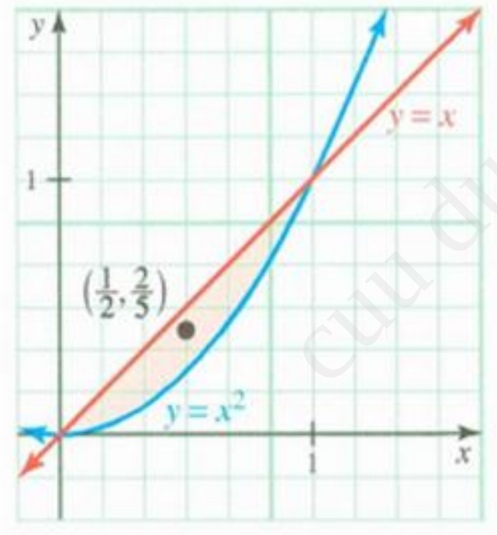
$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.3 Mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng

Ví dụ 6 (Trọng tâm của một đĩa mỏng)

Một đĩa phân bố đều R có khối lượng riêng $\rho = 1$ và được tạo bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$. Tìm khối lượng và trọng tâm R.



$$m = A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15}$$

Đáp số: $m = \frac{1}{6}$; $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$.

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.3 Mô hình hóa trọng tâm của một miền phẳng

Bài tập Một đĩa phân bố đều R có khối lượng riêng ρ = 1 và được tạo bởi những parabol $ax = y^2$ và $ay = x^2$ (a>0). Tìm khối lượng và trọng tâm của R

Giải. R đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất, vì vậy trọng tâm nằm trên đường phân giác này.

$$m = \rho\int_0^a\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{a^2}{3}$$

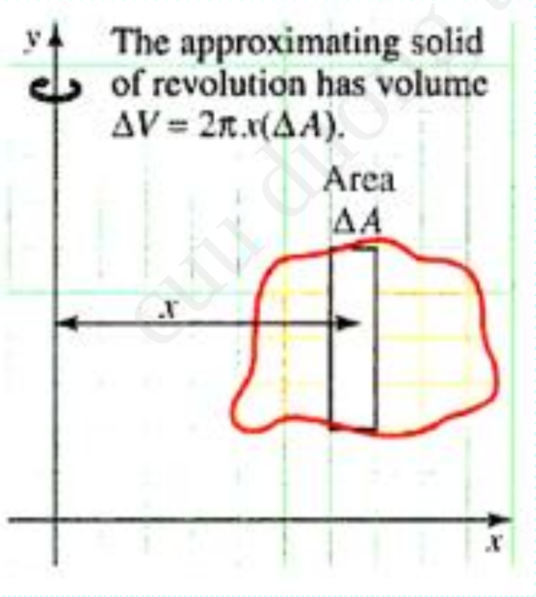
$$M_y = \int_0^a x.\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{3a^3}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{3a^3}{20} : \frac{a^2}{3} = \frac{9a}{20} = \bar{y}$$

6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.4 Định lý thể tích Pappus

Định lý. Vật rắn tạo ra bằng cách xoay một miền R quanh một đường thẳng nằm ngoài biên của nó (nhưng trong cùng mặt phẳng) có thể tích V = As, với A là diện tích của R và s là quãng đường đi của trọng tâm của R

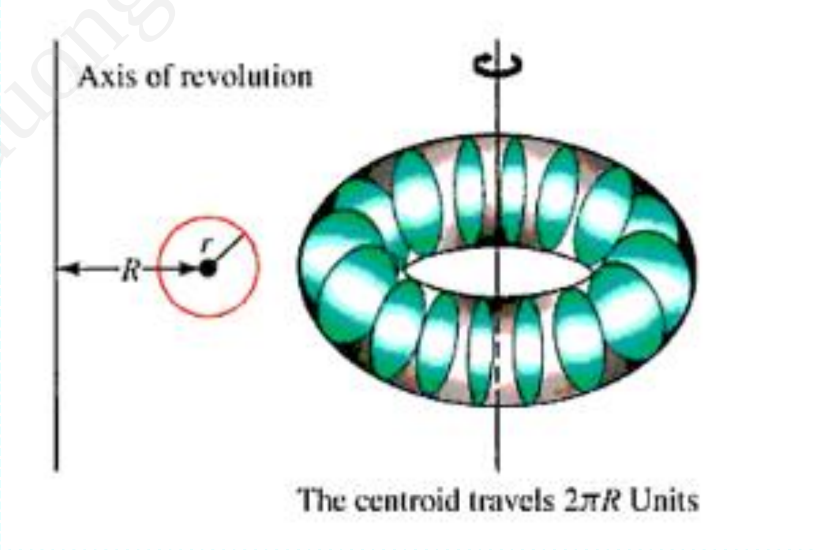


6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.4 Định lý thể tích Pappus

Ví dụ 7. (Thể tích của vòng xuyến)

Khi một hình tròn bán kính r được quay quanh một đường thẳng trên mặt mặt phẳng chứa đường tròn đó đặt cách tâm của nó R đơn vị (R > r) thì vật rắn tạo ra được gọi là một vòng xuyến. Hãy chứng tỏ rằng vòng xuyên này có thể tích $V = 2\pi^2 r^2 R$



6.5 Một số ứng dụng vật lý: công, áp suất chất lỏng và trọng tâm

6.5.4 Định lý thể tích Pappus

Giải. Hình tròn có diện tích A = πr^2 và tâm của nó (cũng là trọng tâm) di chuyển $2\pi R$.Vậy:

$$V = (2\pi R)A = 2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$

Thật tình cờ, thể tích đã tìm được trong ví dụ 7 sử dụng định lý Pappus đã được thấy khi giải bài toán 56 của mục 6.2 bằng cách sử dụng vòng đệm